توربوماشین ها
فصل دوم: آنالیز ابعادی و تشابه در توربوماشین ها

میلاد نادری
t.me/Hydrodynamic
www.lecturenote.blog.ir
دانشکده مهندسی مکانیک و هوافضا

۱۳۹۹

مقدمه

برای طراحی هر سیستمی به اطلاعاتی درباره رفتار و اساس کارکرد آن سیستم نیازمندیم . داشتن این اطلاعات در طراحی مقدماتی ماشین ، انتخاب نوع ماشین برای ساخت به منظورهای خاص و همچنین استفادهٔ صحیح در بهره برداری و بالا بردن راندمان کاری ماشین مؤفقیت مارا تضمین می کند. بنابراین دانستن رفتار توربوماشین برای طراحی آن از دیدگاه مهندسی امری ضروری است. تحلیل ابعادی روشی است که به دلیل دقت زیاد، هزینه کم و سرعت زیاد در درستابی به از آن استفاده میکنیم.

در این روش متغیرهای مختلف مشخص توربو ماشین را با روش ریاضی و در نظر گرفتن فیزیک مسئله به هم ربط می دهند. از مجموعهٔ پارامترها و روابط کلی بدست آمده، رفتار کلی توربو ماشین ها قابل بررسی است

مزایای روش تحلیل ابعادی

۱. نقش عمده ای در بررسی مسائل توربو ماشین ها دارد.

۲. به سادگی نتایج بسیار مفید در طراحی، انتخاب وبررسی رفتار کلی توربو ماشین ها را در اختیار قرار می دهد.

۳. پارامترهای مهم را که ارتباط متغیرهای مختلف را تعیین می کنند، مشخص می کند.

۴. با دانستن رفتار یک توربوماشین خاص، رفتار توربوماشین های مشابهٔ آن به این روش قابل تعیین است.

۵. با استفاده از مشخصات داده شده می توان ، توربوماشین را با بالاترین بازده انتخاب کرد.

۶. می توان رابطه ای که بین متغیرهای فیزیکی (سرعت، فشار، ابعاد و خواص سیال) وجود دارد را پیدا کرده و به شکل عدد بدون بعد نمایش داد.

تئوری π باکینگهام

هدف این تئوری کاهش تعداد متغیرهای یک رابطه ریاضی (بین تعدادی متغیر فیزیکی) به رابطه ای با متغیرهای کمتر، که این متغیرها همان اعداد بدون بعد می باشند و با علامت π نشان داده می شوند.

روش پیدا کردن رابطه های وابسته و حذف آنها :

اگر n تعداد متغیرهای رابطه و k تعداد دیمانسیون مستقل موجود و m تعداد متغیرهای مستقل بدون بعد باشد رابطه زیر بین آنها برقرار است:

$$m = n - k$$

در این روش به جای n متغیر m متغیر داریم. یعنی k عدد کمتر. بنابراین به جای:

$$Q_1 = f(Q_2, Q_3, \dots Q_n)$$

با استفاده از تئوری π میتوان نوشت:

$$\pi_1 = q(\pi_2, \pi_3, \dots, \pi_m)$$

روش تحلیل ابعادی دربررسی مسائل

برای استفاده از این روش سه گام زیر بایستی برداشته شود:

مرحلهٔ۱) تعیین متغیرهای موثر مسأله (n) : این متغیرها پارامترهایی هستند که با تغییر آنها رفتار سیستم نیز تغییر می کند این مرحله مهمترین مرحلهٔ تحلیل ابعادی بوده زیرا با انتخاب اشتباه چه از لحاظ نوع پارامترهای موثر وچه از لحاظ تعداد پارامترها، مسأله ناصحیح خواهد شد و بررسی ها پیچیده می شود. انتخاب این متغیرها نیاز به تجربه و دیدگاه مهندسی دارد.

مرحلهٔ۲) تعیین پارامترهای بدون بعد مستقل (m) : برای این کار روند زیر را پی می گیریم :

الف) قرارداد کردن دیمانسیون یا کمیات مستقل (البته قراردادهایی در این مورد وجود دارد که قرارداد اصلی به این صورت است که دیمانسیون های جرم، طول، زمان، شدت جریان الکتریکی و درجه حرارت را به عنوان دیمانسیون مستقل درنظر می گیرند، قراردادهای دیگر اینکه گاهی دیمانسیون نیرو مستقل و دیمانسیون جرم وابسته باشد. دیگری دیمانسیون قدرت یا توان را مستقل و دیمانسیون زمان وابسته باشد. به این ترتیب با استفاده از قرارداد دیمانسیون تعداد دیمانسیون مستقل (k) تعیین می شود.

روش تحلیل ابعادی دربررسی مسائل

ب) باید به تعداد دیمانسیون های مستقل (k) با متغیر مستقل از بین n متغیر مؤثر مسأله طوری انتخاب کنیم که دیمانسیون آنها شامل کلیهٔ دیمانسیون های مستقل باشد.

ج) با تعیین (k) و (n) اعداد بدون بعد یا پارامترهای مستقل جدید (m) را تعیین می کنیم.

حاصلضرب توانهایی مشخص از k متغیر مستقل انتخاب شده و یک متغیر از بین m متغیر مؤثر باقی مانده را برابر واحد قرار می دهیم و با جمع کردن توانهای دیمانسیون های یکسان مستقل و حل آن توانهای نا مشخص، معلوم میشوند. بدین ترتیب عدد بدون بعد متغیر مؤثر انتخاب شده بدست می آید. با تکرار این عملیات برای سایر متغیرهای مؤثر دیگر عددهای بدون بعد متغیرهای مؤثر مسأله بدست می آیند.

مرحلهٔ۳) بین متغیرهای مؤثر مسأله اغلب رابطه ای اضافی خواهد بود که باید حذف شود. این رابطه به شکلی دیگر بین اعداد بدون بعد ظاهر می شود که عموماً از طریق تجربه و آزمایش حاصل می شود.

مثال: تحلیل ابعادی افت فشار جریان غیر قابل تراکم لزج در لولهٔ مستقیم

مرحله اول:

متغیرهای شناخته شدهٔ مؤثر در این پدیده :

۱) افت فشار ΔP ، ۲) سرعت متوسط V ، ۳) لزجت μ ، ۴) قطرداخلی لوله D ، ۵) طول لوله L ، ۶) دانسیته سیال ρ ، ۷) زبری لوله e

در نتیجه :

$$n = 7$$

مرحله دوم:

دیمانسیون های موجود در این متغیرها عبارتند از: جرم M ، طول L ، زمان T در نتیجه $K = ۳$

لذا $m = n - k =$ ۷-۳=۴ تعداد متغیرهای مستقل، خواهد بود حال از بین متغیرهای مؤثر، دانسیتهٔ سیال ρ، سرعت متوسط V، لزجت μ و سه متغیر طول را برگزیده و با استفاده از توانهای مجهول رابطهٔ آن را با ΔP بدست می آوریم.

$$[\Delta P] = [\rho]^a, [\mu]^b, [V]^c, [L]^d, [D]^f, [e]^g$$

مثال: تحلیل ابعادی افت فشار جریان غیر قابل تراکم لزج در لولهٔ مستقیم

ابعاد را جایگذاری می کنیم :

$$\left[\frac{M}{LT^2}\right] = \left[\frac{M}{L^3}\right]^a \left[\frac{M}{LT}\right]^b \left[\frac{L}{T}\right]^c [L]^d [L]^f [L]^g$$

توان هر بعد را بدست آورده تا مساوی صفر قرار دهیم:

$$\text{برای } M \Rightarrow 1 = a + b$$

$$\text{برای } L \Rightarrow -1 = -3a - b + c + d + f + g$$

$$\text{برای } T \Rightarrow -2 = -b - c$$

مثال: تحلیل ابعادی افت فشار جریان غیر قابل تراکم لزج در لولهٔ مستقیم

حال با فرض اینکه ΔP بر حسب متغیرهای دیگر بیان شود به شکل های زیر در می آید:

$$\Delta \mathrm{P} = f(\rho, \mu, V, L, D, e)$$

کمیاتی را که مایلیم در یک گروه بدون بعد حاضر شوند را با حذف توانهای مربوطهٔ آنها برحسب کمیات دیگر بیان می کنیم.

ρ , V , D را به عنوان کمیاتی تکراری انتخاب می کنیم.

معیار انتخاب غالباً به این صورت است که پارامتری از دینامیک سیال مثل سرعت V، پارامتری از خصوصیت سیال مثل دانسیتهρ، و پارامتری از بعد لوله مثل قطر D.

مثال: تحلیل ابعادی افت فشار جریان غیر قابل تراکم لزج در لولهٔ مستقیم

کمیاتی که به توان های برابر رسیده اند را در یک گروه آورده و حاصل را در مورد سایر جملات تعمیم می دهیم .

$$\frac{\Delta P}{\rho V^2} = k^1 \left[\frac{\mu}{\rho v d}\right]^{b1} \left[\frac{L}{D}\right]^{d1} \left[\frac{e}{D}\right]^{g1} + k^2 \left[\frac{\mu}{\rho v d}\right]^{b2} \left[\frac{L}{D}\right]^{d2} \left[\frac{e}{D}\right]^{g2} + \dots$$

با توجه به خصوصیت بسط سری فوق می توان معادلهٔ بالا را به شکل زیر نوشت:

$$\frac{\Delta P}{\rho V^2} = f\left[\left[\frac{\mu}{\rho v d}\right] \cdot \left[\frac{L}{D}\right] \cdot \left[\frac{e}{D}\right]\right]$$

که:

$\mathrm{E_{ul}} = \frac{\Delta P}{\rho V^2}$: عدد اولر

$Re = (\frac{\mu}{\rho v d})$ عکس عدد رینولدز

$\frac{L}{D}$: نسبت طول به قطر لوله

$\frac{e}{D}$: نسبت زبری به قطر لوله

تشابه

بیان تشابه:

رفتار فیزیکی دو سیستم در صورتی با هم یکسانند که پارامترهای بدون بعد آنها بدون توجه به مقدار تک تک متغیرهای مؤثر آنها با هم برابر باشند .

یکی از کاربردهای مهم قانون تشابه، برای بررسی و شناخت رفتار یک سیستم در اندازه ها و شرایطی است که انجام آزمایش مشکل و بدون صرفه اقتصادی است. با رعایت قانون تشابه از سیستمی در آزمایشات استفاده می کنیم که از نمونه اصلی کوچکتر بوده و مدل نام دارد. در این صورت با بوجود آوردن شرایط مشابه سیستم اصلی در آزمایشگاه و رعایت قوانین دیگری در این رابطه به شناسایی رفتار سیستم بپردازیم .

برای ایجاد تشابه کامل سه شرط زیر باید رعایت شود :

۱) تشابه هندسی: بدین معنی که نسبت اندازه های متناظر هر سیستم باید با یکدیگر برابر باشند و زوایا تغییر نکند.
۲) تشابه سینماتیکی : یعنی نسبت سرعت های متناظر با هم برابر باشند .
۳) تشابه دینامیکی: بدین معنی که نسبت نیروهای متناظر وارد بر دو سیستم یکسان باشند.

تشابه دو پمپ

دوپمپ را از یک تیپ گوییم هنگامی که از نظر هندسی مشابه باشند. یعنی تمام ابعاد خطی یکی از پمپ ها ازضرب عددثابتی (مقیاس) درابعاد متناظر پمپ دیگر بدست می آید. مثلاً زوایای ورود و خروج سیال درهر دو پمپ مساوی هستند. کلیه پمپ هایی که تشابه هندسی دارند یک فامیل راتشکیل می دهند. دو پمپ از یک تیپ هنگامی تشابه کاری دارند که درتمام جفت نقاط متناظر مثلث های سرعتها مشابه باشند و یا بردارهای سرعت موازی بوده، دارای نسبت یکسان باشند مثلاً اگر دو نقطه در چرخ دو پمپ مشابه را درنظر بگیریم و اضلاع مثلث های سرعت مربوطه را به سرعت های محیطی آن ها تقسیم کنیم مثلث های حاصله برابر می شوند.

کاربرد تحلیل ابعادی در توربوماشین های تراکم ناپذیر

پارامترهایی مؤثر در توربوماشین با سیال غیر قابل تراکم

- دبی حجمی سیال : $Q(L^3\ T^{-1})$
- هد توربوماشین مشخصهٔ انرژی پتانسیل سیال یا (L) $H(L^2\ T^{-2})$
- قدرت (توان) توربوماشین : $P(M\ L^2\ T^{-3})$
- سرعت دورانی روتور : $N(T^{-1})$
- جرم مخصوص سیال : $\rho(M\ L^{-3})$
- ابعاد توربوماشین : $D\ (L)$
- لزجت (ویسکوزیته) سیال : $\mu\ (M\ L^{-1}\ T^{-1})$
- تراکم پذیری : $e = -\rho\frac{dp}{d\rho}$

کاربرد تحلیل ابعادی در توربوماشین های تراکم ناپذیر

با استفاده از روش تحلیل ابعادی و تئوری π باکینگهام ، ۵=۳-۸ گروه بی بعد خواهیم داشت:

- ضریب ظرفیت (یا دبی) : $\pi_1 = \frac{Q}{ND^3}$

- ضریب هد : $\pi_2 = \frac{H}{N^2D^2}$

- ضریب قدرت : $\pi_3 = \frac{P}{\rho N^3 D^5}$

- ضریب ویسکوزیته (عدد رینولدز) : $\pi_4 = \frac{\rho N D^2}{\mu}$

- ضریب زبری : $\pi_5 = \frac{e}{\rho N^2 D^2} = \frac{-\rho \frac{dp}{d\rho}}{\rho V^2} = -\frac{C^2}{V^2} = -\frac{1}{M^2}$

به دلیل ρ ثابت و لزجت کم دو عدد بدون بعد π_4 , π_5 معمولاً قابل چشم پوشی است.

بررسی تشابه دو پمپ با استفاده از اعداد بی بعد

ضرایب ارتفاع :

$$\frac{gH}{U_2^2} = cte \rightarrow \psi = \frac{gH}{U_2^2}$$

دو پمپ ازیک تیپ که تشابه کاری داشته باشند دارای ضریب ارتفاع یکسانی هستند.

ضریب دبی :

$$\frac{Q}{U_2 R_2^2} = cte \rightarrow \varphi = \frac{Q}{U_2 R_2^2}$$

دو پمپ ازیک تیپ که تشابه کاری داشته باشند دارای ضریب دبی یکسانی خواهند بود.

ضریب قدرت:

$$\frac{P'}{\rho U_2^3 R_2^2} = cte \rightarrow \pi = \frac{p'}{\rho U_2^3 R_2^2}$$

که در رابطه فوق قدرت داخلی ماشین است.

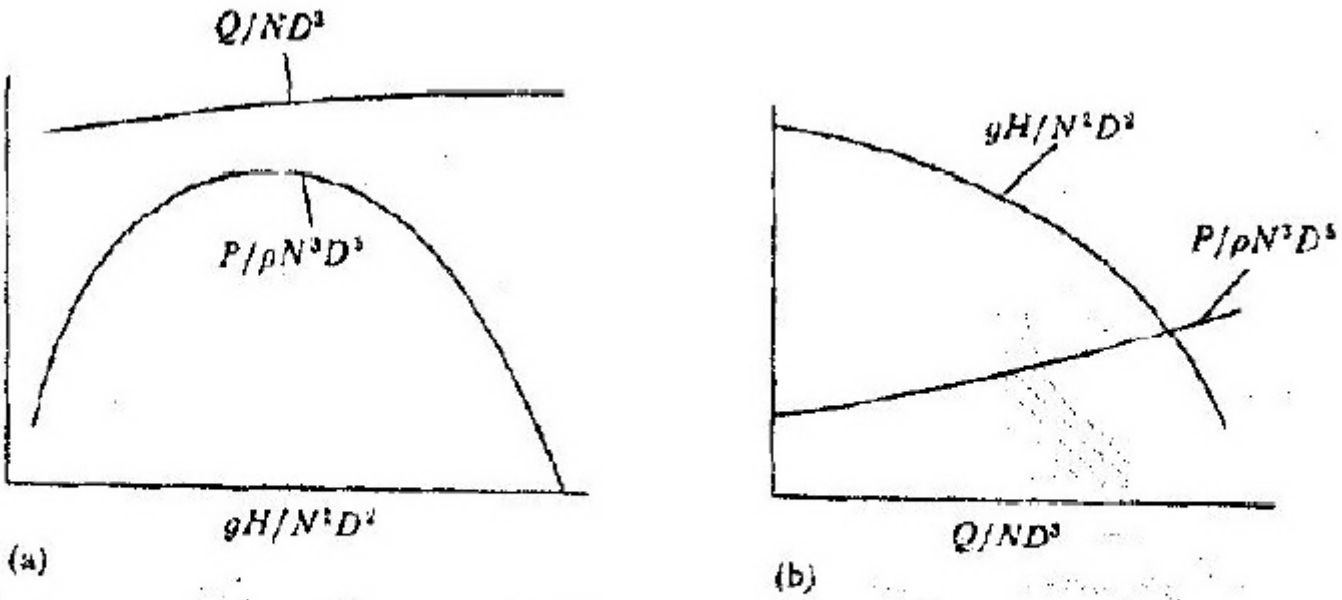
بازده داخلی:

$$\eta_i = \frac{\phi . \psi}{\pi} = cte$$

حدود اعتبار قوانین تشابه

در بدست آوردن ضرایب بی بعد دربخش قبلی فرض کردیم که ضرایب اصطکاک ثابت باقی می مانند. چنین فرضی کاملاً صحیح نبوده و با تقریب همراه است در حقیقت ضریب اصطکاک (f) تابعی از عدد رینولدز (Re) وزبری نسبی است. اما بطوریکه می‌دانیم درجریان آشفته دراعداد رینولدز بزرگ تأثیر این پارامتر (Re) برضریب اصطکاک ضعیف است لذا درجریان آرام (سیال بالزجت بالا) این تأثیر زیاد بوده وباید در محاسبات منظور شود.

کاربرد تحلیل ابعادی در توربوماشین های تراکم ناپذیر



مشخصه‌های عملکرد ماشین‌های هیدرولیکی که برحسب گروه بدون بعد رسم شده‌است

(a) توربین هیدرولیکی (b) پمپ هیدرولیکی

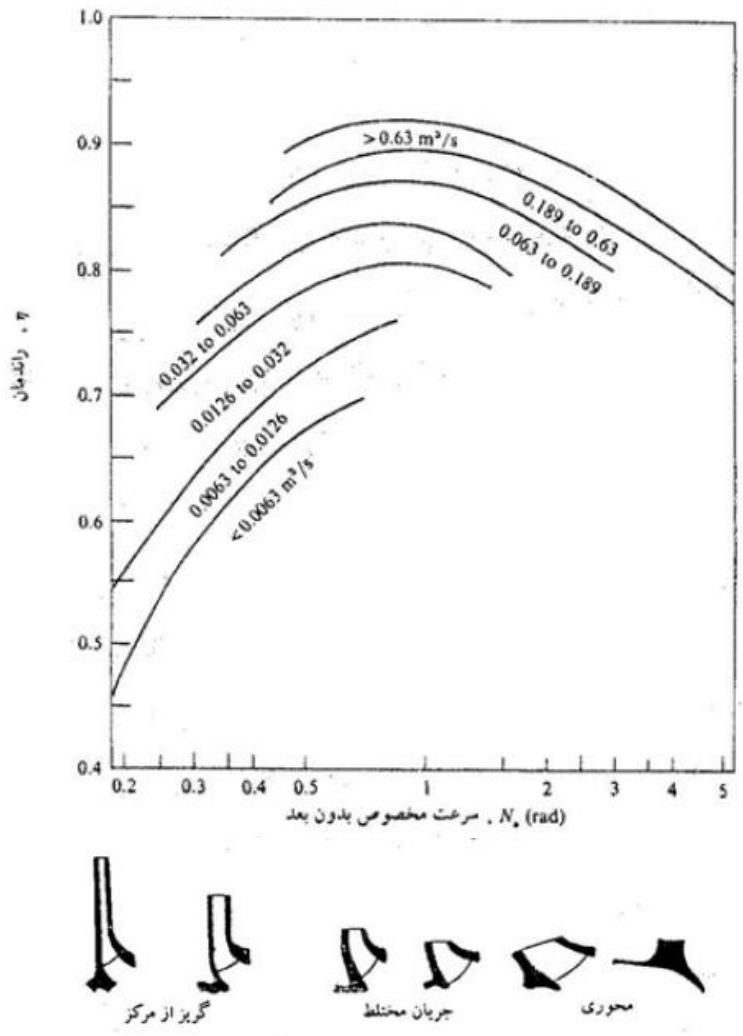
دو عدد بدون بعد مهم در توربوماشین ها

اینک با ضرایب و اعداد بدون بعد فوق و استفاده از تلفیق آنها دو عدد بدون بعد که پارامترهای مهمی در توربوماشین ها می باشند حاصل می شوند. ابتدا با حذف متغیر بعد (D) از دو پارامتر ضریب هد و دبی ، سرعت مخصوص $\Omega = \frac{NQ^{0.5}}{(gH)^{0.75}}$ بدست می آید.

و از حذف سرعت دورانی (N) از دو پارامتر بدون بعد هد و دبی ، قطر مخصوص (Δ) بدست می آید:

$$\Delta = D^2 \sqrt{\frac{H}{Q^2}}$$

نمودار پمپ با سرعت های مخصوص مختلف



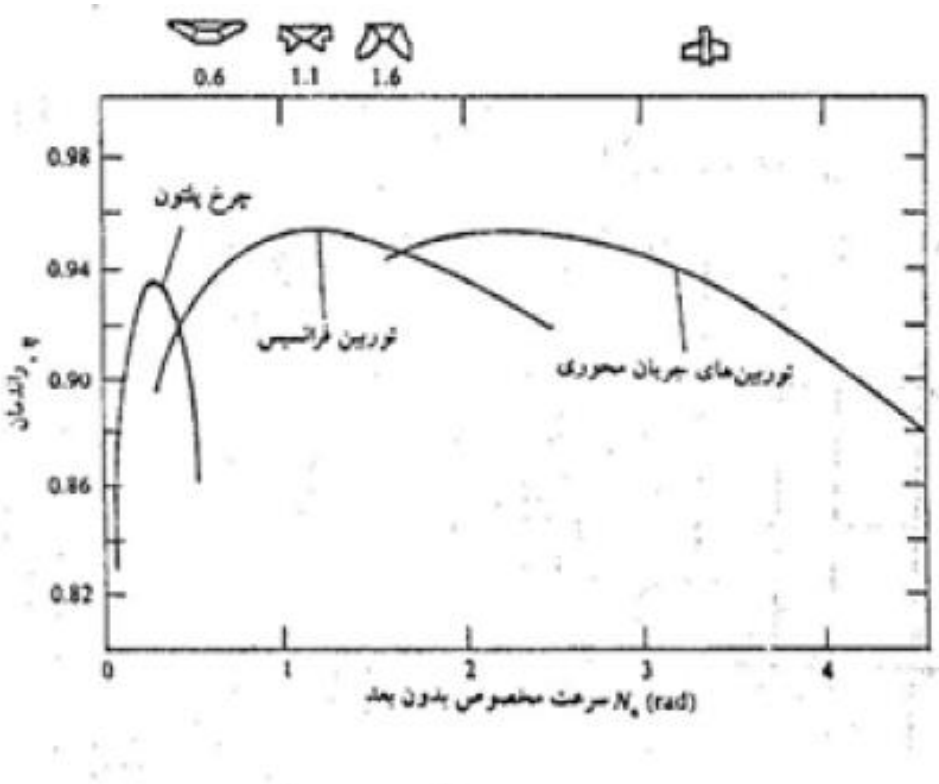
در محدوده خاصی از سرعت مخصوص توربو ماشین دارای راندمان ماکزیمم است.

پمپ گریز از مرکز در سرعت مخصوص کم،
پمپ مختلط در سرعت مخصوص متوسط و
پمپ محوری در سرعت مخصوص زیاد
دارای راندمان ماکزیمم می باشد.

سرعت مخصوص فقط درنقطه بهترین بازده پمپ تعریف می شود.
بنابراین دو پمپ با سرعت مخصوص برابر باید دارای بازده ماکزیمم برابر نیز باشد.

سرعت مخصوص و توربین های آبی

$$P \sim \rho Q H \Rightarrow \Omega = \frac{N\sqrt{\frac{P}{\rho}}}{H^{5/4}} \; ; \; N_s = \frac{N\sqrt{P}}{H^{5/4}} \quad \left[\frac{rpm\,.\,\sqrt{hp}}{ft^{5/4}}\right]$$



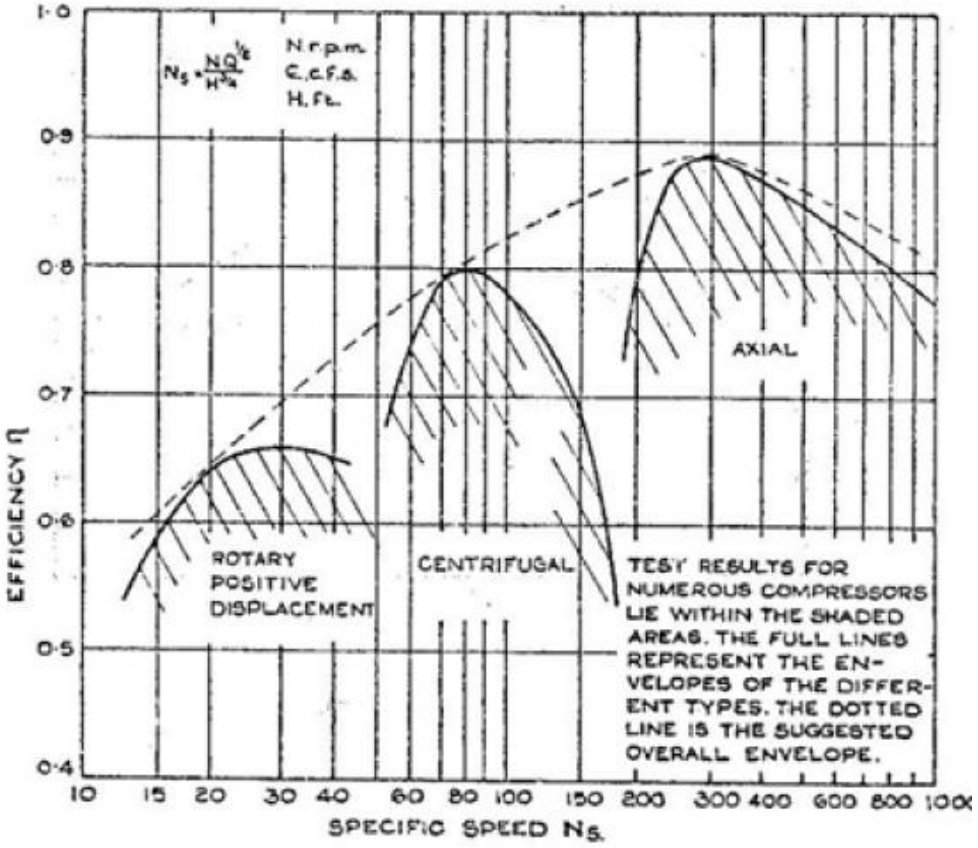
چرخ پلتن: سرعت مخصوص کم، هد زیاد و دبی کم.

توربین های فرانسیس: سرعت مخصوص متوسط هد متوسط و دبی متوسط

توربین کاپلان: سرعت مخصوص بالا، هد کم و دبی زیادتر دارای راندمان ماکزیممند.

سرعت مخصوص و کمپرسورها

بررسی راندمان بر حسب سرعت مخصوص کمپرسورها با تقریب خوبی مانند بحث پمپهاست



سرعت مخصوص در کمپرسورهای مختلف

کمپرسور گریز از مرکز: با سرعتهای مخصوص کم، هد زیاد و دبی کم

کمپرسورهای مختلط (که در منحنی نیامده): با سرعتهای مخصوص، دبی و هد متوسط

کمپرسورهای محوری: با سرعتهای بالا، هد کم و دبی زیاد دارای راندمان ماکزیمم می باشند.

راندمان کمپرسورهای رفت و برگشتی در سرعتهای مخصوص پایین ماکزیمم است.

مثال ۱

یک مدل از پمپ سانتریفیوژ با راندمان ۸۸ درصد در سرعت دورانی ۳۰۰۰ دور بر دقیقه تست شده است و ۱۲۰ لیتر بر ثانیه آب را با هد ۳۰ متر پمپاژ می‌کند. با استفاده از قوانین تشابه، سرعت دورانی، دبی حجمی و توان مورد نیاز پروتوتایپ مشابه هندسی با مقیاس ۸ را در هد ۵۰ متری بدست آورید.

از قوانین تشابه برای ضریب هد یکسان:

$$H_p/(\Omega_p^2 D_p^2) = H_m/(\Omega_m^2 D_m^2)$$

$$\Omega_p = \Omega_m \left(\frac{D_m}{D_p}\right)\left(\frac{H_p}{H_m}\right)^{\frac{1}{2}} = 3000 \times \frac{1}{8} \times \left(\frac{50}{30}\right)^{\frac{1}{2}} = 484.1 \text{ rpm}$$

کارکرد پمپ در ضریب دبی حجمی یکسان:

$$\frac{Q_p}{\Omega_p D_p^3} = \frac{Q_m}{\Omega_m D_m^3}$$

$$Q_p = Q_m \frac{\Omega_p}{\Omega_m}\left(\frac{D_p}{D_m}\right)^3 = 0.12 \times \frac{484.1}{3000} \times 8^3 = 9.914 \text{ m}^3/\text{s}$$

تعیین توان پروتوتایپ با فرض مشابه بودن بازده بین مدل و پروتوتایپ:

$$P_p = \frac{\rho g Q_p H_p}{\eta_p} = (10^3 \times 9.81 \times 9.914 \times 50)/0.88 = 5.526 \times 10^6 = 5.536 \text{ MW}$$

مثال ۲

برای یک پمپ خاص، دبی مورد نیاز 7000 gpm در هد ۲۲۵ فوت است. اگر سرعت دورانی پمپ 600 rpm باشد، سرعت مخصوص پمپ را بدست آورده و نوع پمپ را از روی آن تعیین کنید.

$$Q = 70{,}000\,\text{gpm} = \frac{70000}{448.83} = 156\,\text{cfs};$$

$$N = 600\,\text{rpm} = \frac{2\pi(600)}{60} = 62.8\,\text{rad/s}$$

$$N_s = \frac{N\sqrt{Q}}{(gh)^{0.75}} = \frac{(62.8)\sqrt{156}}{((32.2)(225))^{0.75}} = 1.0$$

سرعت مخصوص بدست آمده مربوط به یک پمپ سانتریفیوژ است.