① با استفاده از اطلاعات داده شده، عبارات زیر را بدست آورید.

$\vec{A} = 3xyz^2\,\hat{i} + 2xy^3\,\hat{j} - x^2yz\,\hat{k}$ ، $\vec{B} = x^2\,\hat{i} + yz\,\hat{j} - xy\,\hat{k}$ ، $\phi = 2x^2yz^3$

a) $(\vec{A}\cdot\vec{\nabla})\phi$ b) $\vec{A}\cdot\vec{\nabla}\phi$ c) $(\vec{B}\cdot\vec{\nabla})\vec{A}$

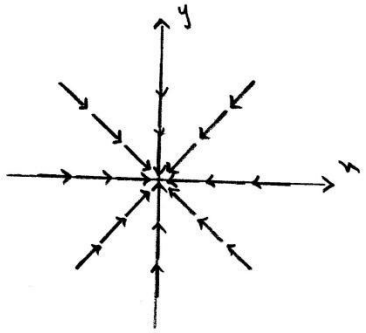
d) $\vec{\nabla}\cdot(\phi\vec{A})$ e) $\vec{\nabla}\cdot(\vec{\nabla}\phi)$ f) $\vec{\nabla}\times\vec{B}$

---

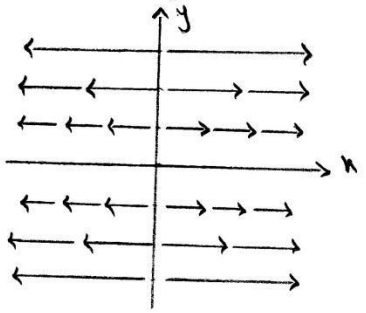
② الف) ضرایب ثابت a ، b ، c را طوری بیابید که مشتق جهتی $\phi = axy^2 + byz + cz^2x^2$ در نقطه‌ی $(1,2,-1)$ دارای بیشترین اندازه‌ی خود (۶۴) و در جهت موازی با محور z باشد.

ب) در هریک از میدان‌های برداری زیر، علامت دیورژانس میدان را تعیین کنید.

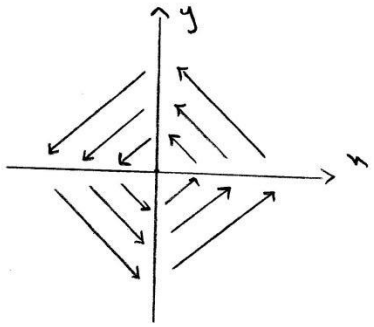
a)



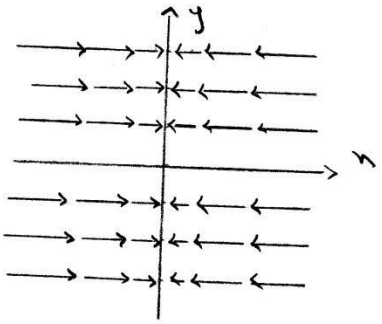
b)



c)



d)



---

③ ثابت کنید $\vec{\nabla}\cdot(\vec{\nabla}r^n) = n(n+1)r^{n-2}$; $r = (x^2+y^2+z^2)^{1/2}$

---

④ با استفاده از پتانسیل روبه رو:

$V(x,y,z) = \frac{V_0}{a}\,xyz\,e^{-(x+y+z)/a}$

الف) میدان الکتریکی $\vec{E}$ را بدست آورید.

ب) چگالی حجمی توزیع بار تولیدکننده‌ی میدان را بدست آورید.

[راهنمایی: $\vec{E} = -\vec{\nabla}V$ ، $\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$]

⑤ دستگاه مختصات (x,y,z) را به صورت پادساعتگرد حول بردار دلخواه و یکه $\hat{n}$ و تحت زاویه‌ی φ به دستگاه جدید (x',y',z') دوران می‌دهیم.

در دستگاه جدید بردار شعاعی به صورت زیر است:

$$\vec{r}' = \vec{r}\cos\varphi + \vec{r}\times\hat{n}\sin\varphi + \hat{n}(\hat{n}\cdot\vec{r})(1-\cos\varphi)$$

الف) درستی رابطه‌ی بالا را از دیدگاه هندسی نشان دهید.

ب) نشان دهید اگر $\hat{n}=\hat{e}_z$ باشد، ماتریس تبدیل دستگاه مختصات برابر ماتریس دوران حول محور z است.

ج) نشان دهید $r'^2 = r^2$.

---

⑥ تابع $f(x,y)$ را در نظر بگیرید. نشان دهید که $\vec{\nabla}f$ تحت دوران مانند یک بردار تبدیل می‌شود

[راهنمایی: $\frac{\partial f}{\partial \bar{y}} = \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \bar{y}} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial \bar{z}}$]