درس هشتم خط و صفحه در فضای سه‌بعدی $\mathbb{R}^3$

معادله‌ی خط در فضای سه‌بعدی $\mathbb{R}^3$: معادله‌ی خطی که از نقطه‌ی $p = (x_1, y_1, z_1)$ می‌گذرد و با بردار $\vec{v} = (a, b, c)$ موازی است برابر $\dfrac{x - x_1}{a} = \dfrac{y - y_1}{b} = \dfrac{z - z_1}{c}$ است.

مثال ۱۲۲. معادله‌ی خطی را بنویسید که از نقطه‌ی $p = (1, 2, 3)$ بگذرد و با بردار $\vec{v} = (4, 5, 6)$ موازی باشد سپس نقطه‌ای دیگر روی این خط بیابید.

حل: معادله‌ی خط برابر $\dfrac{x-1}{4} = \dfrac{y-2}{5} = \dfrac{z-3}{6}$ است. برای به دست آوردن نقطه‌ای دیگر روی خط x را برابر عددی غیر از یک می‌گذاریم زیرا در صورتی که x همان یک باشد دوباره نقطه‌ی $p = (1, 2, 3)$ به دست می‌آید. می‌نویسیم:

$$x = 0 \Rightarrow \frac{0-1}{4} = \frac{y-2}{5} \Rightarrow 5 \times (-1) = 4(y-2) \Rightarrow 4y - 8 = -5 \Rightarrow 4y = -5 + 8 \Rightarrow 4y = 3 \Rightarrow y = \frac{3}{4}$$

$$\Rightarrow \frac{0-1}{4} = \frac{z-3}{6} \Rightarrow 6 \times (-1) = 4(z-3) \Rightarrow 4z - 12 = -6 \Rightarrow 4z = -6 + 12 \Rightarrow 4z = 6 \Rightarrow z = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$$

یعنی مختصات نقطه‌ی دیگر $\left(0, \frac{3}{4}, \frac{3}{2}\right)$ است.

مثال ۱۲۳. معادله‌ی خطی را بنویسید که از دو نقطه‌ی $p = (1, 2, 3)$ و $q = (5, 9, 8)$ بگذرد.

حل: قرار می‌دهیم $\vec{v} = p - q = (1, 2, 3) - (5, 9, 8) = (-4, -7, -5)$ سپس به دل‌خواه با یکی از نقاط مثلاً p معادله‌ی خط را می‌نویسیم $\dfrac{x-1}{-4} = \dfrac{y-2}{-7} = \dfrac{z-3}{-5}$ اگر معادله‌ی خط را با نقطه‌ی q می‌نوشتیم $\dfrac{x-5}{-4} = \dfrac{y-9}{-7} = \dfrac{z-8}{-5}$ می‌شد که در ظاهر با معادله‌ی قبلی فرق می‌کند ولی اگر دانشجو نقاط روی این دو خط را به دست آورد متوجه می‌شود این نقاط با هم برابرند.

در معادله‌ی $\dfrac{x - x_1}{a} = \dfrac{y - y_1}{b} = \dfrac{z - z_1}{c}$ نباید مخرج‌ها برابر صفر شوند در غیر این صورت معادله تعریف نشده می‌شود. البته نمی‌تواند هر سه مخرج صفر باشند ولی می‌تواند یک مخرج یا دو مخرج صفر باشند در این صورت از دو حالت خاص زیر استفاده می‌کنیم.

حالت خاص اول:

معادله‌ی خطی که از نقطه‌ی $p = (x_1, y_1, z_1)$ می‌گذرد و با بردار $\vec{v} = (0, b, c)$ موازی است برابر $x = x_1, \dfrac{y - y_1}{b} = \dfrac{z - z_1}{c}$ است. یعنی روی تمام نقاط خط مقدار x تغییر نمی‌کند. همین طور برای $b = 0$ و $c = 0$ می‌توانیم بنویسیم.

مثال ۱۲۴. معادله‌ی خطی را بنویسید که از نقطه‌ی $p = (1, 2, 3)$ بگذرد و با بردار $\vec{v} = (4, 0, 6)$ موازی باشد سپس نقطه‌ای دیگر روی این خط بیابید.

sohrab1373.blog.ir

حل: معادله‌ی خط برابر $\frac{z-۳}{۶}, y=۲ = \frac{x-۱}{۴}$ است. برای به دست آوردن نقطه‌ای دیگر روی خط باید x یا z را برابر عددی دل‌خواه مثلاً $x=۲$ قرار دهیم (توجه داشته باشید که y در این خط همیشه ۲ است.)

$$\frac{x-۱}{۴}=\frac{z-۳}{۶} \Rightarrow \frac{۲-۱}{۴}=\frac{z-۳}{۶} \Rightarrow \frac{۱}{۴}=\frac{z-۳}{۶} \Rightarrow ۶=۴(z-۳) \Rightarrow ۴z-۱۲=۶ \Rightarrow ۴z=۶+۱۲$$
$$\Rightarrow \quad z=\frac{۱۸}{۴}=۴/۵$$

یعنی مختصات نقطه‌ی دیگر $(۱, ۲, ۴/۵)$ است.

حالت خاص دوم: معادله‌ی خطی که از نقطه‌ی $p=(x_۱, y_۱, z_۱)$ می‌گذرد و با بردار $\vec{v}=(۰, ۰, c)$ موازی است برابر $((x_۱, y_۱, z))$ است.

یعنی در تمام نقاط x و y ثابت هستند و z هر عدد دلخواه می‌تواند باشد.

مثال ۱۲۵. معادله‌ی خطی را بنویسید که از نقطه‌ی $p=(۱, ۲, ۳)$ بگذرد و با بردار $\vec{v}=(۴, ۰, ۰)$ موازی باشد سپس سه نقطه‌ی دیگر روی این خط بیابید.

حل: معادله‌ی خط برابر $(x, ۲, ۳)$ است و سه نقطه روی خط $(۴, ۲, ۳)$، $(۵, ۲, ۳)$ و $(۶, ۲, ۳)$ می‌باشند.

معادلات پارامتری خط: وقتی در معادله‌ی خط قرار دهیم $\frac{x-x_۱}{a}=\frac{y-y_۱}{b}=\frac{z-z_۱}{c}=t$ معادلات زیر که معادلات پارامتری خط نام دارند به دست می‌آیند:

$$\begin{cases} \frac{x-x_۱}{a}=t \Rightarrow x-x_۱=at \Rightarrow x=at+x_۱ \\ \frac{y-y_۱}{b}=t \Rightarrow y-y_۱=bt \Rightarrow y=bt+y_۱ \\ \frac{z-z_۱}{c}=t \Rightarrow z-z_۱=ct \Rightarrow z=ct+z_۱ \end{cases}$$

مثال ۱۲۶. معادله‌ی خطی را بنویسید که از نقطه‌ی $p=(۱, ۲, ۳)$ بگذرد و با خط $۴x-۶=۵y+۷=۸z-۱$ موازی باشد.

حل: قرار می‌دهیم $۴x-۶=۵y+۷=۸z-۱=t$ و معادلات پارامتری خط را می‌نویسیم:

$$\begin{cases} ۴x-۶=t \Rightarrow ۴x=t+۶ \Rightarrow x=\frac{۱}{۴}t+\frac{۶}{۴} \\ ۵y+۷=t \Rightarrow ۵y=t-۷ \Rightarrow y=\frac{۱}{۵}t-\frac{۷}{۵} \\ ۸z-۱=t \Rightarrow ۸z=t+۱ \Rightarrow z=\frac{۱}{۸}t+\frac{۱}{۸} \end{cases}$$

چون دو خط موازی هستند ضرایب t تغییر نمی‌کنند و معادله پارامتری خط به صورت زیر می‌شود.

$$\begin{cases} x=\frac{۱}{۴}t+۱ \\ y=\frac{۱}{۵}t+۲ \\ z=\frac{۱}{۸}t+۳ \end{cases}$$

مثال ۱۲۷. معادله‌ی خطی را بنویسید که از نقطه‌ی $p=(۹, ۸, ۷)$ بگذرد و بر خط $\frac{z-۸}{۵}=\frac{y-۹}{۷}=\frac{x-۵}{۴}$ عمود باشد.

حل: بردار خط $\frac{z-۸}{۵}=\frac{y-۹}{۷}=\frac{x-۵}{۴}$ برابر $\vec{v}=(۴, ۷, ۵)$ است و معادلات پارامتری آن به صورت زیر است.

$$\begin{cases} x=۴t+۵ \\ y=۷t+۹ \\ z=۵t+۸ \end{cases}$$

بردار خط عمود را برابر $\vec{w}$ می‌گیریم. این دو خط در نقطه‌ی $q=(۴t+۵,۷t+۹,۵t+۸)$ همدیگر را قطع می‌کنند پس دو نقطه روی خط عمود $p=(۹,۸,۷)$ و $q=(۴t+۵,۷t+۹,۵t+۸)$ هستند در نتیجه $\vec{w}=q-p=(۴t-۴,۷t+۱,۵t+۱)$ بردارهای $\vec{v}$ و $\vec{w}$ بر هم عمودند و ضرب نقطه‌ای آن‌ها صفر می‌شود.

$$\vec{v}\cdot\vec{w}=۰\Rightarrow(۴,۷,۵)\cdot(۴t-۴,۷t+۱,۵t+۱)=۰\Rightarrow ۱۶t-۱۶+۴۹t+۷+۲۵t+۵=۰\Rightarrow t=\frac{۴}{۹۰}=\frac{۲}{۴۵}$$

$$\vec{w}=(۴t-۴,۷t+۱,۵t+۱)=\left(۴\times\frac{۲}{۴۵}-۴,۷\times\frac{۲}{۴۵}+۱,۵\times\frac{۲}{۴۵}+۱\right)=\left(-\frac{۱۷۲}{۴۵},\frac{۵۹}{۴۵},\frac{۱۱}{۹}\right)$$

معادلات پارامتری خط عمود را می‌نویسیم

$$\begin{cases} x=-\frac{۱۷۲}{۴۵}t+۹\\ y=\frac{۵۹}{۴۵}t+۸\\ z=\frac{۱۱}{۹}t+۷\end{cases}$$

نقطه‌ی برخورد دو خط $q=(۴t+۵,۷t+۹,۵t+۸)=\left(۴\times\frac{۲}{۴۵}+۵,۷\times\frac{۲}{۴۵}+۹,۵\times\frac{۲}{۴۵}+۸\right)=\left(\frac{۲۳۳}{۴۵},\frac{۴۱۹}{۴۵},\frac{۷۴}{۹}\right)$ می‌شود.

فاصله‌ی نقطه از خط:

برای به دست آوردن فاصله‌ی نقطه‌ی p از خط l که در راستای بردار $\vec{v}$ است نقطه‌ی دل‌خواه q را روی خط l به دست می‌آوریم فاصله‌ی نقطه از خط برابر $\frac{|\vec{v}\times\vec{pq}|}{|\vec{v}|}$ است.

مثال ۱۲۸. فاصله‌ی نقطه‌ی $p=(۱,۶,۲)$ را از خط $\frac{x-۵}{۹}=\frac{y-۹}{۷}=\frac{z-۸}{۳}$ بیابید.

حل: $\vec{v}=(۹,۷,۳)$ و $q=(۵,۹,۸)$ و $\vec{pq}=q-p=(۵,۹,۸)-(۱,۶,۲)=(۴,۳,۶)$

$$\vec{v}\times\vec{pq}=\begin{vmatrix} \mathrm{i} & \mathrm{j} & \mathrm{k}\\ ۹ & ۷ & ۳\\ ۴ & ۳ & ۶\end{vmatrix}=\mathrm{i}\begin{vmatrix} ۷ & ۳\\ ۳ & ۶\end{vmatrix}-\mathrm{j}\begin{vmatrix} ۹ & ۳\\ ۴ & ۶\end{vmatrix}+\mathrm{k}\begin{vmatrix} ۹ & ۷\\ ۴ & ۳\end{vmatrix}=(۴۲-۹,۱۲-۵۴,۲۷-۲۸)=(۳۳,-۴۲,-۱)$$

$$|\vec{v}|=\sqrt{۹^۲+۷^۲+۳^۲}=\sqrt{۱۳۹}\qquad |\vec{v}\times\vec{pq}|=\sqrt{۳۳^۲+۴۲^۲+۱^۲}=\sqrt{۲۸۵۴}$$

و جواب نهایی $\frac{\sqrt{۲۸۵۴}}{\sqrt{۱۳۹}}$ می‌شود. ماشین حساب آن را برابر ۴/۵۳۱۳ نشان می‌دهد.

وضعیت دو خط نسبت به یکدیگر:

دو خط در فضای سه بعدی $\mathbb{R}^۳$ نسبت به هم سه حالت دارند ۱) متقاطع ۲) موازی ۳) متنافر

تعریف ۱۲۹. دو خط را متقاطع گوییم هرگاه در یک نقطه مانند p همدیگر را قطع کنند. به عبارت دیگر نقطه‌ای مانند p روی هر دو خط باشد. دو خط متقاطع در یک صفحه قرار می‌گیرند.

تعریف ۱۳۰. دو خط را موازی گوییم هر گاه بردارهای آن‌ها با هم موازی باشند. به عبارت دیگر یکی از بردارها مضرب دیگری باشد. دو خط موازی در یک صفحه قرار می‌گیرند.

تعریف ۱۳۱. دو خط را متنافر گوییم هرگه با هم موازی نباشند و همدیگر را قطع نکنند و یا به طور معادل در یک صفحه قرار نگیرند.

مثال ۱۳۲. وضعیت دو خط $\frac{x-۵}{۲}=\frac{y-۹}{۴}=\frac{z-۸}{۶}$ و $\frac{x-۱}{۳}=\frac{y-۵}{۶}=\frac{z+۲}{۹}$ را نسبت به هم مشخص کنید.

sohrabi.blog.ir

حل: داریم $\vec{v}=(۲,۴,۶)$ و $\vec{w}=(۳,۶,۹)$ چون $\frac{۲}{۳}=\frac{۴}{۶}=\frac{۶}{۹}$ بنابراین $\vec{v}$ و $\vec{w}$ مضرب همدیگرند و دو خط موازیند.

مثال ۱۳۳. وضعیت دو خط $x-۵=y-۶=z-۷$ و $\frac{x-۷}{۲}=y-۵=\frac{z-۹}{۲}$ را نسبت به هم مشخص کنید.

حل: داریم $\vec{v}=(۱,۱,۱)$ و $\vec{w}=(۲,۱,۲)$ چون $\frac{۱}{۲}\neq\frac{۱}{۱}\neq\frac{۱}{۲}$ بنابراین $\vec{v}$ و $\vec{w}$ مضرب همدیگر نیستند و دو خط موازی نیستند باید دو حالت دیگر را در نظر بگیریم معادلات پارامتری این دو خط به صورت زیر است.

$$\begin{cases} x=t+۵ \\ y=t+۶ \\ z=t+۷ \end{cases} \qquad \begin{cases} x=۲t'+۷ \\ y=t'+۵ \\ z=۲t'+۹ \end{cases}$$

حالا دستگاه ۲ معادله ۲ مجهول $\begin{cases} t+۵=۲t'+۷ \\ t+۶=t'+۵ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t-۲t'=۲ \\ t-t'=-۱ \end{cases}$ را حل می‌کنیم که جواب آن $t=-۴$ و $t'=-۳$ است. که برای هر دو خط نقاط زیر به دست می‌آید.

$$(t+۵,t+۶,t+۷)=(-۴+۵,-۴+۶,-۴+۷)=(۱,۲,۳)$$

$$(۲t'+۷,t'+۵,۲t'+۹)=(۲\times(-۳)+۷,-۳+۵,۲\times(-۳)+۹)=(۱,۲,۳)$$

چون این دو نقطه برابر شدند پس این دو خط در نقطه‌ی $(۱,۲,۳)$ همدیگر را قطع می‌کنند و متقاطعند.

مثال ۱۳۴. وضعیت دو خط $x-۵=y-۶=z-۳$ و $\frac{x-۷}{۲}=y-۵=\frac{z-۹}{۲}$ را نسبت به هم مشخص کنید.

حل: داریم $\vec{v}=(۱,۱,۱)$ و $\vec{w}=(۲,۱,۲)$ چون $\frac{۱}{۲}\neq\frac{۱}{۱}\neq\frac{۱}{۲}$ بنابراین $\vec{v}$ و $\vec{w}$ مضرب همدیگر نیستند و دو خط موازی نیستند باید دو حالت دیگر را در نظر بگیریم معادلات پارامتری این دو خط به صورت زیر است.

$$\begin{cases} x=t+۵ \\ y=t+۶ \\ z=t+۳ \end{cases} \qquad \begin{cases} x=۲t'+۷ \\ y=t'+۵ \\ z=۲t'+۹ \end{cases}$$

حالا دستگاه ۲ معادله ۲ مجهول $\begin{cases} t+۵=۲t'+۷ \\ t+۶=t'+۵ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t-۲t'=۲ \\ t-t'=-۱ \end{cases}$ را حل می‌کنیم که جواب آن $t=-۴$ و $t'=-۳$ است. که برای هر دو خط نقاط زیر به دست می‌آید.

$$(t+۵,t+۶,t+۳)=(-۴+۵,-۴+۶,-۴+۳)=(۱,۲,-۱)$$

$$(۲t'+۷,t'+۵,۲t'+۹)=(۲\times(-۳)+۷,-۳+۵,۲\times(-۳)+۹)=(۱,۲,۳)$$

چون این دو نقطه برابر نشدند پس این دو خط متنافرند.

زاویه‌ی بین دو خط: برای محاسبه زاویه بین دو خط باید زاویه‌ی بین بردارهای آن‌ها را محاسبه کنیم.

مثال ۱۳۵. زاویه‌ی بین دو خط $x-۵=y-۶=z-۳$ و $\frac{x-۷}{۲}=y-۵=\frac{z-۹}{۲}$ را محاسبه کنید.

حل: داریم $\overrightarrow{v}=(۱,۱,۱)$ و $\overrightarrow{w}=(۲,۱,۲)$ زاویه‌ی بین دو بردار را برابر θ می‌گیریم و می‌نویسیم

$$\overrightarrow{v}\cdot\overrightarrow{w}=|\overrightarrow{v}|\times|\overrightarrow{w}|\times\cos\theta \Rightarrow (۱,۱,۱)\cdot(۱,۲,۱)=\sqrt{۱^۲+۱^۲+۱^۲}\times\sqrt{۱^۲+۲^۲+۱^۲}\times\cos\theta$$
$$\Rightarrow ۱+۲+۱=\sqrt{۳}\times\sqrt{۶}\times\cos\theta\Rightarrow ۴=\sqrt{۱۸}\cos\theta\Rightarrow\cos\theta=\frac{۴}{\sqrt{۱۸}}$$
$$\Rightarrow \theta=\arccos\frac{۴}{\sqrt{۱۸}}$$

ماشین‌حساب این عدد را ۱۹/۴۷۱۲ درجه نشان می‌دهد.

معادله‌ی صفحه در فضای سه‌بعدی $\mathbb{R}^۳$:

معادله‌ی صفحه‌ای که از نقطه‌ی $p=(x_۱,y_۱,z_۱)$ می‌گذرد و بر بردار $\overrightarrow{v}=(a,b,c)$ عمود است برابر $a(x-x_۱)+b(y-y_۱)+c(z-z_۱)=۰$ است. در این‌جا دقت فرمایید که بردار خط موازی با آن است اما بردار صفحه بر آن عمود است از این جهت خط و صفحه با هم فرق می‌کنند.

مثال ۱۳۶. معادله‌ی صفحه‌ای را بنویسید که از نقطه‌ی $p=(۱,۲,۳)$ بگذرد و بر بردار $\overrightarrow{v}=(۴,۵,۶)$ عمود باشد سپس نقطه‌ای دیگر روی این صفحه بیابید.

حل: معادله‌ی صفحه برابر $۴(x-۱)+۵(y-۲)+۶(z-۳)=۰\Rightarrow ۴x+۵y+۶z=۴\times۱+۵\times۲+۶\times۳\Rightarrow ۴x+۵y+۶z=۳۲$ است. برای به دست آوردن نقطه‌ای دیگر روی صفحه x و y را دو عدد دل‌خواه مثلاً صفر می‌گذاریم و z را حساب می‌کنیم.

$$x=۰,y=۰\Rightarrow ۴\times۰+۵\times۰+۶z=۳۲\Rightarrow ۶z=۳۲\Rightarrow z=\frac{۳۲}{۶}=\frac{۱۶}{۳}$$

یعنی مختصات نقطه‌ی دیگر $\left(۰,۰,\frac{۱۶}{۳}\right)$ است.

خط با دو نقطه مشخص می‌شود یعنی اگر دو نقطه از خط را داشته باشیم می‌توانیم معادله‌ی خط را بنویسیم اما برای نوشتن معادله‌ی صفحه باید سه نقطه‌ی آن را داشته باشیم.

مثال ۱۳۷. معادله‌ی صفحه‌ای را بنویسید که از سه نقطه‌ی $p=(۱,۲,۵)$، $q=(۳,۷,۶)$ و $r=(۹,۴,۸)$ بگذرد.

حل: بردارهای $\overrightarrow{w}=r-p$ و $\overrightarrow{u}=r-q$ در روی صفحه قرار دارند. با ضرب برداری $\overrightarrow{w}$ و $\overrightarrow{u}$ بردار عمود بر صفحه یعنی $\overrightarrow{v}=\overrightarrow{w}\times\overrightarrow{u}$ به دست می‌آید. $\overrightarrow{u}=r-q=(۹,۴,۸)-(۳,۷,۶)=(۶,-۳,۲)$ $\quad$ $\overrightarrow{w}=r-p=(۹,۴,۸)-(۱,۲,۵)=(۸,۲,۳)$

$$\overrightarrow{v}=\overrightarrow{w}\times\overrightarrow{u}=\begin{vmatrix}\mathrm{i}&\mathrm{j}&\mathrm{k}\\ ۸&۲&۳\\ ۶&-۳&۲\end{vmatrix}=\mathrm{i}\begin{vmatrix}۲&۳\\-۳&۲\end{vmatrix}-\mathrm{j}\begin{vmatrix}۸&۳\\۶&۲\end{vmatrix}+\mathrm{k}\begin{vmatrix}۸&۲\\۶&-۳\end{vmatrix}=(۴+۹,۱۸-۱۶,-۲۴-۱۲)$$
$$=(۱۳,۲,-۳۶)$$

حالا با هر کدام از نقاط p، q و r می‌توانیم معادله‌ی صفحه را بنویسیم بر خلاف خط هیچ فرقی از نظر شکل نمی‌کند.

$$۱۳(x-۱)+۲(y-۲)-۳۶(z-۵)=۰\Rightarrow ۱۳x+۲y-۳۶z=۱۳\times۱+۲\times۲-۳۶\times۵\Rightarrow ۱۳x+۲y-۳۶z=-۱۶۳$$

برای آزمایش جواب می‌توانیم هر سه نقطه را امتحان کنیم یعنی

sohrabi.r.blog.ir

$p=(۱,۲,۵)\Rightarrow ۱۳\times۱+۲\times۲-۳۶\times۵=-۱۶۳$	$q=(۳,۷,۶)\Rightarrow ۱۳\times۳+۲\times۷-۳۶\times۶=-۱۶۳$
$r=(۹,۴,۸)\Rightarrow ۱۳\times۹+۲\times۴-۳۶\times۸=-۱۶۳$	

مثال ۱۳۸. معادله‌ی صفحه‌ای را بنویسید که دو خط موازی $\frac{x-۵}{۲}=\frac{y-۹}{۴}=\frac{z-۸}{۶}$ و $\frac{x-۱}{۳}=\frac{y-۵}{۶}=\frac{z+۲}{۹}$ در آن قرار بگیرد.

حل: این دو خط با هم موازیند یکی از بردارهای دو خط مثلاً $\vec{w'}=(۲,۴,۶)$ را در نظر می‌گیریم. بهتر است چون همه مولفه‌های این بردار بر ۲ بخش‌پذیر است بردار را بر عدد ۲ تقسیم کنیم و داریم $\vec{w}=(۱,۲,۳)$ دو نقطه‌ی $q=(۵,۹,۸)$ و $r=(۱,۵,-۲)$ را روی دو خط در نظر می‌گیریم و قرار می‌دهیم $\vec{u'}=q-r=(۴,۴,۱۰)$ چون همه مولفه‌های این بردار نیز بر ۲ بخش‌پذیر است بردار را بر عدد ۲ تقسیم کنیم و داریم $\vec{u}=(۲,۲,۵)$ بردارهای $\vec{u}$ و $\vec{w}$ هر دو روی صفحه قرار دارند با ضرب برداری این دو بردار، بردار عمود بر صفحه را به دست می‌آوریم.

$$\vec{v}=\vec{w}\times\vec{u}=\begin{vmatrix} \mathrm{i} & \mathrm{j} & \mathrm{k} \\ ۱ & ۲ & ۳ \\ ۲ & ۲ & ۵ \end{vmatrix}=\mathrm{i}\begin{vmatrix} ۲ & ۳ \\ ۲ & ۵ \end{vmatrix}-\mathrm{j}\begin{vmatrix} ۱ & ۳ \\ ۲ & ۵ \end{vmatrix}+\mathrm{k}\begin{vmatrix} ۱ & ۲ \\ ۲ & ۲ \end{vmatrix}=(۱۰-۶,۶-۵,۲-۴)=(۴,۱,-۲)$$

در آخر با یکی از نقطه‌های q یا r معادله‌ی صفحه را می‌نویسیم. $۴(x-۵)+۱(y-۹)-۲(z-۸)=۰\Rightarrow ۴x+y-۲z=۱۳$

مثال ۱۳۹. معادله‌ی صفحه‌ای را بنویسید که دو خط متقاطع $x-۵=y-۶=z-۷$ و $\frac{x-۷}{۲}=y-۵=\frac{z-۹}{۲}$ در آن قرار بگیرد.

حل: بردارهای این دو خط $\vec{w}=(۱,۱,۱)$ و $\vec{u}=(۲,۱,۲)$ هستند این دو بردار در صفحه قرار دارند. بردار عمود بر صفحه یعنی $\vec{v}$ بر این دو بردار عمود است.

$$\vec{v}=\vec{w}\times\vec{u}=\begin{vmatrix} \mathrm{i} & \mathrm{j} & \mathrm{k} \\ ۱ & ۱ & ۱ \\ ۱ & ۲ & ۱ \end{vmatrix}=\mathrm{i}\begin{vmatrix} ۱ & ۱ \\ ۲ & ۱ \end{vmatrix}-\mathrm{j}\begin{vmatrix} ۱ & ۱ \\ ۱ & ۱ \end{vmatrix}+\mathrm{k}\begin{vmatrix} ۱ & ۱ \\ ۱ & ۲ \end{vmatrix}=(۱-۲,۱-۱,۲-۱)=(-۱,۰,۱)$$

نقطه‌ی $p=(۵,۶,۷)$ بر روی خط $x-۵=y-۶=z-۷$ و درنتیجه صفحه قرار دارد. با این نقطه و بردار $\vec{v}=(-۱,۰,۱)$ معادله‌ی صفحه را می‌نویسیم $-(x-۵)+۰(y-۶)+(z-۷)=۰\Rightarrow -x+z=۲$

مثال ۱۴۰. معادله‌ی صفحه‌ای را بنویسید که از نقطه‌ی $p=(۹,۸,۷)$ بگذرد و بر خط $\frac{x-۵}{۴}=\frac{y-۹}{۷}=\frac{z-۸}{۵}$ عمود باشد.

حل: وقتی خط بر صفحه عمود باشد بردار موازی خط، عمود بر صفحه است یعنی $\vec{v}=(۴,۷,۵)$ معادله‌ی صفحه را می‌نویسیم.

$$۴(x-۹)+۷(y-۸)+۵(z-۷)=۰\Rightarrow ۴x+۷y+۵z=۱۲۷$$

فاصله‌ی نقطه از صفحه: فاصله‌ی نقطه‌ی $q=(x_۱,y_۱,z_۱)$ تا صفحه‌ی $ax+by+cz=d$ از فرمول $\frac{|ax_۱+by_۱+cz_۱-d|}{\sqrt{a^۲+b^۲+c^۲}}$ به دست می‌آید.

مثال ۱۴۱. فاصله‌ی نقطه‌ی $q=(۸,۶,۲)$ را از صفحه‌ی $۳x+۴y+۵z=۹$ بیابید.

حل: $\frac{|۳\times۸+۴\times۶+۵\times۲-۹|}{\sqrt{۸^۲+۶^۲+۲^۲}}=\frac{۴۹}{\sqrt{۱۰۴}}$

sohrabi.blog.ir

وضعیت دو صفحه نسبت به یکدیگر: دو صفحه در فضای سه‌بعدی $\mathbb{R}^3$ یا موازیند یا متقاطع وقتی موازی هستند که بردارهای آن‌ها با هم موازی باشد و در غیر اینصورت متقاطعند. وقتی دو صفحه هم‌دیگر را قطع کنند به محل برخورد آن‌ها که یک خط می‌شود که به این خط فصل مشترک دو صفحه گویند.

مثال ۱۴۲. وضعیت دو صفحه‌ی $3x+6y+9z=5$ و $2x+4y+6z=1$ را نسبت به هم مشخص کنید. در صورت متقاطع بودن معادله‌ی فصل مشترک آن‌ها را بیابید.

حل: داریم $\vec{v}=(2,4,6)$ و $\vec{w}=(3,6,9)$ چون $\frac{2}{3}=\frac{4}{6}=\frac{6}{9}$ بنابراین $\vec{v}$ و $\vec{w}$ مضرب همدیگرند و دو صفحه موازیند.

مثال ۱۴۳. وضعیت دو صفحه‌ی $3x+7y+9z=5$ و $2x+4y+6z=1$ را نسبت به هم مشخص کنید. در صورت متقاطع بودن معادله‌ی فصل مشترک آن‌ها را بیابید.

حل: داریم $\vec{v}=(2,4,6)$ و $\vec{w}=(3,7,9)$ چون $\frac{2}{3}\neq\frac{4}{7}\neq\frac{6}{9}$ بنابراین $\vec{v}$ و $\vec{w}$ مضرب همدیگر نیستند و دو صفحه متقاطعند. برای به دست آوردن معادله‌ی خط فصل مشترک دو نقطه از این خط را به دست می‌آوریم و با کمک آن معادله‌ی خط را می‌نویسیم. یکبار قرار می‌دهیم $x=0$ و بار دیگر $x=1$ تا دو نقطه به دست آید.

$$x=0\Rightarrow\begin{cases}7y+9z=5\\4y+6z=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}y=\frac{7}{2}\\z=-\frac{13}{6}\end{cases}\qquad x=1\Rightarrow\begin{cases}7y+9z=2\\4y+6z=-1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}y=\frac{7}{2}\\z=-\frac{5}{2}\end{cases}$$

دو نقطه‌ی $q=\left(0,\frac{7}{2},-\frac{13}{6}\right)$ و $r=\left(1,\frac{7}{2},-\frac{5}{2}\right)$ به دست آمده است. بردار موازی با خط را با تفاضل دو نقطه به دست می‌آوریم: $\vec{v}=r-q=\left(1,\frac{7}{2},-\frac{5}{2}\right)-\left(0,\frac{7}{2},-\frac{13}{6}\right)=\left(1,0,-\frac{1}{3}\right)$ با استفاده از بردار و نقطه معادله‌ی خط به صورت زیر می‌شود.

$$x=-3\left(z+\frac{13}{6}\right)\quad,\quad y=\frac{7}{2}$$

وضعیت خط و صفحه نسبت به یکدیگر: خط و صفحه در فضای سه‌بعدی $\mathbb{R}^3$ یا موازیند یا متقاطع وقتی موازی هستند که بردارهای آن‌ها بر هم عمود باشند و در غیر اینصورت متقاطعند. وقتی خطی یک صفحه را قطع کند محل برخورد آن‌ها یک نقطه می‌شود.

مثال ۱۴۴. نشان دهید خط $\frac{z-8}{4}=\frac{y-9}{3}=\frac{x-9}{2}$ با صفحه‌ی $5x-6y+2z=1$ موازی است. فاصله‌ی این خط را از صفحه بیابید.

حل: بردار صفحه $\vec{v}=(5,-6,2)$ و بردار خط $\vec{w}=(2,3,4)$ است. ضرب نقطه‌ای این دو بردار $\vec{v}\cdot\vec{w}=5\times2+(-6)\times3+2\times4=0$ عدد صفر است پس این دو بردار بر هم عمودند و خط و صفحه موازی هستند. برای به دست آوردن فاصله‌ی خط از صفحه فاصله نقطه $(9,9,8)$ روی خط را تا صفحه محاسبه می‌کنیم که برابر $\frac{2}{\sqrt{7}}=\frac{6}{\sqrt{63}}=\frac{|5\times9+(-6)\times9+2\times8-1|}{\sqrt{5^2+(-6)^2+2^2}}$ است.

مثال ۱۴۵. نشان دهید خط $\frac{z-8}{5}=\frac{y-9}{3}=\frac{x-9}{2}$ با صفحه‌ی $5x-6y+2z=1$ متقاطع است. نقطه‌ی تقاطع خط و صفحه را بیابید.

حل: بردار صفحه $\vec{v}=(5,-6,2)$ و بردار خط $\vec{w}=(2,3,5)$ است. ضرب نقطه‌ای این دو بردار $\vec{v}\cdot\vec{w}=5\times2+(-6)\times3+2\times5=2$ عدد صفر نمی‌شود پس این دو بردار بر هم عمود نیستند و خط و صفحه متقاطع هستند. برای به دست آوردن نقطه‌ی تقاطع معادلات پارامتری خط را می‌نویسیم و در معادله‌ی صفحه جای‌گزین می‌کنیم.

$$\begin{cases} x = ۲t + ۹ & \Rightarrow ۵(۲t+۹) - ۶(۳t+۹) + ۲(۵t+۸) = ۱ \\ y = ۳t + ۹ & \Rightarrow ۱۰t - ۱۸t + ۱۰t = ۱ - ۴۵ + ۵۴ - ۱۶ \\ z = ۵t + ۸ & \Rightarrow ۲t = -۶ \Rightarrow t = -۳ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = ۲t + ۹ \Rightarrow x = ۲ \times (-۳) + ۹ = ۳ \\ y = ۳t + ۹ \Rightarrow y = ۳ \times (-۳) + ۹ = ۰ \\ z = ۵t + ۸ \Rightarrow z = ۵ \times (-۳) + ۸ = -۷ \end{cases}$$

نقطه‌ی تقاطع $(۳, ۰, -۷)$ شد.

زاویه‌ی بین دو صفحه: برای محاسبه زاویه بین دو صفحه باید زاویه‌ی بین بردارهای آن‌ها را محاسبه کنیم.

مثال ۱۴۶. زاویه‌ی بین دو صفحه‌ی $۲x + ۴y = ۹$ و $z - y = ۶$ را محاسبه کنید.

حل: داریم $\vec{v} = (۲, ۴, ۰)$ و $\vec{w} = (۰, -۱, ۱)$ زاویه‌ی بین دو بردار را برابر θ می‌گیریم و می‌نویسیم

$$\vec{v} \cdot \vec{w} = |\vec{v}| \times |\vec{w}| \times \cos\theta \quad \Rightarrow \quad (۲, ۴, ۰) \cdot (۰, -۱, ۱) = \sqrt{۲^۲ + ۴^۲ + ۰^۲} \times \sqrt{۰^۲ + (-۱)^۲ + ۱^۲} \times \cos\theta$$

$$\Rightarrow \quad -۴ = \sqrt{۲۰} \times \sqrt{۲} \times \cos\theta \Rightarrow -۴ = \sqrt{۴۰}\cos\theta \Rightarrow \cos\theta = \frac{-۴}{\sqrt{۴۰}}$$

$$\Rightarrow \quad \theta = \arccos\frac{-۴}{\sqrt{۴۰}}$$

ماشین‌حساب این عدد را ۱۲۹/۲۳۱۵ درجه نشان می‌دهد.

زاویه‌ی بین خط و صفحه: وقتی θ زاویه‌ی بین بردارهای خط و صفحه باشد زاویه‌ی بین خط و صفحه برابر $\frac{\pi}{۲} - \theta$ است.

مثال ۱۴۷. زاویه‌ی بین صفحه‌ی $۲x + ۴y = ۹$ و خط $z = y = z$ را محاسبه کنید.

حل: داریم $\vec{v} = (۲, ۴, ۰)$ و $\vec{w} = (۱, ۱, ۱)$ زاویه‌ی بین دو بردار را برابر θ می‌گیریم و می‌نویسیم

$$\vec{v} \cdot \vec{w} = |\vec{v}| \times |\vec{w}| \times \cos\theta \quad \Rightarrow \quad (۲, ۴, ۰) \cdot (۱, ۱, ۱) = \sqrt{۲^۲ + ۴^۲ + ۰^۲} \times \sqrt{۱^۲ + ۱^۲ + ۱^۲} \times \cos\theta$$

$$\Rightarrow \quad ۲ + ۴ + ۰ = \sqrt{۲۰} \times \sqrt{۳} \times \cos\theta \Rightarrow ۶ = \sqrt{۶۰}\cos\theta \Rightarrow \cos\theta = \frac{۶}{\sqrt{۶۰}}$$

$$\Rightarrow \quad \theta = \arccos\frac{۶}{\sqrt{۶۰}}$$

ماشین‌حساب این عدد را ۳۹/۲۳۱۵ درجه نشان می‌دهد. بنابراین زاویه‌ی بین خط و صفحه $۵۰/۷۶۸۵ = ۹۰ - ۳۹/۲۳۱۵$ درجه است.

تمرینات

۱. معادله‌ی خطی را بنویسید که از نقطه‌ی $p = (۵, ۶, -۱)$ بگذرد و با بردار $\vec{v} = (۲, -۵, ۶)$ موازی باشد سپس نقطه‌ای دیگر روی این خط بیابید.

۲. معادله‌ی خطی را بنویسید که از نقطه‌ی $p = (۵, ۶, -۱)$ بگذرد و با بردار $\vec{v} = (۲, ۰, ۶)$ موازی باشد سپس نقطه‌ای دیگر روی این خط بیابید.

۳. معادله‌ی خطی را بنویسید که از نقطه‌ی $p = (۱, ۶, -۱)$ بگذرد و با بردار $\vec{v} = (۲, ۰, ۰)$ موازی باشد سپس نقطه‌ای دیگر روی این خط بیابید.

۴. معادله‌ی خطی را بنویسید که از دو نقطه‌ی $p = (۵, ۶, -۱)$ و $r = (۱, ۲, ۶)$ بگذرد.

۵. معادله‌ی خطی را بنویسید که از نقطه‌ی $p = (۱, ۴, ۳)$ بگذرد و با خط $x - ۶ = y + ۷ = ۱ - z$ موازی باشد.

sohrabi3.blog.ir

۶. معادله‌ی خطی را بنویسید که از نقطه‌ی $p = (۱, ۴, ۳)$ بگذرد و بر خط $x - ۶ = y + ۷ = ۱ - z$ عمود باشد.

۷. فاصله‌ی نقطه‌ی $p = (۱, ۶, ۲)$ را از خط $y = z, x = ۵$ بیابید.

۸. وضعیت دو خط $x - ۴ = y - ۶ = z - ۷$ و $\frac{x - ۷}{۲} = y - ۵ = \frac{z - ۹}{۲}$ را نسبت به هم مشخص کنید.

۹. می‌دانیم دو خط $x + ۳ = y - ۱ = z + ۷$ و $x - ۱ = y - ۵ = ۲z + ۳$ متقاطعند نقطه‌ی تقاطع این دو خط را بیابید.

۱۰. معادله‌ی صفحه‌ای را بنویسید که از سه نقطه‌ی $p = (۱, -۲, ۵)$، $q = (۳, ۶, ۶)$ و $r = (۹, ۲, ۸)$ بگذرد.

۱۱. معادله‌ی صفحه‌ای را بنویسید که شامل دو خط موازی $۲x + ۳ = y - ۱ = ۳z$ و $۲x = y = ۳z$ باشد.

۱۲. معادله‌ی صفحه‌ای را بنویسید که شامل دو خط متقاطع $x + ۳ = y - ۱ = z + ۷$ و $x - ۱ = y - ۵ = ۲z + ۳$ باشد.

۱۳. فصل مشترک دو صفحه‌ی متقاطع $۲x + ۳y + ۴z = ۱$ و $x + ۲y - z = ۵$ را بیابید.

۱۴. محل برخورد خط $x - ۱ = y - ۵ = z + ۳$ و صفحه‌ی $۲x + y + z = ۱۶$ را بیابید.

۱۵. زاویه‌ی بین خط $x - ۱ = y - ۵ = z + ۳$ و صفحه‌ی $۲x + y + z = ۱۶$ را بیابید.

۱۶. فاصله‌ی نقطه‌ی $p = (۱, ۶, ۲)$ را از صفحه‌ی $x + ۵y - z = ۱۶$ بیابید.

sohrabi1373.blog.ir