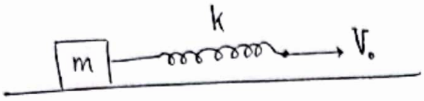
◆ با یاد او دلها آرام میگیرد ◆

نام و نام خانوادگی:

عنوان آزمون:

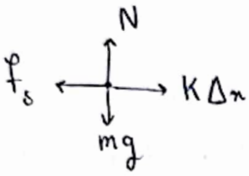
تاریخ:

شماره سوال: 1




$\mu_s > \mu_k$

الف) آستانهٔ لغزش در حالتی رخ می‌دهد که $f_s$ به حداکثر مقدار خود برسد.



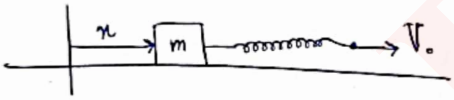

$f_s \leq \mu_s N$

$y: \; mg = N$

$x: \; K\Delta x_0 = f_{s_{max}}$

$$\Longrightarrow \quad \boxed{\Delta x_0 = \frac{\mu_s mg}{K}}$$

ب) بعد از لغزیدن اصطکاک به حالت جنبشی در می‌آید و معادلهٔ نیوتن به صورت زیر است:




$$K[V_0t - x + \Delta x_0] - \mu_k mg = m\ddot{x}$$

$$K\left[V_0t - x + \frac{\mu_s mg}{K}\right] - \mu_k mg = m\ddot{x}$$

$$\Longrightarrow \quad \boxed{\ddot{x} = \frac{K}{m}[V_0t - x] + (\mu_s - \mu_k)g}$$

$$\left.\begin{aligned} x &= A(\omega t - \sin\omega t) + B(1-\cos\omega t) \\ \dot{x} &= A\omega(1-\cos\omega t) + B\omega\sin\omega t \\ \ddot{x} &= A\omega^2\sin\omega t + B\omega^2\cos\omega t \end{aligned}\right\} \Longrightarrow \ddot{x} = \frac{K}{m}[V_0t - A(\omega t - \sin\omega t) - B(1-\cos\omega t)] + (\mu_s - \mu_k)g \quad \text{(ب}$$

* برای برقراری تساوی ضرایب Sin و Cos و چندجمله‌ای‌ها باید در دو طرف برابر باشد.

$$\omega^2 = \frac{K}{m} \Longrightarrow \omega = \sqrt{\frac{K}{m}}$$

$$\frac{K}{m}t[V_0 - A\omega] = 0 \Longrightarrow A = V_0\sqrt{\frac{m}{K}}$$

$$\frac{K}{m}B = g(\mu_s - \mu_k) \Longrightarrow B = \frac{(\mu_s - \mu_k)mg}{K}$$

نمره تخصیصی:

با یاد او دلـــــها آرام میگیرد

نام و نام خانوادگی:

عنوان آزمون:

تاریخ:

گروه المپیاد علامه حلی تهران

شماره سوال: 1

ت) $\Delta x_{فنر} = V_0 t - x + \Delta x_0$

$$\xrightarrow[\text{min و max}]{\text{برای یافتن}} \frac{d(\Delta x_{فنر})}{dt} = 0 \implies V_0 = \dot{x}$$

$$\underbrace{V_0}_{V_0} = A\omega(1-\cos\omega t) + B\omega \sin\omega t \implies B\omega \sin\omega t = V_0[1-\sin^2\omega t]^{\frac{1}{2}}$$

$$B^2\omega^2 \sin^2\omega t = V_0^2[1-\sin^2\omega t] \implies \sin^2\omega t = \frac{V_0^2}{B^2\omega^2+V_0^2}$$

$$\sin\omega t = \pm\frac{V_0}{\sqrt{B^2\omega^2+V_0^2}} \quad , \quad tg\,\omega t = \frac{V_0\sqrt{\frac{K}{m}}}{(\mu_s-\mu_k)g}$$

$$t_{x_{max}} = \sqrt{\frac{m}{K}}\, tg^{-1}\left[\frac{V_0\sqrt{\frac{K}{m}}}{(\mu_s-\mu_k)g}\right]$$

$$t_{x_{min}} = \sqrt{\frac{m}{K}}\left[tg^{-1}\left[\frac{V_0\sqrt{\frac{K}{m}}}{(\mu_s-\mu_k)g}\right]+\pi\right]$$

ث) $\dot{x}=0 \implies V_0\underbrace{(1-\cos\omega t)}_{2\sin^2\frac{\omega t}{2}} + B\omega\underbrace{\sin\omega t}_{2\sin\frac{\omega t}{2}\cos\frac{\omega t}{2}} = 0$

$$\implies V_0 \sin\frac{\omega t}{2} = -B\omega\cos\frac{\omega t}{2}$$

$$\implies tg\frac{\omega t}{2} = \frac{-B\omega}{V_0} = \frac{-\sqrt{\frac{m}{K}}\,g(\mu_s-\mu_k)}{V_0}$$

$$T(\dot{x}=0) = 2\sqrt{\frac{m}{K}}\left[\pi - tg^{-1}\left(\sqrt{\frac{m}{K}}\frac{g(\mu_s-\mu_k)}{V_0}\right)\right]$$

ج) $V_0 t = x \quad , \quad x = A(\omega t - \sin\omega t) + B(1-\cos\omega t)$

$$B\,2\sin^2\frac{\omega t}{2} = A\,2\sin\frac{\omega t}{2}\cos\frac{\omega t}{2} \to tg\frac{\omega t}{2} = \frac{A}{B}$$

با توجه به اینکه $T\omega$ قسمت (ث) بین $\frac{3\pi}{2}$ تا $2\pi$ قرار دارد، $t$ بزرگتر از $2\pi$ است

$\omega t = 2tg^{-1}(\frac{A}{B}) + 2\pi$

$$T = 2\sqrt{\frac{m}{K}}\left[tg^{-1}\left(\sqrt{\frac{K}{m}}\frac{V_0}{g(\mu_s-\mu_k)}\right) + tg^{-1}\left(\sqrt{\frac{m}{K}}\frac{g(\mu_s-\mu_k)}{V_0}\right)\right]$$

$$= \boxed{\sqrt{\frac{m}{K}}\,\pi}$$

نمره تفصیلی:

با یاد او دلها آرام میگیرد

نام و نام خانوادگی:

عنوان آزمون:

تاریخ:

شماره سوال: ۲

$y_1 = A\sin(\omega t+\phi) \xrightarrow{t=0} y_1 = -A = A\sin\phi \to \phi = -\pi/2$

زمان برخورد $= t_0$

حرکت راکت از $-A$ تا مبداء برابر ۱/۴ دوره تناوب است: $t_0 = \left(\frac{2\pi}{\omega}\right)\cdot\frac{1}{4} = \frac{\pi}{2\omega}$ (1)

$\frac{1}{2}g t_0^2 = h \to t_0 = \sqrt{\frac{2h}{g}}$ (2)

(1) , (2) $\longrightarrow \boxed{\omega = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{g}{2h}}}$ الف

سرعت نسبی برابر $\longrightarrow \sqrt{2gh} + v_{\text{راکت}} = v_{\text{جدید}} - v_{\text{راکت}}$ و $v_{\text{جدید}} = 2\sqrt{2gh}$

$\to 2v_{\text{راکت}} = \sqrt{2gh}$ و $v_{\text{راکت}} = \frac{dy_1}{dt} = A\omega\cos(\omega t+\phi) = A\omega\cos(\omega t - \pi/2)$

در لحظه برخورد $\to y_1 = 0 \to \sin(\omega t_0 - \pi/2) = 0 \to \cos(\omega t_0 - \pi/2) = 1$

$\to 2A\omega = \sqrt{2gh} \xrightarrow{\omega = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{g}{2h}}} \boxed{A = \frac{2h}{\pi}}$ ب

$\boxed{v_1 = 2\sqrt{2gh}}$ و $8gh = 2gh_{max} \to \boxed{h_{1,max} = 4h}$ : برخورد اول

مدت زمان برگشت توپ به $y=0$ : $t = \frac{\Delta v}{g} = \frac{2\sqrt{2gh}\times 2}{g} = 4\sqrt{\frac{2h}{g}}$

$\to \omega t = 4\sqrt{\frac{2h}{g}}\cdot\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{g}{2h}} = 2\pi$ یعنی $y_1$ در این مدت اختلاف فازی به اندازه $2\pi$ از زمان برخورد پیدا کرده است پس راکت در برخورد بعد شرایط مشابه دارد.

نمره تفصیلی:

با یاد او دلها آرام میگیرد

نام و نام خانوادگی:

عنوان آزمون:

تاریخ:

شماره سوال: ۲

برخورد دوم :

$$2\sqrt{2gh} + A\omega = v_{\text{جدید}} - A\omega$$

$$\to v_{\text{جدید}} = 2\left(\sqrt{2gh} + \sqrt{\frac{gh}{2}}\right) \to v_{\text{جدید}} = \boxed{v_2 = 3\sqrt{2gh}}$$

$$\to 9 \times 2gh = 2g h_{max} \to \boxed{h_{2,max} = 9h}$$

مدت زمان برگشت توپ به $y=0$ :

$$t = \frac{2 \times 3\sqrt{2gh}}{g} = 6\sqrt{\frac{2h}{g}}$$

$$\to \omega t = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{g}{2h}} \times 6\sqrt{\frac{2h}{g}} = 3\pi$$

یعنی در این مدت $y_1$ اختلاف فاز $3\pi$ گرفته است یعنی در برخورد بعدی راکت در $y_1=0$ قرار گرفته ولی سرعت آن رو به پایین است.

$$3\sqrt{2gh} - v_{\text{راکت}} = v_{\text{جدید}} + v_{\text{راکت}} \to v_{\text{جدید}} = \boxed{v_3 = 2\sqrt{2gh}}$$

برخورد سوم :

$$\boxed{h_{3,max} = 4h}$$

مدت زمان برگشت توپ به $y=0$ :

$$t = 4\sqrt{\frac{2h}{g}} \to \omega t = 2\pi$$

یعنی در برخورد چهارم راکت شرایط مشابه برخورد سوم را دارد.

برخورد چهارم :

$$\to \boxed{v_4 = \sqrt{2gh}} \, , \, \boxed{h_{4,max} = h}$$

مدت زمان برگشت توپ به $y=0$ :

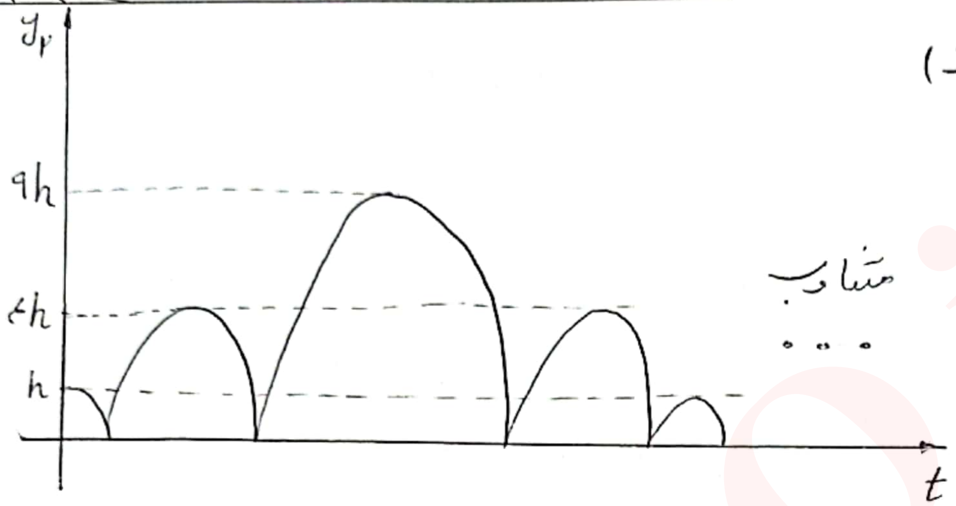
$$t = 2\sqrt{\frac{2h}{g}} \to \omega t = \pi$$

یعنی راکت در برخورد بعدی در همان نقطه ولی سرعتش رو به بالا است یعنی از این به بعد حرکت متناوب خواهد بود.

نمره تفصیلی:

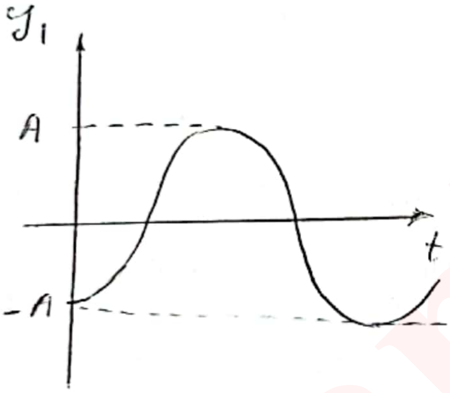
شماره سوال: ۲

ت)




متناوب

...



شماره سوال: ۲

زمان برخورد $= t_0 =$ نصف دوره تناوب $\to \frac{\pi}{\omega} = \sqrt{\frac{2h}{g}} \to \boxed{\omega = \pi\sqrt{\frac{g}{2h}}}$ ش

$\sqrt{2gh} + v_{\text{راکت}} = 2\sqrt{2gh} - v_{\text{راکت}} \to 2v_{\text{راکت}} = \sqrt{2gh}$

مثل بخش ب $\to A\omega = \frac{\sqrt{2gh}}{2} \to \boxed{A = \frac{h}{\pi}}$ ج

برخورد اول: $\boxed{v_1 = 2\sqrt{2gh}}$ و $\boxed{h_{1,max} = 4h}$

$t_1$: زمان تا رسیدن به $y=0$

$t_1 = \frac{2\times 2\sqrt{2gh}}{g} = 4\sqrt{\frac{2h}{g}} \to \omega t_1 = 4\pi$

اختلاف فاز مضربی از $2\pi$ است یعنی در برخورد بعدی راکت شرایط مشابه دارد.

برخورد دوم: $2\sqrt{2gh} + A\omega = v_{\text{جدید}} - A\omega \to \boxed{v_2 = 3\sqrt{2gh}}$

$\to \boxed{h_{2,max} = 9h}$

$t_2 = \frac{2v_2}{g} = 6\sqrt{\frac{2h}{g}} \to \omega t_2 = 6\pi \to$ مضربی از $2\pi$ $\to$ راکت در برخورد بعدی شرایط مشابه دارد

برخورد سوم: $3\sqrt{2gh} + A\omega = v_3 - A\omega \to \boxed{v_3 = 4\sqrt{2gh}}$

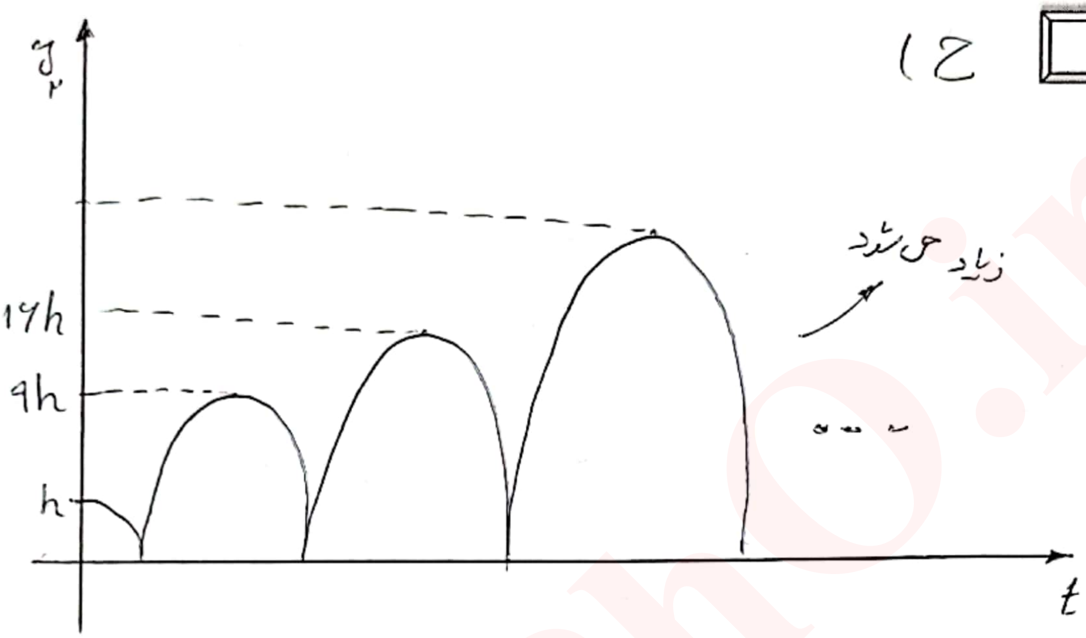
$\to \boxed{h_{3,max} = 16h}$

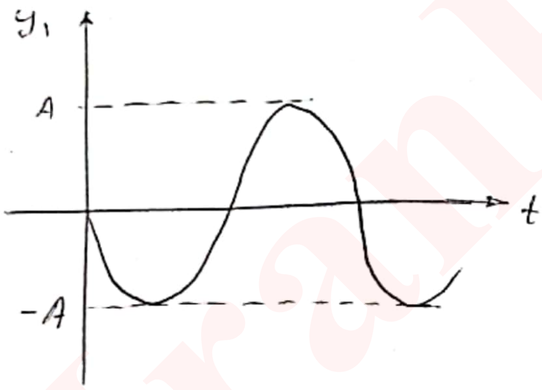
اگر حساب کنیم می‌بینیم هر بار پشت فاز ضریب دو وجود دارد پس بعد هر برخورد سرعت و ارتفاع ماکسیمم بیشتر می‌شود:

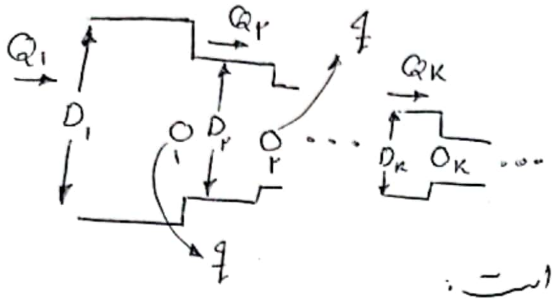
نمره تفصیلی:

شماره سوال: ۲

ج)






طبق گفته سوال ارتفاع آب خروجی از فواره‌ها یکسان است فلذا سرعت آب خروجی از همه آن‌ها یکی بوده و دبی حجمی خروجی آنها یکسان و برابر $q$ است.

کل دبی حجمی خروجی = کل دبی حجمی ورودی $\rightarrow Q_1 = 10q \quad (1)$

$$Q_1 = (K-1)q + Q_K \quad (2)$$

الف

$$(1),(2) \rightarrow Q_K = Q_1\left(1 - \frac{K-1}{10}\right) \rightarrow \boxed{Q_K = Q_1 \frac{11-K}{10}}$$

$$Q_K = V \cdot \pi \left(\frac{D_K}{2}\right)^2 \rightarrow \boxed{D_K = D_1\sqrt{\frac{11-K}{10}}}$$ ب

$$\frac{D_K}{D_1}(2 \leqslant K \leqslant 10) = \sqrt{0.9}, \sqrt{0.8}, \ldots, \sqrt{0.1}$$

پ

| $K$ | ۲ | ۳ | ۴ | ۵ | ۶ | ۷ | ۸ | ۹ | ۱۰ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\frac{D_K}{D_1}$ | ۰٫۹۴ | ۰٫۸۹ | ۰٫۸۳ | ۰٫۷۷ | ۰٫۷۱ | ۰٫۶۳ | ۰٫۵۴ | ۰٫۴۴ | ۰٫۳۱ |

$$\Delta P = \frac{CQl}{D^4} \rightarrow \frac{ClQ_K}{D_K^4} = \rho g \Delta h_K \rightarrow \Delta h_K = \frac{ClQ_K}{\rho g D_K^4} = \frac{ClQ_1 \frac{11-K}{10}}{\rho g D_1^4 \left(\frac{11-K}{10}\right)^2}$$

$$\rightarrow \boxed{\Delta h_K = \frac{ClQ_1}{\rho g D_1^4} \cdot \frac{10}{11-K}}$$ ت

نمره تخصیلی:

آ) چون میدان بسمت داخل است و مستطیل وارد ناحیه میدان می‌شود پس شار رو به داخل صفحه بیشتر می‌شود پس باید جریان القایی در جهت خلاف افزایش شار مغناطیسی باشد پس جریان پادساعتگرد است.

$\phi_B = AB = \ell x B \Rightarrow \dot{\phi}_B = \ell B v \Rightarrow \varepsilon = -\dot{\phi}_B \Rightarrow \varepsilon = -\ell B v \Rightarrow \boxed{I = \frac{\varepsilon}{R} = \frac{-\ell B v}{R}}$

منفی فقط بیان جهت جریان است.

ب) $F = I\ell B \Rightarrow$ نیروی وارد بر ۲ ضلع کناری هم دیگر را خنثی می‌کند و نیرو فقط به ضلع پایین وارد می‌شود $\Rightarrow F = \frac{-\ell B v}{R}\ell B \Rightarrow F = \frac{-\ell^2 B^2 v}{R} \Rightarrow F = -Kv$

$\Rightarrow \boxed{K = \frac{\ell^2 B^2}{R}}$

پ) اگر مقاومت کل سیم‌لوله $NR$ بشود:

$\Rightarrow I = \frac{-\ell N B v}{NR} = \frac{-\ell B v}{R} \Rightarrow \boxed{F = -\frac{N\ell^2 B^2 v}{R}} \Rightarrow \boxed{K = \frac{N\ell^2 B^2}{R}}$

اگر مقاومت کل همان $R$ باشد:

$I = -\frac{\ell N B v}{R} \Rightarrow F = -\frac{N^2\ell^2 B^2 v}{R} \Rightarrow \boxed{K = \frac{N^2 B^2 \ell^2}{R}}$

د) وقتی وارد ناحیه میدان نشده: $\Rightarrow$

$Mg - T = Ma$

$T - mg = ma \Rightarrow T = m(g+a) \Rightarrow Mg - mg = (M+m)a \Rightarrow$

$\boxed{a = \frac{(M-m)g}{M+m}}$

وقتی به مقدار $x$ وارد شده است:

$Mg - T - Kv = Ma$

$T - mg = ma \Rightarrow T = m(g+a) \Rightarrow Mg - mg - Kv = (M+m)a \Rightarrow \boxed{a = \frac{(M-m)g - Kv}{M+m}}$

وقتی کامل داخل است $\Rightarrow \phi_B = AB = 0 \Rightarrow A = cte \Rightarrow F_B = 0 \Rightarrow$ پس همان حالت اول می‌شود $\Rightarrow \boxed{a = \frac{(M-m)g}{M+m}}$

وقتی به مقدار $x$ خارج می‌شود: چون مستطیل دارد خارج می‌شود پس مساحت کمتری از شار رو به داخل دارد کم می‌شود پس جریان ساعتگرد می‌شود و دوباره نیروی $-Kv$ وارد می‌شود $\Rightarrow$

$Mg - T - Kv = Ma$

$T - mg = ma$

$\Rightarrow \boxed{a = \frac{(M-m)g - Kv}{M+m}}$

❖ با یاد او دلـــها آرام میگیرد ❖

نام و نام خانوادگی:

عنوان آزمون:

تاریخ:

شماره سوال: ۲

ه)

$a=0 \Rightarrow mg = T \Rightarrow Mg - T - Kv = 0 \Rightarrow Mg = mg + Kv \Rightarrow$

$(M-m)g = Kv \Rightarrow v = \frac{(M-m)g}{K} \Rightarrow v^2 - \cancel{v_0^2} = 2a\Delta x \Rightarrow v^2 = 2ah \Rightarrow$

$v = \sqrt{\frac{2(M-m)g}{M+m}h} \Rightarrow \frac{(M-m)^2 g^2}{K^2} = \frac{2(M-m)gh}{M+m} \Rightarrow \boxed{\frac{(M-m)(M+m)g}{2K^2} = h}$

$Mg - T = Kv \Rightarrow v = -\frac{1}{K}T + \frac{Mg}{K}$ $\rightsquigarrow$ شیب نمودار $\frac{1}{K}$ است.

عرض از مبدا $\frac{Mg}{K}$.

و)

شیب نمودار را طبق شکل بدست می آوریم و K بدست می آید و سپس طبق نمودار و معادله خط که داریم K و M را بدست می آوریم.

ز)

$R = \frac{\rho l}{A} \Rightarrow K = \frac{l^2B^2}{R} \Rightarrow K = \frac{l^2B^2A}{\rho l} = \frac{lB^2A}{\rho} \Rightarrow D = \frac{M}{4lA} \Rightarrow$

$\frac{K\rho}{B^2} = lA \Rightarrow \boxed{D = \frac{MB^2}{4K\rho}}$ $\rightsquigarrow$ B و $\rho$ داده سوال هستند و K و M را در بخش قبل بدست آوردیم پس مقدار عددی D بدست می آید.

نمره تخصصی:

با یاد او دلـــــها آرام میگیرد

نام و نام خانوادگی:

عنوان آزمون:

تاریخ:

شماره سوال: ۵ -

آ) $n_{i(t+\Delta t)} = n_{i(t)}(1-p-q) + p n_{i-1(t)} + q n_{i+1(t)}$

ب) $n_{i(t+\Delta t)} = n_{i(t)} \longrightarrow n_i(p+q) = p n_{i-1} + q n_{i+1} \Rightarrow n_i = x^i$

$(p+q) = p x^{-1} + q x \longrightarrow q x^2 - x(p+q) + p = 0$

$$\rightsquigarrow x = \frac{p+q \pm \sqrt{(p+q)^2 - 4pq}}{2q} = \frac{p+q \pm |p-q|}{2q}$$

$$\rightsquigarrow x_1 = 1 \quad \text{و} \quad x_2 = \frac{p}{q}$$

$$\Rightarrow n_i = A_1 + A_2 \left(\frac{p}{q}\right)^i$$

پ) $I = \frac{Q}{\Delta t}\left[n_i p - n_{i+1} q\right] = \frac{Q}{\Delta t}\left[p\left(A_1 + A_2\left(\frac{p}{q}\right)^i\right) - q\left(A_1 + A_2\left(\frac{p}{q}\right)^{i+1}\right)\right]$

$$= \frac{Q}{\Delta t}\left[A_1(p-q)\right]$$

ت) $\begin{cases} n_0 = A_1 + A_2 \\ n_K = A_1 + A_2\left(\frac{p}{q}\right)^K \end{cases} \longrightarrow n_0 - n_K = A_2\left(1 - \left(\frac{p}{q}\right)^K\right)$

$$\Rightarrow A_2 = \frac{n_0 - n_K}{1 - \left(\frac{p}{q}\right)^K} \quad \text{و} \quad A_1 = n_0 - \frac{n_0 - n_K}{1 - \left(\frac{p}{q}\right)^K} =$$

$$= \frac{n_K - n_0\left(\frac{p}{q}\right)^K}{1 - \left(\frac{p}{q}\right)^K}$$

نمره تفصیلی:

شماره سوال ۵

ادامه ت)

$$\frac{p}{q}=1-2\frac{bVQ}{Ka}$$

$$\Rightarrow A_1=\frac{n_K-n_0\left(1-\frac{2bVQ}{Ka}\right)^K}{1-\left(1-\frac{2bVQ}{Ka}\right)^K}=\frac{a}{2bVQ}\left(n_K-n_0\left(1-\frac{2bVQ}{a}\right)\right)$$

$$\Rightarrow A_2=\frac{n_0-n_K}{2bVQ}a$$

$$\rightsquigarrow I=0=A_1=0=n_K-n_0\left(1-\frac{2bV_0Q}{a}\right)\Rightarrow$$

$$n_K-n_0=-n_0\frac{2bV_0Q}{a}\Rightarrow \boxed{V_0=\frac{a}{2bQn_0}(n_0-n_K)}$$

ث)

$$V=V_0-R\frac{Q}{\Delta t}(p-q)A_1\rightarrow V=V_0-\frac{RQ}{\Delta t}\left(-\frac{2bVQ}{K}\right)A_1$$

$$\rightarrow V=V_0+2R\frac{bVQ^2}{K\Delta t}\frac{a}{2bVQ}\left(n_K-n_0\left(1-\frac{2bVQ}{a}\right)\right)$$

$$\rightarrow V=V_0+\frac{QaR}{K\Delta t}\left(n_K-n_0\left(1-\frac{2bVQ}{a}\right)\right)$$

$$\rightarrow V=V_0+\frac{QaR}{K\Delta t}\left(-n_0\frac{2bQ}{a}IR\right)$$

$$\rightarrow 1=\frac{QaR}{K\Delta t}2\frac{bQ}{a}n_0\rightarrow \boxed{R=\frac{K\Delta t}{2bQ^2n_0}}$$

نمره تفصیلی:

با یاد او دلها آرام میگیرد

نام و نام خانوادگی:

عنوان آزمون:

تاریخ:

شماره سوال: 6

آ) گاز درون سیلندر و پیستون را سیستم می گیریم. فرایندی دررو است، با توجه به اینکه بیرون خلاء است کار خالصی روی سیستم انجام نمی شود، در نتیجه انرژی سیستم پایسته است.

پایستگی انرژی: $C_V T + \frac{1}{2} m v^2 = C_V T_0 \Rightarrow \boxed{v = \sqrt{\frac{2C_V(T_0 - T)}{m}}}$

ب) فرایند بی دررو: $T V^{\gamma-1} = const \to T L^{\gamma-1} = const$

$$\frac{dT}{dt} L^{\gamma-1} + (\gamma-1) T L^{\gamma-2} \frac{dL}{dt} = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{dT}{dt} = -(\gamma-1)\frac{T}{L} v}$$

پ) $L = \left(\frac{T_0}{T}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}} L_0 \to \frac{dT}{dt} = -(\gamma-1)\frac{T}{L_0}\left(\frac{T}{T_0}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}} v$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{dT}{dt} = -(\gamma-1)\left(\frac{T^{\gamma}}{T_0}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}}\sqrt{\frac{2C_V(T_0-T)}{m L_0^2}}}$$

ت) $\frac{d}{dt}\left(\frac{T}{T_0}\right) = -(\gamma-1)\left(\frac{T}{T_0}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}\sqrt{\frac{2C_V T_0}{m L_0^2}}\sqrt{1-\frac{T}{T_0}}$

$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx}\frac{dx}{dt} = \frac{1}{t_0}\frac{dy}{dx}$ زنجیره‌ای که بلدید؟ (دیگه معنی نداره بلد نیستیم)

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = -(\gamma-1)\, y^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}\sqrt{1-y}}$$

نمره تفصیلی:

با یاد او دلـــــها آرام میگیرد

نام و نام خانوادگی:

عنوان آزمون:

تاریخ:

شماره سوال: 6

ث)

$$\frac{dx}{dy} = \left(\frac{-1}{y^2}\right)\left(\frac{a}{2}\sqrt{\frac{y}{1-y}} + \frac{3b}{2}\sqrt{\frac{1-y}{y}}\right)$$

$$= \frac{-1}{2y^2}\sqrt{\frac{y}{1-y}}\left(a + 3b\,\frac{1-y}{y}\right) = -\frac{3b + (a-3b)y}{2y^{5/2}\sqrt{1-y}}$$

$$r = \frac{5}{3} \xrightarrow[\text{قسمت قبل}]{\text{رابطه}} \frac{dy}{dx} = -\frac{2}{3}\,y^{5/2}\sqrt{1-y}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{3b + (a-3b)y} = \frac{1}{3} \Rightarrow \boxed{a = 3}\ ,\ \boxed{b = 1}$$

ج)

$$x = \sqrt{\frac{1-y}{y}}\left(a + b\,\frac{1-y}{y}\right) = \sqrt{1-y}\,\frac{b + (a-b)y}{y^{3/2}} = \sqrt{1-y}\,\frac{1+2y}{y^{3/2}}$$

$$\to x^2y^3 = (1-y)(1+4y+4y^2) = 1 + 3y - 4y^3$$

$$\to y^3 - \frac{3}{4+x^2}\,y - \frac{1}{4+x^2} = 0$$

*راهنمایی سوال برای این قسمت مشکل داشت.

راهنمایی: $x^3 + ax^2 + bx + c = 0 \qquad p = b - \frac{a^2}{3} \ ,\ q = \frac{2a^3}{27} - \frac{ab}{3} + c$

$\Delta = \frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}$ درحالت $\Delta > 0$ معادله تنها یک پاسخ حقیقی دارد.

$$x = \left(\frac{-q}{2} + \sqrt{\Delta}\right)^{1/3} + \left(\frac{-q}{2} - \sqrt{\Delta}\right)^{1/3} - \frac{a}{3}$$

طبق راهنمایی سوال: $p = \frac{-3}{4+x^2} \ ,\ q = \frac{-1}{4+x^2} \ ,\ \Delta = \frac{1}{4(4+x^2)^2} - \frac{1}{(4+x^2)^3}$

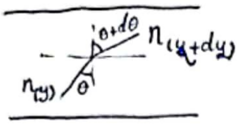
$$\to \Delta = \frac{x^2}{4(x^2+4)^3} \Rightarrow y(x) = \left(\frac{1}{2(4+x^2)} + \frac{x}{2(4+x^2)^{3/2}}\right)^{1/3} + \left(\frac{1}{2(4+x^2)} - \frac{x}{(4+x^2)^{3/2}}\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{y(x) = \frac{\left(\sqrt{x^2+4} + x\right)^{1/3} + \left(\sqrt{x^2+4} - x\right)^{1/3}}{2^{1/3}\sqrt{x^2+4}}}$$

نمره تخصیص:

شماره سوال: ۷ -

آ)




$$n_{(y)}\sin\theta = n_{(y+dy)}\sin(\theta+d\theta)=const$$

$$\to \frac{n(y)}{(1+y'^2)^{\frac{1}{2}}}=const. \to y=A\cos[\alpha(x-B)]$$

$$\to y'=-A\alpha\sin[\alpha(x-B)] \Rightarrow y=0 \rightsquigarrow y'^2 = A^2\alpha^2$$

$$\to \frac{n(y)}{(1+y'^2)^{\frac{1}{2}}}=\frac{n_0}{(1+\alpha^2A^2)^{\frac{1}{2}}} \rightsquigarrow n(y)=\frac{n_0}{(1+\alpha^2A^2)^{\frac{1}{2}}}(1+y'^2)^{\frac{1}{2}}=$$

$$=\frac{n_0}{(1+\alpha^2A^2)^{\frac{1}{2}}}\left(1+A^2\alpha^2\sin^2[\alpha(x-B)]\right)^{\frac{1}{2}}=\frac{n_0}{(1+\alpha^2A^2)^{\frac{1}{2}}}\left(1+A^2\alpha^2\left(1-\frac{y^2}{A^2}\right)\right)^{\frac{1}{2}}=$$

$$=n_0\left(\frac{1+\alpha^2A^2-\alpha^2y^2}{1+\alpha^2A^2}\right)^{\frac{1}{2}}$$

ب)

$$\Rightarrow n(y)=n_0\left(1-\frac{1}{2}\alpha^2y^2\right)$$

پ)

$$x=0\to y=y_0=A\cos\alpha B \quad \Big| \quad \sin\theta_0=n_{(x=0)}\sin\theta_{(x=0)}$$

$$\rightsquigarrow \theta_0=n_0\left(1-\frac{1}{2}\alpha^2A^2\cos^2\alpha B\right)\frac{+A\alpha\sin\alpha B}{(1+\alpha^2A^2\sin^2\alpha B)^{\frac{1}{2}}}$$

$$\to \theta_0=n_0A\alpha\sin\alpha B$$

$$\to \begin{cases}\theta_0=n_0A\alpha\sin\alpha B\\ y_0=A\cos\alpha B\end{cases} \to \frac{\theta_0}{y_0}=n_0\alpha\tan(\alpha B)\to B=\frac{1}{\alpha}\tan^{-1}\left(\frac{\theta_0}{\alpha n_0 y_0}\right)$$

$$\to A=\frac{y_0}{\cos\alpha B}=y_0\sqrt{1+\frac{\theta_0^2}{y_0^2n_0^2\alpha^2}}=\sqrt{y_0^2+\frac{\theta_0^2}{n_0^2\alpha^2}}=$$

$$=y_0\left(1+\frac{\theta_0^2}{2n_0^2\alpha^2y_0^2}\right)$$

نمره تفصیلی:

ج)

$$\sin\beta = n_0\left(1-\frac{1}{2}\alpha^2A^2\cos^2[\alpha(d-B)]\right)\frac{-A\alpha\sin[\alpha(d-B)]}{\left(1+A^2\alpha^2\sin^2[\alpha(d-B)]\right)^{\frac{3}{2}}}=$$

$$=-n_0A\alpha\sin[\alpha(d-B)]\left(1-\frac{1}{2}A^2\alpha^2\right)$$

$$\rightarrow A=y_{max}\longrightarrow \frac{A}{R}=|\tan\beta|=\frac{|\sin\beta|}{\sqrt{1-\sin^2\beta}}=$$

$$=\frac{+n_0A\alpha\sin[\alpha(d-B)]\left(1-\frac{1}{2}\alpha^2A^2\right)}{\sqrt{1-n_0^2A^2\alpha^2\sin^2[\alpha(d-B)]}}\Rightarrow$$

$$R=+\frac{\sqrt{1-n_0^2A^2\alpha^2\sin^2[\alpha(d-B)]}}{n_0\alpha\left(1-\frac{1}{2}\alpha^2A^2\right)\sin[\alpha(d-B)]}=$$

$$=+\frac{1}{n_0\alpha\sin[\alpha(d-B)]}\left(1+\frac{1}{2}\alpha^2A^2-\frac{1}{2}n_0^2A^2\alpha^2\sin^2[\alpha(d-B)]\right)=$$

$$=+\frac{A\sin\alpha B}{\theta_0\sin[\alpha(d-B)]}\left(1+\frac{1}{2}\alpha^2A^2\left(1-\sin^2[\alpha(d-B)]\frac{\theta_0^2}{A^2\alpha^2\sin^2\alpha B}\right)\right)=$$

$$=+\frac{A\sin\alpha B}{\theta_0\sin[\alpha(d-B)]}\left(1+\frac{1}{2}\alpha^2A^2-\frac{1}{2}\frac{\sin^2[\alpha(d-B)]\,\theta_0^2}{\sin^2\alpha B}\right)$$

ت)

$$l=d+y_{(x=d)}\cot\beta=d+\frac{A\sin\alpha B}{\theta_0}\cot[\alpha(d-B)]\left(1+\frac{1}{2}\alpha^2A^2-\frac{1}{2}\frac{\theta_0^2\sin^2[\alpha(d-B)]}{\sin^2\alpha B}\right)$$

نمره تفصیل:

با یاد او دلها آرام میگیرد

نام و نام خانوادگی:

عنوان آزمون:

تاریخ:

شماره سوال: ۷

ث)

$$n_0 = C + \frac{D}{\lambda^2}$$

$$\rightarrow f_1 = + \frac{1}{\left(C + \frac{D}{\lambda_1^2}\right)\alpha \sin[\alpha(d-B)]}\left(1 + \frac{1}{2}\alpha^2 A^2 \left(1 - \sin^2[\alpha(d-B)]\right)\left(C + \frac{D}{\lambda_1^2}\right)^2\right)$$

$$\rightarrow f_2 = + \frac{1}{\left(C + \frac{D}{\lambda_2^2}\right)\alpha \sin[\alpha(d-B)]}\left(1 + \frac{1}{2}\alpha^2 A^2 \left(1 - \sin^2[\alpha(d-B)]\right)\left(C + \frac{D}{\lambda_2^2}\right)^2\right)$$

$$\Rightarrow \Delta f = |f_1 - f_2|$$

سوالی نیست؟

موفق باشید.

نمره تصحیح: