خلاصه‌ی فصل اول

☑ **تصاعد حسابی :**

۱) اگرجمله اول تصاعد حسابی a_1 و قدر نسبت آن d باشد جمله nام از رابطه $a_n = a_1 + (n-1)d$ تعیین می‌شود.

۲) مجموع n جمله‌ی اولیه‌ی تصاعد حسابی از رابطه‌ی $S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$ بدست می‌آید.

۳) با جایگذاری فرمول (۱) در فرمول (۲) رابطه‌ی دیگری برای S_n تعیین می‌شود که چنین است :

$$S_n = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d)$$

☑ **تصاعد هندسی :**

۱) اگر جمله‌ی اول تصاعد هندسی a_1 و قدر نسبت آن q باشد جمله‌ی nام از رابطه‌ی $a_n = a_1 . q^{n-1}$ تعیین می‌شود.

۲) مجموع n جمله‌ی اولیه‌ی تصاعد هندسی از رابطه‌ی $S_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q}$ به دست می‌آید.

۳) در یک تصاعد هندسی نامتناهی اگر $|q| < 1$ آنگاه مجموع بی‌نهایت جمله برابر است با : $\frac{a_1}{1-q}$

✍ تمرین :

۱- در دنباله‌ی حسابی $2, 6, 10, 14, ...$ حداقل چند جمله را باید جمع کنیم تا حاصل از ۲۰۰ بیشتر شود؟
(شهریور ۹۰)

۲- نشان دهید برای هر عدد طبیعی n داریم : $1 + 3 + 5 + ... + (2n-1) = n^2$

۳- در یک دنباله‌ی حسابی، جمله‌ی دوازدهم برابر ۳۵ و مجموع هشت جمله‌ی اول برابر ۱۰۰ می‌باشد، دنباله را مشخص کنید.

۴- توپی در اختیار داریم که از هر ارتفاعی که رها شود، پس از زمین خوردن به اندازه‌ی $\frac{1}{3}$ ارتفاع اولیه‌ی خود بالا می‌رود. فرض کنید این توپ را از زمین به هوا پرتاب کرده‌ایم تا به ارتفاع ۵ متری برسد، می‌خواهیم بدانیم پس از شروع پرتاب تا زمان ایستادن، این توپ چقدر مسافت طی می‌کند؟ (خرداد ۹۰)

۵- علی روز اول ۱۰۰۰ تومان در صندوق خود قرار می‌دهد و قرار می‌گذارد هر روز ۰/۹ پول روز قبل را در صندوق قرار دهد. نشان دهید پول صندوق او هیچ‌گاه از ۱۰۰۰۰ تومان بیشتر نخواهد شد.

۶- یک مثلث با محیط P در نظر بگیرید. وسط‌های ضلع‌های آن را به هم وصل کرده و مثلث کوچکتری بسازید. این عملیات را به طور متوالی ادامه دهید. مجموع محیط مثلث‌های بدست آمده را بر حسب P به دست آورید.

۷- ابتدا نیمی از مساحت مربعی را رنگ می‌کنیم. سپس نیمی از مساحت باقی‌مانده را رنگ می‌کنیم. به همین ترتیب، پس از چند مرتبه حداقل ۹۹ درصد سطح مربع، رنگ شده است؟

۸- جمله‌ی سوم و ششم یک دنباله‌ی هندسی به ترتیب برابر ۸ و ۶۴- می‌باشد. مجموع چند جمله‌ی این دنباله با شروع از جمله‌ی اول برابر ۱۷۰- می‌شود؟

۹- مجموع هشت جمله‌ی اول یک دنباله‌ی هندسی ۸۲ برابر مجموع چهار جمله‌ی اول آن است. قدر نسبت را مشخص کنید.

☑ تقسیم چندجمله‌ای‌ها و بخش‌پذیری :

۱) اگر چندجمله‌ای $P(x)$ را بر $B(x)$ تقسیم کنیم و خارج قسمت $Q(x)$ و باقیمانده $R(x)$ باشد

آنگاه : $P(x)=B(x).Q(x)+R(x)$

درجه‌ی $R(x)$ کوچکتر از درجه‌ی $B(x)$ است.

اگر $P(x)$ بر $B(x)$ بخش‌پذیر باشد آنگاه : $P(x)=B(x).Q(x)$

۲) باقیمانده‌ی تقسیم $P(x)$ بر $x-a$ برابر است با $P(a)$.

اگر $P(a)=0$ آنگاه $P(x)$ بر $x-a$ بخش‌پذیر است.

۳) باقیمانده‌ی تقسیم $P(x)$ بر $ax+b$ با قراردادن ریشه‌ی $ax+b=0$ یعنی $x=-\frac{b}{a}$ در $P(x)$ بدست می‌آید

یعنی : $P\left(-\frac{b}{a}\right)$

۴) اتحادهای چاق و لاغر عبارتند از :

الف) برای هر n طبیعی : $a^n-1=(a-1)\left(a^{n-1}+a^{n-2}+...+a+1\right)$

ب) برای n فرد : $a^n+1=(a+1)\left(a^{n-1}-a^{n-2}+...-a+1\right)$

ج) برای هر n طبیعی : $x^n-y^n=(x-y)\left(x^{n-1}+x^{n-2}y+x^{n-3}y^2+...+xy^{n-2}+y^{n-1}\right)$

د) برای n فرد : $x^n+y^n=(x+y)\left(x^{n-1}-x^{n-2}y+x^{n-3}y^2-...-xy^{n-2}+y^{n-1}\right)$

✍ تمرین :

۱- مقدار k را چنان بیابید که چندجمله‌ای $P(x)=2x^3-kx^2-x+3$ بر $x+1$ بخش‌پذیر باشد. (خرداد ۹۰)

۲- a را چنان بیابید که یک جواب معادله‌ی $x^3-2x^2+ax+2=0$ برابر ۲ باشد سپس جواب‌های دیگر معادله را به دست آورید. (دی ۹۰)

۳- مقادیر m و n را چنان بیابید که چندجمله‌ای x^2+mx+n بر $x-2$ و $x+1$ بخش‌پذیر باشد. (دی ۸۹)

۴- m و n را چنان بیابید که چندجمله‌ای $P(x)=x^4-3x^3+mx+n$ بر x^2-5x+6 بخش‌پذیر باشد.

۵- در چندجمله‌ای $P(x)=x^3+ax^2+x+b$، a و b را طوری بیابید که باقی‌مانده‌ی تقسیم آن بر $x-1$ برابر ۳ بوده و بر $x+2$ بخش‌پذیر باشد.

۶- اگر باقی‌مانده‌ی تقسیم چندجمله‌ای $P(x)$ بر $x+2$ و $x-3$ به ترتیب ۱ و ۲ باشد، باقی‌مانده‌ی تقسیم $P(x)$ بر x^2-x-6 چیست؟

☑ **بسط دوجمله‌ای غیاث‌الدین جمشید کاشانی :**

۱) بسط دوجمله‌ای $(a+b)^n$ چنین است :

$$(a+b)^n = a^n + na^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{2!}a^{n-2}b^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}a^{n-3}b^3 + \ldots + nab^{n-1} + b^n$$

۲) برای یافتن ضریب هر جمله، ضریب جمله‌ی قبلی را در توان a ضرب کرده و بر تعداد جملات نوشته شده تقسیم می‌کنیم.

۳) برای یافتن ضرایب بسط دوجمله‌ای از مثلث خیام نیز می‌توان استفاده کرد :

۱

۱ ۱

$(a+b)^2$ ضرایب بسط → ۱ ۲ ۱

$(a+b)^3$ ضرایب بسط → ۱ ۳ ۳ ۱

$(a+b)^4$ ضرایب بسط → ۱ ۴ ۶ ۴ ۱

$(a+b)^5$ ضرایب بسط → ۱ ۵ ۱۰ ۱۰ ۵ ۱

$(a+b)^6$ ضرایب بسط → ۱ ۶ ۱۵ ۲۰ ۱۵ ۶ ۱

۴) تعداد جملات بسط $(a+b)^n$ برابر با $n+1$ است.

✍ **تمرین :**

۱- حاصل عبارت $\left(1-\frac{2}{x}\right)^5$ را به دست آورید. **(خرداد ۹۰)**

۲- عبارت $(2x+3y)^6$ را بسط دهید.

☑ **ک.م.م و ب.م.م :**

۱) برای تعیین ک.م.م دو عدد یا دو عبارت، ابتدا باید آن دو را تجزیه کنیم، سپس عوامل مشترک را با توان بزرگتر در عوامل غیرمشترک ضرب می‌کنیم.

۲) برای تعیین ب.م.م دو عدد یا دو عبارت، ابتدا باید آن دو را تجزیه کرد، سپس عوامل مشترک با توان کوچکتر را در هم ضرب می‌کنیم.

✍ **تمرین :**

۱- ۷۲ لیتر آب میوه، ۴۰ لیتر شیر و ۴۸ لیتر دوغ در شیشه‌هایی با حجم یکسان بسته‌بندی شده‌اند. حداقل تعداد شیشه‌ها را تعیین کنید. (گنجایش شیشه‌ها را بر حسب لیتر، عدد طبیعی فرض کنید.)

۲- در دنباله‌های حسابی زیر، چند عدد سه رقمی مشترک وجود دارد؟

$\{4,7,10,\ldots\}$ $\{1,5,9,\ldots\}$

☑ معادله‌ی درجه دوم :

۱) ریشه‌های معادله‌ی درجه‌ی دوم $ax^2+bx+c=0$ در حالتی که $\Delta=b^2-4ac>0$ عبارتند از :

$$x'=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{و} \quad x''=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$$

۲) اگر $\Delta=0$ آنگاه معادله‌ی درجه‌ی دوم ریشه‌ی مضاعف $x'=x''=-\frac{b}{2a}$ دارد.

۳) اگر در معادله‌ی $ax^2+bx+c=0$ رابطه‌ی $a+b+c=0$ برقرار باشد آنگاه : $x'=1$ و $x''=\frac{c}{a}$

۴) اگر در معادله‌ی $ax^2+bx+c=0$ رابطه‌ی $a+c=b$ برقرار باشد آنگاه : $x'=-1$ و $x''=-\frac{c}{a}$

۵) اگر x' و x'' ریشه‌های معادله‌ی درجه دوم باشند آنگاه : $x'x''=\frac{c}{a}$ و $x'+x''=-\frac{b}{a}$

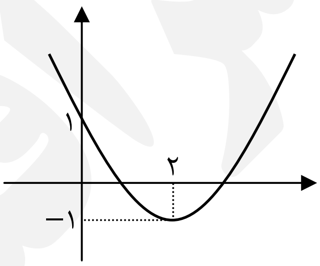
۶) اگر α و β ریشه‌های یک معادله‌ی درجه دوم باشند و $\alpha+\beta=S$ و $\alpha\beta=P$ آنگاه آن معادله‌ی درجه دوم به صورت : $x^2-Sx+P=0$ نوشته می‌شود.

۷) تابع درجه‌ی دوم $f(x)=ax^2+bx+c$ به ازای $x=-\frac{b}{2a}$ در حالت $a>0$ به کمترین مقدار (می‌نیمم) و در حالت $a<0$ به بیشترین مقدار (ماکزیمم) می‌رسد.

✍ تمرین :

۱- در شکل مقابل نمودار سهمی به معادله‌ی $P(x)=ax^2+bx+c$ داده شده است. ضرایب a، b و c را تعیین کنید.

(شهریور ۹۰)



۲- بیشترین مقدار تابع $f(x)=-x^2+4x+1$ را تعیین کنید. **(دی ۹۰)**

۳- معادله‌ی درجه دومی بنویسید که ریشه‌های آن $1\pm\sqrt{3}$ باشد.

۴- اگر α و β ریشه‌های معادله‌ی درجه دوم $4x^2-5x-5=0$ باشد، معادله‌ای بنویسید که ریشه‌های آن $\frac{1}{\alpha}$ و $\frac{1}{\beta}$ باشد.

۵) بدون حل معادله و با استفاده از S و P و Δ در وجود و علامت ریشه‌های معادله‌ی $5x^2-7x-5=0$ بحث کنید.

۶- اگر α و β ریشه‌های معادله‌ی $x^2-3x-5=0$ باشد، بدون حل معادله حاصل $\frac{\alpha}{\beta^2+1}+\frac{\beta}{\alpha^2+1}$ را بیابید.

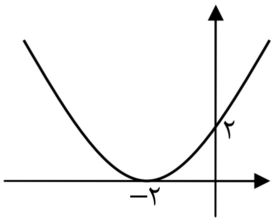
۷- m را طوری بیابید که یکی از ریشه‌های معادله‌ی $mx^2-4x+1=0$ سه برابر ریشه‌ی دیگر باشد.

۸- **معادله‌های زیر را حل کنید.**

الف) $۲x^۳ + x^۲ + ۳x = ۰$

ب) $\left(\frac{x^۲}{۳} - ۲\right)^۲ - ۷\left(\frac{x^۲}{۳} - ۲\right) + ۶ = ۰$

۹- **نمودار تابع درجه‌ی دوم $P(x) = ax^۲ + bx + c$ در شکل روبرو، نشان داده شده است. a، b و c را به دست آورید.**



۱۰- **بیشترین مساحت قطعه زمین مستطیل شکل کنار دریا که با ۱۲۰ متر نرده می‌توان محصور کرد، چقدر است؟**

☑ معادلات گویا :

برای حل معادلات گویا (کسری)، طرفین معادله را در ک.م.م مخرج‌ها ضرب می‌کنیم و با ساده کردن عبارت جبری بدست آمده، معادله را حل می‌کنیم. جواب بدست آمده نباید مخرج هیچ یک از کسرها را صفر کند، همچنین ممکن است برخی از جوابها با شرایط مسئله که از واقعیت می‌آیند مطابقت نداشته باشند که این جوابها نیز قابل قبول نیستند.

☑ معادلات گنگ :

۱) برای حل معادلات گنگ (رادیکالی) طرفین معادله را به توان مناسب می‌رسانیم و ساده می‌کنیم، اگر معادله چند رادیکال داشته باشد باید چند بار طرفین را به توان برسانیم تا در معادله، رادیکال باقی نماند. سپس معادله‌ی بدون رادیکال را حل می‌کنیم. جواب‌های بدست آمده را باید در معادله‌ی اصلی (اولیه) امتحان کنیم زیرا عملیات به توان‌رسانی ممکن است جوابهای اضافی تولید کند.

۲) عبارتهای منفی نمی‌توانند زیر رادیکال فرجه‌ی زوج قرار می‌گیرند.

۳) حاصل عبارتهای رادیکالی با فرجه‌ی زوج منفی نمی‌شوند.

✍ تمرین :

۱- **عدد صحیحی را بیابید که جمع آن با جذرش برابر ۶ باشد.** (دی ۹۰)

۲- **نقطه‌ای روی خط $y = ۲x$ بیابید که از دو نقطه‌ی $A(۱,۱)$ و $B(۳,-۱)$ به یک فاصله باشد.** (دی ۸۹)

۳- **حاصل عبارت‌های زیر را به ساده‌ترین صورت ممکن بنویسید.**

الف) $\frac{x^۲ - ۲x - ۳}{x^۲ - ۹} \div \frac{x^۲ - ۶x - ۷}{x^۲ - ۱۰x + ۲۱}$

ب) $\frac{۱}{a^۲ - ۱} + \frac{۲a}{a^۲ + ۲a + ۱} - \frac{۲}{a + ۱}$

۴- **معادله‌های زیر را حل کنید.**

الف) $\sqrt{۱ + x} - \sqrt{x} = ۲$

ب) $\frac{۱ - \sqrt{x}}{۱ + \sqrt{x}} = ۱ - x$

ج) $\sqrt{x^۲ - ۵x + ۳} + x^۲ - ۵x = ۹$

د) $\frac{۳}{m + ۲} + \frac{۲}{m} = \frac{۴m - ۴}{m^۲ - ۴}$

ه) $\sqrt{x + \sqrt{x - ۱}} - \sqrt{۲x - ۲} = ۰$　**(خرداد ۹۰ خارج از کشور)**

۵- $150\,kg$ محلول آب نمک ۴ درصدی در اختیار داریم. چند کیلوگرم نمک به آن اضافه کنیم تا محلول حاصل ۱۰درصد شود؟

☑ **حل معادلات و نامعادلات به روش هندسی (نموداری) :**

۱) جواب‌های معادله‌ی $f(x)=g(x)$، طول نقاط تلاقی نمودارهای دو تابع $y=f(x)$ و $y=g(x)$ است. اگر نمودار دو تابع همدیگر را قطع کنند معادله‌ی $f(x)=g(x)$ ریشه‌ی ساده و اگر نمودار دو تابع بر هم مماس باشند، معادله‌ی $f(x)=g(x)$ ریشه‌ی مضاعف دارد.

۲) جوابهای نامعادله‌ی $f(x)<g(x)$ مقادیری از دامنه‌ی مشترک دو تابع است که نمودار $y=f(x)$ زیر نمودار $y=g(x)$ است.

✍ تمرین :

۱- نامعادلات زیر را به روش هندسی حل کنید.

۱) $\sqrt{x-1}\le|x-1|$ **(خرداد ۹۰)**

۲) $\frac{1}{x}\le\sqrt{x}$ **(شهریور ۹۰)**

۳) $|x|<x^2$ **(دی ۸۹)**

☑ **قدرمطلق و ویژگی‌های آن :**

۱) **برداشتن قدرمطلق:** هرگاه بخواهیم قدرمطلق را از روی یک عدد یا عبارت برداریم باید علامت داخل قدرمطلق را بدانیم آنگاه :

$$|a|=\begin{cases}a & a\ge 0\\ -a & a<0\end{cases}$$

نتیجه : برای رسم نمودار $y=|f(x)|$ ابتدا نمودار $y=f(x)$ را رسم کرده و جاهایی که زیر محور x هاست، تصویر آئینه‌ای آن را رسم می‌کنیم.

۲) **اعمال بر روی قدرمطلق‌ها** :

الف) $|a|.|b|=|a.b|$ ب) $\frac{|a|}{|b|}=\left|\frac{a}{b}\right|$ ج) $k>0\,;\ k|a|=|ka|$

د) $|a|+|b|\ge|a+b|$ ه) $|a|-|b|\le|a-b|$

۳)

$$\sqrt[n]{x^n}=\begin{cases}x & ;\ n \text{ فرد}\\ |x| & ;\ n \text{ زوج}\end{cases}$$

; حالت خاص : $\sqrt{x^2}=|x|$

۴) **معادلات قدرمطلقی** :

الف) $|x|=c\Rightarrow\begin{cases}c\ge 0\Rightarrow x=\pm c\\ c<0\Rightarrow \text{جواب ندارد}\end{cases}$

ب) $|x|=|y|\Rightarrow x=\pm y$

۵) **نامعادلات قدرمطلقی :**

الف) $|x| \le c \Rightarrow \begin{cases} c \ge 0 \Rightarrow -c \le x \le c \\ c < 0 \Rightarrow \text{جواب ندارد} \end{cases}$

ب) $|x| \ge c \Rightarrow \begin{cases} c \ge 0 \Rightarrow x \le -c \text{ یا } x \ge c \\ c < 0 \Rightarrow \text{همواره برقرار است} \end{cases}$

ج) $|x| \le |y| \Rightarrow x^2 \le y^2$

✍ تمرین :

۱- برای هر دو عدد حقیقی a و b ثابت کنید : $|a+b| \le |a| + |b|$

سپس با استفاده از آن ثابت کنید : $|b| - |a| \le |b-a|$ **(خرداد ۹۰)**

۲- به کمک تعیین علامت عبارت داخل قدرمطلق، ضابطه‌ی $f(x) = x|x-2|$ را بدون استفاده از قدرمطلق بنویسید. (دی ۹۰)

۳- معادلات و نامعادلات زیر را حل کنید.

۱) $||x|-1| = 5$

۲) $|x-1| = 2x+1$

۳) $|3x+1| = |x+3|$

۴) $|x+3| < 5$

۵) $|2x-1| \ge 3$

۶) $|x+2| < |x-1|$

خلاصه‌ی فصل دوم

☑ تعریف تابع :

یک تابع از مجموعه‌ی A به مجموعه‌ی B رابطه‌ای بین این دو مجموعه است که به هر عضو A دقیقاً یک عضو از B را نسبت می‌دهد. لازم نیست که به هر عضو B حتماً عضوی از A نسبت داده شود و یا ممکن است به عضوی از B بیش از یک عضو از A نسبت داده شود.

☑ تشخیص تابع بودن در معادلات بر حسب x و y :

اگر معادله‌ای برحسب x و y داده شود، برای تشخیص تابع بودن، y را بر حسب x به دست می‌آوریم. اگر برای مقدار دلخواه x، دقیقاً یک مقدار برای y به دست آید، y تابعی بر حسب x است. اما اگر با حل معادله‌ی y بر حسب x ، مقدار یکتایی برای y بدست نیاید، تابع نیست.

✍ تمرین :

۱- مساحت مثلث قائم‌الزاویه‌ای ۴ سانتی‌مترمربع است. طول وتر این مثلث را به عنوان تابعی از یک ضلع آن (x) به دست آورید. (خرداد ۹۰)

۲- اگر $A=\{a,b,c,d\}$ و $B=\{p,q\}$ چند تابع از A به B وجود دارد؟

۳- در مستطیلی به عرض W و محیط ۴۰ متر، یک لوزی طوری محاط شده است که هر رأس آن دقیقاً بر وسط یکی از ضلع‌های مستطیل منطبق است. مساحت لوزی را به عنوان تابعی از عرض مستطیل بنویسید.

۴- در کدام رابطه، y تابعی بر حسب x است؟

الف) $x^۲+y^۲=۱$ ب) $x^۲+|y|-۲x+۱=۰$

☑ تساوی دو تابع :

۱) دو تابع f و g را مساوی می‌نامیم هرگاه :

الف) دامنه‌ی f و دامنه‌ی g با هم برابر باشند.

ب) برای هر x از دامنه‌ی f (یا g) : $f(x)=g(x)$

۲) نمودارهای دو تابع مساوی دقیقاً بر هم منطبق است.

۳) اگر دو تابع به صورت مجموعه‌ی زوج‌های مرتب داده شده باشند، هنگامی بـا هـم برابرنـد کـه مجموعـه‌ی زوج‌هـای مرتب داده شده با هم مساوی باشند.

✍ تمرین :

۱- آیا دو تابع $f(x)=\dfrac{x^۲}{۱+\sqrt{۱+x^۲}}$ و $g(x)=\sqrt{۱+x^۲}-۱$ با هم مساویند؟ چرا؟ (دی ۹۰)

۲- آیا دو تابع $f(x)=\sin x$ و $g(x)=\sqrt{۱-\cos^۲ x}$ با هم مساویند؟

۳- a را چنان تعیین کنید که دو تابع $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^۲-۹}{x-۳}; & x\neq ۳\\ a & x=۳\end{cases}$ و $g(x)=x+۳$ با هم مساوی باشند.

☑ توابع چندضابطه‌ای :

توابعی که بخش‌های مختلف دامنه‌ی آن با ضابطه‌های مختلف تعریف می‌شوند توابع چندضابطه‌ای نامیده می‌شوند.

✍ تمرین :

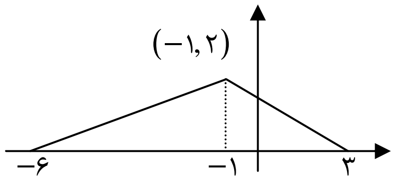
۱- تابع $y=|۱-x|-۳$ را به صورت یک تابع چندضابطه‌ای بنویسید و نمودار آن را رسم کنید. به کمک نمـودار، بُـرد آن را معلوم کنید. (شهریور ۹۰)

۲- نمودار تابع $f(x)=\begin{cases}x^۲-۱; & x\leq ۰\\ -۲; & ۰<x<۱\\ ۲x+۱; & x\geq ۱\end{cases}$ را رسم کنید، سپس دامنه و بُرد آن را مشخص کنید. (دی ۹۰)

۳- تابع $f(x)=|x+۱|+|x-۱|$ را به صورت یک تابع چندضابطه‌ای بنویسید و نمودار آن را رسـم کنیـد. بـه کمـک نمودار، بُرد آن را معلوم کنید.

۴- اگر $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{\sqrt{1-x}} & ; \quad x<1\\ 2x-\dfrac{3}{4} & ; \quad x\geq 1\end{cases}$ **مقدار** $f\left(f\left(\frac{3}{4}\right)\right)$ **را به دست آورید.**

۵- نمودار یک تابع به شکل روبروست، ضابطه‌ی آن را بنویسید.



☑ اعمال بر روی نمودار توابع :

اگر نمودار تابع $y=f(x)$ را داشته باشیم آنگاه :

الف) اگر یک عدد ثابت با x ضابطه‌ی تابع جمع و تفریق و یا ضرب و تقسیم شود برعکس آن عملیات بر روی طول نقاط نمودار تابع انجام می‌شود :

$\begin{cases} y=f(x-a) \Rightarrow \end{cases}$ a واحد به راست

$y=f(x+a) \Rightarrow$ a واحد به چپ

$y=f(ax) \Rightarrow$ انقباض به نسبت a در امتداد محور xها

$y=f\left(\dfrac{x}{a}\right) \Rightarrow$ انبساط به نسبت a در امتداد محور xها

ب) اگر یک عدد ثابت با $f(x)$ ضابطه‌ی تابع جمع و تفریق و یا ضرب و تقسیم شود همان عملیات بر روی عرض نقاط نمودار تابع انجام می‌شود :

$y=f(x)-a \Rightarrow$ a واحد به پایین

$y=f(x)+a \Rightarrow$ a واحد به بالا

$y=af(x) \Rightarrow$ انبساط به نسبت a در امتداد محور yها

$y=\dfrac{1}{a}f(x) \Rightarrow$ انقباض به نسبت a در امتداد محور yها

ج) $y=f(-x) \Rightarrow$ قرینه‌یابی نسبت به محور yها

$y=-f(x) \Rightarrow$ قرینه‌یابی نسبت به محور xها

$\Rightarrow y=-f(-x)$ قرینه‌یابی نسبت به مبدأ

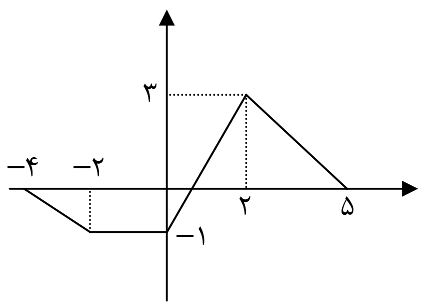
✍ تمرین :

۱- نمودار تابع $y=f(x)$ در شکل روبه‌رو داده شده است؛

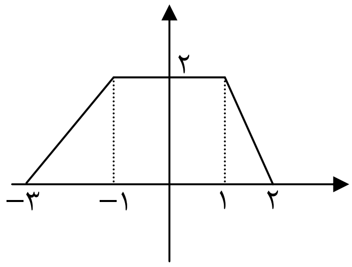
نمودار تابع‌های زیر را رسم کنید :

الف) $y=f(2x)$ **ب)** $y=-f(x-1)$

ج) $y=2f(x)-1$ **د)** $y=|f(x)|$



۲- نمودار تابع $y=f(x)$ به شکل روبه‌رو داده شده است؛



به کمک آن، نمودار تابع‌های زیر را رسم کنید :

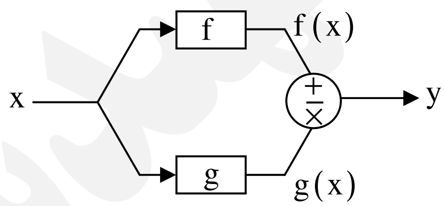
الف) $y=f(x+۲)$

ب) $y=f\left(-\frac{۱}{۲}x\right)$

۳- اگر $f(x)=\cos x$، نمودارهای $f(۲x)$ و $f\left(\frac{۱}{۲}x\right)$ را در یک دوره تناوب رسم کنید.

☑ اعمال جبری بر روی توابع :

۱) چهار عمل اصلی بر روی توابع :



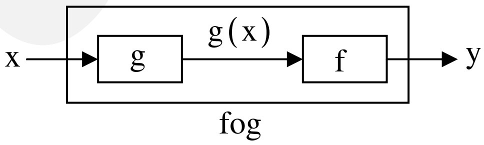
الف) $\left(f \underset{\times}{\overset{+}{-}} g\right)(x)=f(x)\underset{\times}{\overset{+}{-}}g(x)$

$D_{f \underset{\times}{\overset{+}{-}} g}=D_f\cap D_g$

ب) $(f\div g)(x)=f(x)\div g(x)$

$D_{f\div g}=D_f\cap D_g-\{x:g(x)=۰\}$

۲) ترکیب توابع :



$fog(x)=f(g(x))$

$D_{fog(x)}=\{x:x\in D_g \ ,\ g(x)\in D_f\}$

✍ تمرین :

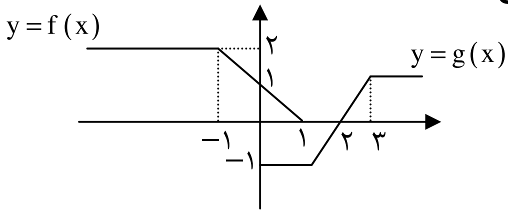
۱- اگر $f=\{(۰,۱),(۱,۲),(۳,۴)\}$ و $g=\{(-۲,۱),(۰,۰),(۱,۵),(۳,۳)\}$ دو تابع باشند؛ **(دی ۹۰)**

الف) $(f+g)_{(۱)}$ را به دست آورید.

ب) تابع $\frac{f}{g}$ را به صورت زوج‌های مرتب مشخص کنید.

ج) دامنه‌ی تابع fog را تعیین کنید.

۲- با استفاده از نمودار توابع f و g در شکل روبه‌رو، عبارات داده شده را محاسبه کنید. **(شهریور ۹۰)**



الف) $(f+g)(۱)$

ب) $(fog)(۲)$

۳- اگر $g(x)=\frac{۱}{x-۳}$ و $f(x)=۳x-۲$ باشد، آنگاه حاصل عبارت‌های زیر را به دست آورید. **(خرداد ۹۰)**

الف) $(۳f+۲g)_{(۴)}$　　　**ب)** D_{fog}

۴- اگر $f(x)=\sqrt{x}$ و $g(x)=\sqrt{۱-x}$ باشند، دامنه‌ی $f\times g$ را تعیین کنید. (خرداد ۹۰ – خارج کشور)

۵- اگر $f(x)=\dfrac{x}{x+۱}$، تابع $g(x)$ را به گونه‌ای بیابید که : $fog(x)=\dfrac{x^{۲}-۱}{x^{۲}+۱}$ (خرداد ۹۰ – خارج کشور)

۶- اگر $f=\{(۳,۴),(۷,۸),(۵,۲)\}$ و $g=\{(۱,۳),(-۲,۷),(۵,۹)\}$ باشد، آنگاه fog و $f+g$ را حساب کنید. (دی ۸۹)

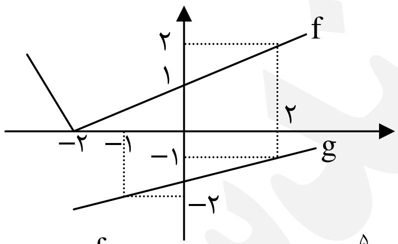
۷- دو تابع $f(x)=\dfrac{۱+x^{۲}}{۱-x^{۲}}$ و $g(x)=\sqrt{x(۱-x)}$ مفروض‌اند. دامنه‌ی تابع fog را بدون محاسبه‌ی $fog(x)$ به دست آورید.

۸- اگر $f=\{(۴,۵),(۶,۲),(۵,۳)\}$ و $g=\{(۲,۴),(۵,۱),(۸,۲)\}$ تابع fof و gof را حساب کنید.

۹- با استفاده از نمودارهای g و f که در یک دستگاه مختصات رسم شده‌اند، عبارت‌های زیر را حساب کنید.

الف) $(fog)(-۱)$

ب) $(f.g)(۲)$



۱۰- اگر $f(x)=\dfrac{۵x}{۳x-۷}$ و $g(x)=\dfrac{x^{۵}-۱}{۵x-۱۵}$، تابع $\dfrac{f}{g}(x)$ و دامنه‌ی آن را بنویسید.

☑ تابع زوج و تابع فرد :

۱) تعریف تابع زوج :

$$\begin{cases} \text{الف)}\ \forall x\in D_f \Rightarrow -x\in D_f & \text{(دامنه‌ی تقارن)} \\ \text{ب)}\ \forall x\in D_f \Rightarrow f(-x)=f(x) \end{cases}$$

نمودار تابع زوج نسبت به محور yها متقارن است.

۲) تعریف تابع فرد :

$$\begin{cases} \text{الف)}\ \forall x\in D_f \Rightarrow -x\in D_f & \text{(دامنه‌ی تقارن)} \\ \text{ب)}\ \forall x\in D_f \Rightarrow f(-x)=-f(x) \end{cases}$$

نمودار تابع فرد نسبت به مبدأ مختصات متقارن است.

۳) تابعی که دامنه‌ی نامتقارن داشته باشد نه زوج و نه فرد است.

۴) اگر در تابعی حاصل $f(-x)$ نه با $f(x)$ برابر باشد و نه با $-f(x)$ آن تابع نه زوج و نه فرد است.

مانند : $f(x)=x^{۳}+x^{۲}$

۵) با تبدیل x به $-x$ به راحتی اثبات می‌شود که :

f	g	$f\pm g$	f.g	f / g	fog
زوج	زوج	زوج	زوج	زوج	زوج
زوج	فرد	نه زوج و نه فرد	فرد	فرد	زوج
فرد	زوج	نه زوج و نه فرد	فرد	فرد	زوج
فرد	فرد	فرد	زوج	زوج	فرد

۶) رابطه‌ی $f(x)=\frac{1}{2}(f(x)+f(-x))+\frac{1}{2}(f(x)-f(-x))$ نشان می‌دهد که هر تابع با دامنه‌ی متقارن را می‌توان به صورت مجموع یک تابع زوج و یک تابع فرد نوشت.

۷) تابع ثابت صفر با دامنه‌ی متقارن، تنها تابعی است که هم زوج و هم فرد است.

تمرین :

۱- زوج یا فرد بودن تابع $f(x)=x\sqrt{27-3x^2}$ را معلوم کنید. **(دی ۸۹)**

۲- زوج یا فرد بودن تابع $y=\frac{x^3-3x}{x^2-1}$ را معلوم کنید. **(شهریور ۹۰)**

۳- اگر f و g دو تابع فرد باشند، در مورد زوج یا فرد بودن تابع fog چه می‌توان گفت؟

۴- مقدار a را چنان تعیین کنید که تابع $f(x)=\log\left(x+\sqrt{x^2+4a^2}\right)$ یک تابع فرد باشد.

۵- زوج یا فرد بودن تابع‌های زیر را معلوم کنید :

الف) $f(x)=x^4+2|x|$

ب) $g(x)=\begin{cases}1 & ;x\geq 0\\ -1 & ;x<0\end{cases}$

۶- درستی یا نادرستی گزاره‌های زیر را بررسی کنید.

الف) حاصل‌ضرب دو تابع فرد، تابعی زوج است.

ب) مجموع دو تابع فرد، تابعی زوج است.

۷- نشان دهید هر تابع دلخواه $f(x)$ را می‌توان به صورت مجموع یک تابع زوج و یک تابع فرد نوشت.

۸- زوج یا فرد بودن تابع‌های f و g را تعیین کنید.

$g=\{(-2,1),(-1,2),(0,0),(1,-2),(2,-1)\}$

$f=\{(-2,5),(-1,4),(0,3),(1,4),(2,5)\}$

☑ توابع صعودی و تابع نزولی :

۱) تابع $f(x)$ را صعودی می‌نامیم هرگاه برای هر x_1 و x_2 از دامنه‌ی f که $x_2>x_1$ آنگاه : $f(x_2)\geq f(x_1)$

۲) تابع $f(x)$ را نزولی می‌نامیم هرگاه برای هر x_1 و x_2 از دامنه‌ی f که $x_2>x_1$ آنگاه : $f(x_2)\leq f(x_1)$

۳) تابع $f(x)$ را صعودی اکید نامیم هرگاه برای هر x_1 و x_2 از دامنه‌ی f که $x_2>x_1$ آنگاه : $f(x_2)>f(x_1)$

۴) تابع $f(x)$ را نزولی اکید نامیم هرگاه برای هر x_1 و x_2 از دامنه‌ی f که $x_2>x_1$ آنگاه : $f(x_2)<f(x_1)$

۵) تابع $f(x)$ را ثابت نامیم هرگاه برای x_1 و x_2 از دامنه‌ی f : $f(x_2)=f(x_1)$

۶) هر تابعی که در دامنه‌ی خودش صعودی اکید و یا نزولی اکید باشد، یک به یک است.

تمرین :

۱- تابع $f(x)=\begin{cases}x+1 & ; & x<-2\\ 1 & ; & -2<x<1\\ -2x & ; & x>1\end{cases}$ را رسم کنید و بازه‌هایی که در آنها صعودی، نزولی یا ثابت است را مشخص کنید. **(خرداد ۹۰)**

۲- تابع $f(x)=-|x-2|+5$ در چه بازه‌ای صعودی و در چه بازه‌ای نزولی است؟

☑ **توابع یک به یک و تابع وارون :**

۱) تابع f یک به یک است اگر برای هر دو نقطه‌ی x_1 و x_2 از دامنه‌ی f داشته باشیم :

$$f(x_1)=f(x_2)\Rightarrow x_1=x_2$$

۲) اگر نمودار تابعی توسط خطی موازی محور xها، بیش از یک‌بار قطع شود، آن تابع یک به یک نیست.

۳) در توابع غیریک‌به‌یک، می‌توان با محدودکردن دامنه‌ی تابع، تابعی یک‌به‌یک ایجاد کرد.

۴) اگر تابع f یک‌به‌یک باشد آنگاه وارون‌پذیر است و تابع وارون آن که با f^{-1} نشان می‌دهیم، چنین تعریف می‌شود :

$$f^{-1}=\{(y,x)\mid(x,y)\in f\}$$

۵) با توجه به تعریف f^{-1}، هنگامی که نمودار یک تابع یک‌به‌یک f داده شود، برای بدست آوردن نمودار تابع f^{-1}، کافی است قرینه‌ی نمودار f را نسبت به خط $y=x$ به دست آوریم.

۶) برای به دست آوردن ضابطه‌ی تابع وارون یک تابع وارون‌پذیر مانند f، در معادله‌ی $y=f(x)$، x را بر حسب y محاسبه می‌کنیم، سپس با تبدیل y به x و x به y، تابع $f^{-1}(x)$ را به دست می‌آوریم.

۷) اگر وارون تابع f برابر با f^{-1} باشد آنگاه :

الف) $D_f=R_{f^{-1}}$, $R_f=D_{f^{-1}}$

ب) $fof^{-1}(x)=x$; $D_{fof^{-1}}=D_{f^{-1}}$

ج) $f^{-1}of(x)=x$; $D_{f^{-1}of}=D_f$

۸) اگر در تابع $f(x)=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ رابطه‌ی $a+d=0$ برقرار باشد آنگاه تابع و تابع وارون بر هم منطبق می‌شوند:

$$f(x)=f^{-1}(x)$$

در این حالت خط $y=x$ محور تقارن نمودار تابع $y=f(x)$ است.

☑ تابع f را متناوب نامیم هرگاه یک عدد حقیقی مثبت مانند T موجود باشد که برای هر $x\in D_f$ داشته باشیم : $f(x+T)=f(x)$، کوچکترین عدد T با خاصیت گفته شده را دوره‌ی تناوب f می‌نامند.

✍ تمرین :

۱- ثابت کنید تابع $f(x)=\dfrac{x-1}{x}$ یک به یک است. **(دی ۸۹)**

۲- اگر $f(x)=4x-3$ و $g(x)=x+2$ تابع $(gof)^{-1}$ را حساب کنید. **(شهریور ۹۰)**

۳- ثابت کنید تابع $f(x)=1+\sqrt{1-x^2}$ روی دامنه‌ی $[0,1]$ یک به یک است و وارون آن را به دست آورید.

۴- ثابت کنید تابع $f(x)=\dfrac{x-5}{2x+3}$ یک به یک است و با محاسبه‌ی f^{-1}، برد f را به دست آورید.

۵- نشان دهید تابع $f(x)=\dfrac{3x-2}{5x-3}$ وارون خودش است.

۶- ابتدا نمودار تابع $f(x)=2x+|x-1|$ را رسم کرده و با استفاده از شکل، وارون‌پذیری آن‌را بررسی کنید.
(خرداد ۹۰ – خارج کشور)

۷- ابتدا ثابت کنید تابع $f(x)=x^3-3x^2+3x+5$ وارون‌پذیر است، سپس وارون آن را بنویسید.

۸- تابع $f(x)=ax+b$، داده شده است. همه‌ی مقادیر a و b را که به ازای آنها $f^{-1}(x)=f(x)$ باشد، بیابید.

۹- تابع $f(x)=\frac{ax-۱}{x-b}$ و $a\neq ۱$ مفروض است. رابطه‌ای بین a و b بیابید که $f^{-۱}(x)=f(x)$ باشد.

☑ توابع پله‌ای و تابع جزء صحیح :

۱) هر تابعی که بتوان دامنه‌ی آن را به تعدادی بازه تقسیم‌بندی کرد که تابع روی هر کدام از این بازه‌ها، تابع ثابت باشد، یک تابع پله‌ای می‌نامند.

۲) برای هر عدد حقیقی x، جزء صحیح آن، بزرگترین عدد صحیح است که از x بیشتر نیست. جزء صحیح x را با نماد $[x]$ نمایش می‌دهیم.

۳) اگر $k\in\mathbb{Z}$ آنگاه : $k\leq x<k+۱\Rightarrow[x]=k$

۴) اگر $k\in\mathbb{Z}$ آنگاه : $[x\pm k]=[x]\pm k$

توجه : $[kx]\neq k[x]$

۵) برای رسم توابع جزء صحیح‌دار در یک بازه، ابتدا برد عبارت داخل جزء صحیح را در آن بازه بدست می‌آوریم، سپس با ناحیه‌بندی کردن عبارت داخل جزء صحیح بین اعداد صحیح متوالی، تابع را ساده کرده و در محدوده‌ی x آن ناحیه، رسم می‌کنیم.

۶) در حل معادلات جزء صحیح‌دار از رابطه‌ی زیر استفاده می‌کنیم :

اگر $k\in\mathbb{Z}$: $[x]=k\Rightarrow k\leq x<k=۱$

✍ تمرین :

۱- اگر $f(x)=[x+۲]$ باشد، در این صورت حاصل $f\left(۱-\sqrt{۲}\right)$ چقدر است؟ **(دی ۸۹)**

۲- اگر $a=۱-\sqrt{۲}$ باشد، حاصل عبارت $\left[\sqrt{(a-۲)^{۲}}\right]$ چقدر است ؟ **(خرداد ۹۰ – خارج کشور)**

۳- نمودار تابع $y=\left[\frac{۱}{۳}x\right]$ را در بازه‌ی $[-۶,۶]$ رسم کنید.

۴- دامنه‌ی تابع $f(x)=\frac{\sqrt{۱-x^{۲}}}{[x]}$ را بیابید.

۵- نشان دهید تابع $f(x)=x-[x]$ متناوب است. سپس با رسم نمودار تابع در یک دوره تناوب آن، نمودار تابع را در تمام $\mathbb{R}$ رسم کنید.

خلاصه‌ی فصل سوم

☑ توابع مثلثاتی و دوره‌ی تناوب آنها :

۱) دوره‌ی تناوب توابع $f(x)=\sin ax$ و $f(x)=\cos ax$ برابر است با : $T=\frac{۲\pi}{|a|}$

۲) دوره‌ی تناوب توابع $f(x)=\tan ax$ و $f(x)=\cot ax$ برابر است با : $T=\frac{\pi}{|a|}$

☑ فرمول‌های بسط $\alpha \pm \beta$:

۱) $\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha.\cos\beta+\cos\alpha.\sin\beta$

۲) $\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha.\cos\beta-\cos\alpha.\sin\beta$

۳) $\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha.\cos\beta-\sin\alpha.\sin\beta$

۴) $\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha.\cos\beta+\sin\alpha.\sin\beta$

۵) $\tan(\alpha+\beta)=\dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{۱-\tan\alpha.\tan\beta}$

۶) $\tan(\alpha-\beta)=\dfrac{\tan\alpha-\tan\beta}{۱+\tan\alpha.\tan\beta}$

☑ فرمول‌های کمان مرکب $\dfrac{\pi}{۴}$:

$$\begin{cases}\sin\alpha+\cos\alpha=\sqrt{۲}\sin\left(\alpha+\dfrac{\pi}{۴}\right)\\ \sin\alpha-\cos\alpha=\sqrt{۲}\sin\left(\alpha-\dfrac{\pi}{۴}\right)\end{cases}$$

✍ تمرین :

۱- سینوس، کسینوس، تانژانت و کتانژانت زاویه‌ی ۱۵° را حساب کنید.

۲- اگر α و β زاویه‌هایی در ربع سوم باشند و $\sin\alpha=-\dfrac{۴}{۵}$ و $\cos\beta=-\dfrac{۵}{۱۳}$، مقدار $\sin(\alpha+\beta)$ را محاسبه کنید. (شهریور ۹۰)

۳- اگر α زاویه‌ای در ربع اول و β زاویه‌ای در ربع سوم باشد و $\sin\alpha=\dfrac{۳}{۵}$ و $\cos\beta=-\dfrac{۵}{۱۳}$ مقدار $\tan(\alpha+\beta)$ را تعیین کنید.

۴- درستی اتحاد $\sin x+\cos x=\sqrt{۲}\sin\left(x+\dfrac{\pi}{۴}\right)$ را ثابت کنید. (خرداد ۹۰)

☑ فرمول‌های ۲α :

۱) $\sin۲\alpha=۲\sin\alpha.\cos\alpha=\dfrac{۲\tan\alpha}{۱+\tan^۲\alpha}$

۲) $\cos۲\alpha=\cos^۲\alpha-\sin^۲\alpha=۲\cos^۲\alpha-۱=۱-۲\sin^۲\alpha=\dfrac{۱-\tan^۲\alpha}{۱+\tan^۲\alpha}$

۳) $\tan۲\alpha=\dfrac{۲\tan\alpha}{۱-\tan^۲\alpha}$

☑ فرمول‌های طلایی :

$$\begin{cases}۱+\cos۲\alpha=۲\cos^۲\alpha\\ ۱-\cos۲\alpha=۲\sin^۲\alpha\end{cases}$$

✍ تمرین :

۱- سینوس، کسینوس، تانژانت و کتانژانت زاویه‌ی $۲۲/۵^\circ$ را به دست آورید.

۲- درستی اتحاد $\sin ۲x = \frac{۲\tan x}{۱+\tan^۲ x}$ را ثابت کنید. (دی ۸۹)

۳- نشان دهید برای هر زاویه‌ی α داریم : $\cos ۲\alpha = ۲\cos^۲ \alpha - ۱$ (دی ۹۰)

۴- اگر $\frac{\pi}{۲} < \alpha < \pi$ و $\sin\alpha = \frac{۳}{۵}$ مقدار $\sin ۲\alpha$ را محاسبه کنید.

۵- اگر α زاویه‌ای در بازه‌ی $\left[\pi, \frac{۳\pi}{۲}\right]$ باشد که $\sin\alpha = -\frac{۱۲}{۱۳}$، مقدار $\tan\frac{\alpha}{۲}$ را حساب کنید.

۶- درستی اتحاد $\cos ۳x = ۴\cos^۳ x - ۳\cos x$ را ثابت کنید.

☑ فرمول‌های تبدیل مجموع به حاصلضرب :

۱) $\sin p + \sin q = ۲\sin\left(\frac{p+q}{۲}\right).\cos\left(\frac{p-q}{۲}\right)$

۲) $\sin p - \sin q = ۲\sin\left(\frac{p-q}{۲}\right).\cos\left(\frac{p+q}{۲}\right)$

۳) $\cos p + \cos q = ۲\cos\left(\frac{p+q}{۲}\right).\cos\left(\frac{p-q}{۲}\right)$

۴) $\cos p - \cos q = -۲\sin\left(\frac{p+q}{۲}\right).\sin\left(\frac{p-q}{۲}\right)$

☑ فرمول‌های تبدیل حاصلضرب به مجموع :

۱) $\sin a.\cos b = \frac{۱}{۲}[\sin(a+b) + \sin(a-b)]$

۲) $\cos a.\cos b = \frac{۱}{۲}[\cos(a+b) + \cos(a-b)]$

۳) $\sin a.\sin b = -\frac{۱}{۲}[\cos(a+b) - \cos(a-b)]$

✍ تمرین :

۱- اگر $\tan\alpha = \frac{۱}{۲}$ آنگاه مقدار $\frac{\sin ۳\alpha - \sin\alpha}{\cos\alpha - \cos ۳\alpha}$ را بیابید.

۲- درستی رابطه‌ی $\frac{۲\sin x \cos ۳x}{\sin ۲x} = ۲\cos ۲x - ۱$ را نشان دهید. (خرداد ۹۰- خارج کشور)

☑ معادلات مثلثاتی :

۱) $\sin x = \sin\alpha \Rightarrow \begin{cases} x = ۲k\pi + \alpha \\ x = ۲k\pi + \pi - \alpha \end{cases}$

۲) $\cos x = \cos\alpha \Rightarrow x = ۲k\pi \pm \alpha$

۳) $\tan x = \tan\alpha \Rightarrow x = k\pi + \alpha$

۴) $\cot x = \cot\alpha \Rightarrow x = k\pi + \alpha$

✍ تمرین :

۱- معادلات زیر را حل کنید.

الف) $\tan x - \tan 2x = 0$ (دی ۸۹)   ب) $\cos 2x + \cos\frac{x}{2} = 0$ (خرداد ۹۰ – خارج کشور)

ج) $\sin x + \cos x = 1$ (دی ۹۰)   د) $\tan x . \tan 2x = 1$ (شهریور ۹۰)

ه) $\tan 4x = \cot g\, x$ و) $2\sin^2 x = 3\cos x$

ز) $\sin x + \sin 3x = 0$ ح) $\cos 2x - 5\cos x + 3 = 0$

ط) $\tan x - \cot g\, x = \frac{2\sqrt{3}}{3}$ ی) $\frac{\sqrt{3}}{\sin x} + \frac{1}{\cos x} = 4$

۲- معادله‌ی $\sin 2\theta + \sqrt{2}\cos\theta = 0$ را حل کرده و جواب‌های در بازه‌ی $[-\pi, \pi]$ را تعیین کنید.

۳- معادله‌ی $\sin x + \sin 2x + \sin 3x = 0$ را حل کنید و جواب‌هایی را که در بازه‌ی $[0, 2\pi]$ هستند تعیین کنید.

۴- اگر θ_0 زاویه‌ی حاده‌ای باشد که $\sin\theta_0 = \frac{3}{5}$، کلیه‌ی جواب‌های معادله $6\sin x + 8\cos x = 5$ را بر حسب θ_0 به دست آورید.

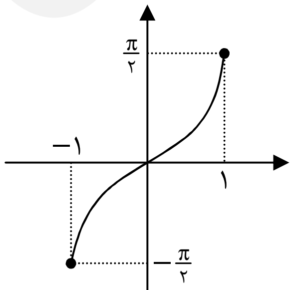
۵- در مثلثی که طول اضلاع آن ۱ و ۳ و $\sqrt{7}$ باشد، زاویه‌ی روبه‌روی ضلع به طول $\sqrt{7}$ چقدر است؟ (خرداد ۹۰)

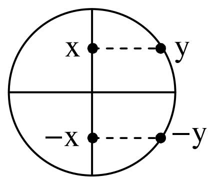
۶- مثلثی رسم کرده‌ایم که طول ضلع‌های آن ۷ و ۸ و ۱۳ است. بزرگترین زاویه‌ی این مثلث را به دست آورید.

☑ وارون توابع مثلثاتی :

۱) $f(x) = \sin^{-1} x$ $\begin{cases} D_f = [-1, 1] \\ R_f = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \end{cases}$

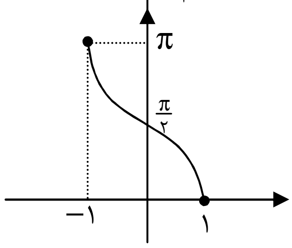
تابع فرد است : $\sin^{-1}(-x) = -\sin^{-1} x$

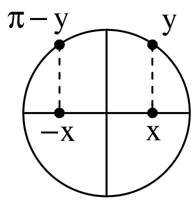




۲) $f(x) = \cos^{-1} x$ $\begin{cases} D_f = [-1, 1] \\ R_f = [0, \pi] \end{cases}$

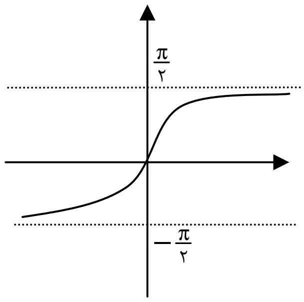
تابع نه زوج و نه فرد است : $\cos^{-1}(-x) = \pi - \cos^{-1} x$

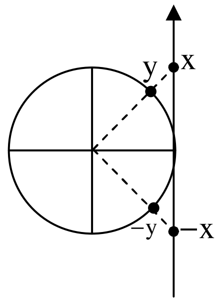




۳) $f(x) = \tan^{-1} x$ $\begin{cases} D_f = \mathbb{R} \\ R_f = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \end{cases}$

تابع فرد است : $\tan^{-1}(-x) = -\tan^{-1} x$





✍ تمرین :

۱- حاصل عبارات زیر را به دست آورید :

الف) $\tan^{-1}\left(\sin\frac{\pi}{۲}\right)$ (دی ۹۰) ب) $\tan^{-1}(-۱)$ (دی ۸۹)

ج) $\cos\left(\tan^{-1}\left(-\sqrt{۳}\right)\right)$ (شهریور ۹۰) د) $\cos^{-1}\left(-\frac{\sqrt{۲}}{۲}\right)$

ه) $\cos(\tan^{-1}(-\frac{۴}{۳}))$ (خرداد ۹۰ – خارج کشور) و) $\sin\left(\cos^{-1}\frac{۳}{۵}\right)$

ز) $\tan\left(\sin^{-1}\frac{۳}{۵}\right)$ ح) $\tan\left(\tan^{-1}۲+\tan^{-1}۳\right)$

ط) $\sin(\tan^{-1}\frac{۱}{۸})$ ی) $\cos\left(۲\tan^{-1}\frac{۱}{۲}\right)$

ک) $\cos^{-1}\left(\cos\frac{۴\pi}{۳}\right)$ ل) $\cos^{-1}\left(\sin\frac{\pi}{۸}\right)$ (خرداد ۹۰)

۲- برای هر x نشان دهید :

الف) $\sin\left(\tan^{-1}x\right)=\frac{x}{\sqrt{۱+x^۲}}$ ب) $\cos\left(\tan^{-1}x\right)=\frac{۱}{\sqrt{۱+x^۲}}$

۳- برای هر عدد x که $-۱\le x\le ۱$ نشان دهید : $\sin^{-۱}x+\cos^{-۱}x=\frac{\pi}{۲}$

۴- در مثلثی که طول دو ضلع آن به طور ثابت ۳ و ۵ است، زاویه‌ی بین دو ضلع، تابعی از طول ضلع سوم است. این تابع را به دست آورید.

خلاصه‌ی فصل چهارم

☑ تعریف حد :

۱) برای تابع f اگر مقدارهای x (در دامنه‌ی f) به عددی مانند a نزدیک شوند و مشاهده شود که مقدارهای $f(x)$ به عدد L نزدیک می‌شوند، گوییم تابع در نقطه‌ی a حد دارد و حد آن برابر L است و می‌نویسیم : $\lim\limits_{x\to a}f(x)=L$

۲) در یک تابع f اگر متغیر x (در دامنه‌ی f) با مقدارهای بزرگتر از عددی مانند a به a نزدیک شود و مقدارهای $f(x)$ به عددی مانند L نزدیک شوند، گوییم تابع f در نقطه‌ی a حد راست دارد و مقدار این حد L است و می‌نویسیم: $\lim\limits_{x\to a^+}f(x)=L$

۳) در یک تابع f اگر متغیر x (در دامنه‌ی f) با مقدارهای کوچکتر از عددی مانند a به a نزدیک شود و مقدارهای $f(x)$ به عددی مانند L نزدیک شوند، گوییم تابع f در نقطه‌ی a حد چپ دارد و مقدار این حد L است و می‌نویسیم: $\lim\limits_{x\to a^-}f(x)=L$

۴) اگر تابعی در نقطه‌ای حدهای چپ و راست متفاوت داشته باشد، در آن نقطه حد ندارد. اما اگر حدهای چپ و راست تابع در نقطه‌ای موجود و مساوی باشند، تابع در آن نقطه حد دارد و حد آن همان مقدار مشترک حدهای چپ و راست است.

۵) بازه‌هایی به صورت $(a-\delta, a+\delta)$ که δ عددی مثبت است را یک همسایگی a می‌نامند و δ را شعاع همسایگی گویند. اگر a را از این همسایگی حذف کنیم آن را یک همسایگی محذوف a می‌نامند.

۶) شرط آنکه بتوان از حد (دو طرفه) یک تابع در یک نقطه a صحبت کنیم آن است که آن تابع در یک همسایگی محذوف a تعریف شده باشد.

۷) شرط آن که بتوان از حد چپ یک تابع در نقطه‌ای مانند a صحبت کرد آن است که آن تابع در یک همسایگی چپ a تعریف شده باشد.

شرط آنکه بتوان از حد راست یک تابع در نقطه‌ای مانند a صحبت کرد آن است که آن تابع در یک همسایگی راست a تعریف شده باشد.

✍ تمرین :

۱- نمودار تابعی را رسم کنید که تابع در ۲ تعریف نشده باشد، ولی در یک همسایگی محذوف ۲ تعریف شده باشد، و در این نقطه حد داشته باشد. (شهریور ۹۰)

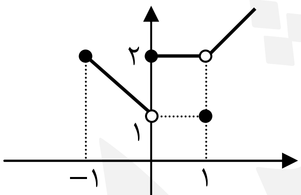
۲- نمودار تابعی را رسم کنید که تابع در یک همسایگی ۳ تعریف شده باشد و در این نقطه حد داشته باشد ولی حد آن غیر از مقدار تابع در ۳ باشد. (خرداد ۹۰)

۳- با رسم نمودار تابع $y=\sqrt{1-x}+1$، مقدار حد را در اطراف نقطه‌ی $a=1$ بررسی کنید. (دی ۹۰)

۴- با توجه به شکل مقابل حدود زیر را بیابید.

الف) $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ ب) $\lim\limits_{x\to -1} f(x)$

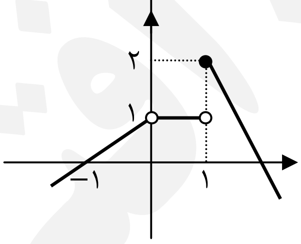
ج) $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ د) $\lim\limits_{x\to \frac{1}{2}} f(x)$



۵- با توجه به شکل مقابل حدود زیر را تعیین کنید.

الف) $\lim\limits_{x\to -1} f(x)$ ب) $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$

ج) $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ د) $\lim\limits_{x\to -\frac{1}{2}} f(x)$



☑ قضایای حد توابع :

۱) اگر دو تابع f و g روی دامنه یکسانی تعریف شده باشند و در نقطه‌ی a حد داشته باشند آنگاه توابع $f+g$ و $f-g$ و $f.g$ نیز در a حد دارند و :

$$\lim_{x\to\infty}\left(f(x)\overset{+}{\underset{\times}{-}}g(x)\right)=\left(\lim_{x\to a}f(x)\right)\overset{+}{\underset{\times}{-}}\left(\lim_{x\to a}g(x)\right)$$

۲)

$$\lim_{x\to a}x^n=a^n$$

$$\lim_{x\to a}P(x)=P(a)$$ ($P(x)$ تابع چند جمله‌ای است.)

$$\lim_{x\to a}\sqrt[k]{x}=\sqrt[k]{a} \qquad \lim_{x\to a}b^x=b^a \qquad \lim_{x\to a}\sin x=\sin a \qquad \lim_{x\to a}\cos x=\cos a$$

۳) اگر $\lim\limits_{x\to a} f(x)=L_۱ , \lim\limits_{x\to a} g(x)=L_۲\neq ۰$ آنگاه : $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{L_۱}{L_۲}$

اگر $\lim\limits_{x\to a} f(x)\neq ۰ , \lim\limits_{x\to a} g(x)=۰$ آنگاه : $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$ موجود نیست.

۴) اگر $\lim\limits_{x\to a} f(x)=۰$ و $\lim\limits_{x\to a} g(x)=۰$ آنگاه حد $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$ را با قضایای فوق نمی‌توان مستقیماً محاسبه کرد. این حالت را اصطلاحاً حالت مبهم $\frac{۰}{۰}$ می‌نامند. برای محاسبه‌ی حد این‌گونه توابع، یکی از راه‌ها، ساده‌سازی این کسر و تبدیل آن به حالتی است که عمل محاسبه طبق قضایای بالا امکان‌پذیر باشد.

۵) قضیه‌ی افشردگی :

اگر تابعی مانند $f(x)$ در یک همسایگی محذوف نقطه‌ای مانند a بین دو تابع $g(x)$ و $h(x)$ قرار گیرد، مثلاً $h(x)\leq f(x)\leq g(x)$ و $\lim\limits_{x\to a} h(x)=\lim\limits_{x\to a} g(x)=L$ آنگاه : $\lim\limits_{x\to a} f(x)=L$

۶) $$\lim_{u\to ۰}\frac{\sin u}{u}=۱\Rightarrow \lim_{u\to ۰}\frac{\tan u}{u}=۱$$

✍ تمرین :

۱- حد توابع زیر را محاسبه کنید. **(دی ۸۹)**

الف) $\lim\limits_{x\to ۱}\frac{x^۲-۴x+۳}{x^۲-۱}$

ب) $\lim\limits_{x\to ۹}\frac{x-۹}{\sqrt{x}-۳}$

۲- حد توابع زیر را محاسبه کنید. **(خرداد ۹۰)**

الف) $\lim\limits_{x\to ۰}\frac{۱-\cos ۲x}{x^۲}$

ب) $\lim\limits_{x\to ۲}\frac{x^۳-۸}{۳x^۲-۱۲}$

۳- حد توابع زیر را محاسبه کنید **(شهریور ۹۰)**

الف) $\lim\limits_{x\to -۱}\frac{x^۳-۲x-۱}{x^۲-۱}$

ب) $\lim\limits_{x\to ۲}\frac{x-۲}{\sqrt{۲x}-۲}$

ج) $\lim\limits_{x\to ۰^+}\frac{\sqrt{۱-\cos ۲x}}{\sin\frac{x}{۲}}$

۴- حد توابع زیر را در صورت وجود محاسبه کنید. **(دی ۹۰)**

الف) $\lim\limits_{x\to ۳^-}\frac{۱}{[x]-۳}$

ب) $\lim\limits_{x\to -۱}\frac{x^۳+x+۲}{x^۲-۱}$

ج) $\lim\limits_{x\to ۰}\frac{۳x^۲}{۱-\cos x}$

۵- حد توابع زیر را در صورت وجود محاسبه کنید. **(خرداد ۹۰ – خارج کشور)**

الف) $\lim\limits_{x\to ۰^+}\frac{۲x}{\sqrt{۱-\cos x}}$

ب) $\lim\limits_{x\to ۱}\frac{x^۲-x}{x^۲+x-۲}$

۶- حدهای زیر را حساب کنید.

۱) $\lim\limits_{x\to ۱}\frac{x^n-۱}{x-۱}$

۲) $\lim\limits_{x\to ۲^-}\frac{\sqrt{x^۲-۴x+۴}}{x-۲}$

۳) $\lim\limits_{x\to ۱}\frac{۲x-\sqrt{x+۳}}{\sqrt{x}-۱}$

۴) $\lim\limits_{x\to ۰}\frac{\sin^۲ x}{۱-\cos x}$

۵) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{\cos 2x}{\sin x-\cos x}$

۶) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{\sin x-\cos x}{1-\tan x}$

۷) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 2x\sin 3x}{6x^3}$

۸) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2+\sin^2 x}{x^2}$

۹) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x}$

۱۰) $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\sqrt{1-\cos x}}{\sin\frac{x}{2}}$

۱۱) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-\cos 3x}{x.\tan x}$

۱۲) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^+}\dfrac{|\cos x|}{x-\frac{\pi}{2}}$

۱۳) $\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{x^2-[x]x-2}{x^2-4}$

۱۴) $\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{x^3-[x^3]}{x-[x]}$

۱۵) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-1}{[x]+[-x]}$

۱۶) $\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{[x]-1}{x-2}$

۷- a را چنان تعیین کنید که تابع $f(x)=a[1-x]+[x]$ در نقطه‌ی ۱ حد داشته باشد.

۸- دو تابع مثال بزنید که در اطراف a تعریف شده باشند و هیچکدام در a حد نداشته باشند ولی $f\times g$ در a حد داشته باشد. (خرداد ۹۰ – خارج کشور)

۹- حد تابع $(x-1).\sin\dfrac{1}{x-1}$ را در ۱ حساب کنید.

۱۰- برای هر $x\neq 0$ ثابت کنید : $\left|x\cos\dfrac{1}{x}\right|\le|x|$ سپس نشان دهید $\lim\limits_{x\to 0}x.\cos\dfrac{1}{x}=0$

۱۱- حد تابع $\left(2x-\dfrac{\pi}{2}\right).\cos\dfrac{1}{x-\frac{\pi}{4}}$ را در نقطه‌ی $\dfrac{\pi}{4}$، حساب کنید.

۱۲- اگر داشته باشیم $3-|x-1|\le f(x)\le x^2-2x+4$ در این صورت $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x+f(x)}{x-f(x)}$ را بیابید.

☑ **پیوستگی :**

۱) فرض کنید تابع f در نقطه‌ی a و در یک همسایگی چپ یا راست (یا هر دو) تعریف شده باشد. اگر حد این تابع در a موجود و برابر $f(a)$ باشد، یعنی $\lim\limits_{x\to a}f(x)=f(a)$ گوییم تابع f در a پیوسته است.

۲) پیوستگی توابع در نقاط انتهایی دامنه‌ی خود به معنای آن است که حد چپ یا راست تابع در آن نقطه برابر مقدار تابع در آن نقطه باشد.

۳) اگر تابعی در تمام نقاط دامنه‌ی خود پیوسته باشد، آن را تابعی پیوسته می‌نامند. توابع چندجمله‌ای، $\sqrt[k]{x}$، $\sin x$، $\cos x$، b^x و $\dfrac{1}{x}$ توابع پیوسته‌اند. تابع $y=[x]$ در نقاط صحیح ناپیوسته است.

۴) اگر $g(x)$ تابعی پیوسته و $f(x)$ تابعی باشد که در نقطه‌ای مانند a حدی برابر L داشته باشد و ترکیب $gof(x)$ قابل انجام باشد آنگاه :

$$\lim_{x\to a}g(f(x))=g\left(\lim_{x\to a}f(x)\right)$$

تمرین :

۱- پیوستگی تابع $f(x)=\begin{cases} x^2(x-2) & ; \quad x\le 2 \\ 4-2x & ; \quad x>2 \end{cases}$ را در $x=2$ بررسی کنید. **(دی ۹۰)**

۲- مقدار a را چنان بیابید که تابع $f(x)=\begin{cases} 3x^2-4ax+2 & ; \quad x\ge 1 \\ x-3a & ; \quad x<1 \end{cases}$ در $x=1$ پیوسته باشد. **(دی ۸۹)**

۳- مقادیر a و b را طوری محاسبه کنید که تابع زیر در نقطه‌ی $x=1$ پیوسته باشد. (خرداد ۹۰ – خارج کشور)

$$f(x)=\begin{cases} [x]+bx & ; \quad x>1 \\ 2 & ; \quad x=1 \\ \dfrac{|x-1|}{x^2-1}+a & ; \quad x<1 \end{cases}$$

۴- پیوستگی تابع $f(x)=\sqrt{x-4}$ را در نقطه‌ی $x=4$ بررسی کنید. **(خرداد ۹۰)**

۵- آیا تابع $f(x)=\dfrac{x^2-4}{x-2}$ در ۲ پیوسته است؟ چرا؟ **(شهریور ۹۰)**

۶- نمودار یک تابع را رسم کنید که در ۲، ناپیوسته است ولی در ۲، حد دارد. **(دی ۸۹)**

۷- با رسم نمودار توابع زیر، تعیین کنید کدام یک از آنها در چه نقطه‌ای ناپیوسته است؟

الف) $y=x+[x]$ ب) $y=|x-1|+2$

۸- در تابع $y=\begin{cases} x^2-ax+1 & ; \quad x\le 1 \\ x-2a & ; \quad x>1 \end{cases}$، a را طوری تعیین کنید که تابع پیوسته باشد.

۹- پیوستگی تابع f با ضابطه‌ی $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2+2x-3}{x-1} & ; \quad x\ne 1 \\ 4 & ; \quad x=1 \end{cases}$ را در نقطه‌ی ۱ بررسی کنید.

۱۰- تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\dfrac{\sqrt[3]{x+8}-2}{x}$، $x\ne 0$ مفروض است. $f(0)$ را چنان بیابید که تابع در نقطه‌ی صفر پیوسته باشد.

۱۱- ثابت کنید که به ازای هیچ مقدار برای a، تابع $y=\begin{cases} \dfrac{ax}{|x|} & ; \quad x\ne 0 \\ 1 & ; \quad x=0 \end{cases}$ پیوسته نخواهد شد.

۱۲- به ازای چه مقادیر a و b تابع $f(x)=\begin{cases} ax+1 & ; \quad x\ge 2 \\ x^2+1 & ; \quad -2\le x<2 \\ 3x+b & ; \quad x<-2 \end{cases}$ پیوسته است؟

خلاصه‌ی فصل پنجم

☑ **تعریف مشتق و مشتق‌پذیری :**

۱) اگر f تابعی باشد که در یک همسایگی نقطه‌ی a تعریف شده است، در اینصورت حد زیر را (در صورت وجود) مشتق تابع f در a می‌نامند و با $f'(a)$ نشان می‌دهند :

$$f'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

اگر حد بالا موجود نباشد، گوییم f در a مشتق‌پذیر نیست.

۲) برای محاسبه‌ی مشتق یک تابع f در نقطه‌ای مانند a می‌توان حد زیر را نیز محاسبه کرد :

$$f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

۳) اگر تابع f در یک همسایگی راست نقطه‌ای مانند a تعریف شده باشد، حد راست $\lim_{x\to a^+}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ را در صورت وجود مشتق راست f در a می‌نامند و با $f'_+(a)$ نشان می‌دهند.

۴) اگر تابع f در یک همسایگی چپ نقطه‌ای مانند a تعریف شده باشد، حد چپ $\lim_{x\to a^-}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ را در صورت وجود مشتق چپ f در a می‌نامند و با $f'_-(a)$ نشان می‌دهند.

۵) مشتق‌پذیری یک تابع در نقطه‌ای مانند a معادل با آن است که مشتق‌های چپ و راست تابع در آن نقطه موجود و با هم برابر باشند.

۶) اگر تابعی مشتق‌پذیر باشد آنگاه پیوسته است. اما اگر تابعی پیوسته باشد، ممکن است مشتق‌پذیر نباشد.

تمرین :

۱- در تابع $f(x)=\begin{cases}x^3+1 & ; \quad x\geq -1\\ x^2-1 & ; \quad x<-1\end{cases}$ مشتق‌های چپ و راست را در $x=-1$ جداگانه محاسبه کنید. آیا تابع در $x=-1$ مشتق‌پذیر است؟ چرا؟ (دی ۸۹)

۲- مشتق‌پذیری تابع $f(x)=\begin{cases}x^2-2 & ; x\leq 2\\ \frac{1}{2}x+1 & ; x>2\end{cases}$ را در $x=2$ بررسی کنید. (خرداد ۹۰ – خارج کشور)

۳- اگر f تابعی باشد که در یک همسایگی نقطه‌ی a تعریف شده باشد و ناصفر باشد و f در a مشتق‌پذیر باشد، با استفاده از تعریف نشان دهید که $\frac{1}{f}$ نیز در a مشتق‌پذیر است و $\left(\frac{1}{f}\right)'_{(a)}=-\frac{f'(a)}{f^2(a)}$ (خرداد ۹۰)

۴- با استفاده از تعریف مشتق، مشتق تابع $f(x)=\frac{1}{x+1}$ را در $x=2$ حساب کنید. (شهریور ۹۰)

۵- اگر f تابع مشتق‌پذیری در نقطه‌ی a باشد و c عدد دلخواهی باشد، با استفاده از تعریف نشان دهید تابع cf نیز در نقطه‌ی a مشتق‌پذیر است و $(cf)'_{(a)}=cf'_{(a)}$

۶- مشتق تابع‌های زیر را با استفاده از تعریف به دست آورید :

الف) $f(x)=c$ ب) $g(x)=\sqrt{x-1}$ ج) $f(x)=3x+5$ د) $x(t)=t^4$

۷- مشتق تابع $f(x)=\sqrt{x+2}$ را در نقطه‌ی ۲ با استفاده از تعریف به دست آورید.

۸- تابع g در a مشتق‌پذیر است و به ازای عدد دلخواهی مانند b داریم : $f(x-b)=g(x)$

نشان دهید : $f'(a-b)=g'(a)$

۹- مشتق تابع $y=\cos x$ را مستقیماً از طریق تعریف به دست آورید.

۱۰- مشتق تابع $y=\sin 2x$ را از طریق تعریف به دست آورید.

۱۱- فرض کنید $f(x)$ تابعی مشتق‌پذیر و a عددی حقیقی باشد. با استفاده از تعریف نشان دهید تابع $g(x)=f(ax)$ نیز مشتق‌پذیر است و $g'(x)=af'(ax)$.

۱۲- اگر دو تابع f و g در نقطه‌ای مانند a مشتق‌پذیر باشند، نشان دهید تابع $f.g$ نیز در a مشتق‌پذیر است و
$$(f.g)'(a)=f'(a).g(a)+f(a).g'(a)$$

۱۳- مشتق‌پذیری تابع $f(x)=\sqrt{x^2(x+1)}$ را در نقطه‌ی $a=0$ بررسی کنید.

۱۴- مشتق‌پذیری تابع $f(x)=(x-2)[x]$ را در نقطه‌ی ۲ بررسی کنید.

۱۵- مشتق‌پذیری تابع $f(x)=\begin{cases} x^2 & ; \quad x\ge 1 \\ x^3 & ; \quad x<1 \end{cases}$ را در $x=1$ بررسی کنید.

۱۶- آیا تابع مقابل در $x=0$ مشتق‌پذیر است؟ $f(x)=\begin{cases} x\sin\frac{1}{x} & ; \quad x\ne 0 \\ 0 & ; \quad x=0 \end{cases}$

☑ قوانین مشتق‌گیری :

۱) $y=k \Rightarrow y'=0$ ثابت است k

۲) $y=ax+b \Rightarrow y'=a$

۳) $y=u\pm v \Rightarrow y'=u'\pm v'$

۴) $y=k.u \Rightarrow y'=k.u'$ ثابت است k

۵) $y=u.v \Rightarrow y'=u'v+v'u$

۶) $y=\dfrac{u}{v} \Rightarrow y'=\dfrac{u'.v-v'.u}{v^2}$

۷) $y=x^n \Rightarrow y'=n.x^{n-1}$

۸) $y=u^n \Rightarrow y'=n.u^{n-1}.u'$

۹) $y=\dfrac{1}{x} \Rightarrow y'=-\dfrac{1}{x^2}$

۱۰) $y=\dfrac{1}{u} \Rightarrow y'=-\dfrac{u'}{u^2}$

۱۱) $y=\sqrt{x} \Rightarrow y'=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

۱۲) $y=\sqrt{u} \Rightarrow y'=\dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$

۱۳) $y=\sqrt[n]{u^m}=u^{\frac{m}{n}} \Rightarrow y'=\dfrac{m}{n}u^{\frac{m}{n}-1}.u'$

۱۴) $y=\sin x \Rightarrow y'=\cos x$

۱۵) $y=\sin u \Rightarrow y'=u'.\cos u$

۱۶) $y=\cos x \Rightarrow y'=-\sin x$

۱۷) $y=\cos u \Rightarrow y'=-u'.\sin u$

۱۸) $y=\tan x \Rightarrow y'=1+\tan^2 x$

۱۹) $y=\tan u \Rightarrow y'=u'\left(1+\tan^2 u\right)$

۲۰) $y=\cot g\, x \Rightarrow y'=-\left(1+\cot g^2 x\right)$

۲۱) $y=\cot g\, u \Rightarrow y'=-u'\left(1+\cot g^2 u\right)$

۲۲) $y=\sin^n u \Rightarrow y'=n\sin^{n-1} u.u'.\cos u$

۲۳) $y=\cos^n u \Rightarrow y'=n.\cos^{n-1} u.u'.(-\sin u)$

۲۴) $y=\tan^n u \Rightarrow y'=n.\tan^{n-1} u.u'\left(1+\tan^2 u\right)$

۲۵) $y=\cot g^n u \Rightarrow y'=n.\cot g^{n-1} u(-u')\left(1+\cot g^2 u\right)$

۲۶) $y=\sin^{-1} x \Rightarrow y'=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

۲۷) $y=\sin^{-1} u \Rightarrow y'=\dfrac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$

۲۸) $y=\cos^{-1} x \Rightarrow y'=-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

۲۹) $y=\cos^{-1} u \Rightarrow y'=-\dfrac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$

۳۰) $y=\tan^{-1} x \Rightarrow y'=\dfrac{1}{1+x^2}$

۳۱) $y=\tan^{-1} u \Rightarrow y'=\dfrac{u'}{1+u^2}$

۳۲) $y=\cot g^{-1} x \Rightarrow y'=-\dfrac{1}{1+x^2}$

۳۳) $y=\cot g^{-1} u \Rightarrow y'=-\dfrac{u'}{1+u^2}$

تمرین :

۱- مشتق بگیرید : (ساده کرده الزامی نیست.) (دی ۸۹)

الف) $f(x)=\frac{x+1}{\sqrt{x+1}}$　ب) $g(x)=(1+\sin x).\tan^{-1}x$

۲- مشتق بگیرید : (ساده کردن الزامی نیست.) (خرداد ۹۰)

الف) $f(x)=\frac{(3x^2-1)^3}{x+1}$　ب) $g(x)=\sqrt{1-2\cos 3x}$　ج) $k(x)=2\tan^{-1}x+3\sin^{-1}x+\frac{4}{x}$

۳- مشتق توابع زیر را حساب کنید : (ساده کردن الزامی نیست.) (شهریور ۹۰)

الف) $f(x)=\sin\left(\sqrt{2x+5}\right)$　ب) $g(x)=\frac{\sqrt{x}}{(2x+1)^3}$　ج) $h(x)=(1+\tan x)\cos^{-1}x$

۴- مشتق توابع زیر را بیابید : (ساده کردن الزامی نیست.) (دی ۹۰)

الف) $f(x)=\frac{3x^2+1}{x^3+2}$　ب) $g(x)=\tan^3x+\sin^{-1}x$　ج) $h(x)=\sqrt[3]{x^5-\cos 2x}$

۵- مشتق توابع زیر را حساب کنید : (ساده کردن الزامی نیست.) (خرداد ۹۰ – خارج کشور)

الف) $f(x)=\frac{\sin x}{x^3+2x}$　ب) $g(x)=\sqrt[3]{x^2+3}$

۶- مشتق تابع‌های زیر را حساب کنید : (ساده کردن الزامی نیست.)

۱) $y=(x^3-x^2-1)\left(x-\sqrt{x}+5\right)$

۲) $y=x^4-\frac{1}{x^4}-\sqrt{3}$

۳) $y=\frac{2}{x^3-1}$

۴) $y=(2x+1)(4-3x)\left(x^2+x+5\right)$

۵) $y=5x\left(2x^2-3x+1\right)^4$

۶) $y=\frac{x}{\sqrt{x}+2}$

۷) $y=2\sin^3\frac{1}{x+1}$

۸) $y=\cos\sqrt[3]{t}$

۹) $y=x.\tan\frac{x}{2}$

۱۰) $y=\frac{x^2-\sin^2x}{1+\cos^2x}$

۱۱) $y=\frac{\tan x}{\cos^{-1}x}$

۱۲) $y=(x+\sin x)\sin^{-1}x$

۱۳) $y=\frac{(2x+1)^5}{x\sqrt{x}}$

۱۴) $y=\tan^3x^2+\cos\left(5x-\frac{\pi}{4}\right)$

۱۵) $y=\sqrt{2+\sqrt{\tan^2 3x+1}}$

۱۶) $y=6\sqrt[3]{x}-3\sqrt[4]{x}$

۱۷) $y=\sqrt{1+\cos^2\sqrt{1+x^2}}$

۱۸) $y=\tan^{-1}\left(2x-x^3\right)$

۱۹) $y=\frac{\sqrt{x+1}}{x^2-1}$

۲۰) $y=\frac{(x-2)\left(x^2+1\right)^5}{\sqrt{x}+1}$

☑ **مماس و قائم :**

۱- شیب مماس بر تابع در نقطه‌ی $x = x_0$ برابر است با $f'(x_0)$ و معادله‌ی خط مماس برابر است با :

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$

۲- شیب قائم بر تابع در نقطه‌ی $x = x_0$ برابر است با $-\frac{1}{f'(x_0)}$ و معادله‌ی خط قائم برابر است با :

$$y - f(x_0) = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0)$$

۳- برای تعیین معادله‌ی مماس بر تابع $y = f(x)$ از نقطه‌ی $A(x_1, y_1)$ خارج تابع، ابتدا نقطه‌ی $T(\alpha, f(\alpha))$ را روی تابع در نظر می‌گیریم و شیب خط واصل بین A و T را تعیین می‌کنیم : $m_{AT} = \frac{f(\alpha) - y_1}{\alpha - x_1}$ این شیب باید با مشتق تابع در نقطه‌ی $T(\alpha, f(\alpha))$ یعنی $f'(\alpha)$ برابر باشد. از حل معادله‌ی $\frac{f(\alpha) - y_1}{\alpha - x_1} = f'(\alpha)$ مقدار α بدست می‌آید.

✍ تمرین :

۱- شیب خط مماس بر نمودار $y = \frac{1}{x}$ را در نقطه‌ای به طول ۱ واقع بر آن به دست آورید. (دی ۸۹)

۲- نقاطی از نمودار تابع $y = x^3 - 2x - 1$ را تعیین کنید که خط مماس بر منحنی در این نقاط موازی نیمساز ربع اول و سوم باشد. (شهریور ۹۰)

۳- معادله‌ی خط قائم بر نمودار تابع $f(x) = 2x^3 - 1$ را در نقطه‌ای به طول ۱ به دست آورید. (دی ۹۰)

۴- معادله‌ی خط مماس بر منحنی تابع $f(x) = \tan^{-1}(2x + 1)$ را در نقطه‌ای به طول صفر بر منحنی به دست آورید. (خرداد ۹۰ – خارج کشور)

۵- معادله‌ی خط مماس بر نمودار تابع $f(x) = \frac{1}{1 + x^2}$ را در $x = 1$ بنویسید.

۶- معادله‌ی خط عمود بر نمودار تابع $y(x) = x^2 - \sqrt{x + 1}$ را در $x = 0$ بنویسید.

۷- در چه نقاطی خط مماس بر نمودار تابع $y(x) = \sin 3x$ موازی محور xهاست؟

۸- از مبدأ مختصات، خط‌هایی مماس بر نمودار تابع $f(x) = x^2 + 1$ رسم کرده‌ایم. معادله‌ی این خط‌ها را بنویسید.

۹- نقطه‌ای در صفحه بیابید که از آن نقطه بتوان دو خط مماس بر سهمی $y = x^2$ رسم کرد و این خط‌ها بر هم عمود باشند. این مسئله چند جواب دارد؟ مجموعه‌ی جواب‌های این مسئله را رسم کنید.

۱۰- معادله‌ی خط عمود بر نمودار تابع $y = x^2 + x - 1$ در نقطه‌ی تلاقی با محور عرض‌ها را بنویسید.

۱۱- نمودار تابع $y = \sin x$ با چه زاویه‌ای از مبداء می‌گذرد؟ (زاویه خط مماس بر نمودار تابع نسبت به محور xها)

☑ **آهنگ تغییرات :**

۱) آهنگ متوسط تغییرات y نسبت به x وقتی x در بازه‌ی $[x_1, x_2]$ تغییر می‌کند برابر است با :

$$\text{شیب خط قاطع} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

۲) آهنگ لحظه‌ای (آنی) تغییرات y نسبت به x در نقطه‌ی $x = x_1$ برابر است با :

$$\text{شیب خط مماس} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = y' = f'(x_1)$$

✍ تمرین :

۱- مساحت هر دایره‌ای تابعی از محیط آن است. آهنگ تغییرات مساحت دایره را نسبت به محیط آن برای دایره‌ی به محیط 5π حساب کنید.

۲- آهنگ تغییرات مساحت یک مربع را نسبت به محیط آن برای مربعی که محیط آن ۱۶ واحد است به دست آورید. (خرداد ۹۰)

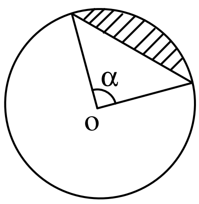
۳- آهنگ تغییرات محیط دایره را نسبت به مساحت آن برای دایره‌ای به مساحت π حساب کنید.

۴- بادکنکی کروی توسط تلمبه‌ای در لحظه‌ی $t=0$ شروع به بادشدن می‌کند. هر ثانیه ۴ سانتی‌متر مکعب هوا وارد بادکنک می‌شود؛

الف) آهنگ تغییرات شعاع بادکنک نسبت به زمان در لحظه‌ای که حجم بادکنک به $36\pi\ cm^3$ می‌رسد چقدر است؟

ب) آهنگ تغییرات مساحت بادکنک نسبت به شعاع در لحظه‌ای که شعاع بادکنک به $6cm$ می‌رسد، چقدر است؟

۵- در شکل روبه‌رو، نقطه‌ی o مرکز دایره‌ای به شعاع واحد است؛



الف) آهنگ تغییرات S (مساحت قسمت سایه زده شده) را نسبت به α حساب کنید.

ب) اگر طول وتر برابر با ℓ باشد، آهنگ تغییرات S را نسبت به ℓ حساب کنید.

۶- خودرویی که با سرعت ثابت در حال حرکت است در لحظه‌ی $t=0$ ترمز می‌کند. فاصله‌ی خودرو از نقطه‌ای که ترمز کرده است به عنوان تابعی از زمان به صورت $S(t)=25t-\frac{5}{2}t^2$ است که در آن t بر حسب ثانیه و S بر حسب متر است؛

الف) سرعت خودرو در لحظه‌ی شروع ترمز چقدر بوده است؟

ب) خودرو از شروع ترمز چند متر را طی می‌کند تا متوقف شود؟

☑ مشتق تابع معکوس و تابع مرکب :

اگر $A\left|\begin{matrix}\alpha\\ \beta\end{matrix}\right.\in f$ و $A'\left|\begin{matrix}\beta\\ \alpha\end{matrix}\right.\in f^{-1}$ آنگاه : $\left(f^{-1}\right)'(\beta)=\frac{1}{f'(\alpha)}$

رابطه‌ی فوق را می‌توان به‌صورت $(f^{-1})'_{(x)}=\frac{1}{f'(f^{-1}{}_{(x)})}$ نیز نوشت.

قانون مشتق تابع مرکب چنین است : $y=fog(x)=f(g(x))\Rightarrow y'=g'(x).f'(g(x))$

✍ تمرین :

۱- با استفاده قانون مشتق تابع معکوس، مشتق تابع $y=\sin^{-1}(x)$ را بدست آورید.

۲- تابع $f(x)=x^3+2x+1$ مفروض است. معادله‌ی خط مماس بر نمودار تابع f^{-1} را در نقطه‌ی $b=4$ به دست آورید. $\left(b\in D_{f^{-1}}\right)$

۳- اگر $f'(x)=۲x^{۲}+۱$**، مشتق** $y=f(\sin x)$ **را حساب کنید.**

۴- اگر $g(x)=\sqrt{x+۱}$ **و** $f'(x)=۲x-۱$**،** $(fog)'(۳)$ **را به دست آورید.**

۵- اگر $g(۲x-۱)=f(x^{۲})$ **و** $g'(۳)=۸$ **آنگاه** $f'(۴)$ **چقدر است؟**

☑ **کاربرد مشتق در تشخیص یکنوایی :**

۱) مثبت بودن مشتق یک تابع در یک بازه به معنای صعودی بودن تابع در آن بازه است.

۲) منفی بودن مشتق یک تابع در یک بازه به معنای نزولی بودن تابع در آن بازه است.

۳) اگر مشتق تابع در نقطه‌ای صفر شود و تغییر علامت دهد، تابع در آن نقطه ماکزیمم یا می‌نیمم می‌شود.

x		x_1	
y'	$-$ ↘	٥	$+$ ↗

min

x		x_1	
y'	$+$ ↗	٥	$-$ ↘

max