

دوره‌ی تابستانی المپیاد کامپیوتر

آزمون نهایی نظری یکم

سه‌شنبه ۱۷ شهریور ۱۳۹۴

وقت: ۴ ساعت و ۴۵ دقیقه

مسئله‌ی یکم. جدول سیاه و سفید ۳۵ امتیاز

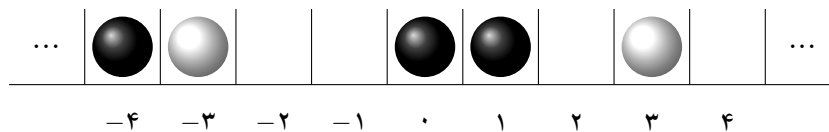
یک جدول $n \times n$ داریم که در ابتدا تمام خانه‌های آن سفید هستند. دو نفر با هم روی این جدول بازی می‌کنند. در هر مرحله نفر یکم یک سطر انتخاب می‌کند؛ طوری که آن سطر، حداقل یک خانه‌ی سفید داشته باشد؛ سپس نفر دوم یکی از خانه‌های سفید آن سطر را در نظر گرفته و آن را سیاه می‌کند. هم‌چنین پس از هر مرحله هر خانه‌ی سفیدی که هم خانه‌ی سیاه هم‌ستون و هم خانه‌ی سیاه هم‌سطر داشته باشد، خودش نیز سیاه می‌شود. بازی وقتی تمام می‌شود که تمام خانه‌ها سیاه شوند. نفر یکم قصد دارد تعداد مراحل بازی کمینه شود؛ در حالی که نفر دوم می‌خواهد بازی در بیش‌ترین مرحله‌ی ممکن انجام شود. اگر هر دو نفر به بهترین نحو ممکن بازی کنند، بازی پس از چند مرحله به پایان می‌رسد؟

مسئله‌ی دوم. گراف با ابهت! ۴۳ امتیاز

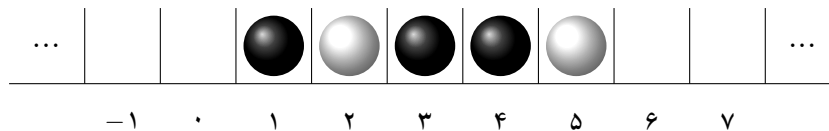
یک گراف ساده‌ی خودمکمل با زوج رأس داریم. ثابت کنید این گراف تطابق کامل دارد.

مسئله‌ی سوم. توپ‌ها ۵۵ امتیاز

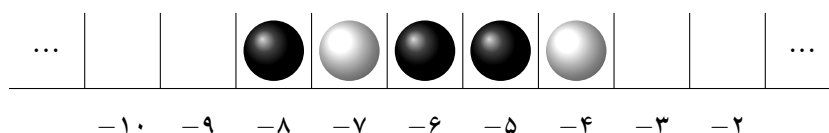
یک دنباله‌ی نامتناهی از جعبه‌ها با شماره‌های $\dots, 2, 1, 0, -1, -2, \dots$ داریم. دقیقاً n تا از جعبه‌ها توپ سیاه و $n-1$ تا از آن‌ها توپ سفید دارند و بقیه‌ی جعبه‌ها خالی هستند. شکل زیر، مثالی برای $n=3$ است:



هر گاه تمام توپ‌ها در جعبه‌های متوالی قرار بگیرند؛ گوییم یک پیکره تشکیل شده است؛ برای مثال شکل زیر، پیکره‌ای برای $n=3$ است:



توجه کنید در یک پیکره، تنها نحوه‌ی قرار گرفتن توپ‌ها در کنار هم مهم است و شماره‌ی جعبه‌هایی که شامل توپ هستند، مهم نیست. برای مثال، پیکره‌ی بالا با پیکره‌ی زیر یک‌سان در نظر گرفته می‌شود:



در هر مرحله می‌توانیم دو توپ مجاور ناهم‌رنگ در نظر بگیریم و آن دو را به همان ترتیبی که دارند، به دو جعبه‌ی خالی متوالی ببریم. شکل زیر، مثالی برای انجام یک گام است:



دو پیکره‌ی A, B را در نظر بگیرید. ثابت کنید می‌توان با متناهی گام از پیکره‌ی A به پیکره‌ی B رسید.