



educo.ir

دانلود سوالات آزمون‌های مختلف

## آزمون مرحله‌ی دوم شانزدهمین المپیاد ریاضی کشور

زمان برگزاری: اردیبهشت ۱۳۷۷

منبع: المپیاد ریاضی در ایران، جلد ۲  
تألیف دکتر عبادالله محمودیان، کیوان ملاحی کارای، مهران اخباریفر

۱. اگر  $a_1 < a_2 < \dots < a_n$  تا عدد حقیقی باشند، ثابت کنید:

$$a_1 a_n^4 + a_2 a_n^4 + \dots + a_{n-1} a_n^4 + a_n a_1^4 \geq a_2 a_1^4 + a_3 a_1^4 + \dots + a_n a_{n-1}^4 + a_1 a_n^4$$

۲. مثلث  $ABC$  را در نظر می‌گیریم.  $I$  مرکز دایره‌ی محاطی آن و  $D$  نقطه‌ی تقاطع  $AI$  با دایره‌ی محیطی مثلث  $ABC$  است. فرض کنید  $E$  و  $F$  به ترتیب پای عمودهای وارد از  $I$  بر  $BD$  و  $CD$  باشند. اگر  $IE + IF = \frac{1}{4} AD$ ، زاویه‌ی  $\angle BAC$  را پیدا کنید.

۳. فرض کنید  $n$  یک عدد طبیعی باشد.  $n$  تایی  $(a_1, a_2, \dots, a_n)$  از اعداد طبیعی را «خوب» می‌نامیم، اگر داشته باشیم  $a_1 + a_2 + \dots + a_n = 2n$  و نیز حاصل جمع هیچ تعدادی از  $a_i$ ها برابر  $n$  نشود. تمام  $n$  تاییهای «خوب» را پیدا کنید.

(به‌عنوان مثال ۳ تایی  $(1, 1, 4)$  «خوب» است ولی ۵ تایی  $(1, 2, 1, 2, 4)$  «خوب» نیست، زیرا حاصل جمع مؤلفه‌های اول، دوم، چهارم برابر ۵ است.)

۴. فرض کنید که عدد طبیعی  $n$  حداقل چهار مقسوم‌علیه متمایز داشته باشد و  $d_1 < d_2 < d_3 < d_4 < \dots$  چهار کوچکترین مقسوم‌علیه آن باشند. کلیه‌ی اعداد طبیعی  $n$  را پیدا کنید که  $d_1^x + d_2^x + d_3^x + d_4^x = n$ .

۵. مثلث  $ABC$  که در آن  $BC > CA > AB$  مفروض است. نقطه‌ی  $D$  را روی ضلع  $BC$ ، و نقطه‌ی  $E$  را روی امتداد ضلع  $AB$  (نزدیک  $A$ ) طوری در نظر می‌گیریم که  $BD = BE = AC$ . دایره‌ی محیطی مثلث  $BED$  ضلع  $AC$  را در نقطه‌ی  $P$  قطع می‌کند و  $BP$  نیز دایره‌ی محیطی مثلث  $ABC$  را در نقطه‌ی  $Q$  قطع می‌کند. ثابت کنید  $AQ + CQ = BP$ .

۶. اگر  $A = (a_1, a_2, \dots, a_n)$  و  $B = (b_1, b_2, \dots, b_n)$  دو  $n$  تایی از صفر و یک باشند، فاصله‌ی  $A$  و  $B$  را برابر تعداد  $n$ هایی می‌گیریم که  $a_i \neq b_i$  ( $1 \leq i \leq n$ ).

(به‌عنوان مثال اگر  $A = (0, 1, 1)$  و  $B = (1, 1, 0)$ ، فاصله‌ی  $A$  و  $B$  برابر ۲ است.) حال فرض کنید که  $A$ ،  $B$  و  $C$  سه  $n$  تایی از صفر و یک باشند، به طوری که فاصله‌ی دو به دوی آنها  $d$  است.

الف) نشان دهید که  $d$  زوج است.

ب) ثابت کنید که یک  $n$  تایی از صفر و یک، مثل  $D$ ، وجود دارد که فاصله‌اش با  $A$ ،  $B$  و  $C$  برابر  $\frac{d}{4}$  است.