



12<sup>th</sup> IOAA team  
I.R.IRAN

# کپهان شناسے

درنامہ آمادگے مرحلہ اول

محمد صدر اچیدرے

سوالات کیهان‌شناسی و دینامیک کهکشان مرحله اول را می‌توان به دو بخش کلی تقسیم کرد. بخش اول مطالب حفظی و تاریخچه رویدادها است که غالب سوالات در این بخش است و دیگری مسائل محاسباتی با استفاده از روابط. در این درسنامه سعی می‌کنیم بخش محاسباتی کیهان‌شناسی را تا حد خوبی پوشش دهیم.

## قانون هابل

یکی از معروف‌ترین و پرکاربردترین قوانین کیهان‌شناسی در سطح مرحله یک، قانون هابل است که از رصد کهکشان‌های دور دست و مطالعه سرعت آن‌ها به وسیله اثر دوپلر به دست آمده. شکل قانون به شرح زیر است:

$$v_{(km\ s^{-1})} = H_0 r_{(Mpc)}$$

که رابطه سرعت شعاعی دور شدن کهکشان‌ها از ما به علت انبساط کیهان در واحد کیلومتر بر ثانیه را بر حسب فاصله آن از ما در واحد مگا پارسک می‌دهد.  $H$  در رابطه به ثابت هابل معروف است و مقدار آن در سوالات در بازه ای بین ۶۵ الی ۷۵ قرار دارد و واحد آن کیلومتر بر ثانیه بر مگا پارسک می‌باشد.

همانطور که میتوان از رابطه فهمید، بعد ثابت هابل معکوس زمان است و میتواند مقیاسی از زمان عالم باشد. به زمانی که به وسیله معکوس کردن ثابت هابل به دست می‌آید معمولاً عمر کیهان گفته می‌شود.

**مثال:** اگر ثابت هابل در زمان حال برابر:  $70 \frac{km}{s\ Mpc}$  باشد، عمر عالم را به دست آورید.

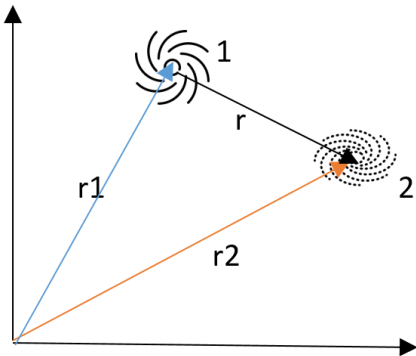
نکته مهم در حل این سوال آن است که دقت کنیم که ثابت هابل را در دستگاه SI بنویسیم:

$$H = 70 \frac{km}{s\ Mpc} = 2.26 \times 10^{-18} \frac{1}{s}$$

زمان هابل به صورت زیر محاسبه میشود:

$$t_H = \frac{1}{H} = 13.98\ Gyr$$

حال می‌خواهیم ثابت کنیم قانون هابل برای تمام ناظرها برقرار است. دستگاه مختصاتی را به صورتی انتخاب می‌کنیم که مبدا آن خودمان باشیم و حرکت دو کهکشان ۱ و ۲ را در آن بررسی می‌کنیم:



میدانیم سرعت هر کهکشان در راستای بردار مکان آنهاست بنابراین این:

$$\vec{v}_1 = H\vec{r}_1$$

$$\vec{v}_2 = H\vec{r}_2$$

و برای بردار  $\vec{r}$  داریم:

$$\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$$

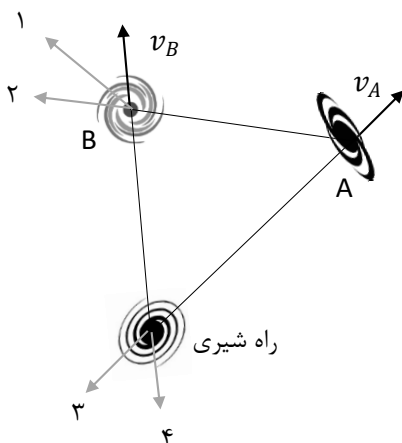
بنابر این سرعت کهکشان ۲ از دید کهکشان ۱ برابر است با:

$$\vec{v} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1 = H\vec{r}_2 - H\vec{r}_1 = H(\vec{r}_2 - \vec{r}_1) = H\vec{r}$$

که همان قانون هابل است و نشان می‌دهد تمام عالم از دید ناظر ۱ به صورت شعاعی دور می‌شوند.

مثال: اولین مرحله یک آزمایشی تیم

دو کهکشان با نام‌های A و B را رصد می‌کنیم که هر دو آن‌ها به دلیل انبساط کیهان از ما به صورت کاملاً شعاعی دور می‌شوند. کدام گزینه به ترتیب سرعت دور شدن کهکشان B و راه شیری را از دید ناظری که بر روی کهکشان A قرار دارد نشان می‌دهد؟



(۱) ۱ و ۳

(۲) ۱ و ۴

(۳) ۲ و ۳

(۴) ۲ و ۴

گزینه صحیح: ۳

سوال دیگری که می‌توان از قانون هابل طرح کرد، این است که چه مدت طول می‌کشد فاصله بین دو کهکشان  $n$  برابر شود. برای حل این مسئله یک فرض ساده کننده باید انجام داد و آن هم اینکه در این مدت، ثابت هابل ثابت باقی می‌ماند!!! و در ادامه با استفاده از انتگرال گیری از سرعت به جواب خواهیم رسید.

$$v = \frac{dr}{dt} = Hr \Rightarrow \frac{dr}{r} = H dt$$

$$\int_r^{r'} \frac{dr}{r} = \int_0^t H dt \Rightarrow \ln\left(\frac{r'}{r}\right) = H \Delta t$$

$$\Delta t = \frac{\ln(n)}{H}$$

که در رابطه بالا باید دقت کرد که اعداد در واحد SI باشند.

### ضریب مقیاس و قرمزگرایی

در عالم فاصله را به صورت زیر تعریف می‌نماییم:

$$r = a\chi$$

که در آن  $a$  را به عنوان ضریب مقیاس می‌شناسیم و  $\chi$  فاصله کنونی جسم از ماست معمولاً در سوالات تغییر نمی‌کند و ثابت است. در انبساط عالم ما فرض می‌کنیم کهکشان‌ها ثابت هستند و در واقع این محل کهکشان‌ها (عالم) است که منبسط می‌شود. مثل آن که نموداری را روی دو برگه با ابعاد مختلف چاپ کنیم. در هر دو نمودار فاصله بین دو نقطه بر حسب واحد نمودار برابر است ولی فاصله بین آنها در واقعیت متفاوت است و صرفاً مقیاس ما تغییر کرده است. در عالم هم همین اتفاق در حال رخ دادن است. کهکشان‌ها ثابت هستند ولی فقط مقیاس آن‌ها تغییر می‌کند.

برای تعریف  $a$  باید مبدا مشخص کنیم و این مبدا زمان حال است به صورتی که  $a$  در زمان حال برابر مقدار ۱ است. در گذشته این مقدار کوچکتر و در آینده بزرگتر خواهد بود.

رابطه بین ضریب مقیاس در زمان تابش نور یک جسم و قرمزگرایی آن نیز به شرح زیر است:

$$a = \frac{1}{1+z}$$

## تابش زمینه کیهان (CMB)

در زمان های اولیه پس از بیگ بنگ تابشی موسوم به CMB در عالم به صورت یکنواخت پخش شد که با انبساط عالم رفته رفته سرد و سرد تر شد تا آن که اکنون دمای آن برابر مقدار ۲,۷۲۵ کلوین است.

این دما با ضریب مقیاس عالم رابطه ای دارد که به صورت زیر است:

$$aT = cte.$$

$$\Rightarrow aT = a_0 T_0$$

$$aT = T_0 \quad \text{از آنجا که } a_0 \text{ برابر ۱ است پس:}$$

با رابطه بالا میتوان دمای زمینه کیهان را در زمان های مختلف محاسبه نمود.

**مثال:** در زمانی که حجم کیهان یک هشتم حجم کنونی آن بوده، فشار تابشی ناشی از فوتون های زمینه کیهان چند نانو پاسکال بوده است؟ ( اولین شبیه ساز مرحله ۱ دوازدهمین تیم ایران )

**پاسخ:**

با استفاده از رابطه دمای زمینه کیهان بر حسب ضریب مقیاس داریم:

$$a_1 T_1 = a_2 T_2$$

از آنجا که ضریب مقیاس در زمان حال برابر 1 است رابطه به صورت زیر خواهد شد:

$$aT = T_0 = 2.735 \text{ k}$$

و میدانیم حجم با توان سوم ضریب مقیاس در تناسب است بنابراین هنگامی که حجم کیهان یک هشتم باشد ، ضریب مقیاس نصف مقدار کنونی ( $a=0.5$ ) خواهد بود بنابراین این دمای تابش زمینه در آن لحظه برابر  $T=5.47$  کلوین خواهد شد. و از رابطه فشار تابشی داریم:

$$P_{rad} = \frac{1}{3} a_{\text{(ثابت تابش)}} T^4 = 2.25 \times 10^{-4} \text{ nPa}$$

## معادله فریدمان

مفاهیم این بخش عموماً از سطح مرحله یک بالاتر هستند برای همین خیلی به تشریح آن‌ها نمی‌پردازیم و صرفاً روابط و نحوه استفاده از آن‌ها را بررسی میکنیم. (برای مطالعه کامل تر، به فصل 29 مادرن مراجعه کنید.)

از نوشتن رابطه انرژی برای کیهان معادله اول فریدمان به صورت زیر به دست می‌آید:

$$H^2 - \frac{8\pi G\rho}{3} = \frac{-kc^2}{a^2}$$

که در رابطه بالا ضربی از انرژی کل کیهان است و هندسه آن را تعیین میکند و  $H$  پارامتر هابل در هر لحظه است و  $\rho$  چگالی کیهان میباشد.

برای  $k$  داریم:

$k < 0$  آنگاه انرژی کیهان مثبت است و به آن کیهان باز گفته میشود که انبساط در آن برای همیشه ادامه دارد.

$k = 0$  آنگاه انرژی کیهان صفر است و به آن کیهان تخت گفته میشود که انبساط در بی‌نهایت متوقف می‌شود.

$k > 0$  آنگاه انرژی کیهان منفی است و به آن کیهان بسته گفته میشود که انبساط در آن بعد از مدتی متوقف شده و پس از آن شروع به انقباض می‌کند.

کیهان ما با تقریب خوبی تخت است.

رابطه کلی چگالی اجزای مختلف کیهان با قرمزگرایی (ضریب مقیاس):

$$\begin{cases} \rho_m = \rho_{m_0}(1+z)^3 \\ \rho_{rad} = \rho_{rad_0}(1+z)^4 \\ \rho_\Lambda = \rho_{\Lambda_0}(1+z)^0 \end{cases}$$

که در رابطه بالا زیروند  $m$  برای ماده (تاریک + باریونی)،  $rad$  برای تابش و  $\Lambda$  برای انرژی تاریک میباشد.

## چگالی بحرانی

به چگالی کیهان تخت در هر لحظه ، چگالی بحرانی میگویند که با استفاده از معادله اول فریدمان به صورت زیر در خواهد آمد:

$$\rho_c = \frac{3H^2}{8\pi G}$$

## پارامتر چگالی

به نسبت چگالی در کیهان های مختلف به چگالی حدی ، پارامتر چگالی گویند و آن را با  $\Omega$  نشان میدهند.

$$\Omega = \frac{\rho}{\rho_c} = \frac{8\pi G\rho}{3H^2}$$

پارامتر چگالی نیز میتواند هندسه کیهان را مشخص سازد به صورتی که:

$\Omega < 1$  آنگاه کیهان بسته است.

$\Omega = 1$  آنگاه کیهان تخت است.

$\Omega > 1$  آنگاه کیهان باز است.

مثال: فرض کنید کیهان تخت و ماده غالب است و تماماً از هیدروژن تشکیل شده است . چگالی تعداد اتم های

هیدروژن در زمانی که ثابت هابل  $73 \frac{km}{s.Mpc}$  است چقدر خواهد بود؟

پاسخ:

$$\rho = \rho_c = \frac{3H^2}{8\pi G} = 10^{-26} \text{ kg m}^{-3}$$

$$n = \frac{\rho}{m_H} = 6 \text{ m}^{-3}$$

بخش های محاسباتی برای مرحله ۱ تقریبا تمام شده اند. در ادامه چند سوال برای تمرین آورده شده است:

۱- با فرض آنکه ثابت هابل در زمان حال برابر  $68 \frac{km}{s Mpc}$  باشد ، مدت زمانی که طول میکشد فاصله بین دو کهکشان 3 برابر شود را محاسبه کنید.

۲- در چه قرمزگرایی ، چگالی فوتون های ناشی از تابش زمینه کیهان دو برابر مقدار کنونی آن بوده است.

۳- در زمان قدیم منجمان بر این باور بودند که ثابت هابل برابر  $500 \frac{km}{s Mpc}$  است. این منجمان طول عمر کیهان را چقدر می پنداشتند؟

۴- با استفاده از قانون هابل ثابت کنید عالم همسانگرد است.

۵- اگر چگالی کیهان در حال حاضر  $10^{-30} \times 9.9 \frac{g}{cm^3}$  باشد، ثابت هابل را در این لحظه محاسبه کنید. (کیهان را تخت فرض کنید)

۶- اگر فرض کنیم جهان ما در این لحظه تخت است و ۷۰ درصد از انرژی تاریک و ۳۰ درصد از ماده تاریک تشکیل شود ، چگالی ماده تاریک را زمانی که حجم کیهان یک سوم حجم فعلی آن بوده است محاسبه کنید.