

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 \\ 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = -5 \\ y = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4x + my = -2 \\ (m-1)x - 2my = 4 \end{cases}$$

$$\begin{vmatrix} 4 & m \\ m-1 & -2m \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -8m - m^2 + m = 0 \Rightarrow -m^2 - 7m = 0 \Rightarrow -m(m+7) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} m = 0 \text{ غ ق ق} \\ m = -7 \end{cases}$$

بی شمار جواب دارد $m = -7 \Rightarrow \frac{4}{-8} = \frac{-2}{14} = \frac{-2}{7}$

ب)

$$\frac{a}{a} = \frac{b}{b} \neq \frac{c}{c}$$

$$\frac{2}{2m-1} = \frac{-m}{-2m} \Rightarrow \frac{2}{2m-1} = \frac{1}{2} \Rightarrow 2m-1 = 4 \Rightarrow m = \frac{5}{2}$$

پاسخ کتاب کار و تمرین

مجموعه تمرینات

$$AB = I \Rightarrow B = A^{-1} = \frac{1}{-2} \begin{bmatrix} 5 & -4 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{5}{2} & 2 \\ \frac{3}{2} & -1 \end{bmatrix}$$

A وارون پذیر نمی باشد $|A| = -12 + 12 = 0 \Rightarrow$ الف

A وارون پذیر است $|A| = 28 - 30 = -2 \Rightarrow$ ب

A وارون پذیر است $|A| = (a+1)(a-1) + 2 = a^2 + 1 \neq 0 \Rightarrow$ پ

٣- 

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow (AB)^{-1} = \frac{1}{-1} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$B^{-1} = \frac{1}{1} \begin{bmatrix} -2 & -3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow B^{-1}A^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & -3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -5 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow (AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

٤- 

الف) $\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 3 \end{bmatrix}$

ب) $\begin{cases} 2x - 3y = 9 \\ 4x + y = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 3 \end{bmatrix}$

٥- 

الف) $\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 1 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 9 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{19} \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 9 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{19} \begin{bmatrix} 29 \\ -35 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -1 \end{cases}$$

ب) $\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 16 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 10 \\ 16 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{1}{-19} \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ -3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 10 \\ 16 \end{bmatrix} = \frac{1}{-19} \begin{bmatrix} -10 & -32 \\ -30 & 64 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -1 \end{cases}$$

٦- الف) 

$$\begin{aligned} |A| &= 10 - 12 = -2 \\ |B| &= 18 - 10 = 8 \\ AB &= \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 21 & 22 \\ 27 & 38 \end{bmatrix} \Rightarrow |AB| = 21(38) - 27(22) = -16 \end{aligned} \Rightarrow |AB| = |A| \times |B|$$

ب)

$$2A = \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 8 & 10 \end{bmatrix} \Rightarrow |2A| = 20 - 48 = -28 \Rightarrow |2A| = 4|A|$$

$$4|A| = 4(-2) = -8$$

ج)

$$A^{-1} = \frac{1}{-2} \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ -4 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{5}{2} & \frac{3}{2} \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow |A^{-1}| = \frac{5}{2} - 6 = -\frac{7}{2} = \frac{1}{|A|}$$

(ت)

$$A + B = \begin{bmatrix} 0 & 5 \\ 9 & 11 \end{bmatrix} \Rightarrow |A + B| = 55 - 45 = 10 \quad |A| + |B| = -2 + 8 = 6 \Rightarrow |A + B| \neq |A| + |B|$$

-۷

$$|A| = -r + n(n + r) = n^2 + rn - r = 0 \Rightarrow \begin{cases} n = 1 \\ n = -r \end{cases}$$

-۸

$$|A| = ab \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{ab} \begin{bmatrix} b & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{a} & 0 \\ 0 & \frac{1}{b} \end{bmatrix}$$

-۹

$$A^{-1} = \frac{1}{-1} \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 3 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} \Rightarrow A^{-1} - A = \begin{bmatrix} -8 & 6 \\ 6 & -4 \end{bmatrix}$$

$$(A^{-1} - A)^{-1} = \frac{1}{36} \begin{bmatrix} -8 & 6 \\ 6 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} & -\frac{1}{9} \end{bmatrix}$$

-۱۰

$$A^{-1} = \frac{1}{-2} \begin{bmatrix} 1 & -6 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 3 \\ \frac{3}{2} & -1 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} - 2BA + I = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 3 \\ \frac{3}{2} & -1 \end{bmatrix} - 2 \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 3 \\ \frac{3}{2} & -1 \end{bmatrix} - 2 \begin{bmatrix} 1 & 18 \\ 15 & 19 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 3 \\ \frac{3}{2} & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -14 & -36 \\ -30 & -38 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{17}{2} & -33 \\ -\frac{55}{2} & -38 \end{bmatrix}$$

-۱۱

$$A^{-1} = \frac{1}{1} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 3 \end{bmatrix}$$

$$(A^{-1})^2 = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & -5 \\ -25 & 14 \end{bmatrix}$$

۱۲ -

$$|A| = \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1 \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{1} \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix}$$

ماتریس A ، ماتریس دوران حول مبدأ مختصات به اندازه زاویه α در جهت مثلاثی می‌گویند. وارون A دوران حول مبدأ مختصات به اندازه $(-\alpha)$ خواهد بود.



شما هم تجربه خود را در سایت www.meraat.ir بخش صندوق تجربیات به اشتراک بگذارید.

۱۳ -

$$\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 1 \\ -4 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \\ 15 \end{bmatrix}$$

۱۴ -

$$\frac{m-3}{4} = \frac{3}{m+1} \neq \frac{m}{2} \Rightarrow (m-3)(m+1) - 12 = 0 \Rightarrow m^2 - 2m - 15 = 0$$

$$\Rightarrow (m-5)(m+3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} m = 5 \Rightarrow \frac{m-3}{4} = \frac{3}{m+1} \neq \frac{m}{2} \Rightarrow \text{دستگاه جواب ندارد} \\ m = -3 \Rightarrow \frac{m-3}{4} = \frac{3}{m+1} = \frac{m}{2} \Rightarrow \text{دستگاه بی‌شمار جواب دارد} \end{cases}$$

۱۵ -

$$\frac{2}{1} = \frac{m}{1} = \frac{4}{m} \Rightarrow m^2 = 4 \Rightarrow m = \pm 2$$

$$m = 2 \Rightarrow \frac{2}{1} = \frac{2}{1} = \frac{4}{2} \Rightarrow \text{دستگاه بی‌شمار جواب دارد}$$

$$m = -2 \Rightarrow \frac{2}{1} \neq \frac{m}{1} = \frac{4}{m} \Rightarrow \text{دستگاه یک جواب دارد}$$

ویژه دانش آموزان علاقه‌مند

۱ -

$$A + B = rAB \xrightarrow{\times B^{-1}} AB^{-1} + \underbrace{BB^{-1}}_I = rA \underbrace{BB^{-1}}_I \Rightarrow AB^{-1} + I = rA$$


$$\xrightarrow{\times A^{-1}} A^{-1}(AB^{-1}) + A^{-1}I = A^{-1}(rA) \Rightarrow \underbrace{(A^{-1}A)}_I B^{-1} + A^{-1} = r(A^{-1}A)$$

$$\Rightarrow B^{-1} + A^{-1} = rI$$

۲- 

$$\begin{cases} 3A + B = \begin{bmatrix} 1 & 7 \\ 11 & 0 \end{bmatrix} \\ -3A - 9B = \begin{bmatrix} 15 & -15 \\ -27 & -24 \end{bmatrix} \end{cases} \Rightarrow -AB = \begin{bmatrix} 16 & -8 \\ -16 & -24 \end{bmatrix} \Rightarrow B = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$3A = \begin{bmatrix} 1 & 7 \\ 11 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 9 & -3 \end{bmatrix} \Rightarrow A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$$

۳- الف) خیر- شرط آن که A و B وارون هم باشند آن است که $AB = BA = I$ 

$$AB = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

در این مثال مشاهده می‌شود که $AB = I$ از طرف دیگر:

$$BA = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \neq I$$

چون $AB \neq BA$ پس وارون هم نمی‌باشند.

ب) اگر بدانیم A وارون پذیر است، شرط $AB = I$ برای رابطه وارون پذیری A و B کافی است و اگر ندانیم باید $BA = I$ نیز برقرار باشد.

۴- 

$$\begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin \alpha \\ \cos \alpha \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = \sin \alpha \\ y = \cos \alpha \end{cases}$$

■ دوره سریع مطالب

۱- درست ۲- نادرست

۳- درست ۴- درست

۵- درست ۶- ۱۸

۷- $y = 15$ و $x = -17$ ۸- ۴۵

۹- $A^{-1} = 2B$ ۱۰- $\begin{bmatrix} -4 & 2 \\ -4 & 4 \end{bmatrix}$

۱- گزینه «۱»

$$|A| = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = 1$$

۲- گزینه «۳»

$$A \times B = \begin{bmatrix} 1 \\ m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & m \\ m & m^2 \end{bmatrix} \Rightarrow |AB| = m^2 - m^2 = 0$$

۳- گزینه «۱»

$$AB = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 6 \end{bmatrix} \Rightarrow |AB| = -7 - 48 = -55$$

$$|A+B| = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 2 \cdot 5 - 12 = 10 - 12 = -2$$

$$|AB| + 2|A+B| = -55 + 2(10) = -55 + 20 = -35$$

۴- گزینه «۲»

$$\begin{vmatrix} 2+k & 3+k \\ 4+k & 5+k \end{vmatrix} = (2+k)(5+k) - (4+k)(3+k) = k^2 + 7k + 10 - (k^2 + 7k + 12) = -2$$

$$|A| = 10 - 12 = -2$$

دترمینان ماتریس حاصل هیچ تغییری نمی‌کند.

۵- گزینه «۴»

$$A^T = A \xrightarrow{\times A^{-1}} A^{-1}A^T = A^{-1}A \Rightarrow A = I$$

۶- گزینه «۲»

$$A^T = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I \Rightarrow A^{-1} = A \times A^{100} = A(A^T)^{50}$$

$$= A(I)^{50} = A \times I = A \Rightarrow |A^{-1}| = |I| = 1$$

۷- گزینه «۳»

$$A \times B = I \Rightarrow \begin{bmatrix} a & 2 \\ 2 & b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b & -2 \\ -2 & a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} ab-4 & -2a+2a \\ 2b-2b & -4+ab \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} ab-4 & 0 \\ 0 & ab-4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow ab-4 = 1 \Rightarrow ab = 5$$

۸- گزینه «۱»

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 18 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=18 \end{cases} \Rightarrow x+y=20$$

۹- گزینه «۱»، چون $|A| = 0$ پس $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$ و چون $\frac{a}{c} \neq \frac{5}{2}$ پس $\frac{a}{c} = \frac{b}{d} \neq \frac{5}{2}$. بنابراین دستگاه جواب ندارد.

۱۰- گزینه «۳»

$$A^{-1} = \frac{1}{-5} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} = -\frac{1}{5} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$5A^{-1} + A - 2I = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} - 2 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$

پاسخ ایستگاه فکر

