

## سری پنجم سوالات \*

حسین نادری  
دانشجوی علوم کامپیوتر شریف  
hnaderi268@gmail.com  
hnaderi268.blog.ir

پنج شنبه ۸ بهمن ۱۳۹۴

### ۱ ناوردایی

۹ مربع در بازی ۹ مربع یک جدول  $3 \times 3$  از اعداد ۱ تا ۹ مانند وجود دارد. در هر مرحله بازیکن مجاز است، یک سطر یا یک ستون را یک واحد شیفت دهد. مثلن سطر دوم جدول ۱ را که یک واحد به سمت چپ شیفت دهیم، مانند جدول ۲ می شود. هدف بازی این است که ترتیب اعداد مانند جدول ۳ شود. ثابت کنید اگر حالت اولیه جدول ۴ باشد، نمی تواند جدول ۳ به تبدیل شود.

پرش سوسکی سوسک دیوانه ای در نقطه  $(1, 1)$  مختصات دکارتی قرار دارد. اگر سوسک در خانه  $(a, b)$  باشد، پرش هایی او به صورت زیر اند.

$$(a, b) \begin{cases} \begin{matrix} (a, 2b) \\ (2a, b) \\ (a, b-a) \end{matrix} & a < b \\ \begin{matrix} (a, 2b) \\ (2a, b) \\ (a-b, b) \end{matrix} & a > b \end{cases}$$

سوسک دیوانه پس از تعدادی پرش به چه خانه هایی می تواند برسد؟

\* برخلاف سری قبل، این سری سوالات متنوع اند (ناوردایی، الگوریتم، بازی، نظریه اعداد و سری ها) و ترتیب خاصی ندارند. فقط سعی شده است، در هر سوال روند فکری یک راه حل سوال اصلی منظور شود.

۱	۵	۸
۶	۳	۹
۴	۷	۲

جدول ۱: مثال

۱	۵	۸
۳	۹	۶
۴	۷	۲

جدول ۲: مثال با شیفت سطر دوم به سمت چپ

۱	۲	۳
۴	۵	۶
۷	۸	۹

جدول ۳: هدف

۱	۲	۳
۴	۵	۶
۷	۹	۸

جدول ۴: حالت اولیه

## ۲ الگوریتم های پویا<sup>۱</sup>

بزرگترین زیر دنباله مشترک الگوریتمی با  $O(n^2)$  ارائه دهید که بزرگترین زیر دنباله مشترک دو رشته را بیابد. الگوریتم با  $O(n \log(n))$  نیز موجود است.

آینه ای به رشته ای که از چپ و راست به یک صورت خوانده می شود، آینه ای می گوئیم. می خواهیم با اضافه کردن تعدادی کاراکتر به یک رشته آن را آینه ای کنیم. الگوریتمی برای یافتن کمترین تعداد کاراکتر مورد نیاز برای این کار بیابید. ارتباط این سوال را با سوال بزرگترین زیر دنباله مشترک بیابید.

<sup>۱</sup>راستش را بخواهید، این عنوان از بی عنوانی انتخاب شده است!

### ۳ بازی

در یک بازی تلویزیونی جلوی شما دو جعبه فرار می‌گیرد که در یکی از آن‌ها دو برابر دیگری پول وجود دارد. شما یکی از جعبه‌ها را انتخاب می‌کنید، سپس:

۱ مجری همان جعبه را باز می‌کند، و مقدار پول داخل آن را به شما نشان می‌دهد. حال مجری فرصت عوض کردن انتخاب به شما می‌دهد و پس از آن پول داخل جعبه‌ای را که انتخاب کرده بودید، به شما می‌دهد؟ استراتژی شما برای افسوس نخوردن (D) چیست؟

۲ مجری جعبه‌ی دیگر را باز می‌کند، و مقدار پول داخل آن را به شما نشان می‌دهد. حال مجری فرصت عوض کردن انتخاب به شما می‌دهد و پس از آن پول داخل جعبه‌ای را که انتخاب کرده بودید، به شما می‌دهد؟ استراتژی شما برای افسوس نخوردن (D) چیست؟

اگر از امید ریاضی برای حل دو سوال بالا استفاده کنیم، به نظرتان علت تناقض حاصل از دو جواب متمایز به دست آمده چیست؟

### ۴ یکم نظریه اعداد

بعدن استفاده داره! قضیه ۱ را اثبات کنید.

قضیه ۱ بزرگترین مقسوم علیه مشترک  $a, b$  برابر کوچکترین ترکیب خطی  $a, b$  است.

افسانه‌ی چاه و سطل هایش<sup>۳</sup> در کنار شما یک چاه آب و دو سطل با ظرفیت‌های  $a, b$  قرار دارند. آیا می‌توانید با پر کردن سطل‌ها از چاه یا سطل دیگر و یا ریختن آب آن‌ها به چاه یا سطل دیگر کاری کنید که در یکی از سطل‌ها  $c$  واحد آب وجود داشته باشد؟ چه اعدادی می‌تواند باشد؟ الگوریتم برای این کار ارائه دهید.

### ۵ $f(n)$

اثبات این که مجموع سری  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$  واگراست، چندان دشوار نیست. اما رشد این تابع چگونه است؟ در سری سوالات ۲ به این موضوع پرداخته شده. ولی این موضوع این سوال نیست.  $f(n)$  را تعریف می‌کنیم کوچکترین  $k$  که  $\sum_{i=1}^k \frac{1}{i}$  بزرگتر از  $n$  باشد. در مورد واگرایی یا همگرایی  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{f(n)}$  بحث کنید.

---

<sup>۳</sup> ترکیب خطی  $a, b$  به این صورت است:  $sa + tb$  که  $s$  و  $t$  عضو اعداد صحیح اند.  
<sup>۴</sup> چون این سوال برای بیشتر افراد آشناست، صورت سوال چندان دقیق مطرح نشده است.