

دانشگاه یزد

چهل و ششمین کنفرانس ریاضی ایران

دانشگاه یزد، ۳-۶ شهریور ۱۳۹۴

مجموعه مقالات فارسی کنفرانس

سخنرانی و پوستر

بسمه تعالی

در دایره قسمت ما نقطه تسلیمیم لطف آنچه تو اندیشی حکم آنچه تو فرمایی

ضمن عرض سلام و خیر مقدم خدمت میهمانان گرامی شرکت کننده در چهل و ششمین کنفرانس ریاضی ایران، سفری پر بار و اقامتی خوش را در شهر یزد، شهر حریر و ترمه، دیار ملا محمد باقریزدی دانشمند، ریاضی دان، منجم و عالم دینی دوره صفویه برای شما آرزو می نمایم. دانشگاه یزد و دانشکده ریاضی بر خود می بالد که به یمن صفای قدوم شما، فضای این همایش بزرگ علمی موعظ شده است.

در بازه زمانی تعیین شده برای ارسال مقالات، تعداد ۱۱۰۰ مقاله به دبیرخانه کنفرانس ارسال شد که پس از جمع بندی آراء داوران فرهیخته و اعضای محترم کمیته علمی، تعداد ۴۰۱ مقاله به صورت ارائه شفاهی و تعداد ۳۲۳ مقاله به صورت پوستر پذیرفته شد.

دانشکده ریاضی دانشگاه یزد با برگزاری همایش ها و نشست های علمی و آموزشی زیر در رشد و اعتلای فرهنگ جامعه ریاضی نقشی بسزا داشته است:

۱. یازدهمین سمینار آنالیز ریاضی؛ ۱۳۷۹
۲. سی و ششمین کنفرانس ریاضی ایران؛ ۱۳۸۴
۳. دهمین کنفرانس آموزش ریاضی ایران مشترک با آموزش و پرورش؛ ۱۳۸۷
۴. سومین کنگره مشترک سیستم های فازی و هوشمند؛ ۱۳۸۸
۵. دهمین کنفرانس بین المللی انجمن رمز ایران مشترک با دانشکده مهندسی برق و کامپیوتر؛ ۱۳۹۲
۶. سومین سمینار آنالیز هارمونیک و کاربردها؛ ۱۳۹۳
۷. سی و نهمین مسابقات دانشجویی ریاضی کشورار دیهشت؛ ۱۳۹۴
۸. دهمین سمینار احتمال و فرایندهای تصادفی مرداد؛ ۱۳۹۴
۹. چهل و ششمین کنفرانس ریاضی ایران شهریور؛ ۱۳۹۴

از جمله ویژگی های برجسته و بعضاً متفاوت کنفرانس چهل و ششم می توان بدین موارد اشاره کرد:

۱. اهداء دکتری افتخاری آموزش ریاضی به سرکار خانم پروفیسور شریل الیزابت پرگر از استرالیا توسط دانشگاه یزد
۲. انتخاب ۱۲ تن از ریاضیدانان جوان و پرافتخار کشور به عنوان سخنران مدعو ۳۰ دقیقه ای در کنار ۱۵ سخنران مدعو ۵۰ دقیقه ای داخلی و خارجی
۳. تجلیل از شخصیت علمی پروفیسور سید مهدی کرباسی استاد پیشکسوت و بازنشسته دانشکده ریاضی دانشگاه یزد
۴. تدارک جلسه ای خاص در حاشیه کنفرانس ویژه معلمان ریاضی استان یزد
۵. برگزاری دو میزگرد «تربیت معلم ریاضی و چالش های آن» و «اخلاق علمی و پژوهش های ریاضی» برنامه ریزی شده در اولین جلسه کمیته علمی در محل انجمن ریاضی ایران

کمیته برگزارکننده پس از تلاش های بی وقفه، امیدوار است شرکت کنندگان با حضور فعال خود در سخنرانی ها، میزگردها، کارگاه ها، نمایشگاه ها و مطالعه پوسترهای کنفرانس بر غنای بیش از پیش آن افزوده و موجبات تحقق اهداف کنفرانس را فراهم نمایند.

در پایان بر خود فرض می دانیم تا از همه افرادی که در برگزاری این کنفرانس سهمی داشته اند سپاسگزاری نماییم. بی گمان اینگونه همایشها هر چند با کاستی ها و کمبودهایی غیرمنتظره توأم می گردد، اما همه متولیان امر همت خود را بر این مبذول داشتند تا اوقات خوشی را با آسودگی خاطر در این دیار سپری کنید. انتقادات و پیشنهادهای سازنده شما، چراغ راه ماست.

دکتر بیژن دواز
دبیر کمیته علمی چهل و ششمین کنفرانس ریاضی ایران

دکتر قاسم بریدلقمانی
دبیر چهل و ششمین کنفرانس ریاضی ایران

اعضای کمیته علمی

دانشگاه شهید چمران اهواز	فریبرز آذر پناه
دانشگاه شیراز	غلامحسین اسلام زاده
دانشگاه کاشان	علیرضا اشرفی
دانشگاه صنعتی شریف	سعید اکبری
دانشگاه تربیت مدرس	علی ایرانمنش
دانشگاه یزد	محمدعلی ایرانمنش
دانشگاه خوارزمی	اسماعیل بابلیان
دانشگاه یزد	قاسم برید لقمانی
دانشگاه شهید بهشتی	مهدی بهزاد
دانشگاه صنعتی امیرکبیر	بهروز بیدآباد
دانشگاه تهران	احمد پارسیان
دانشگاه یزد	حمزه ترابی
دانشگاه یزد	سیدمحمد مهدی حسینی
دانشگاه یزد	حسین خورشیدی
دانشگاه تهران	محمدرضا درفشه
دانشگاه یزد	علی دلاور خلفی
دانشگاه یزد	بیژن دواز (دبیر کمیته علمی)
دانشگاه یزد	اکبر دهقان نژاد
دانشگاه صنعتی اصفهان	علی رجالی
دانشگاه شهید باهنر کرمان	عباس سالمی
دانشگاه یزد	سیدابوالفضل شاهزاده فاضلی
دانشگاه شیراز	حبیب شریف
دانشگاه سمنان	محمدرضا صافی (نماینده انجمن ریاضی ایران)
دانشگاه صنعتی شریف	بیژن ظهوری زنگنه
دانشگاه یزد	سعید علیخانی
دانشگاه یزد	محمد فرشی
دانشگاه خوارزمی	طاهر قاسمی هنری (نماینده انجمن ریاضی ایران)
دانشگاه یزد	سید مهدی کرباسی
دانشگاه شهید بهشتی	زهرا گویا
دانشگاه یزد	فرید (محمد) مالک
دانشگاه شهید باهنر کرمان	محمود محسنی مقدم
دانشگاه یزد	سیدمحمدصادق مدرس مصدق
دانشگاه یزد	سید محمدمشاقیون
دانشگاه فردوسی مشهد	محمد صالح مصلحیان
دانشگاه شهید باهنر کرمان	محمدرضا مولایی
دانشگاه شهید رجایی	حمیدرضا میمنی
دانشگاه علم و صنعت	مهدی نجفی خواه
دانشگاه صنعتی امیرکبیر	سیدمنصور واعظ پور (نماینده انجمن ریاضی ایران)
دانشگاه یزد	محمدرضا هوشمند اصل
دانشگاه تهران	سیامک یاسمی
دانشگاه شهید بهشتی	سهرابعلی یوسفی

فهرست مطالب

پ	خیر مقدم
ث	کمیته علمی

۱		سخنرانی ها
---	--	------------

سخنران اصلی

۳	دغدغه های ایرانیان دوره قاجار برای پرداختن به ریاضیات فرید قاسملو
---	-------	--

سخنرانان مدعو

۷	در آمدی بر هندسه معماری علی محدث خراسانی، حمید هورفر و مرجان گودرزی
۱۱	پردازش داده های عظیم در موتورهای جستجو علی محمد زارع بیدکی

جبر

۱۷	ساختار گراف مقسوم علیه صفر حلقه های متناهی با گروه جمعی دوری عادل تدین فر و علی رضا اشرفی
۲۱	اجتماع روی ابر K - جبرها سودابه مددی و محمد علی نصر آزادانی
۲۵	نیم گروه های بئر-لوی و ایدآل های چپ آن مهرناز پیراسته، دکتر سید مسیح آیت

آنالیز ریاضی

۳۰	تابع لامبرت دابلیو مصطفی نجفی
۳۴	تخمین بزرگی مشتق چندجمله‌ای‌های موجکی ابراهیم تیمی
۳۸	شبه‌پیوستگی قوی توابع دو متغیره اکرم پورمعمار دزفولی و سیدعلیرضا کامل میرمصطفایی
۴۲	محاسبه‌ی معکوس توابع لگاریتمی به کمک تابع لامبرت مصطفی نجفی
۴۶	نامساوی مینکوفسکی برای انتگرال کسری اگراوال فرانک فلاح، عزیزاله باباخانی و حمزه آگاهی

ترکیبیات

۵۱	انعطاف‌ناپذیری گراف حسین مهدیون، محمدرضا قائمی و مژگان حسن‌زاده
۵۵	فاصله طیف لاپلاسی گراف‌ها مرجان حکیمی‌نژاد و مجتبی قربانی
۵۹	یافتن آلفا جورسازی رنگی با استفاده از الگوریتم موازی پیشنهادی میثم رجعتی باویل علیایی و محمدرضا هوشمنداصل

علوم کامپیوتر

۶۴	ارائه یک روش ابتکاری هوشمند برای تسریع همگرایی روش $GMRES(m)$ محدثه انتظاری زارچ، سیدابوالفضل شاهزاده فاضلی و محمدباقر دولتشاهی
۶۸	الگوریتم خطی مجموعه‌ی [۱, ۲]-احاطه‌گر گراف‌های سری-موازی پویه شریفانی و محمدرضا هوشمنداصل
۷۲	تقریب منحنی‌های دیجیتالی با یک منحنی تک پیکسلی داود ایسوند و علی توکلی
۷۶	گمنامی کوانتومی بر پایه مساله شام رمزنگاران هادی فراهانی و حسین ماهان
۸۰	محور میانی در فضای هذلولوی کژال عیب پوش، مرتضی میرمحمدرضائی و علی محدث

مرتب‌سازی زوج نقاط بر مبنای فاصله آن‌ها

۸۴ محمد فرشی، ابوالفضل پورعیدی و ذریه سلطانی

معادلات دیفرانسیل

برآورد ناحیه پایداری و وجود جواب پریودیک معادله ماتیو

۸۹ حاجی محمد محمدی نژاد و محمد درویشی

پایداری زمان-ثابت و خاصیت سایه‌زنی

۹۳ مهدی فاتحی‌نیا و غفار داداشی‌شنبرکی

پایداری زمان-محدود و خاصیت سایه‌زنی

۹۷ مهدی فاتحی‌نیا و غفار داداشی‌شنبرکی

سیستم‌های دینامیکی دنباله‌ای (SDS) وارون‌پذیر

۱۰۱ حبیبه رحمانی نعیم‌آبادی و شکوفه صیاد

کنترل بهینه‌ی یک مدل بیماری عفونی با واکسیناسیون و درمان

۱۰۵ مهران محمدی و حسین خیری

آموزش ریاضی

بررسی بدفهمی‌های دانش‌آموزان در زمینه تبدیل کسر به اعشار در اعشاری

۱۱۰ رضا معطی، سهیلا غلام آزاد و عباس مفاخری

بررسی درک دانش‌آموزان سال سوم متوسطه از مبحث حد در چارچوب نظریه AOPS

۱۱۴ زهرا شریفی و ابراهیم ریحانی

ریاضیات مالی

تحلیل رشد قیمت سهام به روش بیزی و استفاده از چگالی پیشین لاپلاس-دیریکله

۱۱۹ الهام دادار و سید کامران قریشی

مدل‌بندی جواب معادلات دیفرانسیل تصادفی نوع ایتو به روش ماکسیمم درست‌نمایی مطالعه موردی: مدل‌سازی

شاخص قیمت ذغال سنگ در بورس تهران

۱۲۳ مرضیه سریزدی زاده و علی دولتی

هندسه

توزیع‌های گسترده و اسپری‌ها

۱۲۸ اسماعیل عزیزپور

دریویشنهای جبرهای توابع روی منیفلدها

- ۱۳۱ نیره الیاسی
- معرفی یک ردهی خاص از گروه‌های لی و بررسی مترهای شبه‌ریمانی
- ۱۳۵ میثم طاهری دهکردی و مهران طاهری دهکردی
- هم ارزی زیرفضاهای مستوی کنترل روی برخی از جبرهای لی مختلط سه بعدی
- ۱۳۹ فیروز پاشایی و سید محمد شهیدی

آنالیز عددی

جواب های فرم بسته معادله ماتریسی $X - A^T X^{-1} B = CY + R$

- ۱۴۴ محمدرضا اصلاحچی و گل نوش عزیزی پور
- پایداری عملی سیستم‌های گسسته زمانی کسری مثبت با استفاده از پس‌خورد حالت
- ۱۴۸ مرضیه سپهر و حجت احسنی طهرانی
- جایابی قطب با استفاده از مشتق حالت
- ۱۵۲ علیرضا قرنلی پور و حجت احسنی طهرانی
- حل عددی معادلات انتگرال فردهلم نوع دوم با استفاده از روش های چندگامی
- ۱۵۶ لیلا سعیدی، ابوالفضل تاری و سید موسی ترابی
- روش هم محلی بی اسپلاین مکعبی برای حل معادلات دیفرانسیل معمولی با شرایط مرزی
- ۱۶۰ سید مهدی عبدالهی مایوان و دکتر علی طهماسبی
- روش اجزای محدود گالرکین برای حل معادله دیفرانسیل انتشار با چند ترم مشتقات زمان-مکان ریتز کسری در فضای دو بعدی
- ۱۶۴ محمدرضا اصلاحچی و زینب غریبی
- روش جداسازی عملگرها و کاربرد آن در حل یک مسئله سهموی غیرخطی
- ۱۶۸ علی ذاکری و زهرا نوروزی
- کرانی برای شعاع طیفی حاصل ضرب ماتریس‌های همراه
- ۱۷۲ الهه پامرغی و مهدی پناهی
- یافتن جواب های قوی فازی حاصل از حل دستگاه های فازی با استفاده از الگوریتم ژنتیک
- ۱۷۵ فاطمه صابری راد، لیلا محمدی و علیمحمد لطیف
- یک محدودکننده اساساً غیر نوسانی وزن‌دار ساده برای حل قوانین بقاء با روش گالرکین ناپیوسته رونگه کوتاه
- ۱۷۹ نقی کریمیان و دکتر جواد فرضی

تحقیق در عملیات

۱۸۴	ارایه یک روش مبتنی بر فیلتر برای حل دستگاه‌های یکنوا در فضای هیلبرت فرشید ارزانی و محمدرضا پیغامی
۱۸۷	بررسی دسته‌ای از نامساویهای معتبر برای مساله پستچی چینی با سود بیشینه فرزانه حیدری
۱۹۱	بررسی کارای چندین ساختار همسایگی برای حل مساله مسیریابی وسایل نقلیه با ناوگان ناهمگن فسانه محمودی و مصطفی خرمی‌زاده
۱۹۵	پایداری ورودی-خروجی کراندار برای سیستم‌های کنترل خطی فازی مهرآسا آیت‌اللهی، فاطمه امینی و الهام واثقی
۱۹۹	تعمیم مسأله‌ی هزینه کمینه جریان در شبکه و بررسی کارایی آن محسن کولانی، امید قیصر قراملکی و مسلم ولیزاده
۲۰۳	حل مسئله کوله پشتی محدود براساس محاسبات بیولوژیکی مهرناز سارانی
۲۰۷	حل مسئله برنامه‌ریزی خطی دوترازه‌ی کسری با ضرایب بازه‌ای در توابع هدف ندا امیری، فرهاد حمیدی و حسن میش مست نهی
۲۱۱	حل برنامه ریزی خطی دو ترازه با استفاده از الگوریتم ژنتیک نگار صلاحی
۲۱۸	یک مدل جدید برای مساله مکان‌یابی پایانه اتوبوس‌رانی و یک الگوریتم جستجوی محلی برای حل آن سحر راهدار و رضا قنبری

آمار و احتمال

۲۲۳	تحلیل بیزی مدل رگرسیون چندکی تعمیم یافته منیر میرزایی و افشین فلاح
-----	---

سایر زمینه‌ها

۲۲۸	بررسی جمع‌های روی جزءکسری زهرا حسنلو
۲۳۲	بررسی نیمه تحلیلی دینامیک جریان سیال در یک لوله‌ی مدور با مکش و دمش و در حضور میدان مغناطیسی وحیده عبداللهی و محمدحسین شفیعی میم
۲۳۶	تعامد و تخصیص مقادیر ویژه جزئی برای مداد درجه دوم معین متقارن سید مهدی کرباسی و معصومه شایقی
۲۴۰	تعیین جهت انتشار میدان موج با استفاده از بردارهای پوئین‌تینگ فرزاد مرادپوری، علی مرادزاده، ری‌نام کروز پستانا و مهرداد سلیمانی منفرد

- فاصله توقف ماتریس کنترل تساوی کدهای آرایه‌ای و کاربردهای آن
 ۲۴۴ فرزانه نجفی پورگنجه، بهزاد صالحیان متی کلائی و مجید فرهادی
- مثلت رولو و کاربرد آن در ساخت دستگاه های حفاری جهت ایجاد تونل هایی با مقطع مربعی شکل
 ۲۴۸ مهدی اشرفی بافقی، علی نخعی امرودی و حسینعلی لازمی
- ۲۵۲ **پوسترها**

جبر

- ابر ارزیاب‌ها و ابرحلقه‌های ابر ارزیابی
 ۲۵۴ خدیجه میردار هریجانی و سید محمد انوریه
- تعداد کلاس‌های تزویج زیرگروه‌های غیرنرمال و نرمال‌سازهای گروه G
 ۲۵۸ فرزانه مومبنی گرمسیری و زهره مستقیم
- حلقه های شبه دیووی راست
 ۲۶۱ صادق صادقی وفا
- دسته بندی ایثار تکواره ها بر اساس شرط (E') در سیستم های راست (خارج قسمتی ریس)
 ۲۶۵ ایثار گچی پوربنه و حسین محمدزاده ثانی
- مدول های دیووی راست
 ۲۶۹ صادق صادقی وفا و محمد اندرزگو
- مطالعه ویژگی های زیرمدولهای پوچساز-ناچپز
 ۲۷۳ طیبه آموزگار
- ملقمه‌های تصویری ضعیف
 ۲۷۶ زهره خاکی و اکبر گلچین
- یک محدودیت در تعمیم EI- ابر ساختارها
 ۲۸۰ سید حسین قاضوی و سید محمد انوریه

آنالیز ریاضی

- اعداد اول رامانوجان و حدس برتراند
 ۲۸۵ مصطفی نجفی
- انعکاس پذیری عملگر ضربی $M_{\text{ری}}$ روی فضای باناخ سری های لوران
 ۲۸۹ سید امیدرضا عابدی و علی ایلون کشکولی
- دوگانگی قوی در بهینه سازی محدب پارامتری
 ۲۹۳ رقیه صنعتی و مرضیه کلانتری

۲۹۷	احمد حیدری	روشی برای حل بعضی از مسائل درونیابی لاگرانژ با استفاده از دایره یکه
۳۰۱	سمیه افشار جهانشاهی، ثمینه ذاکری و احمد احمدی	ضرب تانسوری روی سیستم های تحت انتقال پایا
۳۰۵	زیبا میرمحمدولی	ماتریس گرام در مدول های نیم ضرب داخلی روی C^* -جبرها
۳۰۹	ولی حسینی	مقایسه مخروط نرمال و مخروط منظم
۳۱۳	هادی خسروی و علی خسروی	نتایج نقطه ثابت سوزوکی در فضای b - متریک مخروطی
۳۱۷	محمدجعفر صالحی	نگاشت های ماتریسی روی فضاهای دنباله ای اوپلر

ترکیبیات

۳۲۲	دکتر حسین عبدالله زاده آهنگر و سید رحمان کریمپور	بررسی بعضی از پارامترها روی عدد ژئودتیک یالی گرافها
۳۲۶	محمدآزاد ویسی و مؤگان امامی	کدهای دوری دوتایی ناشی از سه جمله ای جایگشت $f(x) = x + x^3 + x^{2^t+1}$ روی $GF(2^{2^t-1})$
۳۳۰	محبوبه شریفی و بهزاد صالحیان متی کلائی	لم اسپرنر و هم ارزی قضیه نقطه ثابت وقضیه هگزر
۳۳۴	فاطمه الزهرا حیدری و خلیل پاریاب	معرفی یک نوع ماتریس خاص و تعیین مقادیر ویژه و بردارهای ویژه متناظر با آن

علوم کامپیوتر

۳۳۹	سهیلا مسعودیان، ولی درهمی و سجاد ظریف زاده	بررسی روش های انتخاب ویژگی و دسته بندی موضوعی متن با استفاده از دادگان خبری پارسی
۳۴۳	هادی فراهانی، محمدرضا صدیقین و سید محمود موسوی	بررسی صحت پروتکل کلید عمومی نیدهام-شرودر با استفاده از جبر پردازش ACP
۳۴۷	محمدرضا شیخ صادقی، فاطمه سعادت جو و علی محمد اسمعیلی زینی	بکارگیری رقابت استعماری در بهینه سازی پرس و جو در پایگاه داده های رابطه ای
۳۵۱	سودابه طاهری و سید محمد حسینی	تلفیق تغییرات کلی و تیخونوف با مجموعه تراز برای بی نویز کردن تصاویر

- تولید خودکار داده آزمون با استفاده از الگوریتم فاخته
 ۳۵۵ مرضیه روئینا، فاطمه سعادت جو و محمد علی سعادت جو
- حل دستگاه معادلات مختلط فازی با روش تصویری
 ۳۵۹ سیدابوالفضل شاهزاده فاضلی و سولماز آقائی
- یک روش آماری برای کاوش در داده‌های جریان دنباله‌ای
 ۳۶۳ حیدر قاسم‌زاده و محمد قاسم‌زاده

معادلات دیفرانسیل

- آنالیز انشعاب های سیستم دینامیکی نواک-بنگام
 ۳۶۸ پریسا عزیززی، رضا خوش سیر و زینب لجمیری
- بررسی پایداری و نقاط انشعاب یک سیستم دینامیکی جمعیتی با تابع پاسخ هولینگ
 ۳۷۲ زینب لجمیری و رضا خوش سیر
- بسط های نمایی برای ساده سازی تابع پوانکاره موضعی حول مدار هموکلینیک
 ۳۷۶ نیلوفر کیاماری
- تاثیر تابع وزن در چندگانگی جوابهای مثبت معادلات بیضوی نیم خطی
 ۳۸۰ راحله محسنی
- تحلیل انشعاب های یک سیستم دینامیکی اکو اپیدمیولوژی
 ۳۸۴ زینب لجمیری و رضا خوش سیر
- حل معادلات دیفرانسیل مرتبه کسری با موجک لژاندر
 ۳۸۸ راضیه استکی، حجت الله سعیدی و محمدرضا احمدی
- حل معادلات دیفرانسیل مرتبه کسری با موجک هار
 ۳۹۲ راضیه استکی و حجت الله سعیدی
- طرح تفاضلات متناهی فشرده ضمنی مرتبه چهارم معادله برگز یک بعدی
 ۳۹۶ احمدرضا حقیقی و مینا رضانژاد
- فرمول اثر جدید برای برای معادله‌ی اشتورم-لیوویل ماتریسی با پارامتر ویژه در شرایط مرزی
 ۴۰۰ اصغر محمدنژاد و علی اصغر جدیری اکبر فام
- فرمولی برای اولین مقدار ویژه و اثر منظم برای سیستم معادلات دیفرانسیل مرتبه ی دوم با نقطه ی برگردان
 ۴۰۴ اصغر محمدنژاد و علی اصغر جدیری اکبر فام
- معرفی سیستم های دینامیکی دنباله ای و بررسی فضای فاز آن
 ۴۰۷ شکوفه صیاد و حبیبه رحمانی نعیم آبادی

وجود جواب ضعیف برای معادلات اویلر-لاگرانژ کسری

۴۱۱ پروانه آقامحمدزاده و مرتضی زره پوش

آموزش ریاضی

ارزیابی عملکرد مدارس دولتی پایه هفتم بر اساس نقشه مفهومی (مطالعه ی موردی مدارس دخترانه دولتی شهرستان گرگان)

۴۱۶ مریم طاری دشتی

پیشرفت در توانایی حل مسائل هندسه از طریق پرورش مهارت طرح مسئله

۴۲۰ مریم غلامی و مجید حق وردی

تأثیر روش تدریس ساخت گرایی با سنتی در هندسه (تقارن) بر پیشرفت تحصیلی دانش آموزان پایه ی هشتم

۴۲۴ ملیحه پاشا و محمود فرهادیان

تحلیل محتوای دو کتاب ریاضی قدیم (چاپ ۱۳۹۱) و جدید التالیف (چاپ ۱۳۹۳) پایه هشتم در مبحث جبر از دیدگاه شناختی بلوم

۴۲۸ محسن فرخی و محمود فرهادیان

تناقض واضح در کتاب های جدیدالتالیف سال اول دبستان

۴۳۲ فاطمه ملکی جلیلی و پروین سلیمان تبار

گزارشی از یک پژوهش: استفاده از شطرنج به عنوان ابزاری برای ارتقای توانایی حل مسئله ریاضی

۴۳۴ محمد علی رضوانی

نقش تولید مثال توسط دانش آموزان در بهبود یادگیری و مهارت حل مسئله ریاضی آنان

۴۳۷ فاطمه سادات شاه امیری، ثریا حیدری و نوراله نژادصادقی

ریاضیات مالی

انتخاب فازی سهام با استفاده از الگوریتم رتبه بندی و وزن دهی

۴۴۲ زهرا جلیلی و یحیی زارع مهرجردی

تحلیل ریسک صندوق های تامینی با استفاده از مدل مارکوف سوییچینگ

۴۴۶ شقایق جعفرلو و نویده مدرسی

مدل سازی بازارهای فصلی

۴۵۰ سیدحسن اسحقی، الهام دسترنج و محمد رامشگر

مدل سازی و ارزیابی معاوضه ی نکول اعتباری و ریسک طرف مقابل

۴۵۴ شقایق جعفرلو

هندسه

- تعمیمی از نگاشت‌های کامل
- محمد علی سیاوشی و مهرداد نامداری ۴۵۹
- دستگاه‌های مستوی کنترل ناوردای چپ روی برخی از جبرهای لی حل پذیر
- فیروز پاشایی و سید محمد شهیدی ۴۶۳
- نگاشت همساز بین رویه ریمانی و گروه لی
- مصطفی محمدحسن ۴۶۷
- مراکز همیلتونی نوع خطی از میدان‌های برداری چند جمله‌ای درجه ۳
- مریم افشار نسب و امیدریعی مطلق ۴۷۱

آنالیز عددی

- ارائه یک الگوریتم برای حل یک مسأله‌ی معکوس با ماتریس متقارن مرکزی از مرتبه زوج
- بهناز ضعیفی، سید احسان یثربی نائینی و جعفر رحمانی ۴۷۶
- الگوریتمی برای جایابی قطب با استفاده از روش بس گیورا و روش آکرمن
- علیرضا قرنلی پور و حجت احسنی طهرانی ۴۸۰
- الگوریتم عددی برای شناسایی سیستم‌های غیرخطی برپایه موجک هار
- فاطمه محمدی و مهدی رضانی ۴۸۴
- بررسی خواص تجزیه مقدار تکین (SVD) با استفاده از پردازش تصویر
- مجتبی شکوه‌حاج عباسعلی‌خان و سپیده نیک‌نام ۴۸۸
- بررسی روشهای ماتریسی در سیستم‌های پیشنهاددهنده
- عفت گلپرابوکی و معصومه کیهی ۴۹۲
- بررسی فرمول‌های مشتق‌گیری پسروی بلوکی پیوسته و تحلیل ناحیه پایداری آن‌ها
- حجت الله سعیدی، راضیه استکی و محمدشفیع دهاقین ۴۹۶
- پایداری میانگین مربعات در روش‌های تقریب عددی نیمه‌ضمنی برای معادلات دیفرانسیل تصادفی
- بهشته پوراحمد و بهنام زرپاک ۵۰۰
- تقریب‌گیری با استفاده از انتگرال‌گیری عددی از دو عملگر شبه-درونیاب در یک فضای همسان بر روی یک شبکه‌ی چهار سوپیه
- پریسا احمدی بلوطکی، فرهاد خاکسار حقانی دهکردی و محمد احمدی بلوطکی ۵۰۴
- جواب‌های چند جمله‌ای تیلور معادلات انتگرال ترکیبی ولترا-فردهلم غیرخطی
- محمد امین آزموده دست، رسول کبیری و مجیب الرحمن آزموده دست ۵۰۸
- حل سیستم دینامیکی لورنز با استفاده از روش تقریبی گراند-والد
- فرشاد همتی، رضا خوش سیر، مهدی قاسمی و محمد حسین درخشان ۵۱۲

- حل عددی معادلات جابجایی- نفوذ با میدان سرعت غیرخطی با روش دوگان جابجایی المانه‌های مرزی
 ۵۱۶ رباب شفارودی و مجید قدسی حسن آباد
- حل عددی معادله انتگرالی فردهلم نوع دوم توسط موجک های لژاندر
 ۵۲۰ نسیم عرب جزی
- حل عددی معادلات با مشتقات جزئی سهموی با روش تفاضلات متناهی ضمنی
 ۵۲۴ فریا فتحی
- حل مساله مقدارویژه معکوس ماتریس مجاورت گراف کامل و k -منتظم با استفاده از ماتریس تصادفی دوگانه
 ۵۲۷ اکرم پورمیر، سید مرتضی احمدی و مسعود مشرقی
- حل معادلات انتگرال دیفرانسیل تفاضلی فردهلم نوع دوم با ضرایب متغیر با استفاده از پایه دلخواه
 ۵۳۱ فریبا زره پوش و عظیم ریواز
- حل معادله Camassa-Holm با استفاده از توابع پایه شعاعی بر اساس روش تفاضلات متناهی
 ۵۳۵ الهه هادی ورنامخواستی، سید محمد حسینی‌هرات و فرهاد خاکسار حقانی
- روش تقریب کمترین مربعات برای حل معادلات انتگرال ولترای خطی
 ۵۳۹ مریم جوادی نژاد و مریم عرب عامری
- روش جواب‌های خاص تقریبی برای حل معادله‌های مشتق پاره‌ای مستقل از زمان مرتبه ۴
 ۵۴۳ مهرنوش عبدوس
- روش گالرکین ناپیوسته با نقاط گاوس رادو برای قوانین بقای هذلولوی
 ۵۴۷ جواد فرضی و هدی دالیه دزفولی
- روش های عددی انتگرال گیری نیوتن - کاتس مبتنی بر مشتق
 ۵۵۱ احمد رضا حقیقی و سید شهریار عزیزی
- کنترل سیستم‌های خطی پیوسته زمانی کسری مثبت با تأخیر زمانی
 ۵۵۵ مرضیه سپهر و حجت احسنی طهرانی
- مقایسه روش های آدومیان نوین و خطی سازی برای مسأله مقدار اولیه منفرد لن-امدن
 ۵۵۹ محمد علی پرتانیان و جاسم محمدی چاه دادخدا
- مقایسه روش های آدومیان و آدومیان اصلاح شده برای حل معادلات انتگرال-دیفرانسیل غیرخطی
 ۵۶۳ محمدعلی پرتانیان و زهرا صحرائی
- یک روش عددی براساس درونیابی‌های متوالی برای معادلات انتگرال هم‌رشتاین تابعی
 ۵۶۷ فاطمه زرین و ابوالفضل تازی

تحقیق در عملیات

- ارائه مدلی جدید برای مساله زمان بندی کوتاه مدت کارگران دائم و موقت چندمهاریه با امکان آموزش مهارت‌های جدید
 ۵۷۲ صدیقه صادقی-رضا قنبری

- ارائه مدل جدید جهت رسته بندی واحدهای تصمیم گیری
 ۵۷۶ محمد امامی و فرانک حسین زاده سلجوقی
- ارائه مدل کارایی فوق العاده NFR جهت رتبه بندی واحدها در DEA
 ۵۸۰ ناصر روشنی
- بررسی زمان اجرای حالت های خاص مسأله ی ماکزیمم جریان همریز در شبکه ها
 ۵۸۴ اکرم احسنی و مسعود امان
- بهینه سازی محافظت از شبکه های عرضه-تقاضا در برابر خط مشی های ممانعتی
 ۵۸۸ امید قیصر قراملکی، محسن کولانی و مسلم ولیزاده
- تسریع همگرایی الگوریتم گرادیان مزدوج سه جمله ای در بهینه سازی نامقید
 ۵۹۲ پویان عزتی زاده، مهری باقریان و محمد کیانپور
- حل مسأله بهینه سازی چندهدفه با استفاده از یک الگوریتم تکاملی تعاملی مبتنی بر تابع ارزش، با فرض تعداد محدود فراخوانی های تصمیم گیرنده
 ۵۹۶ حانیه خراشادی زاده، نسیم نصرآبادی و مسعود امان
- حل مسائل کنترل بهینه با استفاده از یک مدل شبکه عصبی فیدفوروارد
 ۶۰۰ رضوان کرمی و علیرضا ناظمی
- روش برنامه ریزی خطی امکانی دو فازی جهت حل مسائل مربوط به ارزیابی تامین کننده و تخصیص سفارشات
 ۶۰۴ سمانه مصطفوی و سید یونس جلائی خادمی
- روش عددی برای کنترل بهینه حلقه باز با استفاده از چندجمله های چپیشف
 ۶۰۸ محمد حسین درخشان و محمدرضا احمدی دارانی
- روش گرادیان گسسته برای بهینه سازی ناهموار
 ۶۱۲ مریم طاعتی، علی اکبرنیا و محمد رضا ضرابی
- قضیه گاوس-لوکاس و کاربرد آن در کنترل
 ۶۱۶ سید مهدی کرباسی و نسیم قلاوند
- کاربرد داده های فازی در تحلیل پوششی داده ها
 ۶۲۰ مدینه امیری و سید یونس جلائی خادمی
- کنترل بهینه معادلات انتگرال ولتراز از طریق توابع مثلثی
 ۶۲۴ فرید حیدرپور، علی پورشرافتان جهرمی و علی دلاور خلفی
- مدلی جدید در ارزیابی عملکرد در محیط نادقیق با شاخص قیمت تک نرخ
 ۶۲۸ عبدالناصر حسین بر و فرانک حسین زاده سلجوقی
- مدل دو مرحله ای تحلیل پوششی داده های شبکه ای با ورودی های مشترک و مقادیر میانی بهینه سازی شده
 ۶۳۲ هدی گلشنی و هادی باقرزاده ولمی

- مقایسه تجزیه کارایی در مدل‌های شعاعی و غیر شعاعی با داده های مطلوب و نامطلوب
- ۶۳۶ فاطمه صوفی و فرانک حسین زاده سلجوقی
- مکان‌یابی بهینه تسهیلات اورژانسی کلان شهر شیراز به روش p - میانه و بر پایه‌ی الگوریتم جستجوی همسایگی متغیر
- ۶۴۰ مریم آریان‌فر، علیرضا فخارزاده جهرمی و حمیدرضا ملکی
- یک الگوریتم تکاملی بهبودیافته تعاملی بر مبنای تابع اسکالرسازی دستاورد وزن‌دار شده
- ۶۴۴ مهناز جمالی و نسیم نصرآبادی
- یک مدل رتبه بندی در حضور خروجی های نامطلوب با استفاده از مرز کاملاً ناکارا
- ۶۴۸ مینا مولایی و محمد افضل‌ی نژاد

آمار و احتمال

- اثر حذف همزمان چند مشاهده و زیرمجموعه ای از متغیرهای مستقل بر رگرسیون حداقل مربعات وزنی
- ۶۵۳ خدیجه عباس زاده، عبدالرحمن راسخ و بابک بابادی
- برآورد میانگین توزیع نرمال دو متغیره با استفاده از نمونه‌گیری مجموعه رتبه‌دار فرین متحرک
- ۶۵۷ زینب پیرسیاه اسطلخی و نصراله ایران پناه
- برخی خواص توزیع وایبل - بر نوع $(BURR II)_2$
- ۶۶۱ نجمیه مکسائی و حسن زارعی
- برخی نابرابری‌های گشتاوری برای متغیرهای پذیرفتنی
- ۶۶۵ آمنه نوروزی فیروز و نگار اقبال
- بررسی احتمالات دمی مجانبی برای مجموع وزنی تصادفی
- ۶۶۹ محمد عابدی و احمد نزاکتی رضازاده
- بررسی پایایی تبدیل کل زمان آزمون تعمیم یافته
- ۶۷۳ مجتبی اصفهانی
- بررسی شاخص کارایی طول عمر توزیع بیرن‌بام - ساندرز
- ۶۷۷ داود دریایی و بهرام صادق پورگیله
- بررسی مشاهدات مؤثر و بانفوذ در برآوردگر رگرسیون مؤلفه های اصلی تحت محدودیت تصادفی
- ۶۸۱ شایسته دیلمی و عبدالرحمن راسخ
- پواسن دو متغیره با صفر انباشته همراه با اثر تصادفی نرمال چوله و کاربرد آن در تعیین عوامل مؤثر بر تعداد واحدهای مردودی و ترم های مشروطی دانشجویان
- ۶۸۵ مژگان دهقانی و محمدرضا زادکرمی
- تحلیل رگرسیون بیزی تحت روش نمونه‌گیری مجموعه رتبه دار کرانگین
- ۶۸۹ افشین فلاح و مریم شیخ

- توزیع لیندلی-دوجمله‌ای منفی و ویژگی های آن
 ۶۹۳ سمیه ابوالحسینی و عیسی محمودی
- رفتار مجانبی ماکزیمیا در کلمات هندسی محدود
 ۶۹۷ مهروی جوانیان و ژاله طوفانیپور
- رگرسیون (پارامتری) استوار و انتخاب متغیر با روش کمترین قدرمطلق انحرافات موزون با تاوان لاسو برای داده‌های بیمه
 ۷۰۱ شهره شریفی میناب
- رگرسیون چندکی ناپارامتری با استفاده از روش اسپلاین
 ۷۰۵ سیده مریم موسوی و علی محمدیان مصمم
- فاکتور بیز برای آزمون تک نمونه ای بردار میانگین با ماتریس کوواریانس معلوم
 ۷۰۸ پریا بهرامی و منوچهر خردمند نیا
- کاربردهای روش مونت کارلوی چندسطحی در معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی تصادفی
 ۷۱۲ محبوبه سلیمیان
- محاسبه ی آنتروپی شانن، رنی، تسالیس، شارما-میتال، سوپرا-اکستنسیو برای سیستم صف بندی $M/M/c/s$ -
 ۷۱۶ مینا کارگر شهری و زهره نیکو روش
- محاسبه دقیق متوسط طول دنباله برای نمودار کنترل جمع تجمعی
 ۷۲۰ هومن کمال زارع و منوچهر خردمند نیا
- معرفی مدل‌های STARMA
 ۷۲۴ رویا هادیان دهکردی و مریم هاشمی
- مقایسه چندین آزمون در همگنی واریانس‌ها
 ۷۲۸ مائده بهرام‌نژاد و علی‌اکبر جعفری
- مقایسه کلاسی از توزیع های نمایی دو متغیره باچند توزیع دو متغیره دیگر
 ۷۳۲ مرضیه عمادی و رسول روزگار
- همگرایی کامل مجموع وزنی عناصر تصادفی در فضای باناخ
 ۷۳۶ ابابکر بلوچ و حسن زارعی

سایر زمینه‌ها

- ارائه روش مبتنی بر بسط برای حل معادله ی انتگرال کوشی نوع اول
 ۷۴۱ رضا نونین، وحید معنوی و فرشاد برمکی
- بررسی همگرایی تعمیمی از ثابت اویلر
 ۷۴۵ محمدرضا اسفندیاری و زهرا حسنلو

- ۷۴۹ منیره رحمانی و یوسف جمالی
بررسی و مدلسازی اندازه گروه ها با استفاده از توزیع پاورلو و تابع اتصال ترجیحی و با استناد به مشاهدات تجربی
- ۷۵۳ فاطمه فخریان و امید سلیمانی فرد
بررسی و مقایسه دو عملگر تقریب ذوزنقه ای برای اعداد فازی
- ۷۵۷ اسما روشنی، ولی درهمی و فاطمه اعلم
پیش‌بینی خاموشی‌های ناخواسته فیدرهای برق استان یزد با استفاده از سیستم‌های فازی
- ۷۶۱ پرستو رام بجندی و امید سلیمانی فرد
توسعه روش RSF با یک الگوریتم محلی
- ۷۶۵ محمدعلی فریبرزی عراقی، یعقوب محمودی و رضا نوین
حل عددی رده ای از معادلات انتگرال فوق منفرد
- ۷۶۹ سعید دهقانی اشکذری، ولی درهمی و محمد قاسم زاده
کشف ناسازگاری در قواعد سیستمهای خبره
- ۷۷۳ مجید زراعتی، محسن شاهرضایی و اردشیر احمدی
مدلسازی و پیش‌بینی رفتار شاهدین یک حادثه با استفاده از نظریه‌ی بازیها
- ۷۷۷ محمد سعید علمداری و محسن شاه رضایی
معرفی روش ممان متغیر در تشخیص و طبقه بندی انواع مختلف هواپیما

سخنرانی ها

سخنران اصلی



دغدغه های ایرانیان دوره قاجار برای پرداختن به ریاضیات

فرید قاسملو*

بنیاد دائره المعارف اسلامی

چکیده

دوره قاجار تاریخ ایران دوره ای است که تاریخ ایران به دوران معاصر خود می رسد و پرداختن به تاریخ ریاضیات معاصر ایران نیز به چند دلیل باید از این دوران آغاز شود. از دیگر سو، بررسی داده های مربوط به تاریخ ریاضیات دوره قاجار نشان می دهند تمامی شئون مربوط به معاصر شدن ریاضیات ایران نیز در همین دوران رخ می دهد. از جمله، نخستین ترجمه ها، نخستین چاپ ها و البته نخستین انتشار مقاله های بین المللی ریاضی دانان ایرانی، جملگی در این دوره از تاریخ ایران رخ می دهند. بر همین اساس، مولف این سطور مصر است که اثبات نماید علی رغم داوری های اولیه و شتابزده درباره شئون جامعه ایرانی دوره قاجار؛ این بخش از تاریخ کشورمان، دستکم در حوزه دانش ریاضی حرف هایی جالب، مهم و حتی شگفت آور زده شده است که هر مورخ ریاضی را ناچار به پرداختن به آنها است.

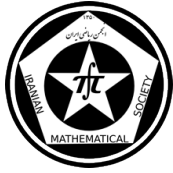
واژه های کلیدی: ریاضیات؛ تاریخ ریاضیات در ایران؛ تاریخ ریاضیات در ایران معاصر؛ (حداقل ۳ و حداکثر ۵ واژه)

Mathematics Subject Classification [2010]: 01A55, 01A90

۱ مقدمه

دوران حکومت سلسله قاجار بر ایران (سالهای ۱۳۴۴-۱۲۱۰ قمری) همزمان با دوران اوج شکوفایی صنعتی شدن اروپا و دوران گذر جامعه ایرانی از بخش میانه تریخ خود و رسیدن به دوران تاریخ معاصرش است. این همزمانی تاریخی باعث شده است تا اولاً بررسی تاریخ ایران دوران قاجار در زمره بخش تاریخ معاصر ایران قرار گیرد و از دیگر سو، صنعتی شدن اروپا ایرانیا ربا رویه دیگری از زندگی روبرو سازد. مهمترین این رویه ها، در جنگ های ایران و روس متجلی می گردد که به نظر می رسد نقطه عطف سیاسیون ایران مبنی بر درک ضرورت تغییر در ساختار حکومت در ایران باشد. بر اساس آنچه طرح شد، طبیعی خواهد بود اگر اساس ر ابرانی قرار دهیم از آنجایی که تاریخ ایران دوره قاجار تاریخ معاصر ایران است، بررسی تاریخ ریاضیات دوره قاجار نیز تاریخ ریاضیات معاصر ایران باشد. با همین مقدمه، قادر خواهیم بود تصویری از ظرف تاریخی مربوط به بحث درباره تاریخ ریاضیات در ایران معاصر به دست دهیم. زیربنای پرداختن به تاریخ ریاضیات در ایران دوره قاجار، پیش از هر چیز تبیین ضرورت بحث تاریخی و جامعه شناختی درباره ایران است. به عبارت دیگر، تبیین این موضوع که در این دوران از تاریخ ایران، آنچه بیش از هرچیز به مدد تاریخ نگاری ریاضی خواهد آمد ارائه درک درستی از موقعیت تاریخی ایران در این برهه و رسیدن به سطحی از زیرساخت های اجتماعی - تاریخی برای مطالعات عمیق در حوزه تاریخ ریاضیات در ایران است. برای رسیدن به این درک عمیق نیز، از جمله مباحث کاملاً نظری زیرباید مورد توجه قرار گیرند: الف. نظریه مدرن سازی در ایران. ب. چگونگی انجام اصلاحات برای رسیدن به این مدرن سازی. ج. نقش آموزش برای اجرای ساختار اصلاحی در کشور. د. فرایند ترجمه برای انتقال داده های جدید به کشور. با درک موارد فوق از جمله می توان به داوری درباره تفکر سیاسی زمامداران دوره قاجار ایران و در پرتوی آن، کوششهای اصلاحی آنان در کشور پرداخت.

* سخنران

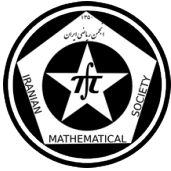


۲ تاریخ ریاضی در ایران معاصر، فراغت از تاریخ

پس از آنکه نگاهی به تاریخ افکنندیم؛ می توانیم بحث خود را به چگونگی تحول در عرصه تاریخ ریاضیات در ایران معاصر متمرکز کنیم. تکان سختی که ایرانیان در سلسله شکست های خود در جنگ های ایران و روس خوردند باعث شد تا به فکریفتند علت این همه عقب ماندگی چیست؟ سرسلسله این افراد، عباس میرزا قاجار ولیعهد احمد شاه قاجار بود که می توان او و همفکرانش را بنیان گذاران اندیشه اصلاحی در کشور به حساب آورد. رفتارهای اصلاحی عباس میرزا تقریباً همه شئون کشور را در بر می گرفت اما آنچه در این میان بیش از همه به کار ما می آید اندیشه های اصلاحی او است که ربطی به ریاضیات پیدا می کند که از جمله آنها تاسیس یک مهندس خانه در تبریز است. در این مهندس خانه از جمله ریاضیات ایرانی و نیز ریاضیات اروپایی به دانش آموزان درس داده می شده و عبارت مورخانی که از این مهندس خانه یاد کرده اند در این خصوص صریح است. عباس میرزا به درستی تنها راه ورود دانش ریاضی به کشور را در تاسیس مدرسه نمی دید و برای گسترش دانش ریاضی در کشور به اعزام محصل نیز دست زد. یک نفر از پنج محصلی که در زمان عباس میرزا به خراج اعزام شد (به نام جعفر مشیرالدوله مشهور به مهندس باشی) در اروپا به تحصیل ریاضی پرداخت و پس از بازگشت به کشور یکی از نخستین کتابهای مربوط به آشنایی ایرانیان با ریاضیات معاصر اروپایی را به فارسی ترجمه نمود. اما کارهای اصلاحی عباس میرزا دولت مستعجل بود و با مرگ نابهنگام او در سال ۱۲۴۹ قمری نیمه تمام ماند. گام بعدی در زمینه آشنایی ایرانیان با دانش ریاضیات اروپایی چند دهه بعد از عباس میرزا و این بار به توسط خلف صالح او میرزا تقی خان امیرکبیر صورت گرفت. امیرکبیر با اقدام برای تاسیس دارالفنون، نخستین مدرسه عالی ایرانی به شکل جدید کوشید دانشهای مهم روز را (از جمله ریاضی) به کشور وارد کند. این بار این حرکت اصلاحی ریشه دار تر بود و با تاسیس دارالفنون چند اقدام بسیار مهم برای ورود ریاضی نوین به ایران همزمان انجام شد. از جمله ترجمه کتابهای جدید ریاضی، تالیف کتابهای مورد نیاز برای تدریس در دارالفنون، آوردن معلم ریاضی از خارج به دارالفنون و البته تربیت معلمان ایرانی زیر نظر این افراد برای تدریس های بعدی در این مدرسه. همزمان با این رخدادها و ادامه فعالیت های دارالفنون، همزمان اعزام دانشجو به خارج نیز شدت گرفت. یک نفر از این دانشجویان به نام میرزا نظام الدین غفاری کاشانی که برای تحصیل علوم ریاضی به فرانسه اعزام شده بود، در هنگام تحصیل در این کشور نخستین مقاله های بین المللی ایرانیان را در زمینه دانش ریاضی (رویهی رفته شامل ۳ مقاله) تالیف کرد. جالب توجه است که این مقالات مورد توجه ریاضیدانان همان زمان اروپا نیز قرار گرفت و به آنها ارجاع نیز داده شد. در دوران قاجار، یک موضوع دیگر نیز که به تکوین بخش دیگری از دانش ریاضی در کشور نیز انجامید موضوع تدوین کتابهای درسی ریاضی بود. این تکوین در پی ایجاد وزارتخانه های مختلف در کشور و به وجود آمدن دیوانسالاری اداری در ایران و در پی آن تاسیس کمیسیون معارف در وزارت معارف وقت برای سروسامان دادن به کتابهای درسی کشور صورت گرفت. اگرچه، این سروسامان دادن خود چند دهه طول کشید و نتیجه اولیه آن در دوران پهلوی اول خود را نشان داد. با به قدرت رسیدن پهلوی اول در سال ۱۳۰۴ خورشیدی و پایان دوران حکومت قاجار بر کشور، بررسی تاریخی ما از وضع ریاضیات ایران در دوره قاجار نیز به پایان می رسد.

مراجع

- [۱] آزادیان، شهرام. ۱۳۸۳ ش. "نگاهی به تصحیح متون در دوره قاجار". ادبیات و زبانها، نشریه دانشکده ادبیات و علوم انسانی دانشگاه تهران. مسلسل ۱۶۹-۱۶۸.
- [۲] اقبال آشتیانی، عباس. ۱۳۲۴ ش. "احوال بزرگان، میرزا سید جعفرخان مشیرالدوله" یادگار، سال ۲ شماره ۶.
- [۳] بوهرلر، الکساندر. ۱۲۷۳ ق. هندسه، ترجمه عبدالرسول مهندس اصفهانی، چاپ سنگی تهران.
- [۴] دانش پژوه، محمدتقی. ۱۳۶۰ ش. "نخستین کتابهای فلسفه و علوم جدید در ایران" نشر دانش، سال ۲ شماره ۲.



چهل و ششمین کنفرانس ریاضی ایران

۳-۶ شهریور ۱۳۹۴

دانشگاه یزد



دانشگاه یزد

ص: ۳-۳

دغدغه های ایرانیان دوره قاجار برای پرداختن به ریاضیات

سخنرانی

- [۵] دبیرساقی، سید محمد. ۱۳۸۳ ش. "نجم الدوله، دانشمندی جامع علوم و فنون قدیم و جدید"، زندگی نامه و خدمات علمی و فرهنگی میرزا عبدالغفارخان نجم الملک (۱۲۵۵-۱۳۲۶ ه. ق)، تهران: آنجمن اثار و مفاخر فرهنگی.
- [۶] رینگر، مونیکا. ۱۳۸۱ ش. آموزش، دین و گفتمان اصلاح فرهنگی دوران قاجار، ترجمه مهدی حقیقت خواه، تهران: ققنوس.
- [۷] غفاری، ابراهیم. ۱۳۵۳ ش. "تاریخچه و شجره خاندان غفاری کاشانی". فرهنگ ایران زمین، جلد ۲۰.
- [۸] قاسمی پویا، اقبال. ۱۳۷۷ ش. مدارس جدید در دوره قاجاریه، بنیان و پیشروان، تهران: مرکز نشر دانشگاهی.
- [۹] کریمیان، علی. ۱۳۸۵ ش. "میرزا جعفر مهندس باشی (از پیشگامان مهندسی نوین ایران)". گنجینه اسناد. شماره ۶۳.
- [۱۰] کسایی، نورالله. ۱۳۷۷ ش. "مدارس قدیم تهران در عصر قاجار". نامه فرهنگ، شماره ۳۰.

پست الکترونیکی: ghassemlou@gmail.com

سخنرانان مدعو



ص: ۴-۱

چهل و ششمین کنفرانس ریاضی ایران

۳-۶ شهریور ۱۳۹۴

دانشگاه یزد

درآمدی بر هندسه معماری



دانشگاه یزد

سخنرانی

درآمدی بر هندسه معماری

مرجان گودرزی
دانشگاه صنعتی امیرکبیر

حمید هورفر
دانشگاه صنعتی امیرکبیر

علی محدث خراسانی
دانشگاه صنعتی امیرکبیر

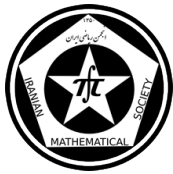
چکیده

هندسه معماری یک حوزه تحقیقاتی جدید می باشد، به طوری که هندسه کاربردی و معماری را با نگاهی بر فرایندهای طراحی، تحلیل و ساخت ترکیب می نماید. این علم (هندسه معماری) با تکیه بر هسته طراحی معماری و فعالیت های معاصر، معماری را به شدت به چالش کشیده، چیزی که از آن به معماری عصر دیجیتال یاد میشود. هندسه معماری تلاش می کند با ارائه یک مدل و الگوی مناسب فضای بصری ناظر را فرم دهد. و با بهره گیری از اشکال، روابط و خواص هندسی فضای بصری ناظر را طراحی و مدلسازی نماید. در این بین نقش هندسه محاسباتی از این نظر پررنگتر می شود که می تواند الگو و متن و نیز یک خواست و تقاضا را بصورت ورودی یک الگوریتم بگیرد، و سپس با کمک عملیات و الگوریتم های مورد نیاز یک فرم ارائه دهد، که با خواست و تقاضای ورودی مطابقت دارد. در این پژوهش به بررسی نگرش هندسه در معماری خواهیم پرداخت.

واژه های کلیدی: - هندسه معماری، معماری دیجیتال، هندسه محاسباتی، رؤیت پذیری

۱ مقدمه

از زمانی که انسان چشم به جهان می گشاید و اشکال مختلفی را مشاهده می کند با هندسه سروکار دارد. بعدها که به مقایسه اشکال می پردازد، بزرگی و کوچکی، دوری و نزدیکی، بیرون و درون بودن، اندازه و فاصله را درک می کند و نقش هندسه در زندگی او بیشتر می شود. بصورتی نه چندان دقیق هندسه عبارت است از مجموعه ای از اشیاء از قبیل نقطه، خط، صفحه، چند ضلعی، منحنی و و عملگرهایی مانند اندازه، فاصله، پوشش، بیرون و درون، که عملگرها بر روی اشیاء اثر می گذارند و هندسه را بوجود می آورند. از سوی دیگر از زمانی که انسان تصمیم گرفت در غار زندگی کند عملاً معماری در زندگی بشری جایگاه ویژه ای یافت. بنابراین، این دو علم سابقه طولانی در زندگی بشری دارند. در این میان همواره هندسه به کمک معماری آمده است. در گذشته ها معماران هندسه دان بودند و با کمک ابزارهای هندسی یک بنا را طراحی می کردند و خود نیز بر ساخت آن نظارت داشتند. بعبارت دیگر هندسه در دنیای معماری نقش ویژه ای داشت و نقش ابزار طراحی یک معماری کارا، زیبا و ماندگاری را ایفا می کرد. با ورود IT به دنیای معماری، معماری دچار تحول شگرفی شد و ابزار کار تغییر کرد. کاربرد، ویژگیها و روش معماری تغییر کرد. دیدگاه ها و خواستگاههای طراحان معماری و سرمایه گذاران از یک سو و سلیقه و نیاز کاربران از سوی دیگر دچار تحول و تغییر شد. و نقش هندسه در طراحی بنا کم رنگ گردید. اما ورود IT به دنیای علم و دانش، نه تنها معماری، بلکه علوم پایه و خصوصاً هندسه را نیز دچار تغییر، توسعه و تحول نمود. هندسه جدید که از تمام توانایی های IT نیز بهره می برد کار خود را توسعه داده است. هندسه مدرن و از جمله هندسه محاسباتی توانائی حل مسئله را در اکثر غریب به اتفاق علوم توسعه داده و کارایی شگفت انگیزی در حل مسائل پیدا کرده است. هندسه محاسباتی بعنوان یک روش توانا و کارا، کاربرد گسترده ای در بسیاری از علوم از جمله هندسه معماری پیدا کرده است. هندسه معماری که عبارت است از بهره گیری از ابزارهای هندسه در طراحی فرم، نما و ... یک بنا زمینه های متنوعی از تحقیقات و کاربرد را فراهم آورده است.



۲ نقش هندسه در معماری

گفته می شود انسانها بطور متوسط ۹۰ درصد از اوقات محصور در بنا هستند، به عبارت دیگر ۹۰ درصد از زندگی ما توسط معماری احاطه شده است. یک معماری مناسب روابط را نظم می بخشد، آرامش ایجاد می کند، فیزیک بدن را فرم می دهد. و اقامت را لذت بخش می نماید. برعکس معماری که از هندسه مناسب برخوردار نباشد، افسردگی و خستگی ایجاد می کند، موجب ازدحام و به هم ریختگی ارتباط می شود و آسیبهای جسمی و روحی بوجود می آورد. هندسه معماری ویژگیهای مناسب و ارزشمند در یک معماری را بصورت ورودی می گیرد آن را تبدیل به یک زنجیره ی ارزش در یک معماری می نماید و با ابزارها و روابط و الگوریتم های هندسی مدل و فرم مناسب را ایجاد می کند. فضا و هندسه حقیقی، حقیقتی است که در خارج و بدون ارتباط با ناظر وجود دارد. اشکال، اندازه ها، فاصله ها، چینش های متفاوت و روابط این هندسه را تشکیل می دهد و متکی بر الگوریتم ها و قواعد معینی می باشد و از قوانین و اصول ثابتی پیروی می کند. فضای بصری و هندسه بصری احساسی است که از دنیای خارج در ذهن بوجود می آید. انسان با کمک حواس اطلاعات را از دنیای بیرون می گیرد و با مراجعه به ، برداشت ها و آموخته های قبلی و نظرات و علاقه های خود اطلاعات را درک و تحلیل می کند. چه بسا فیلترهایی وجود دارند که اطلاعات را دچار تغییر می کنند یا خطاها و نارساهایی وجود دارد که موجب می شود هندسه بصری با هندسه حقیقی تفاوت داشته باشد. علوم و رشته های متعددی وجود دارند که در مورد ارتباطات، تفاوت ها و ... این دو هندسه به تحقیق و بررسی می پردازند. در این ارتباط معماران تلاش می نمایند با ارائه یک نما و فرم خلاقانه فضای بصری ناظر را به شکل مطلوب سازماندهی کنند. ناظر، زوایای معماری را از طریق فضای بصری خود درک می نماید. تحلیل ادراک ناظر از یک بنا و فضای بصری او به طراحی یک معماری مناسب توسط معمار کمک می کند. هندسه معماری تلاش می کند با ارائه یک مدل و الگوی مناسب فضای بصری ناظر را فرم دهد. و با بهره گیری از اشکال، روابط و خواص هندسی فضای بصری ناظر را طراحی و مدلسازی کند. و به عبارت دیگر با مدلسازی هندسی بین فضای حقیقی و بصری ارتباط برقرار نماید

۳ هندسه و معماری سنتی

معماری قدیمی، تاریخی و سنتی در ایران ویژگیهای خاصی دارند.

- از هندسه و نظم خاصی برخوردار است که قابل مطالعه و بررسی است.
- با فرهنگ بومی منطقه هماهنگی دارد و با سنت ها ارتباط برقرار می کند
- به مسائل زیست محیطی توجه دارد و بیشترین بهره را از شرایط اقلیمی می برد و به بهترین وجه خود را با شرایط آب و هوایی وقف می دهد.

مطالعه هندسه معماریهای سنتی مناطق از یک سو می تواند به خلق هندسه معماری متناسب با بافت فرهنگی بومی و شرایط اقلیمی منطقه منجر شود و از سوی دیگر به ساخت فرم های آزاد و متنوع کمک کند. بعضاً فرم های سنتی حاوی هندسه معماری ناپیدائی است که بررسی و تحلیل و بازخوانی هندسه نهفته در آن می تواند به خلق الگوهای منجر شود که به خوبی در ساخت فرمهای جدید به کار آید. معماری سنتی مناطق دارای ویژه گی های مشترکی است و سبک مشابهی دارد. بعضی از این معماری ها از دیگر سبک های معماری مانند معماری اسلامی الگو گرفته ولی بعضی از معماری ها صرفاً با توجه به شرایط اقلیمی بوجود آمده است. بررسی و تحلیل معماری سنتی می تواند امکان دستیابی به فرمهایی را فراهم آورد که در معماری مدرن کارا و مفید باشد.

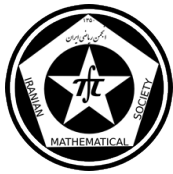


۴ معماری اریگامی

اریگامی از یک نگاه به عنوان یک مهارت هندسی در بسیاری از علوم کاربرد دارد. همه ساله نمایشگاهها و کارگاههایی در سراسر گیتی برگزار می شود که به ساخت و کاربردهای اریگامی اختصاص دارد. و فرم های بدیع و زیبایی ارائه می گردد. از نگاهی دیگر اریگامی یک شاخه از تا کردن هندسی می باشد. تا کردن هندسی به سه بخش تقسیم می شود: تا کردن پروتئین ها که در بیوانفورماتیک کاربرد دارد، تا کردن زنجیرها که در رباتیک کاربرد دارد و تا کردن کاغذ که همان اریگامی است. هندسه محاسباتی الگوریتم های کارایی در زمینه تا کردن کاغذ ارائه می دهد و در این زمینه مسائل باز بسیاری هنوز حل نشده باقی مانده است. با کمک الگوریتم های هندسه محاسباتی و استفاده از روش اریگامی می توان طرح ها و فرم های دشوار را بوجود آورد و مدلهای ذهنی را طراحی کرد. اریگامی با تکیه بر الگوریتمهای هندسه محاسباتی با روشی نه چندان دشوار به خلق الگوها و مدلهای متنوع می پردازد. بدلیل بهای اندک کاغذ یک فرم معماری به روش اریگامی بارها و بارها قابل مدلسازی و طراحی است. بنابراین اریگامی می تواند به خلق فرمهای بدیع و متنوع کمک کند معماری اریگامی بعنوان شاخه ای از اریگامی امروزه نگاههای بسیاری را بخود جلب کرده است.

۵ هندسه محاسباتی در معماری

گاهی بین هندسه حقیقی و هندسه بصری تفاوت وجود دارد، هندسه معماری با بررسی و تحلیل تفاوتها و علت خطا و سپس با مدلسازی و ارائه مدل، فضای بصری را طبق پیش تقاضای ارائه شده توسط طراح سازماندهی کند. زیبایی احساسی است که از هندسه بصری بدست می دهد و مقولهای کیفی است، هندسه معماری این مقوله ی کیفی را به مقوله های کمی تبدیل می نماید و مدلهایی برای هندسه حقیقی پیشنهاد می کند تا احساس زیبایی را با سازماندهی مناسب هندسه بصری در ذهن ناظر بوجود آورد. زیبایی یک بنا می تواند یکی از همان پیش فرضهای متقاضی باشد. در فرم های آزاد معماری معمار، هندسه ذهنی خود را با کمک روابط هندسی به یک فرم حقیقی تبدیل می نماید، هندسه موجود در فرم ساخته شده بگونه ای عمل می کند که فضای ذهنی ناظر را به شکل مطلوب و مورد نظر معمار ترسیم می کند. در یک تعریف نه چندان علمی هندسه عبارت است از مجموعه اشکال، خطوط و منحنی ها، فاصله، اندازه و ... و ساخت طرحها و فرم های متفاوت و گوناگون با کمک ترکیب، تکرار، جابجایی، تغییر و ... بسیاری از روابط دیگر. هندسه قادر است تصورات گوناگون بشری را به تصویر بکشد و به واقعیت تبدیل و زیبایی خلق کند و به ذهن فرم دلخواه بدهد. هندسه محاسباتی قادر است با کمک یک مدل و فرم خواسته های متفاوت و تقاضا (query) های گوناگون را عملی نماید و هندسه ی ذهن بیننده را بر اساس مدل ساخته شده فرم بدهد. به عبارت دیگر هندسه با کمک الگوریتم ها و قوانینی کارا خواسته ها و تقاضاهای گوناگون را مدل می کند، و به ظهور می رساند و زیبایی خلق می کند. هندسه محاسباتی الگو و متن و نیز یک خواست و تقاضا را بصورت ورودی یک الگوریتم می گیرد، و سپس با کمک عملیات و الگوریتم های مورد نیاز یک فرم ارائه می دهد که با خواست و تقاضای ورودی مطابقت دارد و تقاضای ارائه شده به نظر آید. این تقاضا می تواند، تداوم، نظم، کثرت، هماهنگی، بزرگی، یک پارچگی و ... باشد. برای اینکه تقاضایی برآورده شود می توان از تحذب، تکرار، رویت پذیری، تعامد، نظم (برابری اضلاع و زوایا)، چاقی، مرکز ثقل، همگرایی، حاشیه داشتن، انحنا، و ... در یک فرم استفاده کرد. وجود و یا عدم هر کدام از مفاهیم فوق می توانند به انجام یک تقاضا کمک کنند. برای یک معماری و یک فرم تحذب می تواند زیبا باشند و برای یک معماری و فرمی دیگر تععر. از جمله کارهای گارینی و برومینی با احجام پیچیده و در خود تنیده حاصل تلاطمی است که در سطوح ایجاد گردیده است. فرم در دوره باروک با تحذب و تععر های ایجاد شده به اوج پیچیدگی خود در تاریخ معماری می رسد. ساخت فرم های محدب و یا مقعر و نمایش تحذب و یا تععر در سقف ها، سازه های سقفی، آملی تئاترها، برج ها، فضاهای داخلی، نمای بیرونی یک سازه با ابزارها و الگوریتم های هندسی میسر است.



تکرار (duplication-repetition) یک طرح و الگو (pattern) در یک بنا زیبایی بوجود می آورد، خصوصاً اگر تکرار از یک هندسه مناسب برخوردار باشد و بخواهد مفهومی را به ناظر منتقل کند. تکرار یک الگو (ستون، پنجره، فرم، ...) چه در معماری قدیم و سنتی و چه در معماری مدرن و چه در معماری معاصر همواره مورد علاقه معماران بوده است. هندسه معماری با تکرار بخشی از یک فرم آنرا موزون، متداوم، و هماهنگ نشان می دهد. مسئله رؤیت پذیری (visibility) و گالری هنر آنقدر گسترده شده است که می رود تا خود را از هندسه محاسباتی مستقل نماید. اگرچه الگوریتم های این مبحث بشدت هندسی است و می شود گفت رؤیت پذیری یعنی یک هندسه محاسباتی ناب، ولی کاربردهای گسترده و زمینه ها، مسائل و مباحث بسیار متنوع این مبحث را به گونه ای متفاوت رشد داده است.

۶ علم هندسه معماری

معماری ساماندهی فضاست و هندسه یکی از دانشهایی است که از دیرباز برای ساماندهی به اشکال و کالبد فضا و نیز انتظام حرکت نیروهای سازه ای در ساختمان مورد استفاده قرار گرفته است هندسه دانشی است که به ویژگیها و روابط میان اشکال و اندازه و مسیر حرکت مولفه های نیرو می پردازد و با ظرفیت دو وجهی خود کیفیت و کمیت می تواند عامل وحدت بخش مقولاتی نظیر معماری و سازه باشد. هندسه معماری یک حوزه تحقیقاتی می باشد، به طوری که هندسه کاربردی و معماری را با نگاهی بر فرایندهای طراحی، تحلیل و ساخت ترکیب می نماید. این علم (هندسه معماری) با تکیه بر هسته طراحی معماری و فعالیت های معاصر، معماری را به شدت به چالش کشیده، چیزی که از آن به معماری عصر دیجیتال یاد می شود. زمینه های تخصصی نظیر هندسه محاسباتی هندسه دیفرانسل، توپولوژی، هندسه فرکتال، توماتای سلولی .. هندسه معماری را تحت تاثیر قرار داده است. از جمله موضوعات بروزی که اکنون در این زمینه مورد تحقیق و بررسی قرار می گیرد عبارتند از:

- ایجاد سطوح و منحنی های فرم آزاد
- طراحی مولد
- سطوح قابل گسترش
- مباحث گسسته
- طراحی مولد

مراجع

- [1] H. Pottmann, A. Asperl, M. Hofer and A. Kilian, *Architectural Geometry* Bentley Institute Press (2007), 724 pages, 2200 figures in color, ISBN 978-1-934493-04-5.
- [2] Helmut Pottmann, Alexander Schiftner, Johannes Wallner, *Geometry of Architectural Freeform Structures*, ISSN 0020-7926, 2008 Osterr. Math. Gesellschaft, Internat. Math. Nachrichten Nr. 209 (2008), 15-28.
- [3] Helmut Pottmann, Michael Eigensatz, Amir Vaxman, Johannes Wallner, *Architectural Geometry*, Preprint submitted to Computers and Graphics, November 18, 2014.

پست الکترونیکی: mohades@aut.ac.ir
 پست الکترونیکی: hoorfar@aut.ac.ir
 پست الکترونیکی: marjanguodarzi@aut.ac.ir



پردازش داده های عظیم در موتورهای جستجو

علی محمد زارع بیدکی*

فاطمه کاوه یزدی

استادیار دانشکده مهندسی برق و کامپیوتر، دانشگاه یزد

دانشجوی دکترا در دانشکده مهندسی برق و کامپیوتر، دانشگاه یزد

چکیده

از سامانه‌هایی که با داده‌های عظیم سروکار دارند موتورهای جستجوی می‌باشند. براساس آمارهای منتشره، موتورهای جستجوی بین‌المللی میلیارد ها صفحه را تحت پوشش قرار داده و چندین میلیارد پرس و جو در روز دریافت میکنند. به عنوان مثال موتور جستجوی ایرانی پارسی جو، بیش از پانصد میلیون سند فارسی را خزش نموده و قادر است تا دو میلیارد سند را به صورت متوالی خزش نماید که فضای مورد نیاز برای نگهداری داده‌های جمع آوری شده با سرباره‌ی اطلاعاتی آنها، به بیش از چهل ترابایت بالغ می‌گردد. تعداد اتصالات موجود در گراف وب که لازم است جهت رتبه بندی پدازش شوند به بیش از ده میلیارد اتصال میرسد و تعداد عبارت‌هایی که می‌بایست برای نمایه سازی و پاسخ به پرسجوی کاربران مورد استفاده قرار بگیرند، به بیش از پانصد میلیون عبارت رسیده است. طبیعی است که برای پدازش این حجم بزرگ از داده با چالشهای جدیدی مواجه خواهیم بود و راهکارهای سنتی جوابگو نخواهند بود. در این سخنرانی ساختار موتورهای جستجو بررسی و راهکارهای مورد استفاده برای مدیریت داده‌های عظیم و به طور اخص گراف‌های عظیم معرفی خواهند شد.

واژه‌های کلیدی: بازیابی اطلاعات، مقیاس بزرگ، گراف، خزش، نمایه‌سازی

Mathematics Subject Classification [2010]: 97R50, 97R40

۱ مقدمه

در حال حاضر، موتورهای جستجو بعنوان مهمترین ابزارهای جستجو در وب مورد استفاده قرار می‌گیرند. با توجه به رشد روز افزون اطلاعات و محتوای موجود در وب و همچنین تغییرات زیاد در اطلاعات موجود، موتورهای جستجو نقش مهمی در بازیابی اطلاعات از اینترنت ایفاء می نمایند. قابل ذکر است که حدود ۸۰ درصد از افراد، از طریق موتورهای جستجو به سایت‌ها و اطلاعات مورد نظرشان دسترسی پیدا می‌کنند [۱]. متأسفانه به علت عدم سازگاری سامانه‌های جستجو با ویژگیهای بومی، اطلاعات موجود به صورت کامل برای کاربران معمولی قابل دسترس نبوده و دقت اطلاعات ارائه شده به کاربران نیز پایین می‌باشد. با داشتن يك موتور جستجوی بومی می‌توان با ارائه سرویس های بومی متنوع نیاز کاربران را به صورت بهتری برآورده ساخت و همچنین علاوه بر درآمدزایی، ایجاد اشتغال و رهبری وب بومی، بخش عمده ترافیک را از خارج به داخل هدایت کرد.

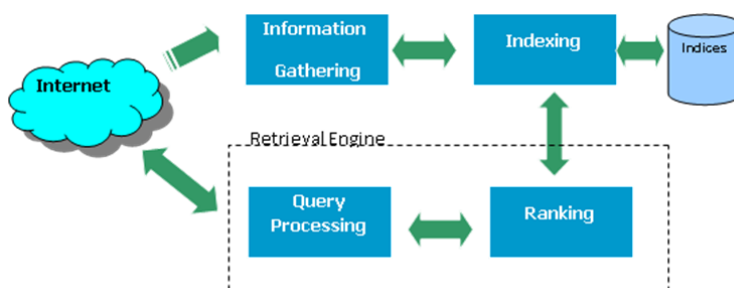
هم اکنون مهمترین چالش در يك موتور جستجو، وجود حجم زیاد اطلاعات برای پدازش می‌باشد. برای مثال در حال حاضر بیش از پانصد میلیون سند وب در موتور جستجوی پارسی جو^۱ وجود دارد (خزش شده‌اند) که می‌بایست در زمان مناسب پدازش و نمایه سازی شوند. همچنین تعداد واژه‌های موجود بیش از پانصد میلیون واژه می‌رسد که مدیریت این داده‌ها نیازمند به یک سیستم بهینه برای پدازش داده‌ها می‌باشد. در ادامه این مقاله به جنبه های مختلف پدازش داده های حجیم در موتورهای جستجو پرداخته خواهد شد.

* سخنران و مدیر تیم تحقیق و توسعه موتور جستجوی پارسی جو

^۱ www.parsijoo.ir

۲ معماری موتورهای جستجو

به صورت کلی یک موتور جستجو از سه قسمت اصلی خزش، نمایه سازی و بازیابی تشکیل شده است (شکل ۱). رشد نمایی و حجم زیاد اطلاعات وب باعث شده است تا نمایه سازی، رتبه بندی و خزش در وب به مهمترین چالش های این حوزه تبدیل شوند.



شکل ۱: نمای کلی یک موتور جستجو

۱.۲ جمع آوری اطلاعات

واحد جمع آوری کننده اطلاعات که خزگر^۲ نام دارد [۴]، گراف وب را پیمایش کرده و محتوای تمام صفحات پیمایش شده را در یک مخزن بزرگ به صورت فشرده ذخیره می کند. علاوه بر این برای ذخیره تمام اسناد موجود در وب، خزگر پس از اتمام خزش می تواند گراف وب را که شامل ارتباطات بین صفحات وب است را نیز در اختیار موتورهای جستجو قرار دهد. در حال حاضر الگوریتم های مختلفی برای خزش وب ارائه شده است که از مهمترین آنها می توان به الگوریتم های عرض-اول، تعداد پیوندهای ورودی، OPIC [۲]، PageRank [۵] و FICA [۷] اشاره نمود.

۲.۲ نمایه سازی

نمایه ساز^۳ اسناد ذخیره شده در مخزن را پردازش و نمایه سازی می کند. با توجه به حجم وسیع اطلاعات جهت بالا بردن سرعت دسترسی معمولاً عمل نمایه سازی به صورت معکوس [۳] انجام می گیرد. محتوای اطلاعاتی اسناد باید طوری ذخیره شوند که با توجه به درخواست کاربر به راحتی قابل بازیابی باشند. برای این منظور، یک واژه نامه از تمام واژگان موجود در صفحات ایجاد شده و به ازاء هر واژه یک لیست از صفحات و مکان های حاوی این کلمه به آن ضمیمه می گردد (کاملاً مشابه بخش نمایه در انتهای کتب علمی). با توجه به اینکه در پیمایش این مجموعه، دستیابی به یک مکان در یک صفحه، از طریق دستیابی به یک واژه صورت می پذیرد، از این روش با عنوان نمایه سازی معکوس^۴ نام برده می شود. باید خاطرنشان نمود، فرایند نمایه سازی حجم بالای اطلاعات با تعداد درخواست های بازیابی زیاد، تنها با استفاده از سیستم های توزیع شده میسر است.

۳.۲ موتور بازیابی

موتور بازیابی، رابطه ای مستقیم با بخش نمایه سازی و همچنین با کاربران دارد. وظیفه اصلی این بخش پردازش پرس و جو و رتبه بندی جواب ها می باشد و از دو واحد پردازش پرس و جو و رتبه بندی تشکیل شده است. با توجه به اینکه کاربر پرس و جو را

^۲Crawler

^۳Indexer

^۴Inverted Index



به زبان طبیعی بیان می کند از مهم ترین وظایف واحد پردازش پرس و جو، عملیات پردازش زبانی پرس و جو مانند نرمال سازی (خصوصاً برای زبان فارسی) گسترش پرس و جو و پردازش پرس و جو بین زبانی (چند زبانی) می باشد. از وظایف دیگر این واحد، انجام عملیاتی مانند پردازش عملیاتی پرس و جو (عملیاتی منطقی)، مدل کردن کاربر و نیز اعمال بازخورد خواهد بود. بعد از پردازش پرس و جو و بدست آوردن نتایج مرتبط از واحد نمایه ساز، عمل رتبه بندی با استفاده از اطلاعات تهیه شده توسط واحد نمایه ساز، گراف تهیه شده توسط خزشگر و مدل های کاربر و بازخورد انجام می شود. در حال حاضر، دو روش عمده رتبه بندی شامل مبتنی بر محتوا (استفاده شده در بازیابی اطلاعات سنتی) و مبتنی بر ساختار (استفاده شده در وب فعلی) وجود دارد [۱]. از الگوریتم های رتبه بندی مهم مبتنی بر محتوا می توان الگوریتم TF-IDF [۳] و الگوریتم BM25 [۳] را نام برد. همچنین از الگوریتم های مبتنی بر اتصال می توان به الگوریتم های PageRank [۵] (اولین الگوریتم استفاده شده در گوگل) و DistanceRank [۶] اشاره نمود.

۳ جمع آوری داده های حجیم در خزشگر

دو خاصیت مهم وب یعنی حجم زیاد اطلاعات و تغییر روزانه زیاد صفحات و پیوندها باعث شده تا خزش وب با چالش های جدیدی مواجه شود. حجم زیاد وب باعث می شود تا خزشگر نتواند به راحتی همه وب را به صورت یکپارچه جمع آوری کند. برای رویارویی با مشکل حجم بالای صفحات وب، خزشگرها می باید از سیستم های توزیع شده با صف های چندگانه استفاده نمایند. برای درک بهتر این موضوع، باید گفت براساس اندازه گیری های انجام شده در موتور جستجوی پارسی جو حدود ۵۰۰ میلیون صفحه خزش شده حاوی بیش از ۲ میلیارد پیوند بوده اند^۵. موتورهای جستجو برای مدیریت این حجم از صفحات برای خزش با سه مشکل عمده مواجه هستند که در ادامه مورد بررسی قرار می گیرند.

(الف) تشخیص آدرس های یکتا: با توجه به اینکه به صورت میانگین تعداد پیوندهای موجود در هر صفحه فارسی حدود ۴۰ پیوند می باشد، هر آدرس حدود ۴۰ مرتبه بازدید خواهد شد. لازمی مدیریت چنین ساختاری، طراحی یک ساختمان داده کارا است که بتواند محتوای بیش از ۲ میلیارد صفحه را در خود جای داده و بتوان در هر ثانیه بیش از ۸۰ هزار آدرس صفحه را در آن جستجو نمود. علاوه بر آن این ساختمان داده، باید از قابلیت توزیع پذیری براساس معیار میزبان^۶ نیز برخوردار باشد. (ب) رعایت ادب^۷ در اتصال به وب سایت ها: خزشگر باید از فزون بارشدن^۸ وب سایت ها جلوگیری کند. بنابراین خزشگر نیازمند برخورداری از تعداد بسیار زیادی صف (به تعداد میزبانهای موجود در مجموعه آدرس ها) است. مدیریت چندین هزار صف موازی و تعیین سیاست زمان بندی در این صف ها نیازمند بهره گیری از مفاهیم پیچیده در حوزه صف و پردازش توزیعی صف ها است که در موتورهای جستجو مورد استفاده قرار می گیرند.

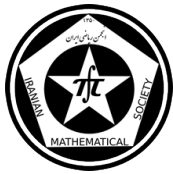
(ج) بازدید مجدد وب سایتها: با توجه به اینکه میزان تغییر وب سایتها متفاوت می باشد لازم است خزشگر در زمان های مشخص به وب سایتها مجدداً متصل شده و محتوای جدید را از سرورهای آنها کپی کند. فاصله زمانی مابین اتصال می تواند از ۵ دقیقه تا یک ماه متغیر باشد. بنابراین علاوه بر مدیریت صف های جداگانه برای هر میزبان لازم است صف هایی برای بازه های زمانی متفاوت نیز وجود داشته باشد. از طرفی میزان تغییرات وب سایتها را باید براساس سابقه تغییرات آنها با استفاده از روش های داده کاوی در سری های زمانی تخمین زد.

^۵<http://parsijoo.ir/about.pj>

^۶Host

^۷Politeness

^۸Overloading



۴ پردازش داده های حجیم زبانی مستخرج از وب

جستجوی اطلاعات شامل فرایندهای تغییر و گسترش پرس و جو، جستجو در نمایه، استخراج نتایج و رتبه بندی آنها می باشد. فرایند تغییر و گسترش پرس و جو با هدف بهبود فرایند جستجو صورت می گیرد و شامل طیفی از وظایف، مانند تصحیح املایی، حذف برخی از کلمات، تغییر و جابجایی کلمات پرس و جو می باشد. مدل های آماری مورد استفاده برای این منظور بیشتر بر پایه زنجیره مارکف طراحی می شوند و نیازمند حجم عظیمی از دادگان وب برای آموزش هستند. علی رغم سادگی این تحلیل ها، به علت حجم بالای دادگان دریافتی، پردازشگرهای آنها باید دارای ساختاری سازگار و مقاوم باشند تا در برابر بروز خطا تحمل پذیر^۹ گردند. در هر نوبت از انتقال اطلاعات از یک خزگر به پارسر، دادگانی با حجمی بالغ بر چند ترابایت باید پارس شده و اطلاعات لازم برای آموزش مدل های آماری و تخمین پارامترهای مورد نیاز از آنها استخراج شوند. علاوه بر مدل های چندجزئی مبتنی بر زنجیره مارکف که کلمات را مرتب و بدون فاصله در نظر می گیرند، می توان از مدل های مربوط به هم وقوعی کلمات نیز بهره برد. در محاسبه مدل هم وقوعی، تعداد موارد بروز توأم هر جفت کلمه در پنجره ای با طول مشخص استخراج و با استفاده از روش های توزیع شده شمارش شده و در محاسبه احتمال قرارگرفتن کلمات در کنار هم مورد استفاده قرار می گیرد.

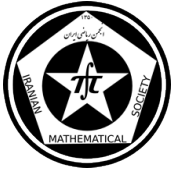
برای درک بهتر حجم عظیم این دادگان، باید گفت تعداد تمام کلمات (درست و نادرست) مندرج در متون فارسی صفحات نمایه شده در موتور جستجوی پارسر جو به بیش از ۷۰ میلیون کلمه بالغ می گردد. باید خاطرنشان نمود که کلمات نادرست و با املای اشتباه نیز باید در نمایه سازی لحاظ شوند تا در صورت جستجوی عین عبارت، این کلمات نیز یافت شوند علاوه بر خود کلمات، ترکیبات دوجزئی و سه جزئی آنها که تعدادی در حد توان های دو و سه تعداد کلمات دارند، نیز باید شمارش و ذخیره شوند. البته باید خاطرنشان نمود که علاوه بر مدل های زبانی چند جزئی، مدل هم وقوعی نیز از مدل های بسیار بزرگ و پرهزینه است. محاسبه مدل هم وقوعی برای کلیه صفحات وب با صرفه نیست و معمولاً برای بخش های متنی کوچک مانند عناوین صفحات و متن انکورها محاسبه می شود. از سوی دیگر برای بررسی نیازهای کاربران و اعمال بهترین تغییرات در پرس و جوها باید تاریخچه تمام پرس و جوهای ارسالی از سوی کاربران که در هر ماه بالغ بر چند گیگابایت خواهد بود ذخیره شده و پارامترهای مورد نیاز برای مدل های آماری متداول (همانند محتوای صفحات وب) از آنها نیز استخراج شوند. پس از استخراج این پارامترها، باید هر یک از مدل های آماری به صورت مستقل به کار گرفته شده و نتایج آنها در نهایت با هم ترکیب شوند.

پس از پردازش پرس و جو و ارسال آن به واحد نمایه ساز، نتایج که ممکن است از یک تا چند هزار صفحه ای وب در تغییر باشند بازیابی شده و باید براساس ده ها پارامتر متفاوت امتیازدهی شوند. تعیین ضرایب و نحوه ترکیب این پارامترها نیازمند یک مدل ریاضی بسیار پیچیده است که شکست یا موفقیت آن مهمترین عامل تعیین کننده شکست یا پیروزی یک موتور جستجو در بازار جهانی رقابت برای جذب کاربران خواهد بود.

۵ جمع بندی

در این مقاله چالشهای موجود در موتورهای جستجو برای پردازش داده های حجیم به صورت خلاصه معرفی شده اند و براساس همین چالش ها، اشاراتی به مجموعه ای کلی از راهکارها که برای پردازش صفحات وب فارسی در مقیاس یک میلیارد صفحه مورد نیاز خواهد بود، صورت گرفته است. مهمترین نکته در طراحی ساختاری برای مدیریت و پردازش چنین حجم از دادگان، مقیاس پذیری و توانایی لازم برای توزیع پردازش ها است.

^۹Fault Tolerant



ص: ۵-۵

چهل و ششمین کنفرانس ریاضی ایران

۳-۶ شهریور ۱۳۹۴

دانشگاه یزد

پردازش داده های عظیم در موتورهای جستجو



دانشگاه یزد

سخنرانی

مراجع

- [1] A. M. Zareh-Bidoki, *Efficient Web Crawling and Ranking*, Ph.D. Thesis, Tehran University, 2009.
- [2] S. biteboul, M. Preda, G. Cobena, *Adaptive on-line page importance computation*, Proceedings of the 12th international conference on World Wide Web, ACM Press , pp. 280-290, 2003.
- [3] R. Baeza-Yates, B. Ribeiro-Neto, *Modern Information Retrieval*, ACM Press/Addison-Wesley, 1999.
- [4] C. Castillo, C., *Effective Web Crawling* , Ph.D. Thesis, University of Chile, 2004.
- [5] L. Page, S. Brin, R. Motwani, T. Winograd, *The Pagerank citation algorithm: bringing order to the web*, Technical report, Stanford Digital Library Technologies Project, 1998.
- [6] A. M. Zareh-Bidoki, N. Yazdani, *DistanceRank: An Intelligent Ranking Algorithm for Web Pages*, Information Processing and Management, Vol. 44, No. 2, pp. 877-892, March 2008.
- [7] A. M. Zareh-Bidoki, Yazdani, N., P. Ghodsnia, *FICA:A Novel Intelligent Crawling Algorithm Based on Reinforcement Learning* , Web Intelligence and Agent Systems (WIAS) Journal, Vol. 7, No. 4, p.363-373, December 2009.

پست الکترونیکی: alizareh@parsijoo.ir

پست الکترونیکی: fkavehy@parsijoo.ir

جبر



ساختار گراف مقسوم علیه صفر حلقه‌های متناهی با گروه جمعی دوری

علی‌رضا اشرفی
دانشگاه کاشان

عادل تدین‌فر*
دانشگاه کاشان

چکیده

هدف این مقاله تعیین ساختار گراف مقسوم علیه صفر حلقه‌های متناهی با گروه جمعی دوری است. ثابت خواهد شد که چنین گراف‌هایی را می‌توان به‌عنوان زیرگراف القایی از ضرب تانسوری G -جمع روی گراف‌های شناخته شده‌ای بیان کرد.

واژه‌های کلیدی: گراف مقسوم علیه صفر، G -جمع، ضرب تانسوری

Mathematics Subject Classification [2010]: 13D45, 39B42

۱ مقدمه

مفهوم گراف مقسوم علیه صفر یک حلقه توسط بک در مطالعه روی مسئله‌ی رنگ‌پذیری حلقه‌های جابه‌جایی معرفی شد [۴]. او حلقه‌ی R را به‌عنوان مجموعه رئوس گراف $G(R)$ در نظر گرفت و دو رأس متمایز x و y را مجاور نامید، هرگاه حاصل ضربشان صفر شود. اندرسون و لیوینگستون [۱]، به‌منظور ساده‌سازی گراف مقسوم علیه صفر بک، مجموعه‌ی همه‌ی مقسوم علیه‌های صفر ناصفر را به‌عنوان مجموعه رئوس در نظر گرفتند. آن‌ها یال‌ها را نیز مشابه آن‌چه که بک اختیار کرده بود، تعریف کردند و این گراف را با $\Gamma(R)$ نشان دادند. در این مقاله از تعریف اندرسون-لیوینگستون برای گراف مقسوم علیه صفر استفاده کرده و هیچ‌یک از حلقه‌ها را دامنه در نظر نمی‌گیریم. خوانندگان علاقه‌مند را برای مطالعه‌ی بیشتر در این زمینه به [۶] راه‌نمایی می‌کنیم.

در [۲، ۷]، رده‌بندی حلقه‌های متناهی از اندازه‌ی p^2 و p^3 ارائه شده است. به‌علاوه در [۷] رده‌بندی حلقه‌های متناهی که اندازه‌ی آن‌ها خالی از مربع کامل می‌باشد، آورده شده است. هدف این مقاله مشخص کردن گراف مقسوم علیه صفر حلقه‌هایی است که گروه جمعی آن‌ها دوری است.

گراف‌های کامل و تهی روی n رأس را، به‌ترتیب، با K_n و Φ_n نشان می‌دهیم. هم‌چنین از K_∞ برای نشان دادن گراف کامل روی مجموعه رئوس نامتناهی شمارا استفاده می‌کنیم. حلقه‌ی اعداد صحیح به‌پیمانه‌ی n را با Z_n نشان داده و منظور از $C_n(0)$ حلقه‌ی دیگری با همان عناصر و عمل جمع، ولی با ضرب بدیهی است. جمع $G + H$ از گراف‌های G و H با مجموعه رئوس مجزای، به‌ترتیب، $V(G)$ و $V(H)$ را چنین تعریف می‌کنیم: رئوس $G + H$ همان رئوس G و H بوده و یال‌های این گراف عبارت است از یال‌های G و یال‌های H به‌همراه تمام یال‌هایی که یک رأس از G را به یک رأس از H متصل می‌سازد. $V(G)$ و $V(H)$ را به‌هم متصل می‌سازند. اکنون فرض کنیم G_1, G_2, \dots, G_k گراف‌هایی با رئوس متمایز باشند. جمع دنباله‌ای $G_1 + G_2 + \dots + G_k$ را به‌صورت $(G_1 + G_2) \cup (G_2 + G_3) \cup \dots \cup (G_{k-1} + G_k)$ تعریف می‌کنیم.

* سخنران



اگر Γ یک گراف و $\Pi = \{P_1, P_2, \dots, P_r\}$ افزایی از $V(\Gamma)$ باشد، آن گاه گراف خارج قسمتی $\frac{\Gamma}{\Pi}$ را به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$E\left(\frac{\Gamma}{\Pi}\right) = \{P_i P_j \mid \exists v \in P_i \exists v^* \in P_j \text{ s.t. } vv^* \in E(\Gamma)\} \quad \text{و} \quad V\left(\frac{\Gamma}{\Pi}\right) = \Pi.$$

حال فرض کنیم G گرافی برجسب گذاری شده با مجموعه رئوس $V(G) = \{x_1, \dots, x_n\}$ و $\Gamma_1, \dots, \Gamma_n$ گراف هایی دل خواه با مجموعه رئوس متمایز باشند. گراف G -جمع از گراف های $\Gamma_1, \dots, \Gamma_n$ را به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$\left(\bigoplus_{i=1}^n \Gamma_i\right)_G = \bigcup_{x_r x_s \in E(G)} \Gamma_r + \Gamma_s.$$

آشکار است که اگر $G = K_2$ ، آن گاه G -جمع گراف های Γ_1 و Γ_2 ، همان جمع معمولی آن ها می باشد. هم چنین اگر مسیر $n+1$ رأسی P_n را به عنوان G انتخاب کنیم، آن گاه P_n -جمع گراف های $\Gamma_1, \dots, \Gamma_n$ ، همان جمع دنباله ای آن ها است. در طول این مقاله، برای زیرمجموعه A از حلقه R ، مجموعه E عناصر ناصفر A را با A^* نشان می دهیم. اکنون فرض کنیم G و H دو گراف باشند. ضرب تانسوری $G \otimes H$ از G و H ، گرافی با مجموعه رئوس $V(G) \times V(H)$ است و دو رأس (a, b) و (u, v) در آن با هم مجاورند، اگر تنها اگر a و u در G و b و v در H با یکدیگر مجاور باشند. ضرب تانسوری همان ضرب روی رسته های گراف ها و هم ریختی های گرافی است و از این رو برخی ریاضی دانان از اصطلاح ضرب رسته ای به جای ضرب تانسوری استفاده می کنند. اگر $x \in V(G)$ ، آن گاه از $\deg_G(x)$ (به طور خلاصه $\deg(x)$) به عنوان تعداد رئوس مجاور و متمایز با x استفاده می کنیم. برای مفاهیمی که در این جا ارائه نشده است، می توان به [۸، ۱۰، ۱۱] مراجعه کرد.

۲ نتایج اصلی

هدف این بخش ارائه ی رده بندی کاملی از گراف هایی هستند که می توانند به عنوان گراف مقسوم علیه صفر حلقه هایی که گروه جمعی آن ها دوری است، نمایش داده شوند. در زیر، قضیه ای را از [۳] می آوریم که در این مقاله مورد استفاده قرار گرفته است.

قضیه ۱.۲. فرض کنیم A و B حلقه هایی نایک ریخت با گروه جمعی Z_n باشند که به ترتیب، توسط a و b تولید شده اند. به علاوه فرض کنیم $a^x = ka$ و $b^y = lb$. در این صورت $A \cong B$ ، اگر تنها اگر $(k, n) = (l, n)$. در نتیجه تعداد حلقه های متمایز با گروه جمعی Z_n ، برابر با تعداد مقسوم علیه های n است.

طبق قضیه ی قبل، تعداد $n+1$ حلقه ی نایک ریخت با گروه جمعی Z_{p^n} وجود دارد. این حلقه ها عبارتند از:

$$A_0 = Z_{p^n}, \quad A_i = \langle p^i \rangle \leq Z_{p^{n+i}},$$

که $1 \leq i \leq n$.

لم ۲.۲. افزای P_j از $V(\Gamma(A_j))$ وجود دارد که گراف خارج قسمتی $\frac{\Gamma(A_j)}{P_j}$ یک ریخت با گراف G_j است به طوری که:

$$V(G_j) = \begin{cases} \{i \in N \mid 1 \leq i \leq n-1\} & j = 0 \\ \{i \in N \mid 1 \leq i \leq n\} & 1 \leq j \leq n, \end{cases}$$

$$E(G_j) = \begin{cases} \{ik \mid i, k \in V(G), i+k \geq n\} & j = 0 \\ \{ik \mid i, k \in V(G), i+k \geq n-j+2\} & 1 \leq j \leq n. \end{cases}$$



لم ۳.۲. گراف $\Gamma(A_j^k)$ برای هر $0 \leq j \leq n$ با تعریف زیر، زیرگراف القایی $\Gamma(A_j)$ است:

$$\Gamma(A_j^k) = \begin{cases} K_{p^{n-k-1}(p-1)} & j = 0, \forall k \geq n \\ \Phi_{p^{n-k-1}(p-1)} & j = 0, \forall k < n \\ K_{p^{n-k}(p-1)} & 1 \leq j \leq n, j + 2k \geq n + 2 \\ \Phi_{p^{n-k}(p-1)} & 1 \leq j \leq n, j + 2k < n + 2 \end{cases}$$

قضیه ۴.۲. برای هر $0 \leq j \leq n$ و با توجه به نمادهای لم ۲.۲، $\Gamma(A_j) = \bigsqcup_{kl \in E(G_j)} (\Gamma(A_j^k) + \Gamma(A_j^l))_{G_j}$.

نتیجه ۵.۲. گراف مقسوم علیه صفر حلقه هایی از اندازه ی p^3 که گروه جمعی آنها دوری است، عبارتند از:

$$K_{p-1} + \Phi_{p(p-1)}, \Phi_{p^2(p-1)} + K_{p-1} + K_{p(p-1)}, K_{p^2-1} + \Phi_{p^2(p-1)}, K_{p^2-1}.$$

فرض کنیم R حلقه ای نامتناهی با گروه جمعی دوری باشد. در این صورت طبق نتیجه ی ۳ و قضیه ی ۴ از [۵]، R مقسوم علیه صفر ناصفر دارد، اگر و تنها اگر

$$R \cong \left\{ \begin{pmatrix} c & -c \\ c & -c \end{pmatrix} \mid c \in Z \right\} \cong C(0),$$

که $C(0)$ حلقه ای با ضرب بدیهی و گروه جمعی دوری نامتناهی است. بنابراین $\Gamma(R) \cong K_\infty$. پس کافی است تا تنها حالتی را بررسی کنیم که حلقه ی R با گروه جمعی دوری متناهی باشد. برای بررسی گراف مقسوم علیه صفر حلقه های متناهی با گروه جمعی دوری از اندازه ی $n = p_1^{\alpha_1} \dots p_k^{\alpha_k}$ ، فرض کنیم $A_0(i) = Z_{p_i^{\alpha_i}}$ و $A_{l_i}(i) = \langle p_i^{l_i} \rangle \leq Z_{p_i^{\alpha_i + l_i}}$ و $1 \leq l_i \leq \alpha_i$ و $1 \leq i \leq k$. هم چنین فرض کنیم $d(n)$ تعداد مقسوم علیه های مثبت عدد n باشد. از آن جا که تعداد حلقه های با گروه جمعی دوری از اندازه ی p^α برابر با $\alpha + 1$ است، پس می توان نشان داد که تعداد حلقه ها با گروه جمعی دوری از مرتبه ی n برابر با $d(n)$ است.

تعریف ۶.۲. فرض کنیم R یک حلقه باشد. گراف مقسوم علیه صفر R طوقه دار روی R ، گرافی با مجموعه رئوس R است و دو رأس x و y در آن با هم مجاورند، اگر و تنها اگر $xy = 0$. این گراف را با $\Gamma_{l,B}(R)$ نشان می دهیم. نیز زیرگرافی القایی از $\Gamma_{l,B}(R)$ است که توسط مقسوم علیه های صفر ناصفر R تولید می شود.

با توجه به تعریف قبل، می توان مشاهده کرد که $\Gamma_{l,B}(A_0) = \Gamma_{l,B}(R) = \hat{K}_1 + (\Gamma_l(R) \cup \Phi_{|R|-|Z(R)|})$ و $\Gamma_{l,B}(A_i) = \hat{K}_1 + \Gamma_l(A_i)$ و $\hat{K}_1 + (\Gamma_l(A_0) \cup \Phi_{p^{n-1}(p-1)-1})$.

قضیه ۷.۲. فرض کنیم $R = R_1 \times \dots \times R_k$ که برای هر $1 \leq i \leq k$ ، $R_i \cong A_{l_i}(i)$ حلقه ای متناهی با گروه جمعی Z_m باشد. در این صورت

$$\Gamma_{l,B}(R_1 \times \dots \times R_k) = \Gamma_{l,B}(R_1) \times \dots \times \Gamma_{l,B}(R_k).$$

لم ۸.۲. فرض کنیم G_1, \dots, G_k گراف های دل خواهی باشند و برای هر $1 \leq i \leq k$ ، $x_i \in V(G_i)$. هم چنین فرض کنیم $K = \{1, 2, \dots, k\}$ و I زیرمجموعه ای از K باشد به طوری که برای هر $i \in I$ ، G_i دارای طوقه روی رأس x_i است. در این صورت

$$\deg_{G_1 \times \dots \times G_k}((x_1, \dots, x_k)) = \prod_{i=1}^k \deg_{G_i}(x_i) + \sum_{j \in I} \frac{\prod_{i=1}^k \deg_{G_i}(x_i)}{\deg_{G_j}(x_j)}.$$

¹Beck



در ادامه فرض کنیم G یک گراف باشد و $V' \subseteq V(G)$ و $E' \subseteq E(G)$. زیرگراف H از G با این ویژگی که $V(H) = V(G) \setminus V'$ و $E(H) = E(G) \setminus E'$ را با نماد $G \setminus (V', E')$ نشان خواهیم داد.

قضیه ۹.۲. فرض کنیم $R \cong R_1 \times \dots \times R_k$ که برای هر $1 \leq i \leq k$ ، $R_i \cong A_{l_i}(i)$ ، $|R_i| = p_i^{\alpha_i}$ که p_i ها اعداد اول متمایزند و $|R| \neq 4$. در این صورت

$$\Gamma(R) = \begin{cases} \Gamma_{l,B}(R) \setminus (\{(^\circ, \dots, ^\circ)\}, \lambda) & \exists i; l_i \neq 0, 1 \leq i \leq k \\ \Gamma_{l,B}(R) \setminus (\{(^\circ, \dots, ^\circ)\} \cup \nu, \lambda \cup \varepsilon) & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

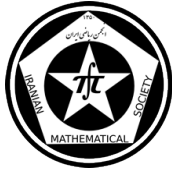
که λ و ν ، به ترتیب، مجموعه‌ی طوقه‌ها و رئوس پایانی گراف $\Gamma_{l,B}(R)$ می‌باشند و ε نیز مجموعه‌ی همه‌ی یال‌هایی از این گراف است که بر ν واقع می‌باشند.

نتیجه ۱۰.۲. فرض کنیم $A_0 = Z_{p^n}$ و $A_i = \langle p^i \rangle \leq Z_{p^{n+i}}$ ، برای هر $1 \leq i \leq n$ ، $n+1$ حلقه‌ی نایک‌ریخت با گروه جمعی Z_{p^n} باشند. در این صورت برای هر $0 \leq j_1 < j_2 \leq n$ ، زیرگرافی القایی از $\Gamma(A_{j_1})$ است.

مراجع

- [1] D. F. Anderson and P. S. Livingston, *The zero-divisor graph of a commutative ring*, J. Algebra **217** (1999), pp. 434–447.
- [2] V. G. Antipkin and V. P. Elizarov, *Rings of order p^2* , Siberian Math. J., **23** (4) (1982), pp. 457–464.
- [3] R. A. Beaumont, *Rings with additive group which is the direct product of cyclic groups*, Duke Math. J., **15** (1948), pp. 367–396.
- [4] I. Beck, *Coloring of commutative rings*, J. Algebra, **116** (1) (1988), pp. 208–226.
- [5] W. Buck, *Cyclic Rings*, MSc thesis, Eastern Illinois University, 2004.
- [6] J. Coykendall, S. Sather-Wagstaff, L. Sheppardson and S. Spiroff, *On zero divisor graphs*, Progress in Commutative Algebra 2, pp.241–299, Walter de Gruyter, Berlin, 2012.
- [7] B. Fine, *Classification of finite rings of order p^2* , Math. Mag. **66** (4) (1993), pp. 248–252.
- [8] B. Mulay, *Cycles and symmetries of zero-divisors*, Comm. Algebra **30** (7) (2002), pp. 3533–3558.
- [9] A. Tadayyonfar and A. R. Ashrafi, *The structure of zero divisor graph of rings with cyclic additive group*, submitted.
- [10] A. Tadayyonfar and A. R. Ashrafi, *The zero divisor graphs of finite rings of cubefree order*, accepted.
- [11] D. B. West, *Introduction to Graph Theory*, Prentice Hall, Inc., Upper Saddle River, NJ, 1996.

پست الکترونیکی: adeltadayyonfar@grad.kashanu.ac.ir
پست الکترونیکی: ashrafi@kashanu.ac.ir



ص: ۴-۱

چهل و ششمین کنفرانس ریاضی ایران

۳-۶ شهریور ۱۳۹۴

دانشگاه یزد

۰- اجتماع روی ابر K - جبرها



دانشگاه یزد

سخنرانی

۰- اجتماع روی ابر K - جبرها

سودابه مددی*
دانشگاه شاهد

محمد علی نصر آزادانی†
دانشگاه شاهد

چکیده

در این مقاله ابتدا ۰- اجتماع روی دو ابر K جبر (H, \circ_1, \circ) , (H, \circ_2, \circ) تعریف می‌کنیم و به بررسی خواص قابل انتقال از \circ_1, \circ_2 به \circ و به عکس، می‌پردازیم.

واژه‌های کلیدی: ابر K - جبر، ابر K - ایده‌ال، ابر K - ایده‌ال استلزامی مثبت، ابر K - ایده‌ال استلزامی

Mathematics Subject Classification [2010]: 06F35, 03G25

۱ مقدمه

مطالعه BCK -جبر به عنوان تعمیمی از مفاهیم تفاضل مجموعه‌ها و جبرگزاره‌ها نخستین بار توسط ریاضیدان ژاپنی به نام های ایمای^۱ و ایزکی^۲ [۱]، در سال ۱۹۶۶ آغاز شد. نظریه ابرساختارها یا چند جبر در سال ۱۹۳۴ توسط مارتی^۳ [۲] در هشتمین کنفرانس ریاضی دانان اسکانندیناوی معرفی گردید. برزویی و زاهدی براساس این نظریه ابر BCK -جبر و ابر K -جبر که هر کدام تعمیمی از BCK -جبر هستند را معرفی نمودند.

تعریف ۱.۱. [۳] فرض کنید H یک مجموعه ناتهی همراه با عنصر ثابت « \circ » و ابر عمل \circ باشد. H یک ابر K -جبر نامیده می‌شود اگر به ازای هر $x, y, z \in H$ شرایط K_1 تا K_5 برقرار باشد.

$$K_1 : (x \circ z) \circ (y \circ z) < x \circ y,$$

$$K_2 : (x \circ y) \circ z = (x \circ z) \circ y,$$

$$K_3 : x < x,$$

$$K_4 : x < y, y < x \implies x = y,$$

$$K_5 : \circ < x.$$

که $x < y$ به معنای $x \circ y \in \circ$ است. همچنین به ازای هر $A, B \subseteq H$ ، $A < B$ یعنی وجود دارد $a \in A$ و $b \in B$ به طوری که $a < b$ ؛ به علاوه عنصر $e \in H$ یک کران بالای H است هرگاه به ازای هر $x \in H$ ، $x < e$.

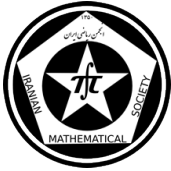
* سخنران

† عضو هیات علمی دانشگاه شاهد و نویسنده مسؤول

Imai^۱

Iseki^۲

Marty^۳



قرارداد: قرار می‌دهیم $H = X \cup \{0\}$ و $P_0(H) = \{A \subseteq H : 0 \in A\}$ و $S = \{f | f \in (P_0(H))^H\}$ جهت سهولت $f(x)$ را با F^x نشان می‌دهیم.

قضیه ۲.۱. [۴] فرض کنید $H = X \cup \{0\}$ که X یک مجموعه ناتهی است. در این صورت برای هر $f \in S$ ابر عمل $P^*(H) \rightarrow H \times H : \circ_f$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$x \circ_f y := \begin{cases} F^x, & \text{if } x = y \\ \{x\}, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

آن‌گاه گزاره‌های زیر هم ارزند:

(i) $(H, \circ_f, 0)$ یک ابر K -جبر است،

(ii) برای هر $x \neq y$ و $y \in H$ و $F^x \circ_f y = F^x$ ،

(iii) $F^y \subseteq F^x$ و $y \in F^y$ نتیجه دهد $x \neq y$.

تعریف ۳.۱. [۴] ابر عمل و ابر K -جبری که در قضیه قبل معرفی شد به ترتیب شبه اجتماع ابر عمل و شبه اجتماع ابر K -جبر نامیده می‌شود.

تعریف ۴.۱. فرض کنید $(H, \circ, 0)$ یک ابر K -جبر و $S \subseteq H$ باشد. S را یک زیر جبر از H گویند هرگاه S با ابر عمل \circ یک ابر K -جبر باشد.

قضیه ۵.۱. فرض کنید S یک زیر مجموعه ناتهی از ابر K -جبر $(H, \circ, 0)$ باشد؛ در این صورت S یک زیر جبر از H است اگر و تنها اگر به ازای هر $x, y \in S$ ، $x \circ y \subseteq S$.

تعریف ۶.۱. [۴] فرض کنید I یک زیر مجموعه ناتهی از ابر K -جبر $(H, \circ, 0)$ باشد؛ در این صورت I ابر K -ایده‌ال نامیده می‌شود اگر:

$$(H_1) \quad 0 \in I$$

$$(H_2) \quad \text{به ازای هر } x, y \in H \text{ اگر } x \circ y < I \text{ و } y \in I \text{ آن‌گاه } x \in I.$$

قرارداد: فرض کنید I, A زیرمجموعه‌های ناتهی از ابر K -جبر H باشند. قرار می‌دهیم:

$$AR_1 I := A \subseteq I,$$

$$AR_2 I := A < I,$$

$$AR_3 I := A \cap I \neq \emptyset.$$

تعریف ۷.۱. [۳] زیرمجموعه ناتهی I از ابر K -جبر H را ایده‌ال استلزامی مثبت از نوع (i, j, k) گویند هرگاه $0 \in I$ و به ازای هر $x, y, z \in H$ و $i, j, k \in \{1, 2, 3\}$ داشته باشیم:

$$(x \circ y) \circ zR_i I, y \circ zR_j I \Rightarrow x \circ zR_k I.$$

تعریف ۸.۱. [۳] زیر مجموعه ناتهی I از ابر K -جبر H را استلزامی گویند هرگاه $0 \in I$ و به ازای هر $x, y, z \in H$ ،

$$(x \circ z) \circ (y \circ x) < I, z \in I \Rightarrow x \in I.$$



قضیه ۹.۱. فرض کنید I یک ابر K -ایدهال از H باشد. I یک ابر K -ایدهال استلزامی است اگر و تنها اگر به ازای هر $x, y \in H$

$$x \circ (y \circ x) < I \Rightarrow x \in I$$

تعریف ۱۰.۱. [۳] زیرمجموعه ناتهی I از ابر K - جبر H را ایدهال جابه‌جایی از نوع (i, j) گویند هرگاه $\circ \in I$ و به ازای هر $x, y, z \in H$ و $i, j, k \in \{1, 2, 3\}$ داشته باشیم:

$$(x \circ y) \circ z R_i I, z \in I \Rightarrow x \circ (y \circ (y \circ x)) R_j I.$$

تعریف ۱۱.۱. ابر K - جبر (H, \circ, \circ) را \circ -اجتماع گوئیم هرگاه وجود داشته باشد دو ابر عمل \circ_1, \circ_2 روی H به طوری که $\circ = \circ_1 \cup \circ_2$ در این صورت گوئیم \circ -اجتماع H_1 و H_2 است.

مثال ۱۲.۱. در مثال زیر، \circ -اجتماع دو شبه اجتماع ابر K - جبر \circ_1 و \circ_2 است.

\circ_1	\circ	۱	۲	\circ_2	\circ	۱	۲
\circ	{ $\circ, 1$ }	{ $\circ, 1$ }	{ $\circ, 1$ }	\circ	{ \circ }	{ \circ }	{ $\circ, 1$ }
۱	{ 1 }	{ $\circ, 1$ }	{ 1 }	۱	{ 1 }	{ $\circ, 1$ }	{ 1 }
۲	{ 2 }	{ 2 }	{ $\circ, 1$ }	۲	{ 2 }	{ 2 }	{ $\circ, 2$ }
	\circ	۱	۲		\circ	۱	۲
	\circ	{ $\circ, 1$ }	{ $\circ, 1$ }	{ $\circ, 1$ }			
	۱	{ 1 }	{ $\circ, 1$ }	{ 1 }			
	۲	{ 2 }	{ 2 }	{ $\circ, 1, 2$ }			

قضیه ۱۳.۱. \circ -اجتماع دو شبه اجتماع ابر K - جبر یک شبه اجتماع ابر K - جبر است.

قضیه ۱۴.۱. اگر (H, \circ_1, \circ) و (H, \circ_2, \circ) دو ابر K - جبر کراندار باشند آن‌گاه \circ -اجتماع آن‌ها کراندار است.

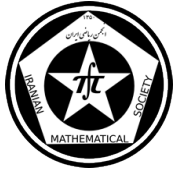
مثال زیر نشان می‌دهد عکس قضیه بالا در حالت کلی درست نمی‌باشد.

مثال ۱۵.۱. در مثال زیر 1 کران بالای (H, \circ, \circ) است ولی 1 کران بالای (H, \circ_1, \circ) و (H, \circ_2, \circ) نمی‌باشد.

\circ_1	\circ	۱	۲	۳	\circ_2	\circ	۱	۲	۳
\circ	{ \circ }	{ \circ }	{ \circ }	{ \circ }	\circ	{ \circ }	{ \circ }	{ \circ }	{ \circ }
۱	{ 1 }	{ $\circ, 1$ }	{ 1 }	{ 1 }	۱	{ 1 }	{ $\circ, 1$ }	{ 1 }	{ 1 }
۲	{ 2 }	{ 2 }	{ $\circ, 2$ }	{ 2 }	۲	{ 2 }	{ \circ }	{ $\circ, 2$ }	{ 2 }
۳	{ 3 }	{ $\circ, 1, 2$ }	{ $\circ, 1, 3$ }	{ $\circ, 1, 2, 3$ }	۳	{ 3 }	{ 3 }	{ $\circ, 1, 3$ }	{ $\circ, 1, 3$ }
	\circ	۱	۲	۳		\circ	۱	۲	۳
	\circ	{ \circ }	{ \circ }	{ \circ }	{ \circ }				
	۱	{ 1 }	{ $\circ, 1$ }	{ 1 }	{ 1 }				
	۲	{ 2 }	{ $\circ, 2$ }	{ $\circ, 2$ }	{ 2 }				
	۳	{ 3 }	{ $\circ, 1, 2, 3$ }	{ $\circ, 1, 3$ }	{ $\circ, 1, 2, 3$ }				

قضیه ۱۶.۱. فرض کنید H, \circ -اجتماع H_1 و H_2 باشد. S زیر جبر H است اگر و تنها اگر S زیر جبر H_1 و H_2 باشد.

قضیه ۱۷.۱. فرض کنید H, \circ -اجتماع H_1 و H_2 باشد. I ایدهالی از H است اگر و تنها اگر I از ایدهالی H_1 یا H_2 باشد.



قضیه ۱۸.۱. فرض کنید H ، \circ - اجتماع H_1 و H_2 باشد. اگر I ایدهال استلزامی مثبت نوع $(i, j, k)_{i,j,k \in \{1,2,3\}}$ از H باشد آنگاه I ایدهال استلزامی مثبت نوع $(i, j, k)_{i,j,k \in \{1,2,3\}}$ از H_1 یا H_2 است.

قضیه ۱۹.۱. فرض کنید H ، \circ - اجتماع H_1 و H_2 باشد. اگر I ایدهال استلزامی مثبت نوع $(1, 1, 2)$ ، $(1, 1, 1)$ و $(1, 1, 3)$ از H_1 و H_2 باشد آنگاه I ایدهال استلزامی مثبت نوع $(1, 1, 1)$ ، $(1, 1, 2)$ و $(1, 1, 3)$ از H است.

قضیه ۲۰.۱. فرض کنید H ، \circ - اجتماع H_1 و H_2 باشد. I ایدهال استلزامی از H است اگر و تنها اگر I ایدهال استلزامی از H_1 یا H_2 باشد.

قضیه ۲۱.۱. H ، \circ - اجتماع H_1 و H_2 باشد. I ایدهال جابه‌جایی نوع $(i, j)_{i,j \in \{1,2,3\}}$ است اگر و تنها اگر I ایدهال جابه‌جایی نوع $(i, j)_{i,j \in \{1,2,3\}}$ از H_1 یا H_2 باشد.

مراجع

- [1] Y. Imai and K. Iséki, *On axiom systems of propositional calculi xiv*, Proc. Japan Academy (1966), no. 42, 19-22.
- [2] F. Marty, *Sur une generalization de la notion de groups*, 8th congress Math Scandinavies, Stockholm (1934), 45-49.
- [3] M. M Zahedi, T. Roodbary, *Positive implicative hyper K -Ideals*, Scientiae Mathematicae Japonicae online, (2007), 507 - 520.
- [4] M. A. Nasr-Azadani and M. M. Zahedi, *Quasi union on hyper K-algebras*, Quasigroups and Related Systems 16 (2008), 65 - 74.

پست الکترونیکی: s.madadi@shahed.ac.ir

پست الکترونیکی: nasr@shahed.ac.ir



نیم گروه های بئر-لوی و ایدآل های چپ آن

دکتر سید مسیح آیت
دانشگاه زابل

مهرناز پیراسته*
دانشگاه سیستان و بلوچستان

چکیده

در این مقاله نیم گروه بئر-لوی و دو خاصیت تعمیم آن را معرفی می کنیم که بیشتر ماهیت نظریه مجموعه ای دارند. خواص مهم این نیم گروه ها نظیر عدم وجود عضو همانی، اعضای خودتوان و همچنین راست حذفی بودن و راست ساده بودن این نیم گروه ها را نشان می دهیم. در نهایت وضعیت ایدآل های چپ این نیم گروه ها را بررسی می کنیم.

واژه های کلیدی: نیم گروه بئر-لوی، نیم گروه بئر لوی تبدیلات خطی، ایدآل های چپ

Mathematics Subject Classification [2010]: 13D45, 39B42

۱ مقدمه

۲ تعاریف و مفاهیم اولیه

تعریف ۱.۲.

فرض می کنید S نیم گروه باشد و $A \subseteq S$ باشد A را ایدآل راست S می نامیم هرگاه $AS \subseteq A$ مشابه ایدآل چپ نیز تعریف می گردد. A را ایدآل نیم گروه S می نامیم هرگاه $S^1AS^1 \subseteq A$ نیم گروه S راست ساده است اگر ایدآل راست سره نداشته باشد نیم گروه چپ ساده و نیم گروه ساده نیز مشابه تعریف می شوند. اگر $a \in S$ باشد aS^1 ایدآل راست اصلی و S^1 ایدآل چپ اصلی و S^1AS^1 ایدآل اصلی نظیر عضو a در نیم گروه S می باشند البته این ایدآل ها شامل عضو a می باشند اما اگر ایدآل aS را در نظر بگیریم، الزامی وجود ندارد که $a \in aS$ باشد.

به وضوح اگر S جابجایی باشد، ایدآل چپ و راست و ایدآل دو طرفه یکی خواهند بود و از این رو چپ ساده، راست ساده و ساده بودن نیز تطابق دارند.

تعریف ۲.۲. نیم گروه S را راست حذفی می نامیم، هرگاه $\forall x, y, a \in S, xa = ya \rightarrow x = y$ نیم گروه S را چپ حذفی می نامیم، هرگاه $\forall x, y, a \in S, ax = ay \rightarrow x = y$

تعریف ۳.۲. فرض کنید X یک مجموعه شمارای نامتناهی باشد S را مجموعه همه نگاشت هایی یک به یک $\alpha : X \rightarrow X$ در نظر بگیرید به طوری که $X \setminus X\alpha$ نیز نامتناهی باشد در این صورت S را نیم گروه بئرلوی نظیر مجموعه X می نامیم و با $BL(X)$ نمایش می دهیم.

* سخنران



می توانیم تعریف فوق را تعمیم نیز بدهیم. در ابتدا چند نماد گذاری را ارائه می دهیم، فرض کنید $\alpha : X \rightarrow X$ داده شده باشد که X یک مجموعه نامتناهی دلخواه باشد قرار می دهیم. $C(\alpha) = D(\alpha) = X \setminus X\alpha; d(\alpha) = |D(\alpha)|$. $C(\alpha) = |C(\alpha)| \cup \{y\alpha^{-1} : |y\alpha^{-1}| \geq 2, C(\alpha) = |C(\alpha)|$ می کند. اگر $|X| = p \geq q \geq \mathbb{N}_0$ قرار می دهیم $BL(X, p, q) = \{\alpha : X \rightarrow X; C(\alpha) = \circ, d(\alpha) = q\}$ واقع تعریف $BL(X)$ که در ابتدا ذکر گردید، در این نمادگذاری به صورت $BL(X, \mathbb{N}_0, \mathbb{N}_0)$ در می آید. شرط $C(\alpha) = \circ$ معادل یک به یک بودن نگاشت α است.

تعریف ۴.۲. فرض کنید V یک فضای برداری روی میدان F باشد بطوریکه $\dim(V) = p \geq \mathbb{N}_0$ نیم گروه $T(V)$ شامل همه تبدیلات خطی روی V باشد. آنگاه قرار می دهیم $n(\alpha) = \dim \ker(\alpha), r(\alpha) = \dim \text{ran}(\alpha), d(\alpha) = \dim \text{ran}(\alpha)$ $\mathbb{N}_0 \geq q \geq p$ برای $GS(V, p, q) = \{\alpha \in T(V); n(\alpha) = \circ, d(\alpha) = q\}$ باز شرط $n(\alpha)$ معادل یک به یک بودن نگاشت α است. پس $GS(V, p, q)$ صرفاً معطوف به توابع یک به یک خطی می باشد.

۳ گزاره ها و قضایای اصلی

قضیه ۱.۳. فرض کنید $\mathbb{N}_0 \leq q \leq p$ اگر φ یک خودریختی روی $BL(X, p, q)$ روی مجموعه X باشد آنگاه $g \in S(X)$ وجود دارد بطوریکه $a\varphi = gag^{-1}$ $\forall a \in BL(X, p, q)$ می باشد به عبارت دیگر هر خودریختی در $BL(X, p, q)$ یک خودریختی داخلی است.

قضیه ۲.۳. فرض کنید $\mathbb{N}_0 \leq q \leq p$ در اینصورت $GS(V, p, q)$ و $BL(X, p, q)$ هر دو نیم گروه های راست ساده و راست حذفی هستند که فاقد عناصر خودتوان می باشند.
گزاره قوی ای که می توان بیان نمود عبارت است از:

اثبات. از آنجا که هر عضو $GS(V, p, q)$ و $BL(X, p, q)$ نگاشتی یک به یک می باشد، فرض خودتوان بودن نگاشتی چون f معادل است با $(xf)f = (x)f$ $\forall x$ ، باشد تبدیل به فرض $(x)f = x$ $\forall x$ ، می گردد یعنی f همان تابع همانی است که به وضوح غیر ممکن است.

در مرجع [۱] جلد دوم بخش ۸، ۱ دیدیم که $BL(X, p, q)$ ساده راست، از راست حذف شدنی و فاقد عناصر خودتوان است. پس تمرکز خود را روی $S = GS(V, p, q)$ قرار می دهیم.

فرض کنید $\alpha, \beta \in S$ قرار می دهیم $\text{ran}(\alpha) = \langle e_i \rangle$ و از این رو $V = \langle e_{iI}, e_{jJ} \rangle$ پس $|J| = q$ می باشد بنا بر یک به یک بودن تابع β ، به سادگی داریم مجموعه $\{e_j\beta\} \cup \{e_i\beta\}$ مجموعه مستقل خطی است و $\text{ran}(\beta)$ را تولید می کند از سوی دیگر، $\text{ran}\alpha\beta = \langle e_i\beta \rangle$ چون هر دو α, β یک به یک هستند، پس $\alpha\beta$ نیز یک به یک است و $d(\alpha, \beta) = q + q = q$ (به خاطر کاردینال نامتناهی بودن q) پس $\beta\alpha$ نیز در S می گنجد. حال فرض کنید $V = \langle e_k \rangle$ باشد و برای هر k داشته باشیم: $e_k\alpha = x_k$ و $e_k\beta = y_k$ از این رو اگر قرار دهیم: $V = \langle x_k, y_k \rangle = \langle y_k, y_l, y_m \rangle$ که طبق بند قبل $|L| = |M| = q$ خواهد بود قرار می دهیم برای هر k ، $x_k\mu = y_k$ ، و برای هر l ، $x_l\mu = y_l$ آنگاه به وضوح μ یک به یک است و داریم $\beta = \alpha\mu$ پس $GS(V, p, q)$ ساده راست می باشد. \square

گزاره قوی ای که می توان بیان نمود عبارتست از:

قضیه ۳.۳. هر نیم گروه راست ساده و راست حذفی فاقد عناصر خودتوان S را می توان در نیم گروهی بصورت $GS(V, m, m)$ نشانید. در واقع اگر $|S| = m$ و F یک میدان دلخواه باشد فرض می کنیم $i \in I$ ، $S^1 = \{a_i\}$ قرار می دهیم



وجود شانس برای یکریختی $GS(V, p, q)$ و $BL(X, p, q)$ نمی باشد. اما این قضیه به معنی

اثبات. قرار می دهیم $S^1 = \{a_i\}$ که $|I| = m$ می باشد. چون S فاقد عنصر خودتوان است، پس نامتناهی است میدان دلخواه F را در نظر بگیرید. برای هر $i \in I, F_i = F$ قرار می دهیم پس $V = \sum_i F_i$ در واقع عناصر V را می توان به صورت دنباله $(r_i)_{i \in I}$ در نظر گرفت که همگی به جز تعداد متناهی از مولفه ها ناصفر هستند. از آنجا که S راست حذفی است، به هر $x \in S$ می توانیم $S^1 \rightarrow S^1 : \rho$ را با ضابطه $a_i \mapsto a_i x$ تعریف می کنیم که نگاهی یک به یک از پایه $\{a_i\}$ به خودش می باشد. این نگاشت را از پایه به یک نگاشت خطی یک به یک روی S^1 تبدیل می کنیم. از آنجا که S نامتناهی است، نتیجه می گیریم که

$$|S^1| = |S| = |S \setminus Sx| = |S^1(x \cup Sx)| = |S^1 \setminus S^1 \rho_x|$$

از این رو $codim \rho_x = |S| = m$ و از این رو داریم: $\rho_x \in GS(V, m, m)$ با وفا بودن این نمایش راست نتیجه می دهد که S را می توان در $GS(V, m, m)$ نشانید. □

قضیه ۴.۳. نیم گروه های $GS(V, p, q)$ و $BL(X, p, q)$ به ازای هیچ کدام از کاردینال های نامتناهی $n \leq m$ و $q \leq p$ یکریخت نیستند.

در واقع اگر S یکی از دو نیم گروه فوق الذکر باشد $S = S\varphi$ $\forall \varphi \in S$ یعنی تنها ایدال راست آن خود نیم گروه است. اگر $S = BL(X, p, q)$ آنگاه $S\alpha = \{\beta \in S, ran\beta = ran\alpha\}$ $\forall \alpha \in S$

اثبات. به قضیه ۳، ۱۰ مرجع [۵] مراجعه نمائید. □

تعریف ۵.۳. ایدال های چپ نیم گروه $GS(m, m)$ عبارتند از زیر مجموعه های L از $GS(m, m)$ بطوریکه

$$\alpha \in L, \beta \in GS(m, n), ran\beta \subseteq ran\alpha, dim(ran\alpha/ran\beta) = n \implies \beta \in L$$

به علاوه اگر Y زیر مجموعه ای دلخواهی از $GS(m, m)$ باشد قرار می دهیم

$$L_y = \{\beta \in GS(m, n); \exists \alpha \in Y; ran\beta \subseteq ran\alpha; dim(ran\alpha/ran\beta) = n\}$$

$$L_y^+ = Y \cup L_y$$

این مجموعه ها در واقع تنها ایدال های چپ این نیم گروه ها قلمداد می شوند. در واقع داریم:

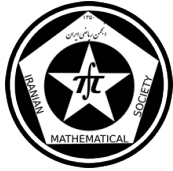
قضیه ۶.۳. در نیم گروه $GS(m, n)$ برای هر زیر مجموعه ناتهی Y از $GS(m, n)$ گوئیم L_y^+ ایدال چپ است. از سوی دیگر اگر I یک ایدال چپ باشد $I = L_I^+$ به علاوه نیم گروه $GS(m, n)$ ایدال ماکزیمال سره چپ ندارد.

خانواده ایدال های چپ این نیم گروه ها نه عضو مینیمال سره و نه عضو ماکزیمال سره دارد. در ادامه این تحقیق می توان تعریف دوگانی برای L_Y بررسی نمود.

$$R_Y = \{\beta \in GS(m, n) : \exists \alpha \in Y; ran\beta \subseteq ran\alpha, dim(ran\alpha/ran\beta) = n\}$$

$$R_Y^+ = Y \cup R_Y$$

بررسی خواص این مجموعه ها و مقایسه آن ها با L_Y گام مهم دیگری است که در مورد این نیم گروه ها قابل بررسی می باشد.



ص: ۴-۴

چهل و ششمین کنفرانس ریاضی ایران

۳-۶ شهریور ۱۳۹۴

دانشگاه یزد

نیم گروه های بئر-لوی و ایدال های چپ آن



دانشگاه یزد

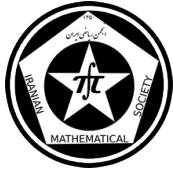
سخنرانی

مراجع

- [1] A H Clifford and G B preston, *The algebraic theory semigroup*, mathematical Surveys, No. 7, vol 1 and 2, American Mathematical society, Providence, RI , 1961 and 1967.
- [2] Inessa Levi, B M Scheun, RP Sullivan and G R Wood, *Automorphisms of Baer-levi semigroup*, J London Math soc, 28(3)(1983) 492-495
- [3] Inessa Levi and G. R. Wood, *On maximal subsemigroups of Baer-Levi semigroups*, Semigroup Forum, 30 (1)(1984)99-102.
- [4] Lucinda M. Lima. *Nilpotent local automorphisms of an independence algebra*, Proc Royal Soc Edinburgh, 124A (3)(1994) 423-436.
- [5] Mendes-Goncalves, S and sullivan, R.P., Baer-Levi semigroups of linear transformation, Proceedings of the Royal Society of Edinburgh. Section A Mathematic , Vol 134,2004,pp 477-499
- [6] M A Reynolds and R P Sullivan, *Products of idempotent linear transformations*, Proc. Royal Soc. Edinburgh, 100A (1985) 123-138
- [7] R P Sullivan, *Ideals in transformation semigroups*, Commen. Math. Univ, Carolinae. 19(3)(1978) 431-446.
- [8] E G Sutov, *On a certain semigroup of one-to-one transformation (Russian)*, Uspehi Mat Nauk, 18 (1963) 231-235; English translation by Boris Schein in Amer Math Soc Transformations, 139 (1988) 191-196.

پست الکترونیکی: pirasteh.mehrnaz@gmail.com

آنالیز ریاضی



تابع لامبرت دابلو

مصطفی نجفی *

دانشگاه زنجان

چکیده

در این مقاله ابتدا تابع لامبرت^۱ را تعریف و خواص دیفرانسیلی آن را بررسی می‌کنیم، و برخی از مقادیر خاص این تابع را به کمک نرم‌افزار متمتیکا به دست آورده و سرانجام چند معادله‌ی مهم را به کمک این تابع حل خواهیم کرد.

واژه‌های کلیدی: اتحاد، انتگرال، تابع لامبرت، مشتق، مقادیر خاص

Mathematics Subject Classification [2010]: 33Exx

۱ مقدمه

تابع لامبرت^۲ معکوس تابع $f(x) = xe^x$ می‌باشد، این تابع را با $W(x)$ نمایش می‌دهیم.

تعریف ۱.۱. تابع لامبرت را برای $x \geq -\frac{1}{e}$ به صورت زیر تعریف می‌شود

$$W(x)e^{W(x)} = x. \quad (1)$$

چون در فاصله‌ی $(-\frac{1}{e}, 0)$ لامبرت به ازای هر x دو مقداره می‌باشد، بنابراین تابع لامبرت را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$x = \begin{cases} W_0(xe^x) & x \geq -1 \\ W_{-1}(xe^x) & x \leq -1. \end{cases}$$

در فاصله‌ی $(-\frac{1}{e}, 0)$ همواره $W_{-1}(x) < W_0(x)$ است، و همچنین

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} W_{-1}(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} W_0(x) = +\infty.$$

به وضوح اتحادهای زیر را برای تابع لامبرت داریم.

$$e^{W(\log x)} = \frac{\log x}{W(\log x)}, \quad (x > 0). \quad W\left(-\frac{\log x}{x}\right) = -\log x, \quad (0 < x \leq e).$$

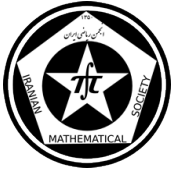
$$W(x) = \log\left(\frac{x}{\log \frac{x}{\log \frac{x}{\dots}}}\right), \quad (x > 0). \quad W(x \log x) = \log x, \quad (x > 0).$$

$$e^{nW(x)} = \left(\frac{x}{W(x)}\right)^n, \quad (x > 0). \quad \log W(x) = \log x - W(x), \quad (x > 0).$$

* سخنران

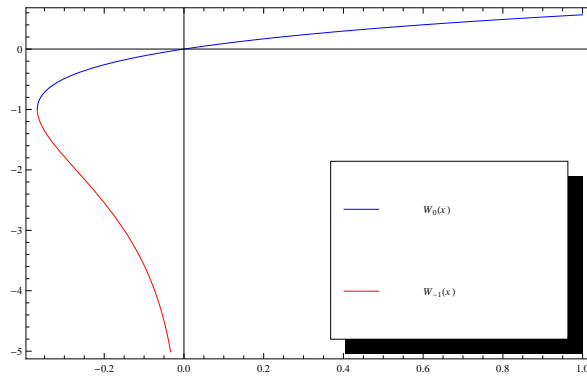
^۱Lambert W-Function

^۲تابع لامبرت دابلو به افتخار ریاضی‌دان سوئیس یوهان هاینریش لامبرت به انگلیسی Johann Heinrich Lambert نام‌گذاری شده است.



۲ نتایج اصلی

نمودار تابع لامبرت به شکل زیر می‌باشد.



شکل ۱: نمودار تابع لامبرت در فاصله‌ی $[-\frac{1}{e}, 1]$

جدول ۱: مقادیر خاص تابع لامبرت

x	$W_0(x)$	$W_{-1}(x)$	x	$W_0(x)$	$W_{-1}(x)$	x	$W_0(x)$	$W_{-1}(x)$
$2e^2$	۲	-	$\frac{1}{e}$	۰٫۲۷...	-	$-\frac{1}{e}$	-۰٫۳۵...	-۲٫۱۵...
e	۱	-	۰	۰	-	$-\frac{1}{e}$	-۰٫۴۰	-۲
۱	۰٫۵۶...	-	-۰٫۰۲	-۰٫۰۲...	-۵٫۶۴...	$-\frac{1}{e}$	-۱	-۱

تابع لامبرت از هر مرتبه‌ای مشتق‌پذیر است، به‌جز نقاطی که تابع مشتق لامبرت در آن تعریف نشده باشد. برای محاسبه‌ی مشتق مرتبه‌ی اول تابع لامبرت از طرفین رابطه‌ی (۱) نسبت به x مشتق می‌گیریم. بنابراین داریم

$$W'(x) = \frac{1}{e^{W(x)}(1+W(x))} = \frac{e^{-W(x)}}{1+W(x)} = \frac{W(x)}{x(1+W(x))}.$$

برای $x > 0$ ، چون همواره $e^{W(x)} > 0$ ، بنابراین $W(x) = \frac{x}{e^{W(x)}} > 0$ است، در نتیجه برای $x > 0$ داریم

$$W'(x) = \frac{1}{e^{W(x)}(1+W(x))} > 0.$$

یعنی تابع لامبرت در بازه‌ی $(0, +\infty)$ اکیداً صعودی است.

برای $x < 0$ ، به‌وضوح $-\frac{1}{e} < x < 0$ ، $W(0) = 0$ ، $W(-\frac{1}{e}) = -1$ است، و بنابراین $(1+W(x)) > 0$ ، و چون $e^{W(x)} > 0$ است. در نتیجه خواهیم داشت

$$W'(x) = \frac{1}{e^{W(x)}(1+W(x))} > 0.$$

یعنی تابع لامبرت در بازه‌ی $(-\frac{1}{e}, 0)$ نیز اکیداً صعودی است، لذا تابع لامبرت بر روی دامنه‌ی خود اکیداً صعودی است. حالا مشتق تابع لامبرت را در نقاط $x = -\frac{1}{e}$ بررسی می‌کنیم، چون تابع لامبرت برای $x \geq -\frac{1}{e}$ تعریف شده است، بنابراین برای بررسی مشتق این تابع در نقطه‌ی $x = -\frac{1}{e}$ باید مشتق راست این تابع را در این نقطه بررسی کنیم.

$$\lim_{x \rightarrow (-\frac{1}{e})^+} W'(x) = \lim_{x \rightarrow (-\frac{1}{e})^+} \frac{W(x)}{x(1+W(x))} = \frac{-1}{-\frac{1}{e}(1+(-1)^+)} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{1}{\frac{1}{e}(1-1+\varepsilon)} = +\infty.$$



برای مشتق تابع لامبرت در نقطه‌ی $x = 0$ با استفاده از تعریف مشتق در یک نقطه و تعریف تابع لامبرت داریم

$$W'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{W(x) - W(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{W(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} e^{W(x)} = e^{W(0)} = e^0 = 1.$$

حالا برای مشتق دوم تابع لامبرت با استفاده از مشتق مرتبه‌ی اول داریم

$$W''(x) = -\frac{e^{-2W(x)}(W(x) + 2)}{(1 + W(x))^3} < 0.$$

لذا تقعر منحنی تابع لامبرت همواره رو به پایین است. برای انتگرال‌گیری از تابع لامبرت برای سهولت در محاسبات

$y = W(x)$ قرار می‌دهیم، آنگاه رابطه‌ی (۱) به صورت $ye^y = x$ درمی‌آید. حالا با دیفرانسیل‌گیری از طرفین این معادله

داریم

$$dye^y + dye^y y = (1 + y)e^y dy = dx. \quad (2)$$

در نتیجه خواهیم داشت

$$\int W(x) dx = \int y(1 + y)e^y dy = \int ye^y dy + \int y^2 e^y dy.$$

برای محاسبه‌ی این انتگرالها با استفاده از انتگرال جزء به جزء خواهیم داشت

$$\begin{aligned} \int W(x) dx &= \int ye^y dy + \int y^2 e^y dy = ye^y - e^y + y^2 e^y - 2ye^y + 2e^y + C, \\ &= y^2 e^y - ye^y + e^y + C = (y^2 - y + 1)e^y + C, \end{aligned}$$

چون در ابتدا فرض کرده بودیم که $y = W(x)$ ، و همچنین با استفاده از $e^{W(x)} = \frac{x}{W(x)}$ داریم

$$\begin{aligned} \int W(x) dx &= y^2 e^y - ye^y + e^y + C = W^2(x)e^{W(x)} - W(x)e^{W(x)} + e^{W(x)} + C, \\ &= xW(x) - x + \frac{x}{W(x)} + C. \end{aligned}$$

بسیاری از عبارتهای شامل تابع لامبرت به روش مشابه بالا انتگرال‌گیری می‌شوند.

مثال ۱.۲. مساحت سطح زیر نمودار $f(x) = \frac{W(x)}{x\sqrt{x}}$ را در بازه‌ی $[0, \infty)$ محاسبه کنید.

ابتدا $y = W(x)$ قرار می‌دهیم. در نتیجه وقتی $x = 0$ چون $W(0) = 0$ ، بنابراین $y = 0$ و همچنین وقتی $x \rightarrow \infty$

داریم $W(x) \rightarrow \infty$ ، بنابراین $y \rightarrow \infty$. حالا با استفاده از رابطه‌ی (۲) داریم

$$\int_0^\infty \frac{W(x)}{x\sqrt{x}} dx = \int_0^\infty y^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{y}{2}} dy + \int_0^\infty y^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{y}{2}} dy,$$

با تغییر متغیر $t = \frac{y}{2}$ و همچنین با توجه به خواص تابع گاما داریم

$$\int_0^\infty \frac{W(x)}{x\sqrt{x}} dx = 2\sqrt{2} \int_0^\infty (t)^{\frac{1}{2}} e^{-t} dt + \sqrt{2} \int_0^\infty (t)^{-\frac{1}{2}} e^{-t} dt = 2\sqrt{2} \left(\frac{1}{2} \sqrt{\pi} \right) + \sqrt{2} \sqrt{\pi} = 2\sqrt{2}\pi.$$

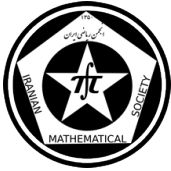
مثال ۲.۲. معادله‌ی $x^y = y^x$ که در آن $x, y > 0$ هستند را حل نمائید.

ابتدا چون $x, y > 0$ هستند، از طرفین لگاریتم می‌گیریم و در نتیجه معادله به صورت $x \log y = y \log x$ درمی‌آید، حالا

با تقسیم طرفین بر y داریم $\log x = \frac{\log y}{y} x$ ، و این معادله نیز با معادله‌ی $x = e^{\frac{\log y}{y} x}$ معادل است، با تقسیم این معادله

بر $e^{\frac{\log y}{y} x}$ خواهیم داشت، $x e^{-\frac{\log y}{y} x} = 1$. حالا طرفین این معادله را در $-\frac{\log y}{y}$ ضرب می‌کنیم، بنابراین خواهیم داشت

$$-\frac{\log y}{y} x e^{-\frac{\log y}{y} x} = -\frac{\log y}{y},$$



با مقایسه‌ی معادله بالا با رابطه‌ی (۱) داریم

$$-\frac{\log y}{y}x = W\left(-\frac{\log y}{y}\right).$$

در نتیجه خواهیم داشت

$$x = -\frac{y}{\log y}W_k\left(-\frac{\log y}{y}\right),$$

بطوریکه $k = 0, -1$ است.

می‌خواهیم توابعی به فرم $h(x) = x^{x^{\dots}}$ با فرض $\frac{1}{e} < x < e^{\frac{1}{e}}$ را بررسی کنیم. توابعی به این فرم به توابع پرتوان^۳ معروف هستند. از رابطه‌ی $h(x)$ لگاریتم می‌گیریم و در نتیجه داریم $h(x) = e^{h(x)\log x}$ ، با تقسیم طرفین این معادله را بر $e^{h(x)\log x}$ داریم، $h(x)e^{-h(x)\log x} = 1$. حالا طرفین معادله‌ی بالا را در $-\log x$ ضرب می‌کنیم.

$$-h(x)\log x e^{-h(x)\log x} = -\log x,$$

با مقایسه‌ی معادله بالا با رابطه‌ی (۱) داریم، $-h(x)\log x = W_k(-\log x)$ بنابراین خواهیم داشت

$$h(x) = x^{x^{\dots}} = -\frac{W_k(-\log x)}{\log x}, \quad (3)$$

که در آن $k = 0, 1$ است.

مثال ۳.۲

مثال ۴.۲. حاصل عبارت $\frac{1}{4}^{\frac{1}{4}^{\frac{1}{4}^{\dots}}}$ را محاسبه کنید.

چون $0 < \frac{1}{4} < 1$ است، اگر در رابطه‌ی (۳) قرار دهیم $x = \frac{1}{4}$ ، چون $\log\left(\frac{1}{4}\right) < 0$ است بنابراین عبارت داخل تابع لامبرت مثبت است لذا با استفاده از شاخه‌ی $W_0(x)$ داریم

$$h\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{4}^{\frac{1}{4}^{\frac{1}{4}^{\dots}}} = -\frac{W_0\left(-\log\left(\frac{1}{4}\right)\right)}{\log\left(\frac{1}{4}\right)} = -\frac{W_0\left(-\log 2^{-2}\right)}{\log 2^{-2}} = \frac{W_0\left(2 \log 2\right)}{2 \log 2} = \frac{1}{2}.$$

مراجع

- [1] Hoorfar, Abdolhossein; Hassani, Mehdi, *Inequalities on the Lambert W function and hyperpower function*, JIPAM. J. Inequal. Pure Appl. Math. 9 (2008), no. 2, Article 51, 5 pp.
- [2] Jordan, P. M, *A note on the Lambert W-function: applications in the mathematical and physical sciences. Mathematics of continuous and discrete dynamical systems*, 247-263, Contemp. Math., 618, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2014.

^۳Hyperpower function



تخمین بزرگی مشتق چندجمله‌ای‌های موجکی

ابراهیم تمیمی

دانشگاه ولایت

چکیده

بسیاری از قضایای نظریه تقریب مربوط به این حقیقت هستند که آهنگ تغییر چند جمله‌ای‌های با درجه بالا از سرعت کمی برخوردار است؛ به عبارت دیگر مشتق آنها نمی‌تواند خیلی بزرگ باشد. قبلاً بزرگی مشتق چند جمله‌ای‌های جبری و مثلثاتی نسبت به خودشان برآورد شده است. در این مقاله می‌خواهیم بزرگی (اندازه) مشتق چند جمله‌ای‌های موجکی را توسط خود چند جمله‌ای‌های موجکی تخمین بزنیم.

واژه‌های کلیدی: آنالیز چندریزی متناوب، پایه‌ی متعامد یکه، تخمین بزرگی مشتق، چند جمله‌ای‌های موجکی، نامساوی برنشتاین

Mathematics Subject Classification [2010]: 41A17, 42A10

۱ مقدمه

در ۲۰ سال گذشته، علاقه به مطالعه‌ی موجک‌ها بوسیله‌ی کاربردهای آنها گسترش یافت. با تکرار مشتق، می‌توان بزرگی مشتقات مراتب بالای چند جمله‌ای‌های جبری و مثلثاتی را به کمک نامساوی برنشتاین^۱ تخمین زد [۳]. حال به کمک نامساوی برنشتاین، می‌خواهیم این کار را برای چند جمله‌ای‌های موجکی انجام دهیم. در این بخش نمادها و تعاریفی را که در طول مقاله از آنها استفاده می‌شود، ارائه می‌دهیم. در بخش دوم، دو لم و یک نتیجه‌ی فوری از آنها را بیان می‌کنیم. در بخش آخر قضیه‌ی اصلی را که هدف این مقاله است، بیان کرده و اثبات می‌کنیم.

تعریف ۱.۱. یک موجک (موجک مادر^۲) تابعی است چون $\psi \in L_2(\mathbb{R})$ ، که خانواده‌ی توابع $\psi_{jk} = 2^{j/2} \psi(2^j \cdot + k)$ برای اعداد صحیح j, k یک پایه متعامد یکه در فضای هیلبرت $L_2(\mathbb{R})$ تشکیل دهند.

می‌دانیم که برای اندازه‌گیری یک موج یا تابع جهت مشخص کردن خواص موضعی آن، از آنالیز چندریزی استفاده می‌کنیم [۱]. در سراسر مقاله، فرض بر این است که \mathbb{T} دایره‌ی یکه، φ ثابت وابسته به آنالیز چندریزی و $\psi \in L_2(\mathbb{R})$ که ϕ تابع مقیاس^۳ (موجک پدر) آنالیز چندریزی و ψ تابع موجک مادر می‌باشند [۱]. در نظر بگیرید که توابع ψ, ϕ به اندازه کافی میرا باشند، آنگاه بنا به [۴] خواهیم داشت:

$$\max(|\phi(x)|, |\psi(x)|) \leq \frac{\varphi}{1 + |x|^{1+\epsilon}}, \quad \epsilon > 0 \quad (1)$$

در این صورت بدیهی است که توابع

$$\Phi_{jn}(x) = 2^{j/2} \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} \phi(2^j x + 2^j \ell + n),$$

^۱Bernstein's inequality

^۲Mother wavelet

^۳Scaling function



$$\Psi_{jn}(x) = 2^{j/2} \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} \psi(2^j x + 2^j \ell + n)$$

در $L_2(\mathbb{T})$ واقع می‌شوند و دستگاههای $\{\Phi_{jn}\}_{n=0}^{2^j-1}$ و $\{\Psi_{jn}\}_{n=0}^{2^j-1}$ به ازای هر $j = 0, 1, 2, \dots$ متعامد هستند. علاوه بر آن فضاهای

$$V_j = \text{span}\{\Phi_{jn}, \quad n = 0, 1, \dots, 2^j - 1\},$$

$$W_j = \text{span}\{\Psi_{jn}, \quad n = 0, 1, \dots, 2^j - 1\}$$

به ازای هر $j = 0, 1, 2, \dots$ در خواص زیر صدق خواهند کرد:

$$V_0 = \{\text{const}\}, \quad V_j \subset V_{j+1}, \quad V_{j+1} = V_j \oplus W_j, \quad \overline{\bigcup_{j=0}^{\infty} V_j} = L_2(\mathbb{T}).$$

گردایه‌ی $\{V_j\}_{j=0}^{\infty}$ با خواص بالا را آنالیز چندریزگی متناوب ($PMRA$)^۴ تولید شده توسط تابع مقیاس ϕ می‌نامیم. کلاس گسترده‌ای از $PMRA$ در [۴] تعریف و به دقت مطالعه شده است. به راحتی می‌توان بررسی کرد که توابع (موجک‌های متناوب) زیر

$$\Phi_{00}, \quad \Psi_{jn}; \quad j = 0, 1, \dots, \quad n = 0, \dots, 2^j - 1,$$

یک پایه‌ی متعامد یکه در $L_2(\mathbb{T})$ تشکیل می‌دهند. بنا به (۱) از آنجا که این توابع کراندار هستند، سری‌های فوریه‌ی موجکی زیر را برای هر $f \in L(\mathbb{T})$ در نظر می‌گیریم:

$$\langle f, \Phi_{00} \rangle \Phi_{00} + \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{2^j-1} \langle f, \Psi_{jn} \rangle \Psi_{jn} \quad (2)$$

برای تبدیل دو سیگمای فوق به یک سیگما، موجک‌های زیر را در نظر می‌گیریم:

$$\omega_0 = \Phi_{00}, \quad \omega_{2^j+L} = \Psi_{jL}; \quad 0 \leq L < 2^j - 1$$

اکنون رابطه (۲) را به صورت زیر بازنویسی می‌کنیم:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \langle f, \omega_k \rangle \omega_k \quad (3)$$

تعریف ۲.۱. فرض کنید $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ یک فضای ضرب داخلی روی میدان اعداد حقیقی یا مختلط باشد. اگر تصویر پوشای P خود توان و خود الحاق^۵ باشد، آن‌گاه P تصویر متعامد^۶ نامیده می‌شود.

اگر N -امین مجموع جزئی سری (۳) را با $S_N(f)$ نشان دهیم، آن‌گاه بنا به تعریف ۲.۱، S_{2^j-1} یک تصویر متعامد f در V_j و $\{\Phi_{jn}\}_{n=0}^{2^j-1}$ یک پایه متعامد در V_j خواهند بود و داریم:

$$S_{2^j-1}(f) = \sum_{n=0}^{2^j-1} \langle f, \Phi_{jn} \rangle \Phi_{jn}. \quad (4)$$

^۴Periodic Multiresolution Analysis

^۵Self adjoint

^۶Orthonormal Projection



۲ قضایای تقریب

در این بخش شرایطی در قالب دو لم فراهم می‌کنیم که بتوانیم قضیه‌ی اصلی را مورد بررسی قرار دهیم.

لم ۱.۲. فرض کنید g و h توابع تعریف شده روی \mathbb{R} و $f \in L(\mathbb{T})$ باشد. اگر برای $\varepsilon > 0$ داشته باشیم:

$$\max(|g(x)|, |h(x)|) \leq \frac{\varphi}{1 + |x|^{1+\varepsilon}}$$

آن‌گاه برای $j = 0, 1, \dots$ و $L = 0, 1, \dots, 2^j - 1$ خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} & \int_0^1 f(t) \sum_{k=0}^L \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} g(2^j x + 2^j \ell + k) \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} \overline{h(2^j t + 2^j \ell + k)} dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \sum_{\nu \in \mathbb{Z}(j, L)} g(2^j x + \nu) \overline{h(2^j t + \nu)} dt. \end{aligned}$$

که در آن $\mathbb{Z}(j, L) = \{\nu \in \mathbb{Z} \mid \nu = 2^j \ell + k, \ell \in \mathbb{Z}, k = 0, 1, \dots, L\}$.

اثبات. با استفاده از شرط کرانداري در صورت لم، نتیجه می‌گیریم که سری‌های $\sum_{\ell \in \mathbb{Z}}$ و $\sum_{\ell \in \mathbb{Z}}$ همگرایند. بعد از کمی محاسبات حکم بدست می‌آید. \square

لم ۲.۲. فرض کنید μ تابعی کراندار، نزولی و روی $[0, \infty)$ انتگرال‌پذیر باشد، آن‌گاه به ازای هر $x, y \in \mathbb{R}$ داریم:

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} \mu(|x + k|) \times \mu(|y + k|) \leq C \times \mu\left(\frac{|x - y|}{4}\right).$$

(C ثابت وابسته به μ است)

از دو لم بالا به طور مستقیم نتیجه‌ی زیر بدست می‌آید.

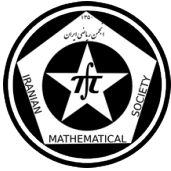
نتیجه ۳.۲. اگر توابع g و h در لم ۱.۲ صدق کنند، آن‌گاه:

$$2^j \int_0^1 \left| \sum_{k=0}^L \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} g(2^j x + 2^j \ell + k) \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} \overline{h(2^j t + 2^j \ell + k)} \right| dt \leq C.$$

که در آن C ثابت وابسته به توابع g و h و عدد $\varepsilon > 0$ می‌باشد.

۳ تخمین بزرگی مشتق چند جمله‌ای‌های موجکی

قبلا به کمک نامساوی برنشتاین، بزرگی مشتق چند جمله‌ای‌های جبری و مثلثاتی برآورد شده است [۲, ۳]. حال با استفاده از این نامساوی، بزرگی مشتق چند جمله‌ای‌های موجکی را توسط خودشان تخمین می‌زنیم.



قضیه ۱.۳. فرض کنید برای $m \in \mathbb{Z}^+$ ، $\phi \in C^{(m)}(\mathbb{R})$ باشد که در (۱) صدق می‌کند و برای $\varepsilon > 0$ داشته باشیم:

$$|\phi^{(m)}(x)| \leq \frac{\varphi}{1 + |x|^{1+\varepsilon}},$$

آنگاه برای $p \in [1, \infty]$ خواهیم داشت:

$$\|f^{(m)}\|_p \leq \varphi(p, m) 2^{mj} \|f\|_p.$$

که در آن برای $j = 0, 1, \dots$ و $f \in V_j$ و $\varphi(p, m)$ ثابت وابسته به p, m و $PMRA$ می‌باشد.

اثبات. چون $\{\Phi_{jk}\}_{k=0}^{2^j-1}$ یک پایه متعامد یکه برای V_j می‌باشد از (۴) خواهیم داشت:

$$f = \sum_{k=0}^{2^j-1} \langle f, \Phi_{jk} \rangle \Phi_{jk} = S_{2^j-1} f$$

بنابراین با توجه به ضوابط Φ_{jn} و Ψ_{jn} برای $x \in \mathbb{R}$ داریم:

$$f(x) = 2^j \sum_{k=0}^{2^j-1} \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} \phi(2^j x + 2^j \ell' + k) \int_0^1 f(t) \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} \overline{\phi(2^j t + 2^j \ell + k)} dt.$$

بعد از مشتق‌گیری از طرفین نسبت به x تا مرتبه m بدست می‌آوریم:

$$f^{(m)}(x) = 2^{j(m+1)} \int_0^1 f(t) \sum_{k=0}^{2^j-1} \sum_{\ell' \in \mathbb{Z}} \phi^{(m)}(2^j x + 2^j \ell' + k) \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} \overline{\phi(2^j t + 2^j \ell + k)} dt \quad (5)$$

برای ساده‌تر شدن نمادها قرار می‌دهیم:

$$K_j(x, t) = \sum_{k=0}^{2^j-1} \sum_{\ell' \in \mathbb{Z}} \phi^{(m)}(2^j x + 2^j \ell' + k) \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} \overline{\phi(2^j t + 2^j \ell + k)}$$

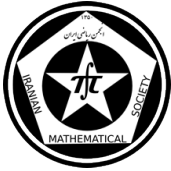
بنابراین رابطه‌ی (۵) به صورت زیر بازنویسی می‌شود:

$$f^{(m)}(x) = 2^{j(m+1)} \int_0^1 f(t) K_j(x, t) dt.$$

□ اکنون دو حالت $p = \infty$ و $p < \infty$ را برای p در نظر می‌گیریم که در هر دو حالت حکم بدست می‌آید.

مراجع

- [1] I. Daubechies, "Ten Lectures on Wavelets", CBMS-NSR series in Appl. Math, SIAM, philadelphia, 1992.
- [2] S. E. Kelly, M. A. Kon, and L. A. Raphael, Local convergence for wavelet expansion, 2001.
- [3] G. G. Lorentz, "Approximation of functions", Hdt, Rinhard and Winston, 1966.
- [4] M. Skopina, Wavelet Approximation of periodic function, J. Approx theory 104, pp. 302-329(2000).



شبه‌پیوستگی قوی توابع دو متغیره

سیدعلیرضا کامل میرمصطفایی
دانشگاه فردوسی

اکرم پورمعمار دزفولی*
دانشگاه فردوسی

چکیده

بئر در سال ۱۸۹۹ برای اولین بار نقاط پیوستگی توابع دو متغیره‌ی حقیقی مقدار را مورد بررسی قرار داد. در این مقاله تعمیم‌های مختلف قضیه بئر را بررسی خواهیم کرد. در حقیقت با در نظر گرفتن فضاهای توپولوژیک X ، Y و Z شرایطی را ارزیابی می‌کنیم که یک تابع دو متغیره مانند $f: X \times Y \rightarrow Z$ ، پیوسته و یا شبه‌پیوسته‌ی توأم باشد به شرط آن که این تابع نسبت به هر متغیر با ثابت نگه داشتن متغیر دیگر شبه‌پیوسته باشد.

واژه‌های کلیدی: فضای بئر، توابع شبه‌پیوسته، فضای نامیوکا، بازی‌های توپولوژیک.

Mathematics Subject Classification [2010]: 54C30, 54C35, 54C05, 46E15

۱ مقدمه

فرض کنیم X ، Y و Z فضاهای توپولوژیک باشند. تابع $f: X \times Y \rightarrow Z$ را به طور مجزا پیوسته نامیم هرگاه برای هر $(x_0, y_0) \in X \times Y$ ، توابع $f(., y_0): X \rightarrow Z$ و $f(x_0, .): Y \rightarrow Z$ پیوسته باشند. بئر [۱] برای اولین بار نشان داد که برای هر تابع به طور مجزا پیوسته‌ی $f: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ می‌توان یک مجموعه چگال و G_δ مانند D از $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ یافت که $f|_{D \times \mathbb{R}}$ پیوسته‌ی توأم باشد. تعمیم‌های مختلفی از قضیه بئر ارائه شده است [۳، ۵، ۶، ۸، ۹].

فرض کنیم X و Y فضاهایی توپولوژیک باشند. تابع $f: X \rightarrow Y$ شبه‌پیوسته است هرگاه برای مجموعه‌های باز $U \subseteq X$ و $V \subseteq Y$ که $f(U) \cap V \neq \emptyset$ ، مجموعه‌ی باز و ناتهی $G \subseteq U$ وجود داشته باشد به طوری که $f(G) \subseteq V$. در سال ۱۹۷۴ کمپستی [۵] تعمیمی از مفهوم پیوستگی چنین ارائه داد که هرگاه X ، Y و Z فضاهایی توپولوژیک باشند، در این صورت تابع $f: X \times Y \rightarrow Z$ کمپستی-تابع (KC -تابع) نام دارد اگر نسبت به متغیر اول شبه‌پیوسته و نسبت به متغیر دوم پیوسته باشد.

تابع $f: X \times Y \rightarrow Z$ را در $(x, y) \in X \times Y$ شبه‌پیوسته‌ی قوی نامیم هرگاه برای هر همسایگی W از $f(x, y)$ در Z و هر حاصلضرب از مجموعه‌های باز $U \times V \subset X \times Y$ شامل نقطه (x, y) ، همسایگی‌های باز و ناتهی $V_1 \subset V$ از نقطه y و $U_1 \subset U$ وجود داشته باشند به طوری که $f(U_1 \times V_1) \subset W$.

واضح است که هر تابع به طور مجزا پیوسته، شبه‌پیوسته‌ی قوی است، اما عکس این مطلب درست نیست. به عنوان مثال تابع $f: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ که با ضابطه‌ی $f(x, y) = [x]y$ تعریف می‌شود شبه‌پیوسته‌ی قوی است ولی به طور مجزا پیوسته نیست.

در این مقاله می‌خواهیم با استفاده از بازی‌های توپولوژیکی، نقاط پیوستگی KC -توابع را بیابیم. این پژوهش برخی از نتایج قبلی پتروفسکی [۳، ۶، ۹] را بهبود می‌بخشد.

* سخنران



۲ شبه‌پیوستگی قوی KC -توابع

برای بیان نتایج اصلی این بخش نیاز به معرفی دو بازی توپولوژیکی زیر داریم. هر بازی با دو نوع قانون تعریف می‌شود. قانونی که حکم می‌کند کدام بازیکن آغازگر بازی باشد و قانون برنده که تعیین کننده برنده بازی است. قانون برنده برای هر بازی منحصر به فرد بوده و به طور دقیق بازی را معرفی می‌کند. قانونی که حرکت هر بازیکن را مشخص می‌کند راهبردی برای آن بازیکن نامیده می‌شود.

فرض کنیم (X, τ) یک فضای توپولوژیک باشد. بازی باناخ-مازور [۲] را که با $BM(X)$ نشان می‌دهیم، بین دو بازیکن α و β انجام می‌شود. β بازی را با انتخاب مجموعه‌ی باز و ناتهی U_1 از X آغاز می‌کند، سپس α مجموعه باز و ناتهی $V_1 \subset U_1$ را برمی‌گزیند. به همین ترتیب در مرحله‌ی (V_i, U_i) ، $1 \leq i \leq n-1$ بازیکن β مجموعه باز و ناتهی $U_n \subset V_{n-1}$ انتخاب و α با مجموعه باز و ناتهی $V_n \subset U_n$ پاسخ می‌دهد. α برنده بازی $(V_i, U_i)_{i \geq 1}$ است هرگاه $(\bigcap_{n=1}^{\infty} V_n) \neq \emptyset$ ، در غیر این صورت β بازی را خواهد برد. فضا را α -مطلوب نامیم هرگاه α در بازی $BM(X)$ راهبردی برنده داشته باشد.

قضیه ۱.۲. [۲] فضای توپولوژیک X بئر است اگر و تنها اگر β در بازی باناخ-مازور راهبرد برنده نداشته باشد.

بازی توپولوژیکی دیگر توسط گراناگ [۴] معرفی شده است. فرض کنیم Y یک فضای توپولوژیکی و $y_0 \in Y$. بازی توپولوژیک $G(Y, y_0)$ با دو بازیکن \mathcal{O} و \mathcal{P} انجام می‌شود. بازیکن \mathcal{O} ابتدا با انتخاب همسایگی باز H_1 از y_0 بازی را آغاز می‌کند و \mathcal{P} با انتخاب نقطه $y_1 \in H_1$ پاسخ می‌گوید. به همین ترتیب در مرحله n ام، \mathcal{O} با انتخاب نقطه $y_n \in H_{n-1}$ پاسخ می‌دهد. بازیکن \mathcal{O} مجموعه باز H_{n+1} که $y_n \in H_{n+1}$ را برمی‌گزیند و \mathcal{P} با انتخاب نقطه $y_{n+1} \in H_{n+1}$ پاسخ می‌دهد. \mathcal{O} را برنده بازی $g = (H_n, y_n)$ می‌نامیم هرگاه $y_n \rightarrow y_0$. فضای Y را W -فضا نامیم هرگاه برای هر $y \in Y$ بازیکن \mathcal{O} برنده بازی $G(Y, y)$ شود.

فرض کنیم X, Y و Z فضاهای توپولوژیک باشند، با به کارگیری بازی‌های توپولوژیکی نشان می‌دهیم تحت چه شرایطی روی X, Y و Z ، هر KC -تابع $f: X \times Y \rightarrow Z$ به طور قوی شبه‌پیوسته است.

قضیه ۲.۲. فرض کنیم Y فضایی توپولوژیکی و Z فضایی منظم باشد. اگر X ، بئر و بازیکن \mathcal{O} در بازی $G(Y, y_0)$ راهبردی برنده داشته باشد (یا X یک فضای α -مطلوب و بازیکن \mathcal{P} ، در بازی $G(Y, y_0)$ راهبردی برنده نداشته باشد) آنگاه هر KC -تابع $f: X \times Y \rightarrow Z$ روی $X \times \{y_0\}$ شبه‌پیوسته‌ی قوی است.

اثبات. به برهان خلف فرض کنیم f در نقطه‌ی (x_0, y_0) شبه‌پیوسته‌ی قوی نباشد. چون Z منظم است، زیرمجموعه باز G هست که $f(x_0, y_0) \in G$ و $\bar{G} \subset W$. با به کارگیری شبه‌پیوستگی $f(\cdot, y_0)$ ، زیرمجموعه باز و ناتهی $U' \subset U$ هست که $f(U' \times \{y_0\}) \subset G$. به طور همزمان راهبرد s را برای β در $BM(X)$ و راهبرد t را برای α در $G(Y, y_0)$ استقرایی تعریف می‌کنیم. فرض کنیم $U_1 = U'$ اولین حرکت بازیکن β و $V_1 \subset U_1$ پاسخی از بازیکن α باشد. فرض کنیم H_1 اولین انتخاب بازیکن \mathcal{O} باشد، در این صورت طبق مفروضات $f(V_1 \times H_1)$ زیرمجموعه‌ی G نیست. بنابراین $(x_1, y_1) \in V_1 \times H_1$ وجود دارد به طوری که $f(x_1, y_1) \notin G$. قرار می‌دهیم $y_1 = t(H_1)$. بنا به شبه‌پیوستگی $f(\cdot, y_1)$ ، می‌توان زیرمجموعه‌ی باز و ناتهی U_1 از V_1 را طوری یافت که $f(U_1 \times \{y_1\}) \cap G = \emptyset$. فرض کنیم $s(V_1) = U_1$. برای $n \geq 1$ بازی‌های جزئی $p_n = (U_1, V_1, \dots, U_n, V_n)$ در $BM(X)$ و $g_n = (H_1, y_1, \dots, H_n)$ در $G(Y, y_0)$ را در نظر می‌گیریم. چون با توجه به فرض که $f(V_n \times H_n)$ در \bar{G} نمی‌افتد، نقطه‌ی $(x_n, y_n) \in V_n \times H_n$



هست که $f(x_n, y_n) \notin \bar{G}$. از شبه‌پیوستگی $f(x, y_n) \rightarrow x$ ، زیرمجموعه باز و ناتهی U_{n+1} از V_n طوری وجود دارد که $f(U_{n+1} \times \{y_n\}) \cap \bar{G} = \emptyset$. قرار می‌دهیم $s(U_1, V_1, \dots, U_n, V_n) = U_{n+1}$ و $t(H_1, y_1, \dots, H_n) = y_n$. طبق مفروضات قضیه، s -بازی $p = (U_n, V_n)$ و t -بازی $g = (H_n, y_n)$ که به ترتیب α و \mathcal{O} برنده بازی هستند وجود خواهند داشت. فرض کنیم $x^* \in \bigcap_{n \geq 1} U_n$ ، در این صورت از پیوستگی $f(x^*, y) \rightarrow y$ در y_0 و این حقیقت که $f(x_*, y_0) \in G$ ، همسایگی باز H از y_0 وجود دارد به طوری که برای همه $y \in H$ ، $(x_*, y) \in G$. چون \mathcal{O} برنده بازی $g = (H_n, y_n)$ ، $n_0 \in \mathbb{N}$ وجود دارد به طوری که به ازای $n \geq n_0$ ، $y_n \in H$. بنابراین $f(x^*, y_0) \in G$ از سوی دیگر نشان دادیم که برای هر $x \in U_n$ ، $f(x, y_n) \notin \bar{G}$. این تناقض قضیه را اثبات می‌کند. \square

بلافاصله از قضیه بالا چنین می‌توان نتیجه گرفت که:

نتیجه ۳.۲. فرض کنیم Y فضایی توپولوژیک و Z فضایی منظم باشد. اگر X بئر و Y یک W -فضا باشد آنگاه هر KC -تابع $f: X \times Y \rightarrow Z$ شبه‌پیوسته‌ی قوی است.

۳ کاربردها

فرض کنیم G یک گروه مجهز به توپولوژی باشد. G را یک گروه توپولوژی چپ نامیم هرگاه برای هر $g \in G$ ، انتقال چپ $h \in G \rightarrow gh \in G$ پیوسته باشد. به وضوح با تغییر جزئی در تعریف، می‌توان گروه توپولوژی راست را نیز تعریف کرد. اگر G هم گروه توپولوژی راست و هم چپ باشد آنگاه آن را یک گروه نیم توپولوژی نامیم. اگر نگاشت حاصلضربی گروه نیم توپولوژی، پیوسته باشد آن را پاراتوپولوژی گوئیم. فرض کنیم G یک گروه توپولوژی چپ و Y فضایی توپولوژی باشد، گوئیم گروه G روی Y عمل می‌کند هرگاه تابع $\pi: G \times Y \rightarrow Y$ طوری وجود داشته باشد که به ازای $g, h \in G$ و $y \in Y$ داشته باشیم $\pi(gh, y) = \pi(g, \pi(h, y))$. نگاشت π را عمل G روی Y می‌نامیم. فضای توپولوژیک منظم Y را موور نامیم هرگاه بتوان دنباله‌ای مانند $\{\mathcal{O}_n\}$ از پوشش‌های باز از آن یافت که برای هر $y \in Y$

$$st(y, \mathcal{O}_n) = \bigcup \{G \in \mathcal{O}_n : y \in G\}, (n \in \mathbb{N})$$

یک پایه در نقطه y باشد.

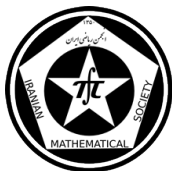
از قضیه ۲.۲ نتیجه زیر بدست می‌آید.

نتیجه ۱.۳. فرض کنیم X بئر، Y یک W -فضا و Z یک فضای موور باشد. هرگاه $f: X \times Y \rightarrow Z$ یک KC -تابع و $y \in Y$ آنگاه می‌توان یک زیرمجموعه چگال و G_δ مانند D_y از X یافت که f در هر نقطه $D_y \times \{y\}$ پیوسته توأم باشد.

قضیه ۲.۳. فرض کنیم Y فضایی موور و G یک گروه توپولوژی چپ باشد. اگر G بئر و Y ، W -فضا باشد آنگاه هر KC -عمل $\pi: G \times Y \rightarrow Y$ پیوسته‌ی توأم است.

اثبات. فرض کنیم $(g_0, y_0) \in G \times Y$. بنا به نتیجه ۱.۳ زیرمجموعه چگال و G_δ از G مانند D_{y_0} یافت که π در هر نقطه از $D_{y_0} \times \{y_0\}$ پیوسته توأم باشد. فرض کنیم $\{g_\alpha\}$ و $\{y_\alpha\}$ به ترتیب به g و y میل کنند. نقطه دلخواه $h \in D_{y_0}$ را در نظر می‌گیریم. چون π در (h, y_0) پیوسته است و $\lim_\alpha h g_\alpha^{-1} = h$ و $\lim_\alpha y_\alpha = y_0$ ، می‌بینیم که $\pi(h g_\alpha^{-1} g_\alpha, y_\alpha) = \pi(h, y_0)$ بنابراین

\square



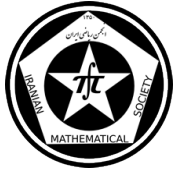
نتیجه ۳.۳. فرض کنیم G یک گروه نیم توپولوژی بئر باشد. اگر G موور هم باشد آنگاه یک گروه توپولوژی است.

اثبات. هر فضای موور شمارای نوع اول و در نتیجه W -فضاست. □

مراجع

- [1] R. Baire, *Sur les fonctions des variable reelles*, Ann Math. pura Appl. 3 (1899), 1-122.
- [2] G. Choquet, *Lectures on Analysis. Vol. I: Integration and topological vector spaces*, Edited by J. Marsden, T. Lance and S. Gelbart W. A. Benjamin, Inc., new York-Amsterdam 1969
- [3] G. Debs *Pointwise and uniform convergence on Corson compact space*, Topology Appl. 97 (1986), 299-303.
- [4] G. Gruenhage, *Infinite games and generalizations of first-countable space*, Topology Appl., 6 (1976), 339-352.
- [5] S. Kempisty, *Sur les fonctions quasicontinues*, Fund. Math., 19 (1932), 184-197.
- [6] A.K. Mirmostaaee, *Points of joint continuity of separately continuous mapping*, Methods Funct. Anal. Topology 15 (2009), no. 4, 356-360.
- [7] A.K. Mirmostaaee, *Topological games and strong quasi-continuity*, Banach J. Math. Anal.5 (2011), no.2, 131-137.
- [8] I. Namioka, *Separate conntinuity and joint continuity*, Pacific, J. Math. 51(1974), 515-531.
- [9] Z. Piotrowski, *Continuity points in $x \times Y$* , Bull.Soc.France108(1980), 113 – 115.

پست الکترونیکی: amirmostafae@yahoo.com
پست الکترونیکی: akram.poormemar@gmail.com



محاسبه‌ی معکوس توابع لگاریتمی به کمک تابع لامبرت

مصطفی نجفی *

دانشگاه زنجان

چکیده

در این مقاله ابتدا تابع لامبرت^۱ را تعریف و سپس یک کران بهینه برای این تابع بدست خواهیم آورد، و در نهایت با استفاده از این تابع معکوس توابع نمایی و لگاریتمی را با اثبات قضیه‌ای محاسبه خواهیم کرد.^۲

واژه‌های کلیدی: تابع لامبرت، رابطه‌ی مجانبی، کران، معکوس

Mathematics Subject Classification [2010]: 65D20, 34E05, 33B30

۱ مقدمه

محاسبه‌ی معکوس برخی توابع نمایی و لگاریتمی با روشهای مقدماتی دشوار و یا غیرممکن است، ولی به کمک تابع لامبرت می‌توان معکوس آنها را بدست آورد.

تعریف ۱.۱. تابع لامبرت را برای $x \geq -\frac{1}{e}$ به صورت زیر تعریف می‌شود

$$W(x)e^{W(x)} = x, \quad (1)$$

که در فاصله‌ی $(-\frac{1}{e}, 0)$ لامبرت به ازای هر x دو مقداره می‌باشد، بنابراین تابع لامبرت را به دو شاخه‌ی $W_0(x)$ برای $W(x) \geq -1$ و $W_{-1}(x)$ برای $W(x) \leq -1$ تقسیم می‌کنیم، تا شرط تابع بودن را داشته باشد.

۲ نتایج اصلی

بسط تابع لامبرت به صورت زیر است

$$W(x) = \log x - \log \log x + \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} C_{km} \frac{(\log \log x)^m}{(\log x)^{k+m}}, \quad (2)$$

بطوریکه $C_{km} = \frac{(-1)^k}{m!} S[k+m, k+1]$ که در آن $S[k+m, k+1]$ اعداد استرلینگ^۳ هستند. برای x های بقدر کافی بزرگ داریم

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log \log x}{\log x} = 0.$$

* سخنران

^۱Lambert W-Function

^۲تابع لامبرت دابلو به افتخار ریاضی‌دان سوئیس یوهان هاینریش لامبرت به انگلیسی Johann Heinrich Lambert نام‌گذاری شده است.

^۳Stirling numbers



در نتیجه اگر از رابطه‌ی (۵) وقتی $x \rightarrow \infty$ حد بگیریم، آنگاه خواهیم داشت

$$\lim_{x \rightarrow \infty} W(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} (\log x - \log \log x).$$

بنابراین خواهیم داشت

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (W(x) - \log x + \log \log x) = 0. \quad (3)$$

به عبارت دیگر برای x های بقدر کافی بزرگ داریم

$$W(x) = \log x - \log \log x + o(1) = \log x + O(\log \log x), \quad (4)$$

با توجه به بسط تابع لامبرت در رابطه‌ی (۵) برای x های بقدر کافی بزرگ خواهیم داشت

$$\log x - \log \log x < W(x) < \log x, \quad (5)$$

بطوریکه سمت چپ برای $x > 41/19$ و سمت راست هم برای $x > e$ برقرار است.

هدف ما در این مقاله این است که کرانهای بهتری برای تابع لامبرت بدست آوریم.

قضیه ۱.۲. برای هر $x \geq e$ داریم

$$\log x - \log \log x \leq W(x) \leq \log x - \frac{1}{p} \log \log x.$$

اثبات. حالت تساوی فقط برای $x = e$ برقرار است. در اینجا برای $x \geq e$ ضرایب -1 و $\frac{1}{p}$ برای $\log \log x$ بهترین

هستند. برای اثبات این قضیه تابع زیر را مورد بررسی قرار می‌دهیم

$$f(x) = \log x - \frac{1}{p} \log \log x - W(x),$$

که در آن $2 > p > 0$ عدد ثابتی است. برای $x \geq e$ مشتق $f(x)$ را بدست می‌آوریم، در نتیجه داریم

$$\frac{d}{dx} f(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{px \log x} - \frac{W(x)}{x(1+W(x))} = \frac{p \log x - 1 - W(x)}{px(1+W(x)) \log x},$$

و اگر $p = 2$ باشد آنگاه داریم

$$\frac{d}{dx} f(x) = \frac{2 \log x - 1 - W(x)}{2x(1+W(x)) \log x} = \frac{(\log x - W(x)) + (\log x - 1)}{2x(1+W(x)) \log x},$$

با توجه به سمت راست (۵) داریم، $\log x - W(x) > 0$. بنابراین برای $x > e$ داریم

$$\frac{d}{dx} f(x) > 0,$$

پس تابع $f(x)$ همواره صعودی است و در نتیجه طبق تعریف تابع صعودی برای $x > e$ داریم

$$f(x) > f(e) = \log e - \frac{1}{p} \log \log e - W(e) = 0.$$

بنابراین برای $x > e$ خواهیم داشت

$$\log x - \frac{1}{p} \log \log x - W(x) > 0.$$

پس سمت راست نامساوی قضیه برای $x \geq e$ برقرار است، یعنی

$$W(x) < \log x - \frac{1}{p} \log \log x.$$

حالا ثابت می‌کنیم $p = 2$ بهترین است، زیرا در غیر اینصورت اگر $0 < p < 2$ باشد، آنگاه خواهیم داشت

$$f'(e) = \frac{p \log e - 1 - W(e)}{pe(1+W(e)) \log e} = \frac{p - 1 - 1}{pe(1+1)} = \frac{p-2}{2pe} < 0.$$



یعنی $\frac{1}{4}$ - بهترین ضریب برای $\log \log x$ در سمت راست نامساوی قضیه برای $x \geq e$ است. برای سمت چپ نامساوی از رابطه‌ی (۱) نتیجه می‌گیریم که $e^{W(x)} = \frac{x}{W(x)}$ ، و بنابراین با لگاریتم گرفتن از طرفین داریم $W(x) = \log x - \log W(x)$ ، در نتیجه $\log W(x) = \log x - W(x)$. حالا با لگاریتم گرفتن از سمت راست نامساوی (۵) داریم

$$\log W(x) \leq \log \log x.$$

بنابراین خواهیم داشت، $\log x - W(x) \leq \log \log x$. در نتیجه

$$\log x - \log \log x \leq W(x).$$

حالا ثابت می‌کنیم که برای کران پایین $W(x)$ ، $1 -$ بهترین ضریب برای $\log \log x$ است، با برهان خلف این امر را ثابت می‌کنیم فرض می‌کنیم $q < 1$ بهترین باشد، بنابراین داریم $\log x - q \log \log x \leq W(x)$. حالا با اضافه و کم کردن یک واحد به q داریم

$$\log x - ((q - 1) + 1) \log \log x \leq W(x).$$

این نامساوی نیز با نامساوی زیر معادل است

$$\log x - (q - 1) \log \log x - \log \log x \leq W(x).$$

در نتیجه خواهیم داشت

$$W(x) - \log x + \log \log x \geq -(q - 1) \log \log x = (1 - q) \log \log x.$$

از طرفین این نامساوی وقتی $x \rightarrow \infty$ حد می‌گیریم

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (W(x) - \log x + \log \log x) \geq \lim_{x \rightarrow \infty} (1 - q) \log \log x,$$

چون $1 - q > 0$ است، با استفاده از رابطه‌ی (۳) خواهیم داشت

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (W(x) - \log x + \log \log x) = \infty \geq \lim_{x \rightarrow \infty} (1 - q) \log \log x = \infty,$$

و این تناقض است. بنابراین برای کران پایین نیز $1 -$ بهترین ضریب برای $\log \log x$ است، و به این ترتیب اثبات به پایان می‌رسد. \square

قضیه ۲.۲. برای هر $x \geq e$ داریم

$$\log x - \log \log x + \frac{1}{4} \frac{\log \log x}{\log x} \leq W(x) \leq \log x - \log \log x + \frac{e}{e-1} \frac{\log \log x}{\log x}.$$

\square

اثبات. به [۱] رجوع شود.

قضیه ۳.۲. فرض کنید a عدد حقیقی مثبت و b عدد حقیقی نامنفی باشند. قرار می‌دهیم

$$f(x) = \frac{1}{a} x \log x - bx. \quad (۶)$$

نشان دهید برای $x \geq e^{ab-1}$ داریم

$$f^{-1}(x) = \frac{ax}{W(ae^{-ab}x)}. \quad (۷)$$

علی‌الخصوص وقتی $x \rightarrow \infty$ داریم

$$f^{-1}(x) \sim \frac{ax}{\log x}.$$



اثبات. ابتدا ثابت می‌کنیم تابع $f(x)$ برای $x \geq e^{ab-1}$ اکیداً صعودی است، در نتیجه برای $x \geq e^{ab-1}$ یک به یک بوده و بنابراین معکوس‌پذیر است، سپس معکوس آن را با استفاده از تابع لامبرت بدست می‌آوریم.

$$f'(x) = \frac{1}{a} \log x + \frac{1}{a} - b = \frac{\log x + 1 - ab}{a},$$

$x = e^{ab-1}$ ریشه تابع مشتق است، با استفاده از تعیین علامت تابع مشتق ملاحظه می‌کنیم که تابع برای $x \geq e^{ab-1}$ اکیداً صعودی است. حالا به کمک تعریف تابع لامبرت معکوس این تابع را برای $x \geq e^{ab-1}$ بدست می‌آوریم. طرفین رابطه‌ی (۶) را در عدد a ضرب و بر x تقسیم کرده، در نتیجه داریم، $\frac{y}{x}a = \log x - ab$. این رابطه با رابطه‌ی زیر معادل است.

$$e^{\frac{y}{x}a} = e^{\log x - ab} = e^{\log x} e^{-ab} = x e^{-ab}.$$

طرفین این معادله را در $\frac{y}{x}a$ ضرب می‌کنیم. بنابراین داریم

$$\frac{y}{x} a e^{\frac{y}{x}a} = \frac{y}{x} a x e^{-ab} = a y e^{-ab},$$

با مقایسه‌ی معادله بالا با رابطه‌ی (۱) داریم $W(a y e^{-ab}) = \frac{y}{x}a$ ، و این رابطه نیز با رابطه‌ی زیر معادل است

$$x = \frac{a y}{W(a e^{-ab} y)},$$

و این همان معکوس تابع مورد نظر می‌باشد. یعنی

$$f^{-1}(x) = \frac{a x}{W(a e^{-ab} x)}.$$

وقتی $x \rightarrow \infty$ طبق رابطه‌ی (۴) داریم، $W(x) = \log x + O(\log \log x)$. در نتیجه وقتی $x \rightarrow \infty$ خواهیم داشت

$$W(x) \sim \log x,$$

با توجه به این رابطه‌ی مجانبی، وقتی $x \rightarrow \infty$ داریم

$$W(a e^{-ab} x) \sim \log(a e^{-ab} x) = \log a + \log x + \log e^{-ab} = \log x + \log a - ab = \log x + O(1).$$

بنابراین وقتی که $x \rightarrow \infty$ خواهیم داشت

$$W(a e^{-ab} x) \sim \log x.$$

با توجه به رابطه‌ی (۷) داریم

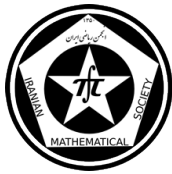
$$f^{-1}(x) \sim \frac{a x}{\log x},$$

□

و به این ترتیب اثبات به پایان می‌رسد.

مراجع

- [1] Hoorfar, Abdolhossein; Hassani, Mehdi, *Inequalities on the Lambert W function and hyperpower function*, JIPAM. J. Inequal. Pure Appl. Math. 9 (2008), no. 2, Article 51, 5 pp.
- [2] Jordan, P. M, *A note on the Lambert W-function: applications in the mathematical and physical sciences. Mathematics of continuous and discrete dynamical systems*, 247-263, Contemp. Math., 618, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2014.



نامساوی مینکوفسکی برای انتگرال کسری اگراوال

حمزه آگاهی
دانشگاه صنعتی بابلعزیزاله باباخانی
دانشگاه صنعتی بابلفرانک فلاح*
دانشگاه صنعتی بابل

چکیده

در این مقاله ما به بررسی نامساوی‌هایی از نوع مینکوفسکی برای انتگرال کسری اگراوال می‌پردازیم. نتایج این مقاله تمام نتایج قبلی در حوزه انتگرال کسری را شامل می‌شود.

واژه‌های کلیدی: نامساوی مینکوفسکی^۱، انتگرال کسری ریمان-لیوویل^۲، انتگرال کسری اگراوال^۳

Mathematics Subject Classification [2010]: 26A33, 26D15

۱ مقدمه

انتگرال‌های کسری نقش مهمی در همه‌ی زمینه‌های علم ریاضی ایفا می‌کنند [۴]. یکی از معروف‌ترین انتگرال‌های کسری، انتگرال کسری اگراوال است که در سال ۲۰۱۰ توسط اگراوال [۱] - به عنوان تعمیمی از انتگرال کسری ریمان-لیوویل - معرفی شد:

تعریف ۱.۱. انتگرال کسری اگراوال \mathbb{S}_P^α برای تابع $f(t)$ به صورت زیر می‌باشد:

$$\mathbb{S}_{(a,t,b,p,q)}^\alpha f(t) = p \int_a^t k_\alpha(t, \tau) f(\tau) d\tau + q \int_t^b k_\alpha(\tau, t) f(\tau) d\tau = \mathbb{S}_P^\alpha f(t)$$

به طوری که $P = \langle a, t, b, p, q \rangle$ ، $p, q \in \mathbb{R}$ ، $t \in (a, b)$ و $k_\alpha(t, \tau)$ یک هسته است که معمولاً به پارامتر $\alpha > 0$ وابسته می‌باشد.

ملاحظه ۲.۱. برای $k_\alpha(t, s) := \frac{1}{\Gamma(\alpha)}(t - \tau)^{\alpha-1}$

• اگر $P = P_1 = \langle a, t, b, 1, 0 \rangle$ ، آنگاه انتگرال کسری چپ ریمان-لیوویل نتیجه می‌شود:

$$\mathbb{S}_{P_1}^\alpha f(t) = \int_a^t \frac{1}{\Gamma(\alpha)}(t - \tau)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau = \mathbb{J}_{a+}^\alpha f(t)$$

• اگر $P = P_2 = \langle a, t, b, 0, 1 \rangle$ ، باشد، آنگاه انتگرال کسری راست ریمان-لیوویل به دست می‌آید:

$$\mathbb{S}_{P_2}^\alpha f(t) = \int_t^b \frac{1}{\Gamma(\alpha)}(\tau - t)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau = \mathbb{J}_{b-}^\alpha f(t).$$

*سخنران

^۱Minkowski's inequality

^۲The Riemann-Liouville fractional integral

^۳Agrawal's fractional integral



• اگر $P = P_3 = \langle a, t, b, \frac{1}{p}, \frac{1}{p} \rangle$ آنگاه انتگرال کسری ریس^۴ حاصل می شود:

$$\mathbb{S}_{P_3}^\alpha f(t) = \frac{1}{p} \mathbb{S}_{P_1}^\alpha f(t) + \frac{1}{p} \mathbb{S}_{P_2}^\alpha f(t) = \frac{1}{p} \mathbb{J}_{a+}^\alpha f(t) + \frac{1}{p} \mathbb{J}_{b-}^\alpha f(t).$$

جدیداً مقالات زیادی در ارتباط با نامساوی مینکوفسکی روی انتگرال کسری ریمان-لیوویل نگارش شده است. به عنوان مثال، در سال ۲۰۱۰ دهمانی^۵ قضیه‌های زیر را برای انتگرال کسری ریمان-لیوویل به عنوان تعمیمی از نتایج کلاسیک [۳] ارائه داد.

قضیه ۳.۱. فرض کنید $\alpha > 0, s \geq 1$ و f و g توابع مثبت روی $[0, \infty[$ باشند، به طوری که برای همه $t > 0$ ، $\mathbb{J}_{0+}^\alpha f^s(t) < \infty$ و $\mathbb{J}_{0+}^\alpha g^s(t) < \infty$ اگر $m \leq \frac{f(\tau)}{g(\tau)} \leq M$ ، $\tau \in [0, t]$ ، آنگاه:

$$\left[\mathbb{J}_{0+}^\alpha f^s(t) \right]^{\frac{1}{s}} + \left[\mathbb{J}_{0+}^\alpha g^s(t) \right]^{\frac{1}{s}} \leq \frac{1 + M(m+1)}{(m+1)(M+1)} \left[\mathbb{J}_{0+}^\alpha (f+g)^s(t) \right]^{\frac{1}{s}}.$$

قضیه ۴.۱. فرض کنید $\alpha > 0, s \geq 1$ و f و g توابع مثبت روی $(0, \infty)$ باشند به طوری که برای همه $t > 0$ ، $\mathbb{J}_{0+}^\alpha f^s(t) < \infty$ و $\mathbb{J}_{0+}^\alpha g^s(t) < \infty$ اگر $m \leq \frac{f(\tau)}{g(\tau)} \leq M$ ، $\tau \in [0, t]$ ، آنگاه:

$$\left[\mathbb{J}_{0+}^\alpha f^s(t) \right]^{\frac{1}{s}} + \left[\mathbb{J}_{0+}^\alpha g^s(t) \right]^{\frac{1}{s}} \geq \left(\frac{(M+1)(m+1)}{M} - 1 \right) \left[\mathbb{J}_{0+}^\alpha f^s(t) \right]^{\frac{1}{s}} \left[\mathbb{J}_{0+}^\alpha g^s(t) \right]^{\frac{1}{s}}.$$

در این مقاله ما قصد داریم تعمیم قضیه‌های فوق را برای انتگرال کسری اگراوال اثبات کنیم.

۲ نتایج اصلی

در این بخش به مطالب اصلی این مقاله اشاره می‌شود. ضمناً در مطالب این بخش همواره $k_\alpha(t, \tau)$ یک هسته نامنفی فرض شده و پارامترهای p و q نامنفی هستند.

قضیه ۱.۲. فرض کنید $\alpha > 0, s \geq 1$ و f و g توابع مثبت روی $[0, \infty[$ باشند، به طوری که برای همه $t > 0$ ، $\mathbb{S}_P^\alpha f^s(t) < \infty$ و $\mathbb{S}_P^\alpha g^s(t) < \infty$ اگر $m \leq \frac{f(\tau)}{g(\tau)} \leq M$ ، $\tau \in [0, t]$ ، آنگاه داریم:

$$\left[\mathbb{S}_P^\alpha f^s(t) \right]^{\frac{1}{s}} + \left[\mathbb{S}_P^\alpha g^s(t) \right]^{\frac{1}{s}} \leq \frac{1 + M(m+1)}{(m+1)(M+1)} \left[\mathbb{S}_P^\alpha (f+g)^s(t) \right]^{\frac{1}{s}}.$$

اثبات. با استفاده از شرط $\frac{f(\tau)}{g(\tau)} \leq M$ ، $\tau \in [0, t]$ می‌توان نوشت:

$$(M+1)^s f^s(\tau) \leq M^s (f+g)^s(\tau). \quad (1)$$

ابتدا از طرفین رابطه‌ی (۱) را در $\tau \in (a, t)$ ضرب و سپس با انتگرال گیری از نامساوی روی τ در بازه‌ی (a, t) به نتیجه‌ی زیر می‌رسیم.

$$p \int_a^t k_\alpha(t, \tau) f^s(\tau) d\tau \leq \left(\frac{M}{M+1} \right)^s \left(p \int_a^t k_\alpha(t, \tau) (f+g)^s(\tau) d\tau \right). \quad (2)$$

^۴Riesz's fractional integral

^۵Dahmani



و به طور مشابه با ضرب طرفین رابطه (۱) در $qk_\alpha(\tau, t)$ ، $\tau \in (t, b)$ و انتگرال گیری روی τ نتیجه‌ی زیر حاصل می‌شود:

$$q \int_t^b k_\alpha(\tau, t) f^s(\tau) d\tau \leq \left(\frac{M}{M+1}\right)^s \left(q \int_t^b k_\alpha(\tau, t) (f+g)^s(\tau) d\tau\right). \quad (3)$$

سپس با ترکیب دو رابطه‌ی (۲) و (۳) نتیجه‌ی زیر حاصل می‌شود:

$$\left[\mathbb{S}_P^\alpha f^s(t)\right]^{\frac{1}{s}} \leq \frac{M}{M+1} \left[\mathbb{S}_P^\alpha (f+g)^s(t)\right]^{\frac{1}{s}}. \quad (4)$$

از طرف دیگر، چون $mg(\tau) \leq f(\tau)$ بنابراین

$$\left(1 + \frac{1}{m}\right)^s g^s(\tau) \leq \left(\frac{1}{m}\right)^s (f(\tau) + g(\tau))^s \quad (5)$$

و به طور مشابه برای g نیز به صورت زیر داریم:

$$\left[\mathbb{S}_P^\alpha g^s(t)\right]^{\frac{1}{s}} \leq \frac{1}{m+1} \left[\mathbb{S}_P^\alpha (f+g)^s(t)\right]^{\frac{1}{s}} \quad (6)$$

□

و در نتیجه با افزودن دو نامساوی (۴) و (۶) به نتیجه مطلوب می‌رسیم.

ملاحظه ۲.۲. در قضیه‌ی بالا، اگر $k_\alpha(t, s) := \frac{1}{\Gamma(\alpha)}(t-s)^{\alpha-1}$ ، $P = \langle a, t, b, 1, \circ \rangle$ ، آنگاه قضیه (۳.۱) به دست می‌آید.

قضیه ۳.۲. فرض کنید $\alpha > \circ$ ، $s \geq 1$ و f و g توابع مثبت روی (\circ, ∞) باشند به طوری که برای همه $t > \circ$ ، $\mathbb{S}_{\langle a, t, b, \circ, q \rangle}^\alpha f^s(t) < \infty$ و $\mathbb{S}_{\langle a, t, b, \circ, q \rangle}^\alpha g^s(t) < \infty$ ، اگر $m \leq \frac{f(\tau)}{g(\tau)} \leq M$ ، $\circ < m \leq M$ ، آنگاه

$$\begin{aligned} & \left[\mathbb{S}_{\langle a, t, b, p, \circ \rangle}^\alpha f^s(t)\right]^{\frac{1}{s}} + \left[\mathbb{S}_{\langle a, t, b, p, \circ \rangle}^\alpha g^s(t)\right]^{\frac{1}{s}} + \left[\mathbb{S}_{\langle a, t, b, \circ, q \rangle}^\alpha f^s(t)\right]^{\frac{1}{s}} + \left[\mathbb{S}_{\langle a, t, b, \circ, q \rangle}^\alpha g^s(t)\right]^{\frac{1}{s}} \\ & \geq \left(\frac{(M+1)(m+1)}{M} - 2\right) \left[\mathbb{S}_{\langle a, b, p, \circ \rangle}^\alpha f^s(t)\right]^{\frac{1}{s}} \left[\mathbb{S}_{\langle a, t, b, p, \circ \rangle}^\alpha g^s(t)\right]^{\frac{1}{s}} \\ & + \left(\frac{(M+1)(m+1)}{M} - 2\right) \left[\mathbb{S}_{\langle a, t, b, \circ, q \rangle}^\alpha f^s(t)\right]^{\frac{1}{s}} \left[\mathbb{S}_{\langle a, t, b, \circ, q \rangle}^\alpha g^s(t)\right]^{\frac{1}{s}}. \end{aligned}$$

اثبات. قرار دهید $P = \langle a, t, b, p, \circ \rangle$. با ضرب کردن دو رابطه‌ی (۴) و (۶)، داریم:

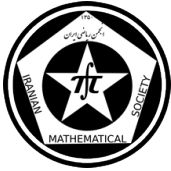
$$\frac{(m+1)(M+1)}{M} \left[\mathbb{S}_{\langle a, t, b, p, \circ \rangle}^\alpha f^s(t)\right]^{\frac{1}{s}} \left[\mathbb{S}_{\langle a, t, b, p, \circ \rangle}^\alpha g^s(t)\right]^{\frac{1}{s}} \leq \left(\left[\mathbb{S}_{\langle a, t, b, p, \circ \rangle}^\alpha (f(t) + g(t))^s\right]^{\frac{1}{s}}\right)^2. \quad (7)$$

به آسانی اثبات می‌شود که نامساوی مینکوفسکی برای انتگرال اگراوال زیر برقرار است:

$$\left[\mathbb{S}_{\langle a, t, b, p, \circ \rangle}^\alpha (f(t) + g(t))^s\right]^{\frac{1}{s}} \leq \left[\mathbb{S}_{\langle a, t, b, p, \circ \rangle}^\alpha f^s(t)\right]^{\frac{1}{s}} + \left[\mathbb{S}_{\langle a, t, b, p, \circ \rangle}^\alpha g^s(t)\right]^{\frac{1}{s}}. \quad (8)$$

در نتیجه با استفاده از رابطه (۸) و رابطه‌ی (۷) داریم:

$$\begin{aligned} & \frac{(m+1)(M+1)}{M} \left[\mathbb{S}_{\langle a, t, b, p, \circ \rangle}^\alpha f^s(t)\right]^{\frac{1}{s}} \left[\mathbb{S}_{\langle a, t, b, p, \circ \rangle}^\alpha g^s(t)\right]^{\frac{1}{s}} \\ & \leq \left[\mathbb{S}_{\langle a, t, b, p, \circ \rangle}^\alpha f^s(t)\right]^{\frac{1}{s}} + \left[\mathbb{S}_{\langle a, t, b, p, \circ \rangle}^\alpha g^s(t)\right]^{\frac{1}{s}} + 2 \left[\mathbb{S}_{\langle a, t, b, p, \circ \rangle}^\alpha f^s(t)\right]^{\frac{1}{s}} \left[\mathbb{S}_{\langle a, t, b, p, \circ \rangle}^\alpha g^s(t)\right]^{\frac{1}{s}}. \quad (9) \end{aligned}$$



به طور مشابه وقتی $P = \langle a, b, \circ, q \rangle$ ، آنگاه

$$\begin{aligned} & \frac{(m+1)(M+1)}{M} \left[\mathbb{S}_{\langle a, t, b, \circ, q \rangle}^{\alpha} f^s(t) \right]^{\frac{1}{s}} \left[\mathbb{S}_{\langle a, t, b, \circ, q \rangle}^{\alpha} g^s(t) \right]^{\frac{1}{s}} \\ & \leq \left[\mathbb{S}_{\langle a, t, b, \circ, q \rangle}^{\alpha} f^s(t) \right]^{\frac{1}{s}} + \left[\mathbb{S}_{\langle a, t, b, \circ, q \rangle}^{\alpha} g^s(t) \right]^{\frac{1}{s}} + 2 \left[\mathbb{S}_{\langle a, t, b, \circ, q \rangle}^{\alpha} f^s(t) \right]^{\frac{1}{s}} \left[\mathbb{S}_{\langle a, t, b, \circ, q \rangle}^{\alpha} g^s(t) \right]^{\frac{1}{s}} (1^{\circ}) \end{aligned}$$

□

سرانجام با ترکیب دو رابطه‌ی (۱۰) و (۹) به نتیجه مطلوب می‌رسیم.

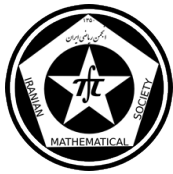
ملاحظه ۴.۲. در قضیه‌ی بالا، اگر $k_{\alpha}(t, s) := \frac{1}{\Gamma(\alpha)}(t-s)^{\alpha-1}$ ، $P = \langle a, t, b, 1, \circ \rangle$ ، آنگاه قضیه (۴.۱) به دست می‌آید.

مراجع

- [1] O.P. Agrawal, *Generalized Variational Problems and Euler Lagrange equations*, Computers and Mathematics with Applications 59 (2010) 1852–1864.
- [2] Z. Dahmani, *On Minkowski and Hermite-Hadamard integral inequalities via fractional integration*, Ann. Funct. Anal. 1(1) (2010), 51-58.
- [3] L. Bougoffa, *On Minkowski and Hardy integral inequality*, J. Inequal. Pure and Appl. Math. 7 (2006), no. 2, Article 60, 3 pp.
- [4] A.A. Kilbas, H.M. Srivastava, J. J. Trujillo, *Theory and Applications Fractional Differential Equations*, Elsevier B.V, Netherlands, 2006.

پست الکترونیکی: fala1360@gmail.com
 پست الکترونیکی: babakhani@nit.ac.ir
 پست الکترونیکی: h_agahi@nit.ac.ir

ترکیبیات



انعطاف‌ناپذیری گراف

حسین مهدیون
محمدرضا قائمی
مژگان حسن‌زاده
دانشگاه زنجان

حسین مهدیون*
دانشگاه زنجان

چکیده

انعطاف‌ناپذیری یکی از ویژگی‌های گراف است که در مسائل عملی به ویژه ساختارهای مولکولی از گراف‌های شیمیایی، شبکه‌های حسی و همچنین مهندسی سازه‌ها کاربرد فراوان دارد. گراف ساده $G = (V, E)$ را انعطاف‌ناپذیر گویند هرگاه وارد کردن فشار بر ساختار گراف چارچوب کلی آن را تغییر ندهد و یا به عبارت دیگر باعث ایجاد خمیدگی در یال‌ها نشود. در این مقاله شرایط مورد نیاز برای انعطاف‌ناپذیری گراف و حداقل تعداد یال‌های لازم برای این امر را بررسی می‌کنیم و در ادامه الگوریتمی برای تعیین انعطاف‌ناپذیری گراف در صفحه ارائه می‌کنیم که آن را الگوریتم انعطاف^۱ نامیده‌ایم. همچنین مفهوم دسته‌بندی گراف‌ها را تعریف و با استفاده از شرایط انعطاف‌ناپذیری دسته‌ای از گراف‌ها را که قابل تجزیه به گراف‌های انعطاف‌ناپذیر هستند مورد بررسی قرار می‌دهیم.

واژه‌های کلیدی: انعطاف‌ناپذیری، ساختار گراف.

۱ مقدمه

اولین بار مفهوم انعطاف‌ناپذیری چارچوب یک گراف در ریاضیات توسط اویلر^۲ در سال ۱۷۷۶ مطرح شد. اویلر گراف G را انعطاف‌ناپذیر خواند اگر چارچوب حاصل از وارد کردن هر فشار به ساختار G ، با چارچوب اولیه G هم‌نهشت باشد. در این مقاله بحث ما حول چارچوب‌ها در فضای دوبعدی یا R^2 خواهد بود. منظور از یک چارچوب برای گراف $G = (V, E)$ ، مجموعه‌ای از رأس‌ها و اتصال‌های بین آن‌ها یا همان یال‌ها در G است.

تعریف ۱.۱. یک چارچوب از گراف G را با زوج (G, p) نمایش می‌دهیم که، $G = (V, E)$ یک گراف بدون جهت و p یک نگاشت از V به فضای R^2 است، طوری‌که برای هر $uv \in E$ داشته باشیم: $p(u) \neq p(v)$

منظور از $p(v)$ برای هر رأس $v \in V$ ، مختصات محل قرار گرفتن رأس v در صفحه است. در این مقاله چارچوب‌ها در فضای دو بعدی بررسی می‌شوند و یال‌ها به صورت خطوط راست در صفحه هستند و همچنین طول هر یال $uv \in E$ را فاصله اقلیدسی بین دو نقطه $p(u)$ و $p(v)$ در صفحه در نظر می‌گیریم.

تعریف ۲.۱. دو چارچوب (G, p_0) و (G, p_1) را معادل گوئیم، هرگاه برای هر یال $uv \in E$ ، طول این یال در هر دو چارچوب یکسان باشد و آنها را هم‌نهشت گوئیم، هرگاه برای هر دو رأس $u, v \in V$ فاصله دو رأس در هر دو چارچوب باهم برابر باشد، حتی اگر یالی بین آنها نباشد. به عبارت دیگر

$$\forall u, v \in V \quad \|p_0(u) - p_0(v)\| = \|p_1(u) - p_1(v)\|$$

*سخنران

^۱rigidity algorithm

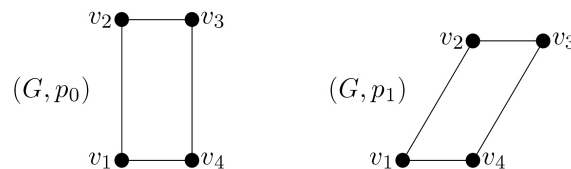
^۲Euler



تعریف ۳.۱. چارچوب (G, p_0) را **انعطاف‌ناپذیر** گوئیم هرگاه برای عدد مثبت کوچکی مانند ε و هر چارچوب (G, p_1) معادل با (G, p_0) که در اثر فشار متوالی بر رأس‌ها بدست آمده باشد رابطه زیر برقرار باشد:

$$\forall v \in V \quad \|p_0(v) - p_1(v)\| < \varepsilon$$

به عبارت دیگر یک چارچوب را در صفحه انعطاف‌ناپذیر گوئیم هرگاه در هر چارچوب دیگر حاصل از اعمال فشار بر گراف، مختصات رأس دلخواه v در صفحه حفظ شود. به این ترتیب هر چارچوب جدید به دست آمده، با چارچوب اولیه هم‌نهشت خواهد بود. در این تغییر چارچوب طول یال‌ها نیز ثابت می‌ماند. شکل زیر دو چارچوب معادل را نشان می‌دهد که هم‌نهشت نیستند.



شکل ۱: این دو چارچوب معادلند چون طول یال‌ها حفظ شده ولی هم‌نهشت نیستند زیرا فاصله بین دو رأس v_3 و v_1 در دو چارچوب متفاوت است.

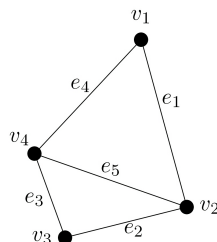
انعطاف‌ناپذیری یک ویژگی عمومی است به این معنی که اگر نگاشتی مانند p وجود داشته باشد که برای آن (G, p) انعطاف‌ناپذیر باشد در آن صورت برای هر نگاشت دیگر مانند q نیز (G, q) انعطاف‌ناپذیر خواهد بود. در ادامه شرایطی را بررسی می‌کنیم که بتوان با یک تعریف جبری انعطاف‌ناپذیری را در مورد گراف‌ها بررسی کرد.

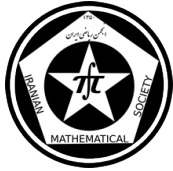
۲ ماتریس انعطاف از گراف و انعطاف‌ناپذیری G

فرض کنید $G = (V, E)$ یک گراف با مجموعه رئوس $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ و مجموعه یالی $E = \{e_1, e_2, \dots, e_m\}$ باشد و نیز نگاشتی باشد که هر رأس v_i از G را به یک زوج مرتب (x_j, y_j) ، $j = 1, 2, \dots, n$ در صفحه می‌نگارد. ماتریس انعطاف چارچوب (G, p) را با نماد $M_{G,p}$ نمایش می‌دهیم که یک ماتریس $m \times 2n$ است. هر سطر $M_{G,p}$ متناظر با یک یال از مجموعه E است و به‌ازای هر رأس از گراف G دو ستون در ماتریس انعطاف $M_{G,p}$ در نظر می‌گیریم. درایه‌های $M_{G,p}$ به این صورت تعیین می‌شود که اگر یال e_i بر دو رأس (x_j, y_j) و (x_k, y_k) واقع شده باشد در آن صورت

$$a_{i, 2j-1} = x_j - x_k \quad , \quad a_{i, 2j} = y_j - y_k$$

سایر درایه‌های سطر i ام از $M_{G,p}$ را صفر در نظر می‌گیریم. برای مثال ماتریس انعطاف از گراف شکل زیر را می‌سازیم.





$$M_{G,p} = \begin{pmatrix} x_1 - x_2 & y_1 - y_2 & x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & \circ & \circ & \circ & \circ \\ \circ & \circ & x_2 - x_3 & y_2 - y_3 & x_3 - x_2 & y_3 - y_2 & \circ & \circ \\ \circ & \circ & \circ & \circ & x_3 - x_4 & y_3 - y_4 & x_4 - x_3 & y_4 - y_3 \\ x_1 - x_4 & y_1 - y_4 & \circ & \circ & \circ & \circ & x_4 - x_1 & y_4 - y_1 \\ \circ & \circ & x_2 - x_4 & y_2 - y_4 & \circ & \circ & x_4 - x_2 & y_4 - y_2 \end{pmatrix}$$

تعریف ۱.۲. گراف $G = (V, E)$ را **انعطاف‌ناپذیر مینیمال** گوئیم هرگاه انعطاف‌ناپذیر باشد و نیز برای هر یال $e \in E$ ، گراف $G - e$ انعطاف‌پذیر باشد.

قضیه ۲.۲. (لمان^۳) گراف G انعطاف‌ناپذیر مینیمال در صفحه است هرگاه برای هر زیرگراف X از G داشته باشیم $|E(X)| \geq 2|V(X)| - 3$ و نیز $|E| = 2|V| - 3$.

لم ۳.۲. چارچوب (G, p) از G انعطاف‌ناپذیر مینیمال است هرگاه

$$\text{rank} M_{G,p} = 2|V| - 3$$

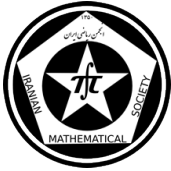
۳ الگوریتم تعیین انعطاف‌ناپذیری گراف G

در اثبات قضیه لمان از این واقعیت استفاده شده است که هر گراف انعطاف‌ناپذیر را می‌توان از گراف K_2 و در هر مرحله با اضافه کردن یک رأس به زیرگراف کوچکتر قبلی بدست آورد. زیرگراف ایجاد شده در هر مرحله باید در شرط قضیه لمان یعنی $|E(X)| \geq 2|V(X)| - 3$ صدق کند. در الگوریتم ارائه شده در این مقاله سعی کردیم از روش ساده‌ای استفاده کنیم. در این روش همانند اثبات لمان برای تعیین انعطاف‌ناپذیری گراف با یک یال از G شروع می‌کنیم و در هر مرحله رأسی را به زیرگراف قبلی اضافه می‌کنیم که حداقل با دو رأس از زیرگراف یک مثلث بسازد. به این ترتیب شرایط قضیه لمان نیز برقرار خواهد بود.

Rigidity Algorithm

- 1: Input connected graph $G = (V, E)$ and $X \subseteq V$; such that $X = \{u, v\}$ and $E(X) \neq \emptyset$.
- 2: **Repeat**
- 3: find a vertex $w \in V \setminus X$ so that w makes C_3 with atleast two other vertex of X ; and add w to X .
- 4: If there is not such a vertex and $X \neq V$ then print " G is not rigid".
- 5: **Until** $X = V$ or there is not w .
- 6: if $X = V$ then print " G is rigid".
- 7: End.

^۳Leman



ص: ۴-۴

چهل و ششمین کنفرانس ریاضی ایران

۳-۶ شهریور ۱۳۹۴

دانشگاه یزد

انعطاف‌ناپذیری گراف



دانشگاه یزد

سخنرانی

۴ نتایج اصلی

با استفاده از مطالب گفته شده می‌توان شرایط کافی برای وجود یک دسته‌بندی از زیرگراف‌های فراگیر را در گراف بدون جهت $G = (V, E)$ بررسی کرد. منظور از یک دسته‌بندی مجموعه‌ای از زیرگراف‌های دوبه‌دو یال - مجزا از گراف G است. گراف G را k -همبند گوئیم هرگاه با حذف حداقل k رأس از آن، گراف ناهمبند گردد یا فقط یک رأس باقی بماند [۲].

قضیه ۱.۴. (لوواز و یمینی^۴) هر گراف ۶ -همبند انعطاف‌ناپذیر است.

از آنجایی که هر گراف $۶k$ -همبند را می‌توان به صورت مجموعه‌ای از k زیرگراف ۶ -همبند دسته‌بندی کرد بنابراین از قضیه ۱.۴ می‌توان چنین نتیجه گرفت:

نتیجه ۲.۴. هر گراف $۶k$ -همبند یک دسته‌بندی از k زیرگراف فراگیر انعطاف‌ناپذیر دارد.

گوئیم گراف $G = (V, E)$ یک گراف $(۶, ۲)$ -همبند است هرگاه G ، ۶ -یال همبند باشد و v برای هر رأس دلخواه $v \in V$ ، ۴ -یال همبند باشد و به همین ترتیب $G - \{u, v\}$ برای رئوس $u, v \in V$ نیز ۲ -یال همبند باشد [۲].

قضیه ۳.۴. (جکسون و جوردن^۵) هر گراف ساده $(۶, ۲)$ -همبند انعطاف‌ناپذیر است.

نتیجه ۴.۴. هر گراف ساده $(۶k, ۲k)$ -همبند یک دسته‌بندی از k زیرگراف فراگیر انعطاف‌ناپذیر دارد.

مراجع

- [1] B. Jackson and T. Jordan, A sufficient connectivity condition for generic rhghdity in the plane, *Discrete Applied Mathematics*, 157(8):1965-1968-2009.
- [2] Joseph Cheriyan, Olivier Durand De Gevigney, Zoltán Szigeti, *Packing of rigid spanning subgraphs and spanning trees*, november 2013, 3-9.
- [3] G. Laman, *On graphs and rigidity of plane skeletal structures*, 2nd ed., John Wiley, 1999.
- [4] L. Lovasz and Y. Yemini, On generic rigidity in the plane, *SIAM J. Algebraic Discrete Methods*, 3 (1982), no. 1, 91-98

پست الکترونیکی: hosseinmahdion@gmail.com

پست الکترونیکی: mr_ghaemi@yahoo.com

پست الکترونیکی: mozhgan_hasanzade@yahoo.com

^۴Lovasz and Yemini

^۵Jackson and Jordan



فاصله طیف لاپلاسی گراف‌ها

مرجان حکیمی نژاد*

دانشگاه تربیت دبیر شهید رجایی تهران

مجتبی قربانی

دانشگاه تربیت دبیر شهید رجایی تهران

چکیده

فرض کنید $\mu_1(G_j) \leq \mu_2(G_j) \leq \dots \leq \mu_n(G_j)$ طیف ماتریس لاپلاسی گراف G_j ، $j = 1, 2$ ، با n رأس است. در این صورت فاصله طیف لاپلاسی بین دو گراف G_1 و G_2 از مرتبه n را، به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$L\sigma(G_1, G_2) = \sum_{i=1}^n |\mu_i(G_1) - \mu_i(G_2)|.$$

در این مقاله، برخی از ویژگی‌های فاصله طیف لاپلاسی گراف‌های خاص را بررسی می‌کنیم.

واژه‌های کلیدی: گراف، مقادیر ویژه لاپلاسی، فاصله طیف لاپلاسی.

Mathematics Subject Classification [2010]: 05C05, 05A12, 05C50

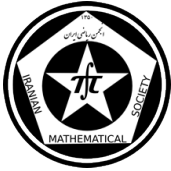
۱ مقدمه

ساده گراف $G = (v, e)$ را با n رأس و m یال در نظر بگیرید. درجه هر رأس $v \in V(G)$ را با $deg_G(v)$ نشان می‌دهیم. اگر درجه تمام رئوس گراف برابر r باشد، آنگاه گراف را r -منظم می‌نامیم. فرض کنید \mathbf{D} ماتریس قطری $n \times n$ است که درایه‌های روی قطر اصلی آن درجه رئوس گراف G و بقیه درایه‌ها صفر هستند. مقادیر ویژه ماتریس مجاورت $\mathbf{A}(G)$ از گراف G را مقادیر ویژه G نامیده و آن‌ها را به صورت $\lambda_1(G) \leq \lambda_2(G) \leq \dots \leq \lambda_s(G)$ مرتب می‌کنیم. فرض کنید $\lambda_1(G) \leq \lambda_2(G) \leq \dots \leq \lambda_s(G)$ مقادیر ویژه متمایز گراف G از مرتبه n با ماتریس مجاورت \mathbf{A} هستند. در این صورت طیف گراف G را که در آن $m(\lambda_i)$ مرتبه تکرار مقدار ویژه $\lambda_i(G)$ است، به شکل زیر تعریف می‌کنیم:

$$\begin{pmatrix} \lambda_1(G) & \lambda_2(G) & \dots & \lambda_s(G) \\ m(\lambda_1) & m(\lambda_2) & \dots & m(\lambda_s) \end{pmatrix}.$$

همچنین، $\sigma(G_1, G_2) = \sum_{i=1}^n |\lambda_i(G_1) - \lambda_i(G_2)|$ را فاصله طیف دو گراف G_1 و G_2 روی n رأس می‌نامیم [۷]. فاصله طیف گراف‌ها، فاصله‌ای است که میان دو گراف دلخواه با به کار بردن طیف آن‌ها تعریف می‌شود. این موضوع بحث جدیدی در نظریه جبری گراف است. مسائل حل نشده متعددی که در این زمینه در مجله‌های جبرخطی و ترکیبیات جبری ظاهر شده‌اند، حکایت از اهمیت این نوع مسائل در بخش‌هایی از مهندسی، معماری شبکه و علوم کامپیوتر دارند. مفهوم فاصله طیف بین دو گراف n رأسی، برای اولین بار در کنفرانسی در سال ۲۰۰۶ توسط پروآلدی در دانشگاه آویرو از کشور برزیل، تعریف و مسائلی در ارتباط با آن مطرح شد [۸].

* سخنران



ماتریس لاپلاسی $L(G)$ از گراف G ، یک ماتریس متقارن و از مرتبه n است که به صورت $L(G) = D(G) - A(G)$ تعریف می‌شود و درایه‌های آن عبارت است از:

$$L_{ij}(G) = \begin{cases} -1 & v_i, v_j \text{ مجاور باشند} \\ 0 & v_i, v_j \text{ مجاور نباشند} \\ \text{deg}_G(v_i) & i = j \end{cases}$$

که در آن $1 \leq i, j \leq n$. با توجه به این تعریف، جمع درایه‌های هر سطر، با هر ستون از ماتریس لاپلاسی برابر صفر است و از این رو دترمینان آن برابر صفر است. پس ماتریس لاپلاسی معکوس پذیر نیست. ماتریس لاپلاسی $L(G)$ دارای مجموعه‌ای از مقادیر ویژه حقیقی و نامنفی است، که به آن طیف لاپلاسی گفته می‌شود و آن‌ها را به صورت

$$0 = \mu_1(G) \leq \mu_2(G) \leq \dots \leq \mu_n(G)$$

مرتب می‌کنیم. اگر $\lambda_1(G) \leq \lambda_2(G) \leq \dots \leq \lambda_n(G) = r$ طیف گراف r -منظم G باشد، آن‌گاه طیف لاپلاسی گراف G برابر است با $0 = r - \lambda_n(G) \leq r - \lambda_{n-1}(G) \leq \dots \leq r - \lambda_1(G)$. برای مشاهده جزئیات بیشتر مراجع [۱-۵] را ملاحظه نمایید. انرژی لاپلاسی گراف G را به صورت $LE(G) = \sum_{i=1}^n |\mu_i(G) - \frac{r}{n}|$ تعریف می‌کنیم [۶]. در ادامه،

$$L\sigma(G_1, G_2) = \sum_{i=1}^n |\mu_i(G_1) - \mu_i(G_2)|,$$

را فاصله طیف لاپلاسی دو گراف G_1 و G_2 روی n رأس می‌نامیم.

اینک به معرفی برخی از گراف‌های مورد نیاز می‌پردازیم. \bar{G} را مکمل گراف G گوئیم، هرگاه $V(\bar{G}) = V(G)$ و دو رأس در \bar{G} مجاورند اگر و تنها اگر در G مجاور نباشند. گراف یالی $L(G)$ ، گرافی است که در آن مجموعه رئوس برابر مجموعه یال‌های گراف G است و دو رأس با هم مجاورند اگر و تنها اگر یال‌های متناظر آن‌ها در G در یک رأس مشترک باشند. گراف کامل، گراف مسیر، گراف ستاره، گراف دور از مرتبه n و گراف دوبخشی کامل را به ترتیب با K_n ، P_n ، S_n ، C_n و K_{n_1, n_2} نشان می‌دهیم. گراف CP_n ، گرافی است که از حذف یک جورسازی کامل از گراف کامل $2n$ گراف حاصل می‌شود.

۲ نتایج اصلی

هدف اصلی ما در این بخش، ارائه نتایجی روی فاصله طیف لاپلاسی دو گراف دلخواه و بیان ارتباط آن‌ها با انرژی لاپلاسی است.

قضیه ۱.۲. فرض کنید G_1 و G_2 گراف‌هایی با n رأس هستند. در این صورت

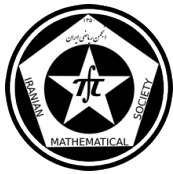
(الف) اگر G_1 و G_2 منظم از درجه r باشند، آن‌گاه $L\sigma(G_1, G_2) = \sigma(G_1, G_2)$.

(ب) اگر G_1 و G_2 درخت باشند، آن‌گاه $L\sigma(G_1, G_2) = \sigma(L(G_1), L(G_2))$.

(ج) اگر G_1 و G_2 دوبخشی و منظم از درجه r باشد و به‌ویژه، رابطه‌ی $\lambda_i(G_1) \geq \lambda_i(G_2)$ برای $1 \leq i \leq \lfloor n/2 \rfloor$ برقرار باشد، آن‌گاه

$$L\sigma(G_1, G_2) = LE(G_1) - LE(G_2)$$

قضیه ۲.۲. فرض کنید $H = G - \{e_1, \dots, e_k\}$. در این صورت $L\sigma(G, H) = 2k$.



قضیه ۳.۲. فرض کنید G گرافی دلخواه با n رأس و m یال است. در این صورت

$$L\sigma(K_n, G) = n(n-1) - 2m.$$

قضیه ۴.۲. گراف G را با $n \geq 2$ رأس و m یال در نظر بگیرید. اگر $n_1 \leq n_2$ و $n_1 + n_2 = n$ ، آن‌گاه

$$L\sigma(K_{n_1, n_2}, G) = \begin{cases} 2(n_1 n_2 - m) & \mu_i(G) < n_1 \leq n_2 \\ 2(n_2 - m + \sum_{i=2}^{n_2} \mu_i(G)) & n_1 \leq \mu_i(G) \leq n_2 \\ 2(n + m - n_1 n_2 - \mu_n(G)) & n_1 \leq n_2 < \mu_i(G) \end{cases}.$$

مثال ۵.۲. بنا بر قضیه ۴.۲، اگر $n > 2$ زوج و $n_1 = n_2 - 2$ ، آن‌گاه $L\sigma(K_{n_1, n_2}, CP_{\frac{n}{2}}) = 2n^2$ و اگر $n > 4$ زوج،

آن‌گاه $L\sigma(K_{2, n_2}, CP_{\frac{n}{2}}) = n_2(n_2 - 2)$. هم‌چنین، اگر $n \geq 4$ زوج، آن‌گاه $L\sigma(K_{1, n-1}, CP_{\frac{n}{2}}) = n^2 - 4n + 2$ و

$$L\sigma(K_{2, n-2}, CP_{\frac{n}{2}}) = n^2 - 6n + 8.$$

قضیه ۶.۲. فرض کنید G_1 و G_2 گراف‌هایی n رأسی منظم به ترتیب از درجه r_1 و r_2 هستند. در این صورت اگر $r_1 \leq r_2$ آن‌گاه

$$L\sigma(G_1, G_2) \leq \sigma(G_1, G_2) + n(r_2 - r_1).$$

قضیه ۷.۲. فرض کنید G گراف r -منظم است به طوری که درجه آن بزرگتر یا مساوی گراف \bar{G} نباشد. در این صورت

$$L\sigma(G, \bar{G}) \leq \sigma(G, \bar{G}) + (n-2)(n-2r-1).$$

جدول ۱، فاصله طیف لاپلاسی شش خانواده از جفت گراف‌های خاص نشان داده شده‌اند.

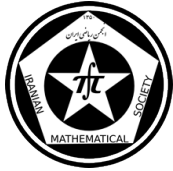
گراف	C_n	P_n	S_n	$CP_{\frac{n}{2}}$	$K_{\frac{n}{2}, \frac{n}{2}}$
K_n	$n(n-3)$	$(n-1)(n-2)$	$(n-1)(n-2)$	n	$2n(n-2)$
$K_{\frac{n}{2}, \frac{n}{2}}$	$\frac{n}{2}(n-4)$	$\frac{n}{2} - 2(n-1)$	$(\frac{n}{2}-1)(n-2)$	$\frac{n}{2}(n-4)$	\circ
$CP_{\frac{n}{2}}$	$n(n-4)$	$n^2 - 4n + 2$	$n^2 - 4n + 2$	\circ	$\frac{n}{2}(n-4)$
S_n	B_n	A_n	\circ	$n^2 - 4n + 2$	$(\frac{n}{2}-1)(n-2)$
P_n	2	\circ	A_n	$n^2 - 4n + 2$	$\frac{n}{2} - 2(n-1)$
C_n	\circ	2	B_n	$n(n-4)$	$\frac{n}{2}(n-4)$

جدول ۱: فاصله طیف لاپلاسی شش خانواده از جفت گراف‌های خاص

که در آن

$$A_n = 2\left(n - x_n - 1 + 2\left(\sum_{i=1}^{x_n} \cos \frac{\pi i}{n} + \cos \frac{\pi(n-1)}{2n}\right)\right),$$

$$B_n = \begin{cases} n - 2y_n + 3 + 4\left(2\sum_{i=1}^{y_n} \cos \frac{2\pi i}{n} + \cos \frac{(n+1)\pi}{n}\right) & \text{فرد } n \\ 2\left(n - 2y_n - 3 + 4\sum_{i=1}^{y_n} \cos \frac{2\pi i}{n}\right) & \text{زوج } n \end{cases},$$



ص: ۴-۴

چهل و ششمین کنفرانس ریاضی ایران

۳-۶ شهریور ۱۳۹۴

دانشگاه یزد

فاصله طیف لاپلاسی گرافها



دانشگاه یزد

سخنرانی

هنگامی که

$$x_n = \begin{cases} \lfloor \frac{n}{3} \rfloor & n \text{ را عاد نکند} \\ \lfloor \frac{n}{3} \rfloor - 1 & n \text{ را عاد کند} \end{cases},$$

$$y_n = \begin{cases} \lfloor \frac{n}{6} \rfloor & n \text{ را عاد کند} \\ \lfloor \frac{n}{6} \rfloor + 1 & n \text{ را عاد نکند} \end{cases}.$$

مراجع

- [1] N. Biggs, *Algebraic Graph Theory*, Cambridge University Press, Cambridge, 1993.
- [2] A. E. Brouwer, W. H. Haemers, *Spectra of Graphs*, Universitext, Springer, New York, 2012.
- [3] D.M. Cvetković, M. Doob, H. Sachs, *Spectra of graphs, theory and application*, (3rd edition), Johann Ambrosius Barth Verlag, HeidelbergLeipzig, 1995.
- [4] D.M. Cvetković, P. Rowlinson, S. Simić, *An introduction to the theory of graph spectra*, Cambridge University Press, 2010.
- [5] C. D. Godsil, G. Royle, *Algebraic Graph Theory*, Springer-Verlag, New York, Berlin, Heidelberg, 2001.
- [6] I. Gutman, B. Zhou, *Laplacian energy of a graph*, Linear Algebra Appl., 414 (2006), pp. 29-37.
- [7] I. Jovanović, Z. Stanić, *Spectral distances of graphs*, Linear Algebra Appl., 436 (2012) pp. 1425-1435.
- [8] D. Stevanović, *Research problems from the Aveiro workshop on graph spectra*, Linear Algebra Appl., 423 (2007) pp. 172-181.

پست الکترونیکی: m.hakiminezhaad@srttu.edu

پست الکترونیکی: mghorbani@srttu.edu



یافتن آلفا جورسازی رنگی با استفاده از الگوریتم موازی پیشنهادی

میثم رجعتی باویل علیایی*
دانشگاه یزد

محمدرضا هوشمنداصل
دانشگاه یزد

چکیده

در این مقاله ما دو مفهوم ماکزیمم جورسازی رنگی و رنگ آمیزی یال‌ها را با هم ترکیب نموده و مفهوم جدیدی به نام آلفا جورسازی رنگی را ارائه داده‌ایم. در یک گراف ساده با این ویژگی که هر یال قابلیت این را دارد که رنگ‌های خاصی را به خود اختصاص دهد. منظور از آلفا جورسازی رنگی، بیشترین تعداد رنگ‌های مجازی است که می‌توان به یال‌ها اختصاص داد، به شرطی که هیچ کدام از یال‌های متصل به یک گره هم‌رنگ نباشند و تعداد یال‌های رنگ شده هر رنگ نسبت به ماکزیمم جورسازی آن رنگ آلفا برابر باشد. بنابراین هدف ما در این مقاله یافتن آلفا جورسازی رنگی است. برای حل این مسئله از رویکرد کلاس‌بندی یال‌ها استفاده می‌نماییم. هر کلاس، بیانگر یال‌هایی است که می‌توانند رنگ‌های یکسانی به خود اختصاص دهند. بر مبنای کلاس‌بندی و ترتیبی که برای رنگ کردن یال‌ها در نظر می‌گیریم، الگوریتم موازی به نام $PaMC$ ارائه داده‌ایم که مسئله‌ی آلفا جورسازی رنگی را به صورت بازگشتی حل می‌کند. هر یک از پردازنده‌ها برای ماکزیمم سازی جورسازی به یافتن طولانی‌ترین مسیر می‌پردازد تا بتواند ماکزیمم تعداد رنگ‌ها را رنگ آمیزی نماید. نشان خواهیم داد با تعیین تعداد پردازنده‌ها یکی کمتر از تعداد رنگ‌ها به بهره‌وری حدود ۹۰ درصد دست یافته‌ایم.

واژه‌های کلیدی: آلفا جورسازی رنگی، رنگ آمیزی یال‌ها، کلاس‌بندی و الگوریتم‌های موازی.

۱ مقدمه

در زمینه گراف دو مفهوم ماکزیمم جورسازی و رنگ آمیزی یال‌ها از جمله مفاهیم اساسی هستند که علاوه بر این که تحقیقات زیادی در این زمینه‌ها صورت می‌پذیرد، کاربرد فراوانی نیز دارند و با تقلیل مسئله‌های مختلف به این دو مفهوم نقش به‌سزایی در حل مسائل مختلف ایفا می‌کنند. ما در این مقاله با ترکیب نمودن این دو مفهوم، مفهوم جدیدی به نام آلفا جورسازی رنگی را ارائه می‌دهیم. که در بخش سوم بیان خواهد شد.

رویکردی که ما در این مقاله استفاده نموده‌ایم کلاس‌بندی یال‌ها است. کلاس‌بندی یکی از مسائل یادگیری با نظارت می‌باشد، در این نوع مسائل کلاس‌ها از پیش مشخص می‌باشد و هر داده به یک کلاس از قبل مشخص شده تخصیص می‌یابد. در الگوریتم پیشنهادی 2^k تا کلاس داریم که هر یال بسته به رنگهایی که می‌تواند به خود اختصاص دهد در یکی از کلاس‌ها قرار می‌گیرد. الگوریتم پیشنهادی ما با کلاس‌بندی کردن یال‌ها این ویژگی را به الگوریتم اضافه نموده است که بتواند به صورت همزمان اجرا شوند. در واقع در هر گام کلاس‌های مختلف به پردازنده‌های متفاوتی داده می‌شود و تمام این پردازنده‌ها یک الگوریتم را بر روی کلاس‌های خود اجرا می‌کنند. بنابراین الگوریتم ما جزء الگوریتم‌های یک دستورالعمل چند داده محسوب می‌شود و از طریق حافظه‌ی اشتراکی با یکدیگر ارتباط برقرار می‌نمایند و پردازنده‌ها در نوشتن سطرها و ستون‌ها هیچ تداخلی با یکدیگر ندارند و تمام آن‌ها در روند اجرا می‌توانند به صورت همزمان روی حافظه بنویسند.

* سخنران



هدف ما در این پژوهش تخصیص رنگ‌های مجاز به یال‌ها است با این شرط که تعداد یال‌های رنگ شده بیشینه باشد و اگر گراف رنگ شده را برای هر رنگ بررسی کنیم یک آلفا جورسازی برای آن رنگ ایجاد شده باشد. راه حل پیشنهادی ما یک الگوریتم موازی است که با توجه به ایده‌ی تک‌رنگی که مطرح خواهیم نمود، کلاس‌های هم‌رنگی را ایجاد می‌نماید و کلاس‌هایی که هیچ تداخلی از نظر رنگی با یکدیگر ندارند را به صورت موازی رنگ می‌کند.

در ادامه در بخش دوم به کارهای مرتبط با مسئله پیشنهادی اشاره می‌کنیم. سپس در بخش سوم به شرح مسئله خواهیم پرداخت. در بخش چهارم الگوریتم پیشنهادی خود را بیان نموده و در بخش پنجم به تحلیل روش پیشنهادی خود می‌پردازیم و در نهایت در بخش ششم نتایج حاصل را بیان خواهیم نمود.

۲ کارهای پیشنهادی

مسئله‌ی یافتن ماکزیمم جورسازی توسط الگوریتم ادموند در زمان چند جمله‌ای حل می‌شود [۱]. در سایر پژوهش‌ها با ویژگی‌هایی که بر روی گراف قرار می‌دهند مسائل متنوعی را مطرح می‌کنند. به عنوان مثال در پژوهش آریان کاسوفسکی و همکارانش هدف یافتن ماکزیمم جورسازی در شبکه‌های نامتجانس می‌باشد [۲]. و یا دی‌مایو و رودا برای گراف‌های وزندار الگوریتمی برای کمینه کردن وزن ماکزیمم جورسازی ارائه داده‌اند که از برنامه ریزی خطی بهره برده است [۳].

۳ شرح مسئله

گراف $G(V, E)$ با N رأس، M یال و K رنگ مختلف $C = \{c_1, c_2, \dots, c_K\}$ را در نظر بگیرید. تابع $f: E \rightarrow \mathcal{P}(C)$ به عنوان ورودی داده شده است که بیانگر رنگ‌های مجازی است که هر یال می‌تواند به خود تخصیص دهد. هر یال در این گراف زیر مجموعه‌ای از رنگ‌های C را به خود اختصاص داده است. با در نظر گرفتن شرایط بالا هدف ما رنگ کردن بیشترین تعداد یال‌ها است به شرطی که هیچ کدام از یال‌های متصل به یک رأس هم‌رنگ نباشند. در واقع به دنبال این هستیم که بیشترین تعداد یال‌ها را در گراف رنگ کنیم با این شرط که هر کدام از رنگ‌ها تشکیل یک آلفا جورسازی رنگی را بدهد. مسئله را با بیان ریاضی به صورت زیر تعریف می‌کنیم. اگر برای هر رنگ زیر گراف القایی با مجموعه‌ی یال‌هایی به فرم $A_i = \{e \mid e \in c_i\}$ را تشکیل دهیم. به دنبال B_i هایی هستیم که در شرایط زیر صدق کند. در واقع یال‌های رنگ شده در B_i ها آلفا جورسازی رنگی را به ما می‌دهد.

- 1- B_i is an arbitrary matching in A_i
- 2- $\forall_{i,j,i \neq j} B_j \cap B_i = \emptyset$
- 3- $\alpha |M_i| \leq |B_i|$

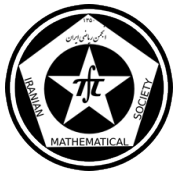


(آ) گراف و آلفا جورسازی رنگی متناظر

ایده‌ی رنگی‌آمیزی به این صورت است که اگر ما یال‌هایی که تنها می‌توانند یک رنگ به خود اختصاص دهند را به صورت مجزا رنگ کنیم، هیچ تداخلی در ماکزیمم کردن جورسازی ایجاد نمی‌کند. با در نظر گرفتن ایده‌ی تک‌رنگی روند الگوریتم را طوری تعیین می‌نماییم که در طول روند اجرا کلاس‌هایی که هیچ تداخلی با یکدیگر ندارند را به صورت موازی رنگ کنیم.

۴ الگوریتم پیشنهادی

ما در این مقاله از رویکرد الگوریتم‌های موازی به شرح زیر برای حل مسئله آلفا جورسازی رنگی استفاده نموده‌ایم.

**Algorithm 1** $P\alpha MC$ algorithm

- 1: Input: Graph and function f
- 2: Create color edge Graph
- 3: Classification
- 4: Find α Matching for one color classes
- 5: Find α Matching for two color classes
- 6: **for** $i = 3 : 2^K$ **do**
- 7: Find α Matching for i color classes
- 8: **end for**
- 9: Output: Coloring α Matching

الگوریتم $P\alpha MC$ روند اجرای برنامه را نشان می‌دهد. این الگوریتم از پنج زیر تابع برای ایجاد ماترسی رنگ یال‌ها، کلاس‌بندی آن‌ها، یافتن آلفا جورسازی برای تک رنگ‌ها، دو رنگ‌ها و بیش از دو رنگ‌ها تشکیل شده است که در ادامه به بیان آن‌ها می‌پردازیم. ماتریس رنگ یال‌ها به تعداد یال‌های گراف دارای سطر می‌باشد و در هر سطر ستون‌های اول و دوم نشان‌دهنده‌ی دو راس متصل به یال آن سطر می‌باشد و ستون‌های ۳ تا $I+2$ نشان می‌دهد که یال هر سطر می‌تواند چه رنگ‌هایی را به خود اختصاص دهد.

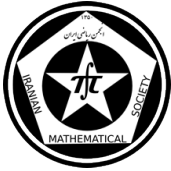
ماتریس رنگ یال‌ها به عنوان ورودی به تابع کلاس‌بندی داده می‌شود. این تابع یال‌ها را بر حسب رنگ‌ها کلاس‌بندی می‌کند و در نهایت یک ستون به انتهای ماتریس رنگ یال‌ها اضافه می‌کند تا برای هر یال کلاس آن را مشخص نماید. در کلاس‌های تک رنگ، انتخاب هر کدام از یال‌های یک کلاس تک رنگ برای تولید آلفا جورسازی متفاوتی ندارد. زیرا در این کلاس‌ها یال‌ها تنها می‌توانند یک رنگ را به خود اختصاص دهند. و به دنبال یافتن طولانی‌ترین مسیرهای در گراف می‌گردد تا تعداد یال‌های جورسازی را ماکزیمم کند.

پس از اجرای برنامه آلفا جورسازی کلاس‌های تک رنگ، اطمینان داریم دیگر کلاس‌های تک رنگ وجود ندارند و اگر کلاس‌های دو رنگی را رنگ کنیم اطمینان داریم یال‌های همسایه‌ای که در این کلاس نیستند حداقل یک رنگ دارند که با رنگ‌های این کلاس متفاوت است. نکته قابل توجه موازی سازی کلاس‌های دو رنگی می‌باشد. اگر بخواهیم الگوریتم را به صورت موازی پیاده سازی نماییم باید دقت داشته باشیم که رنگ کردن یال‌ها تداخلی با یکدیگر نداشته باشند. اما حداکثر $I-1$ از آنها را می‌توان به صورت هم‌زمان رنگ کرد که الگوریتم به شرح زیر است.

Algorithm 2 Find α Matching for two color classes

- Input: two color classes
- 2: **while** (**do** until exist one color class)
 - for** $i = 1 : K$ and $i \neq j$ (inparallel) **do**
 - 4: **for** $j = 1 : K$ **do**
 - Find α Matching for j
 - 6: Update classes
 - Find Maximum Matching for one color classes
 - 8: **end for**
 - end for**
 - 10: **end while**
- Output: G without any one color classes

همانند آلفا جورسازی کلاس‌های دو رنگی اطمینان داریم یال‌های همسایه‌ای که در کلاس‌های چند رنگی نیستند حداقل



یک رنگ دارند که با رنگ‌های این کلاس متفاوت است. بنابراین از یک ایده مشابه ایده‌ی رنگ آمیزی دو رنگی برای یافتن ماکزیمم جورسازی کلاس‌های چند رنگ استفاده می‌کنیم. روند الگوریتم را در مرحله‌های مختلف با این شرط که در هر مرحله هیچ کدام از رنگ آمیزی کلاس‌ها با یکدیگر تداخل نداشته باشد اجرا می‌کنیم. در کلاس‌بندی‌های k رنگی با یک تغییر در روند الگوریتم مشابه با دو رنگی رفتار می‌کنیم. در هر مرحله کلاس‌هایی که در رنگ i ام اشتراک دارند را به صورت موازی رنگ می‌کنیم. تغییر مورد نظر به این صورت است که هر کلاس k رنگی را دو رنگ در نظر می‌گیریم یک رنگ، رنگ i ام و رنگ دیگر که نماینده‌ی $K-1$ رنگ باقیمانده می‌باشد. بنابراین در هر مرحله پردازنده‌ها $I-1$ رنگی که مخالف رنگ i هستند و هیچ اشتراکی با هم ندارند را رنگ می‌کنند. در نتیجه تکرار حلقه دوم به صورت $i = [(i-1)! \div (i-K)! * (K-1)! * (i-1)]$ تغییر می‌یابد.

۵ ارزیابی و نتایج عملی

با تحلیل زمان اجرای الگوریتم پیشنهادی زمان برابر خواهد بود با $O(n * m^2 * K^{k+1} / p * K)$. با توجه به الگوریتم تعداد پردازنده‌های مناسب برای رنگ کردن یال‌ها برابر یکی کمتر از تعداد رنگ‌ها می‌باشد. برای مقایسه کارایی، الگوریتم خود را با حالت سریال همین روش با آلفای برابر مقایسه نموده‌ایم. در ادامه در جدول یک نرخ بهره‌وری و افزایش سرعت روش پیشنهادی که نسبت زمان اجرای یک الگوریتم موازی در یک کامپیوتر تک پردازنده به یک کامپیوتر چند پردازنده می‌باشد با تعداد پردازنده‌های مختلف برای ۱ تا ۱۰ رنگ نشان داده شده است.

Table ۱: نرخ بهره‌وری و افزایش سرعت روش پیشنهادی با تعداد پردازنده‌های مختلف نسبت به تک پردازنده

# of cpu	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰
mean sp for ۱:۱۰ color	۰,۹۷	۱,۶۹	۲,۶۲	۳,۷۴	۴,۸۳	۵,۹۹	۷,۰۶	۸,۲۰	۹,۲۲
mean E	۴۸,۵	۵۶,۴	۶۵,۴	۷۴,۷	۸۰,۴	۸۵,۶	۸۸,۲	۹۱,۱	۹۲,۲

۶ نتیجه

ما برای گراف‌هایی که یال‌های آن این ویژگی را دارد که می‌توانند چند رنگ مختلف را به خود اختصاص دهند، تعریف جدیدی به نام آلفا جورسازی رنگی را ارائه داده‌ایم. راه‌کار پیشنهادی از ایده‌ی کلاس‌بندی یال‌های رنگی استفاده می‌نماید. کلاس‌بندی یال‌ها این ویژگی را به الگوریتم اضافه نموده است که بتوانند بخش‌های مختلف الگوریتم را به صورت موازی اجرا نماید. و با تعیین تعداد پردازنده، یکی کمتر از تعداد رنگ‌ها در مقایسه با حالت سریال به بهره‌وری حدود ۹۰ درصد برسد.

مراجع

- [1] H. N. GABOW, *Efficient Implementation of Edmonds' Algorithm for Maximum Matching on Graphs*, journal of the Association for Computing Machinery, (1976), pp. 221-234
- [2] A. Kosowski, A. Navarra, D. Pajak, C. M. Pinotti, *Maximum matching in multi-interface networks*, Journal of Theoretical Computer Science, (2013), pp. 52-60.
- [3] A. O. DE MAIO, C. A. ROVED, *The Minimal Cost Maximum Matching of a Graph*, Eingegangen am 11(1970).

علوم کامپیوتر



ارائه یک روش ابتکاری هوشمند برای تسریع همگرایی روش $GMRES(m)$

محدثه انتظاری زارچ*
دانشگاه یزد، دانشکده ریاضی، گروه علوم کامپیوتر
دانشگاه یزد، آزمایشگاه پردازش موازی

سیدابوالفضل شاهزاده فاضلی
دانشگاه یزد، دانشکده ریاضی، گروه علوم کامپیوتر
دانشگاه یزد، آزمایشگاه پردازش موازی

محمدباقر دولتشاهی
دانشگاه یزد، دانشکده برق و کامپیوتر
دانشگاه یزد، آزمایشگاه پردازش موازی

چکیده

در دامنه وسیعی از کاربردها، حل دستگاه خطی $Ax = b$ مطرح می شود. یک روش مهم برای حل این دستگاه‌های خطی غیرمتقارن بزرگ $n \times n$ ، روش مینیمم باقی‌مانده تعمیم یافته است که آن را با $GMRES(m)$ نشان می‌دهند. در این مقاله، یک روش ابتکاری هوشمند برای تسریع همگرایی روش $GMRES(m)$ ارائه شده است. نتایج پیاده‌سازی روش پیشنهادی بر روی تعدادی از ماتریس‌های استاندارد از مجموعه ماتریس‌های $n \times n$ دانشگاه فلوریدا^۱، کارایی خوب این روش را تأیید می‌کند.

واژه‌های کلیدی: جمرس^۲، الگوریتم‌های ابتکاری، هوش مصنوعی

۱ مقدمه

به عنوان یک حقیقت باید بیان نمود که تقریباً جواب‌های عددی بسیاری از مسائل علوم کاربردی نیاز به حل یک مسأله خطی $Ax = b$ دارند. در محاسبات عددی برای حل دستگاه‌های خطی معمولاً از یکی از دو دسته روش زیر استفاده می‌شود:

- روش‌های مستقیم

- روش‌های تکراری

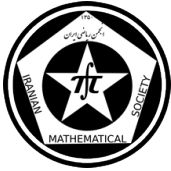
با توجه به ضرایب دستگاه خطی و بُعد ماتریس A ، می‌توان از یکی از روش‌های گفته شده استفاده کرد. اگر بعد ماتریس کوچک باشد می‌توان از روش‌های مستقیم نظیر روش حذفی گوس، گوس-جردن و تجزیه LU استفاده کرد. این روش‌ها از یک تعداد متناهی گام تشکیل می‌شوند که این گام‌ها باید قبل از بدست آمدن جواب، انجام شوند.

از طرف دیگر روش‌های تکراری مبتنی بر محاسبه یک دنباله از تقریب‌ها برای جواب دستگاه هستند و یک کاربر می‌تواند هرگاه یک جواب با دقت معین بدست آمد، یا یک تعداد معین تکرار کامل شد، برنامه را متوقف کند. اگر ماتریس A نسبتاً بزرگ باشد، استفاده از روش‌های مستقیم مبتنی بر مثلثی‌سازی ماتریس به علت نیاز به زمان طولانی و فضای ذخیره‌سازی

* سخنران

^۱The University of Florida Sparse Matrix Collection

^۲GMRES



زیاد توصیه نمی‌شوند. همچنین بیشتر مسائل تُنک هستند و تنک بودن در طی فرآیند مثلثی‌سازی از بین می‌رود و به‌طور قابل ملاحظه‌ای توسعه می‌یابد. برای حل چنین مسائلی توصیه می‌شود از روش‌های تکراری استفاده گردد که ماتریس A را تغییر نمی‌دهد.

یکی از روش‌های تکراری که امروزه کاربرد زیادی پیدا کرده است، روش مینیمم باقی‌مانده تعمیم یافته یا به اختصار روش $GMRES(m)$ می‌باشد که توسط سعد و شولتز ارائه شده است [۱]. با وجود کارایی خوب روش $GMRES$ ، به نظر می‌رسد که می‌توان با ایجاد تغییراتی در ساختار آن کارایی این روش را بهبود بخشید، به‌طوری‌که موجب تسریع در همگرایی آن شود. در این مطالعه، با بهره‌گیری از یک روش ابتکاری هوشمند تغییراتی در نحوه‌ی بروزرسانی متغیرها در روش $GMRES(m)$ داده می‌شود. نتایج پیاده‌سازی روش پیشنهادی بر روی تعدادی از ماتریس‌های استاندارد، کارایی خوب این روش را تأیید می‌کند.

۲ روش مینیمم باقی‌مانده تعمیم یافته

روش $GMRES$ با استفاده از فرآیند آرنولدی^۳ [۲] یک بردار نرمال پایه $V = [v_1, v_2, \dots, v_k]$ برای زیرفضای کرالیف^۴ $\{r_0, Ar_0, \dots, A^{k-1}r_0\} = span\{r_0, Ar_0, \dots, A^{k-1}r_0\}$ می‌سازد، که در آن $r_0 = b - Ax_0$ و x_0 بردار شروع اولیه است. در زیر، الگوریتم روش $GMRES$ با استفاده از فرآیند آرنولدی و زیرفضای کرالیف آورده شده است.

الگوریتم ۱: $GMRES$

(۱) یک بردار اولیه x_0 و یک بعد m از زیرفضای کرالیف را انتخاب کنید و $r_0 = b - Ax_0$ را محاسبه کنید.

(۲) m گام الگوریتم آرنولدی و با بردار شروع $v_1 = \frac{r_0}{\|r_0\|}$ را انجام دهید تا ماتریس \tilde{H}_m و ماتریس متعامد V_m تولید شوند.

(۳) بردار y_0 را پیدا کنید که تابع $J(y) = \|Be_1 - \tilde{H}_m y\|$ را بر روی همه بردارهای y متعلق به R^m مینیمم کند (در اینجا $B = \|r_0\|$ و $e_1 = [1, 0, \dots, 0]^T$ است).

(۴) بردار $x_1 = x_0 + V_m y_0$ و $r_1 = b - Ax_1$ را محاسبه کنید، اگر x_1 تقریب مناسبی برای جواب است خارج شوید، در غیر این صورت با در نظر گرفتن $v_1 = \frac{r_0}{\|r_0\|}$ ، $v_1 = \frac{r_0}{\|r_0\|}$ به گام ۲ بازگردید.

یکی از مشکلات روش $GMRES$ این است که هزینه‌ی محاسبه به‌صورت n^p رشد می‌کند که در آن n اندازه‌ی ماتریس و $1 < p < 2$ می‌باشد و همچنین با افزایش n ، حافظه‌ی مورد نیاز نیز، افزایش می‌یابد [۳]. برای رفع این مشکل، یک تکنیک شروع مجدد به نام $GMRES(m)$ معرفی شده است. در $GMRES(m)$ ، یک محاسبه‌ی $GMRES$ در بازه‌های m تکرار و نتایج وسط بازه‌ها، در انتهای بازه به عنوان بردار اولیه برای شروع بازه‌ی بعدی استفاده می‌گردد، شروع می‌شود. در زیر الگوریتم $GMRES(m)$ را ملاحظه می‌کنید.

الگوریتم ۲: $GMRES(m)$

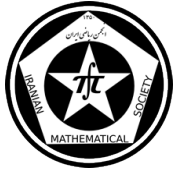
(۱) یک حدس اولیه $x_0^{(1)}$ را انتخاب کنید.

(۲) برای $\ell = 1, 2, \dots$ تا همگرایی انجام بدهید.

(۱-۲) دستگاه $Ax = b$ را با استفاده از m تکرار از روش $GMRES$ با حدس اولیه‌ی $x_0^{\ell-1} := x_0^{\ell-1}$ حل کنید.

^۳Arnoldi

^۴Krylov



۳ روش پیشنهادی

همان‌طور که در بخش قبل مشاهده کردید، روش $GMRES(m)$ برای حل دستگاه خطی $Ax = b$ کار خود را با یک بردار x اولیه شروع می‌کند و سعی دارد مقادیر این بردار را به گونه‌ای تغییر دهد که خطای تخمین را کاهش دهد. متأسفانه فرآیند محاسبه میزان تغییر هر بُعد از بردار x یک فرآیند زمان‌بر می‌باشد. به همین علت، در این مطالعه از یک روش ابتکاری هوشمند برای کمک به فرآیند پیدا کردن مقادیر مناسب هر بُعد از بردار x استفاده شده است. روش ابتکاری بدین صورت می‌باشد که: مقدار هر بُعد d از بردار x که در k تکرار قبلی از روش $GMRES(m)$ به‌طور پیوسته کاهش (افزایش) یافته است، به احتمال زیاد در تکرار بعدی نیز کاهش (افزایش) خواهد یافت. بنابراین، می‌توان بدون انجام محاسبات زیاد، به‌طور هوشمند تغییراتی را در جهت پیش‌بینی شده در هر یک از مقادیر بردار x ایجاد کرد. استفاده از این فرض، در عمل باعث افزایش چشم‌گیر سرعت همگرایی روش $GMRES(m)$ خواهد شد. الگوریتم $GMRES(m)$ بهبود یافته را در ادامه می‌بینید.

الگوریتم ۳: $GMRES(m)$ بهبود یافته

(۱) یک حدس اولیه $x_0^{(1)}$ را انتخاب کنید.

(۲) برای $\ell = 1, 2, \dots$ تا همگرایی انجام بدهید.

(۱-۲) دستگاه $Ax = b$ را با استفاده از m تکرار از روش $GMRES$ با حدس اولیه $x_m^{\ell-1} := x_m^{\ell-1}$ حل کنید.

(۲-۲) مقدار هر بُعد d از بردار x که در k تکرار قبلی به‌طور پیوسته کاهش (افزایش) داشته است را به میزان $a * x'(d)$ کاهش (افزایش) دهید (a یک عدد ثابت می‌باشد که نرخ بروزرسانی نامیده می‌شود و $x'(d)$ میزان تغییر مقدار بُعد d از بردار x در تکرار قبل می‌باشد).

۴ نتایج پیاده‌سازی

برای بررسی کارایی روش $GMRES(m)$ بهبود یافته پیشنهادی، آزمایش‌هایی بر روی تعدادی از ماتریس‌های استاندارد از مجموعه ماتریس‌های تَنک دانشگاه فلوریدا، صورت گرفته است. در تمام این آزمایش‌ها، بردار شروع اولیه (یعنی بردار x_0)، برابر با بردار صفر در نظر گرفته شده است. جدول (۱) مقایسه بین نتایج بدست آمده از روش $GMRES(m)$ و روش $GMRES(m)$ بهبود یافته پیشنهادی را نشان می‌دهد. همان‌طور که در این جدول مشاهده می‌شود، روش پیشنهادی در مقایسه با روش $GMRES(m)$ استاندارد، قادر است در مدت زمان کمتری، جواب‌هایی را با میزان خطای یکسان پیدا کند.

جدول (۱) : مقایسه نتایج روش $GMRES(m)$ و $GMRES(m)$ بهبود یافته پیشنهادی

مشه‌ محک	m	روش $GMRES(m)$				روش $GMRES(m)$ بهبود یافته			
		تعداد تکرار	خطا	زمان (ثانیه)	R	تعداد تکرار	خطا	زمان (ثانیه)	زمان (ثانیه)
Consol	۵۰	۲۰۰	۰.۰۱۵۵۲۴	۱۲.۰۴	۵	۱۰۳	۰.۰۱۰۰۵	۰.۰۱۹۵۴۴	۶۳.۳
Consol	۵۰	۵۰۰	۰.۰۰۰۱۸۲۰۳	۳۱۱.۰	۱۰	۳۷۸	۰.۰۰۰۰۶	۰.۰۰۰۱۸۲۰۳	۲۲۲.۹
Ex8	۵۰	۲۰۰	۰.۸۵۵۰۳	۳۴۵.۹	۱۰	۱۰۰	۰.۰۰۲	۰.۸۵۵۰۳	۱۷۸.۷
Ex8	۵۰	۵۰۰	۰.۸۵۲۹۳	۸۱۲.۴	۵	۲۱۷	۰.۰۰۸	۰.۸۵۲۹۳	۳۸۷.۶
c-22	۵۰	۲۰۰	۰.۰۹۶۷۶۸	۴۴۴.۷	۵	۱۱۴	۰.۰۵	۰.۰۹۶۷۶۸	۲۹۱.۵
c-22	۵۰	۵۰۰	۰.۰۳۷۸۱۱	۱۰۲۸.۱	۵	۲۸۲	۰.۰۵	۰.۰۳۷۸۱۱	۵۹۴.۰
Tols4000	۵۰	۲۰۰	۰.۱۶۶۷۹	۴۶۸.۵	۵	۱۳۶	۰.۰۵	۰.۱۶۶۷۹	۲۱۱.۳
Tols4000	۵۰	۵۰۰	۰.۱۴۷۷۷	۱۱۳۰.۱	۱۵	۴۴۴	۰.۰۹	۰.۱۴۷۷۷	۱۰۹۰.۳
TSC-OPF-300	۵۰	۲۰۰	۰.۳۱۵۸۸	۲۱۰.۷۲	۱۰	۱۱۵	۰.۰۷	۰.۳۱۵۸۸	۱۵۱۷.۸
TSC-OPF-300	۵۰	۵۰۰	۰.۲۸۴۴۵	۵۲۴۰.۹	۱۰	۲۶۵	۰.۰۷	۰.۲۸۴۴۵	۲۵۵۵.۴



لازم به توضیح است که در هر تکرار $GMRES(m)$ تعداد عملیات تقریباً معادل هر تکرار $GMRES(m)$ بهبودیافته است.

۵ نتیجه‌گیری

تاکنون با استفاده از مفاهیم ریاضیات تکنیک‌های مختلفی برای بهبود عملکرد روش $GMRES(m)$ ارائه شده است [۴، ۵]، که هرکدام پیچیدگی محاسباتی خود را دارند و گاهی زمان اجرای برنامه را به شدت افزایش می‌دهند. با این وجود، بهبود کارایی این الگوریتم با استفاده از مفاهیم و تکنیک‌های هوش مصنوعی کمتر مورد توجه قرار گرفته است. در مطالعه حاضر، با استفاده از یک روش ابتکاری هوشمند که دارای پیچیدگی محاسباتی بسیار کمی است، به بهبود عملکرد روش $GMRES(m)$ پرداخته شده است. نتایج پیاده‌سازی روش پیشنهادی بر روی تعدادی از ماتریس‌های استاندارد، کارایی خوب این روش را در تسریع همگرایی روش $GMRES(m)$ نشان می‌دهد.

مراجع

- [1] Y. Saad, M. H. Schultz, *GMRES: a generalized minimal residual algorithm for solving non-symmetric linear systems*, SIAM Journal on Scientific and Statistical Computing, 7 (1986), pp. 865-869.
- [2] Y. Saad, *Iterative Methods for Sparse Linear Systems*, 2nd ed., SIAM, Philadelphia, 2003.
- [3] R. B. Morgan, *GMRES with deflated restarting*, SIAM Journal on Scientific Computing. 24 (2002), pp. 20-37.
- [4] I. D. Mishev, N. Fedorova, S. Terekhov, B. L. Beckner, A. K. Usadi, M. B. Ray, and O. Diyanikov, "Adaptive control for solver performance optimization in reservoir simulation," 11th European Conference on the Mathematics of Oil Recovery, September, 2008.
- [5] A. Imakura, T. Sogabe, and S. L. Zhang, "A look-back technique of restart for the GMRES(m) method," Applied Linear Algebra- in honor of Hans Schneider, Novi-Sad, 2010.

پست الکترونیکی: mohadeseh_entezari@yahoo.com

پست الکترونیکی: fazeli@yazd.ac.ir

پست الکترونیکی: mb.dowlatshahi@yahoo.com



الگوریتم خطی مجموعه‌ی [۱, ۲]-احاطه‌گر گراف‌های سری-موازی

محمد رضا هوشمنداصل

دانشگاه یزد، دانشکده ریاضی، گروه علوم کامپیوتر
دانشگاه یزد، آزمایشگاه پردازش اطلاعات کوانتومی

پویه شریفانی*

دانشگاه یزد، دانشکده ریاضی، گروه علوم کامپیوتر
دانشگاه یزد، آزمایشگاه پردازش اطلاعات کوانتومی

چکیده

بسیاری از مسائل NP -کامل در نظریه‌ی گراف می‌توانند برای گراف‌های سری-موازی در زمان چندجمله‌ای حل شوند. به عنوان مثال پیدا کردن عدد احاطه‌گر یک گراف مسئله‌ی NP -کامل است اما برای گراف‌های سری-موازی این مسئله در زمان خطی برحسب تعداد راس‌های گراف قابل حل است. در این مقاله با استفاده از درخت تجزیه‌ی متناظر با گراف سری-موازی داده شده، یک الگوریتم خطی برای یافتن کوچکترین مجموعه‌ی [۱, ۲]-احاطه‌گر آن گراف ارائه می‌شود.

واژه‌های کلیدی: ، مجموعه‌ی احاطه‌گر [۱, ۲]، گراف سری-موازی، مجموعه‌ی احاطه‌گر

Mathematics Subject Classification [2010]: 13D45, 39B42

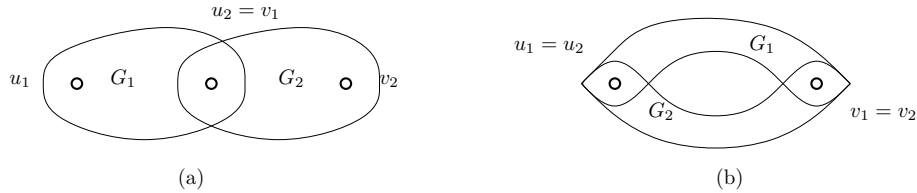
۱ مقدمه

فرض کنید $G = (V, E)$ گرافی غیرجهت دار و بدون طوقه است، مجموعه $S \subseteq V$ یک مجموعه‌ی احاطه‌گر برای G می‌شود، اگر $N[S] = V$ یا به طور معادل هر راس $v \in V \setminus S$ با حداقل یکی از رئوس S مجاور باشد. اگر تعداد رئوس احاطه‌کننده برای هر راس $v \in V \setminus S$ برابر ۱ یا ۲ باشد، به مجموعه‌ی S ، [۱, ۲]-احاطه‌گر گفته می‌شود [۲]. این مجموعه اولین بار توسط چلالی و همکارانش در [۱] معرفی شد، آنها ثابت کردند که برای گراف $G = (V, E)$ مسئله‌ی یافتن عدد [۱, ۲]-احاطه‌گر برای G یک مسئله‌ی NP -کامل است.

در [۳] با بیان مفاهیم ترکیب سری و موازی و ساخت P -گراف برای گراف سری و موازی داده شده، الگوریتمی خطی جهت یافتن کوچکترین مجموعه‌ی احاطه‌گر ارائه شده است. در این مقاله ضمن بازتعریف این مفاهیم، روش مذکور برای یافتن کوچکترین مجموعه‌ی [۱, ۲]-احاطه‌گر بسط و توسعه داده می‌شود.

تعریف ۱.۱. گرافی با دو راس مشخص u و v که یکی منبع و دیگری مقصد است، گراف دو پایانه‌ای نامیده می‌شود. عملگرهای ترکیب سری و موازی روی گراف‌های دو پایانه‌ای به صورت زیر تعریف می‌شوند:
ترکیب موازی دو گراف دو پایانه‌ای G_1 و G_2 از ادغام منبع گراف‌های G_1 و G_2 و ساخت یک منبع برای گراف جدید و هم‌چنین ادغام مقصد آن‌ها و ایجاد یک مقصد برای گراف جدید حاصل می‌شود (شکل ۱. a).
ترکیب سری دو گراف دو پایانه‌ای G_1 و G_2 از ادغام مقصد G_1 و منبع G_2 حاصل می‌شود. در این حالت منبع G_1 و مقصد G_2 به ترتیب به عنوان منبع و مقصد گراف جدید قرار می‌گیرد (شکل ۱. b).

* سخنران

شکل ۱: a. ترکیب موازی دو گراف G_1 و G_2 b. ترکیب سری دو گراف G_1 و G_2

تعریف ۲.۱. گراف سری-موازی را می‌توان به صورت بازگشتی زیر تعریف کرد.

یک گراف با یک یال $\{u, v\}$ یک گراف سری-موازی با منبع u و مقصد v (و یا منبع v و مقصد u) است. هر گراف سری-موازی توسط اتصال سری یا موازی دو گراف سری-موازی حاصل می‌شود و تعداد این اتصالات باید متناهی باشد.

تعریف ۳.۱. فرض کنید $G = (V, E)$ یک گراف سری-موازی با پایانه‌های u و v و $\hat{G} = (\hat{V}, \hat{E})$ زیرگراف القایی از G است. اگر گراف \hat{G} یک گراف سری-موازی با پایانه‌های \hat{u} و \hat{v} باشد و برای راس $\hat{u} = u$ یا $\hat{v} = v$ یا یال $(x, y) \in E \setminus \hat{E}$ موجود باشد که $x \notin \hat{V}$ و $y = \hat{u} \in \hat{V}$ یا $x = \hat{v} \in \hat{V}$ و $y \notin \hat{V}$ به طور مشابه برای هر راس \hat{u} یا \hat{v} یا یال $(z, w) \in E \setminus \hat{E}$ موجود باشد که $z \notin \hat{V}$ و $w = \hat{v} \in \hat{V}$ یا $z \in \hat{V}$ و $w \notin \hat{V}$ آنگاه \hat{G} یک P -گراف از G با پایانه‌های \hat{u} و \hat{v} نامیده می‌شود. به طور کلی برای هر راس $v' \in \hat{V}$ که $v' \neq \hat{u}, \hat{v}$ ، برای هر $v' \neq u, v$ و $v'' \in V \setminus \hat{V}$ یال (v', v'') در مجموعه‌ی یال‌های E موجود نباشد.

تعریف ۴.۱. بلوک متناظر با راس: فرض کنید $\hat{G} = (\hat{V}, \hat{E})$ یک P -گراف با پایانه‌های u و v از گراف سری-موازی $G = (V, E)$ باشد. فرض کنید $K_{\epsilon, \epsilon} = (V_B, E_B)$ یک گراف دو بخشی کامل است که مجموعه‌ی رئوس و یال‌های آن به صورت زیر تعریف می‌شوند.

$$V_B = U \cup V, U = \{u^{\circ 1}, u^{\circ 2}, u^{1^{\circ}}, u^{2^{\circ}}, u^{1^1}, u^{1^2}\}, V = \{v^{\circ 1}, v^{\circ 2}, v^{1^{\circ}}, v^{2^{\circ}}, v^{1^1}, v^{1^2}\},$$

$$E_B = \{(u, v) : u \in U \text{ and } v \in V\}.$$

آنگاه یک گراف دو بخشی $B = (\hat{V}_B, \hat{E}_B)$ را یک بلوک برای \hat{G} گویند اگر $\hat{V}_B = V_B$ و $\hat{E}_B \subseteq E_B$ باشد. به هر یال (u^α, v^β) که $\alpha, \beta \in \{1, 2, \circ 1, \circ 2, 1^{\circ}, 2^{\circ}, 1^1, 1^2\}$ یک زیر مجموعه $S(u^\alpha, v^\beta)$ از \hat{V} نسبت داده می‌شود. حال فرض کنید D یک مجموعه‌ی [۱, ۲]-احاطه‌گر در \hat{G} باشد، هر راس $u^\alpha \in \hat{V}_B$ با توجه به مقدار α بیان کننده‌ی ویژگی راس u است:

$u^{\circ i}$: یعنی $u \notin D$ و u توسط دقیقاً i راس از $V \setminus \hat{V}$ احاطه می‌شود.

$u^{i^{\circ}}$: یعنی $u \notin D$ و راس u توسط دقیقاً i راس از \hat{V} احاطه می‌شود.

u^{1^1} : یعنی $u \notin D$ و راس u دقیقاً توسط تنها یک راس از \hat{G} احاطه می‌شود و u^1 : یعنی $u \in D$.

برچسب $S(u^\alpha, v^\beta)$ مجموعه‌ای است برابر اشتراک \hat{V} مجموعه‌ی [۱, ۲]-احاطه‌گر مینیمم D .

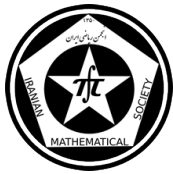
تعریف ۵.۱. فرض کنید G یک گراف سری-موازی با پایانه‌های u و v باشد و فرض کنید $T = (V_T, E_T)$ درختی دودویی که هر راس میانی آن دارای دقیقاً دو فرزند باشد و دارای $|E|$ برگ باشد. T را درخت تجزیه‌ی گراف G خوانند هرگاه بتوان راس‌های درخت را به صورت زیر برچسب گذاری کرد.

۱. ریشه‌ی درخت T با (u, v) برچسب گذاری شده است.

۲. برای هر یال $\{x, y\} \in E$ ، دقیقاً یک برگ وجود دارد که با (x, y) برچسب گذاری شده است.

۳. برای هر راس میانی $v \in V_T$ ، ریشه‌ی زیر درخت سمت راست و چپ v با (x, y) و (x, z) یا (x, y) و (z, y)

برچسب گذاری شده است.



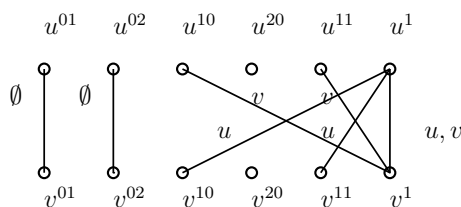
لم ۶.۱. مسئله‌ی یافتن درخت تجزیه متناظر با یک گراف سری-موازی با استفاده از الگوریتم جست وجوی عمقی در زمان چندجمله‌ای قابل حل است. [۳]

۲ الگوریتم یافتن مجموعه‌ی [۱, ۲]-احاطه‌گر با کوچکترین اندازه برای یک گراف سری-موازی

فرض کنید T درخت تجزیه گراف G باشد و $\tau(t)$ زیردرخت T با ریشه t باشد. همچنین فرض کنید $\tau_r(t)$ و $\tau_l(t)$ زیردرخت سمت چپ و راست زیردرخت با ریشه t باشد. در این فصل ابتدا رویه‌های از الگوریتم MINSET [۱, ۲]-شرح داده می‌شود. سپس به بیان و تحلیل زمان الگوریتم MINSET [۱, ۲]-پرداخته می‌شود.

رویه‌ی LBLOCK

به هر برگ یک زیرگراف از $K_{6,6}$ به صورت شکل ۲ نظیر می‌گردد که شرایط بلوک متناظر با راس برقرار باشد.



شکل ۲: بلوک آغازین برای راس با برچسب (u, v) از درخت تجزیه

رویه‌ی INBLOCK

ورودی: یک راس داخلی t از درخت T با برچسب (x, y) و دوبلوک متناظر با درخت‌های $\tau_r(t)$ و $\tau_l(t)$.

خروجی: بلوکی متناظر با زیردرخت $\tau(t)$ و برچسب هر یال که توسط $S(x^\alpha, y^\beta)$ محاسبه می‌شود.

روش: فرض کنید $B_r = (V_r, E_r)$ و $B_l = (V_l, E_l)$ بلوک‌هایی برای زیردرخت‌های $\tau_r(t)$ و $\tau_l(t)$ باشند، با توجه به برچسب متناظر با یال‌های بلوک‌های B_r و B_l مجموعه‌ی $S(x^\alpha, y^\beta)$ به شکل زیر محاسبه می‌شود. دو حالت رخ می‌دهد:

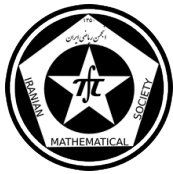
۱. برچسب متناظر با ریشه‌ی زیردرخت‌های $\tau_r(t)$ و $\tau_l(t)$ به ترتیب (x, z) و (z, y) باشد، آن‌گاه برای هر $\alpha, \beta \in \{0, 1, 2, 10, 20, 11, 1\}$ داریم:

$$S(x^\alpha, y^\beta) = \text{MINSIZE}\{S_1(x^\alpha, y^\gamma) \cup S_2(x^{\tilde{\gamma}}, y^\beta) \text{ for } \gamma \in \{0, 1, 2, 10, 20, 11, 1\}\}$$

۲. برچسب متناظر با ریشه‌ی زیردرخت $\tau_l(t)$ و $\tau_r(t)$ باشد آن‌گاه:

$$S(x^\alpha, y^\beta) = \text{MINSIZE}\{S_1(x^{\alpha_1}, y^{\beta_1}) \cup S_2(x^{\alpha_2}, y^{\beta_2})\}$$

با توجه به مقادیر α : اگر $\alpha \in \{0, 1, 2\}$ آن‌گاه $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$. اگر $\alpha = 10$ آن‌گاه $\alpha_1 = \alpha_2 = 10$ و $\alpha_1 = \{0, 1, 2\}$ اگر $\alpha = 20$ آن‌گاه $\alpha_1 = \alpha_2 = 20$. اگر $\alpha = 11$ آن‌گاه $\alpha_1 = 11$ و $\alpha_2 = 10$. به همین ترتیب برای β ‌های متفاوت به صورت قرینه به دست می‌آید. به علاوه در روابط فوق، برای هر $i = 1, 2$ اگر $\{x^\alpha, y^\beta\} \notin E_i$ آن‌گاه زیرفرمول حاوی $S_i(x^\alpha, y^\beta)$ از رابطه حذف می‌شود و در صورتی که کلیه‌ی زیرفرمول‌های رابطه حذف شود، کل رابطه حذف خواهد شد. به این ترتیب بلوک متناظر با $\tau(t)$ یک گراف



دو بخشی $B_s = (V_s, E_s)$ است که $V_s = \{x^\alpha, y^\beta : \alpha, \beta \in \{0, 1, 2, 10, 11, 1\}\}$ و E_s شامل یال‌های $\{x^\alpha, y^\beta\}$ که $S(x^\alpha, y^\beta)$ متناظر آن‌ها حذف نشده است.

رویه‌ی FNBLOCK

ورودی: بلوک متناظر با درخت تجزیه‌ی T از گراف سری-موازی G .

خروجی: مجموعه‌ی [۱, ۲]-احاطه‌گری برای G که دارای کوچکترین اندازه است.

روش: فرض کنید $B_f = (V_f, E_f)$ بلوک متناظر با درخت تجزیه‌ی T و $S(x^\alpha, y^\beta)$ برچسب متناظر با یال $\{x^\alpha, y^\beta\} \in E_f$ باشد. مجموعه‌ی [۱, ۲]-احاطه‌گر D برای G با کوچکترین اندازه به صورت زیر به دست می‌آید:

$$D = \text{MINSIZE}\{S(x^\gamma, y^\delta) : \gamma, \delta \in \{0, 1, 2, 10, 11, 1\}\}.$$

الگوریتم: [۱, ۲]-MINSET

ورودی: یک گراف سری-موازی $G = (V, E)$ با پایه‌های u و v و درخت تجزیه آن.

خروجی: یک مجموعه‌ی احاطه‌گر مینیمم برای G .

مرحله‌ی ۱: با استفاده از رویه‌ی LBLOCK یک بلوک آغازین برای هر برگ ساخته می‌شود.

مرحله‌ی ۲: درخت تجزیه T از پایین به بالا پیمایش می‌شود و برای هر راس داخلی v از درخت یک بلوک برای

زیر درخت $\tau(v)$ ساخته می‌شود. این مرحله توسط رویه‌ی INBLOCK انجام می‌گردد.

مرحله‌ی ۳: با استفاده از رویه‌ی FBLOCK بلوک نهایی ساخته می‌شود و مجموعه‌ی [۱, ۲]-احاطه‌گر مینیمم مشخص

می‌گردد.

قضیه ۱.۲. یافتن یک مجموعه‌ی [۱, ۲]-احاطه‌گر با کوچکترین اندازه برای گراف سری-موازی $G = (V, E)$ توسط

الگوریتم [۱, ۲]-MINSET در زمان $O(|V|)$ انجام می‌شود.

اثبات. الگوریتم، درخت تجزیه‌ی T را از پایین به بالا پیمایش می‌کند و برای هر راس بلوکی می‌سازد. هر بلوک ابتدایی یک

[۱, ۲]-احاطه‌گر است که تنها شامل یک یال است. فرض کنید $G_1 = (V_1, E_1)$ و $G_2 = (V_2, E_2)$ گراف‌های وابسته

به زیردرخت‌های $\tau_1(t)$ و $\tau_2(t)$ باشد که ورودی رویه‌ی INBLOCK می‌باشند. به سادگی دیده می‌شود که این رویه همگی

مجموعه‌های [۱, ۲]-احاطه‌گر با کوچکترین اندازه را برای $G = (V_1 \cup V_2, E_1 \cup E_2)$ محاسبه کرده و در نهایت رویه‌ی

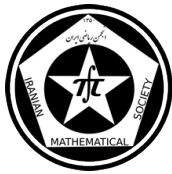
FBLOCK یک [۱, ۲]-احاطه‌گر با کوچکترین اندازه را به عنوان خروجی برمی‌گرداند. مراحل ۱ تا ۳ الگوریتم به $O(|E|)$

عمل نیاز دارد و از آنجایی که هر گراف سری-موازی گرافی مسطح است [۴] لذا $|E| \leq 3|V| - 6$ و با الگوریتم جست و

جوی عمقی برای به دست آوردن درخت تجزیه، الگوریتم دارای زمان اجرای $O(|V|)$ خواهد بود. \square

مراجع

- [1] M. Chellali, T. W. Haynes, S. T. Hedetniemi, A. McRae, *[1, 2]-sets in graphs*, Discrete Applied Mathematics 161, no. 18 (2013), pp. 2885-2893.
- [2] T. W. Haynes, S. T. Hedetniemi, P. Slater, *Fundamentals of domination in graphs*, CRC Press, 1998.
- [3] T. Kikuno, Y. Noriyoshi, K. Yoshiaki, *A linear algorithm for the domination number of a series-parallel graph*, Discrete Applied Mathematics 5, no. 3 (1983), pp. 299-311.
- [4] C. Thomassen, *Kuratowski's theorem*, Journal of Graph Theory 5, no. 3 (1981), pp. 225-241



تقریب منحنی‌های دیجیتالی با یک منحنی تک پیکسلی

داود ایسوند*
دانشگاه ولی عصر رفسنجان

علی توکلی
دانشگاه ولی عصر رفسنجان

چکیده

در این مقاله، یک الگوریتم جدید برای تقریب منحنی‌های دیجیتال ارائه می‌دهیم که بر پایه‌ی ارزش‌دهی پیکسل‌های منحنی استوار می‌باشد. منحنی تقریبی به گونه‌ای است که دارای پهنای یک پیکسلی است. مثالهایی برای بررسی کارایی این روش و مقایسه آن با روش‌هایی که در نرم افزار متلب وجود دارد، ارائه می‌شود.

واژه‌های کلیدی: پردازش تصویر، سایش^۱، تقریب منحنی دیجیتال.

Mathematics Subject Classification [2010]: 94A08, 65D15

۱ مقدمه

یک منحنی دیجیتال از دید ریاضی، به صورت یک سطح یا به عبارت دیگر یک نوار مسطح است نه یک منحنی (شکل ۱). بنابراین در تقریب این نوع منحنی‌ها، به وضوح منحنی‌های متفاوتی وجود دارد که خود می‌توانند به عنوان یک تقریب از این منحنی در نظر گرفته شوند (شکل ۱-الف). از دید ریاضی استخراج یک منحنی از دل این سطح (سایش منحنی)، به طوری که اطلاعات با ارزش منحنی اولیه، مانند انحنا، شیب و غیره را در خود داشته باشد، از اهمیت فراوانی برخوردار است؛ زیرا با استفاده از این منحنی می‌توان به الگوشناسی، توصیف اشیا و منحنی‌ها پرداخت. همچنین در زمینه‌هایی مثل فشرده‌سازی با قابلیت بازسازی از شکل فشرده‌شده‌ی آن، رباتیک، مکانیزاسیون و بینایی ماشین نیز کاربرد دارد. مقالات گوناگونی وجود دارد که به تقریب اشیاء و یا منحنی‌های داخل یک تصویر می‌پردازند که حاصل همه آنها یک تقریب چند وجهی از مرزهای شی یا منحنی مسطح است [۱، ۳]. این نوع تقریب‌ها از جهات بسیاری حائز اهمیت است ولی تقریب حاصل منحنی نیست که بتوان آن را یک تقریب از منحنی داده شده در نظر گرفت. در [۲] نیز با تکیه بر بررسی موضعی موقعیت پیکسل‌های مرزی منحنی تحت عنوان پوشش سلولی یا پاکت سلولی به تقریب مرزهای منحنی می‌پردازد و نتیجه حاصل یک منحنی است که ضخامت آن یک پیکسل بوده و مرزهای شکل را مشخص می‌کند.

با توجه به منحنی‌های ب، ج و د (شکل ۱)، در نگاه اول بدست آوردن چنین منحنی کار بسیار ساده‌ای است و می‌توان با روش‌های زیر بدست آید.

۱- استفاده از خط راهنمای عمودی (از هر پیکسل به صورت عمودی بطرف بالا (پایین) حرکت می‌کنیم تا به نقطه مرزی برسیم و آن نقطه را به عنوان نقطه‌ای از تقریب ثبت می‌کنیم) یا خط راهنمای افقی (شکل ۱ تقریب قرمز رنگ در منحنی‌های ج و د).

۲- استفاده از میانگین سطری یا ستونی (شکل ۱ تقریب آبی رنگ در منحنی‌های ج و د).

۳- استفاده از هر دو خط راهنمای عمودی و افقی با هم. در این روش، تشخیص اینکه چه وقت از خط راهنمای عمودی

* سخنران

^۱Erosion



یا خط راهنمای افقی استفاده کنیم خود یک مشکل بزرگ است و در مواردی هم با وجود تشخیص درست، منحنی حاصل ناپیوسته می‌شود.

۴- استفاده از مرز داخلی، خارجی، پایینی، بالایی، چپ یا راستی به عنوان تقریب مناسب (شکل ۱ الف).

۵- استفاده از جعبه ابزار مطلب.

این روش‌های ساده شاید برای بعضی از نمودارهای ساده تقریب خوبی بدست آورد، ولی برای هر یک از این روش‌ها مثالهای ساده‌ی زیادی وجود دارد که کارآمدی آنها را زیر سوال می‌برد. در این مقاله، روشی ارائه می‌دهیم که همه این موارد را پوشش داده و برای نمودارهای پیچیده‌تر نیز نتیجه قابل قبولی بدست می‌آورد و در انتها برای آزمایش این روش، حروف تایپ شده را تقریب می‌زنیم.

۲ تقریب منحنی دیجیتالی

فرض کنید I یک تصویر دیجیتالی $m \times n$ پیکسلی باشد. مختصات هر پیکسل را به صورت $[i, j]$ به ازای $i = 1, \dots, m$ و $j = 1, \dots, n$ نمایش می‌دهیم. ابتدا فاصله دو پیکسل $p_1 = [i_1, j_1]$ و $p_2 = [i_2, j_2]$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$r = d(p_1, p_2) = \sqrt{(i_2 - i_1)^2 + (j_2 - j_1)^2}.$$

از آنجایی که فضای تصاویر دیجیتالی یک فضای گسسته است، لزوماً برای هر عددی حقیقی مثبت r نمی‌توان دو پیکسل پیدا کرد که $d(p_1, p_2) = r$. مجموعه R را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$R_I = \{r \in \mathbb{R} \mid d(p_1, p_2) = r, \exists p_1, p_2 \in I\}.$$

مجموعه R را به ترتیب صعودی مرتب می‌کنیم. در سراسر این مقاله از A به عنوان ماتریس نظیر تصویر ورودی الگوریتم استفاده می‌شود. A ماتریسی است که درایه‌های نظیر منحنی، \circ و بقیه درایه‌ها ۱ می‌باشند. همچنین از ماتریس B به عنوان ماتریس ارزش پیکسلها، استفاده می‌شود که با استفاده از الگوریتم ۱ بدست می‌آید. شکل ۲، خروجی الگوریتم ۱ را برای منحنی‌های "R" و "4" نشان می‌دهد.

تعریف ۱.۲. $b_{i,j}$ را درایه نظیر پیکسل $[i, j]$ تصویر دیجیتالی، در ماتریس B در نظر می‌گیریم و مقادیر $C0, C45, C90$ و $C125$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

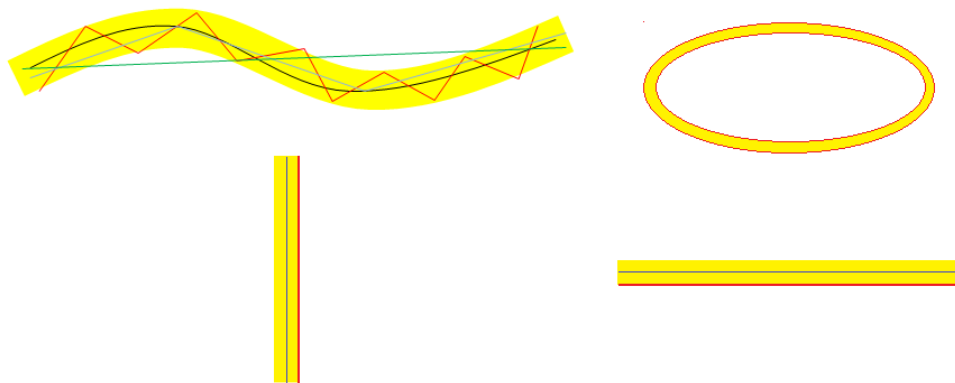
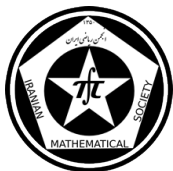
$$(C0)_{i,j} = \begin{cases} (b_{i,j} - b_{i,j-1}) \times (b_{i,j} - b_{i,j+1}) & \text{که } b_{i,j} \neq b_{i,j-1} \\ (b_{i,j} - b_{i,j-2}) \times (b_{i,j} - b_{i,j+1}) & \text{که } b_{i,j} = b_{i,j-1} \end{cases} \quad (1)$$

$$(C45)_{i,j} = \begin{cases} (b_{i,j} - b_{i+1,j-1}) \times (b_{i,j} - b_{i-1,j+1}) & \text{که } b_{i,j} \neq b_{i+1,j-1} \\ (b_{i,j} - b_{i+2,j-2}) \times (b_{i,j} - b_{i-1,j+1}) & \text{که } b_{i,j} = b_{i+1,j-1} \end{cases} \quad (2)$$

$$(C90)_{i,j} = \begin{cases} (b_{i,j} - b_{i-1,j}) \times (b_{i,j} - b_{i+1,j}) & \text{که } b_{i,j} \neq b_{i-1,j} \\ (b_{i,j} - b_{i-2,j}) \times (b_{i,j} - b_{i+1,j}) & \text{که } b_{i,j} = b_{i-1,j} \end{cases} \quad (3)$$

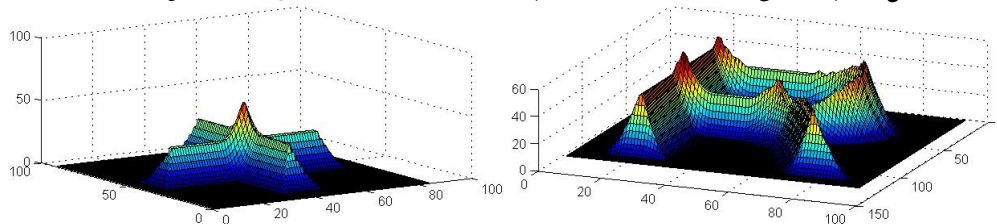
$$(C125)_{i,j} = \begin{cases} (b_{i,j} - b_{i-1,j-1}) \times (b_{i,j} - b_{i+1,j+1}) & \text{که } b_{i,j} \neq b_{i-1,j-1} \\ (b_{i,j} - b_{i-2,j-2}) \times (b_{i,j} - b_{i+1,j+1}) & \text{که } b_{i,j} = b_{i-1,j-1} \end{cases} \quad (4)$$

تعریف ۲.۲. پیکسل $[i, j]$ را یک نقطه بحرانی گویند هرگاه دستکم یکی از $(Ck)_{i,j}$ ها که $k = 0, 45, 90, 125$ مثبت باشد. و درجه بحرانی آن را برابر تعداد Ck های مثبت در آن نقطه، می‌گیریم.



الف ب
ج د

شکل ۱: چند منحنی دیجیتالی زرد رنگ به همراه چند تقریب از هریک، که با رنگهای دیگر مشخص شده است.



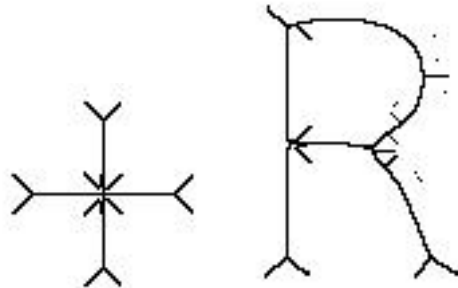
شکل ۲: رسم نمودار ارزش پیکسل‌های مربوط به "R" و "+".

Algorithm 1 الگوریتم ارزش‌دهی پیکسل‌ها

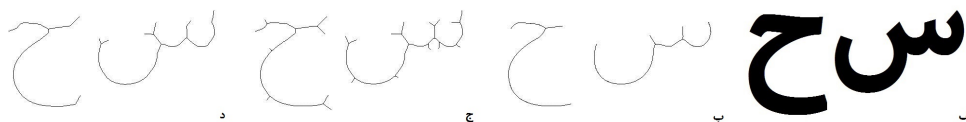
```

1: function B=EVALUATION(A,R)
2:   n= the number of A's rows;
3:   m= the number of A's columns;
4:   for i=1 to n do
5:     for j=1 to m do
6:       if A(i,j)=0 then
7:         r=1;
8:         while all pixels by distance R(r) from element A(i,j) have the value '0' do
9:           r=r+1;
10:        end while
11:        B(i,j)=r;
12:      else
13:        B(i,j)=0;
14:      end if
15:    end for
16:  end for
17: end function

```



شکل ۳: نمایش نقاط بحرانی مربوط به "R" و "+".



شکل ۴: الف: شکل اصلی، ب: تقریب با روش مقاله، ج: تقریب با جعبه ابزار متلب و آرگومان $\text{operation}=\text{thin}$ ، د: تقریب با جعبه ابزار متلب با آرگومان $\text{operation}=\text{skel}$.

۱.۲ مراحل انجام کار

- ۱- اجرای الگوریتم ۱.
 - ۲- بدست آوردن نقاط بحرانی.
 - ۳- غربال نقاط بحرانی با الگوریتم غربالگری. این الگوریتم با بررسی شرایط نقاط بحرانی، تعدادی از آنها را به عنوان نقاط اصلی انتخاب می‌کند.
 - ۴- متصل کردن نقاط بحرانی غربال شده با الگوریتم مسیریاب.
- نتایج حاصل از تقریب حروف فارسی "س ح" با این روش و همچنین با استفاده تابع $\text{bwmorph}(f, \text{operation}, n)$ از جعبه ابزار مطلب با آرگومان های متفاوت در شکل ۴ مشاهده می‌شود.

مراجع

- [1] K. Selvakumar and B. Kumar Ray, *Survey on polygonal approximation techniques for digital planar curves*, J. Mob Commun, 1(2013), 59-69.
- [2] P. Bhowmick, A. Biswas and B. Bhattacharya, *Thinning-free polygonal approximation of thick digital curves using cellular envelope*, J. ELCVIA, 7(2008), 76-95.
- [3] A. Carmona-Poyato, F. J. Madrid-Cuevas, R. Medina-Carnicer and R. Muñoz-Salinas, *Polygonal approximation of digital planar curves through break point suppression*, J. Pattern Recogn, 43(2010), 14-25.

پست الکترونیکی: davodisvand@yahoo.com
پست الکترونیکی: tavakoli@mail.vru.ac.ir



گمنامی کوانتومی بر پایه مساله شام رمزنگاران

هادی فراهانی

دانشگاه شهید بهشتی، گروه علوم کامپیوتر

حسین ماهان*

دانشگاه شهید بهشتی، گروه علوم کامپیوتر

چکیده

در سال ۲۰۱۳، Shi و همکارانش دو پروتکل در زمینه گمنامی کوانتومی در حالت گیرنده-شناس و فرستنده-ناشناس با استفاده از ایده NESA ارائه کردند. در این مقاله پس از معرفی NESA و مساله شام رمزنگاران، گمنامی در رمزنگاری کوانتومی تعریف می‌گردد. سپس پروتکل‌های گمنامی گیرنده-شناس و فرستنده-ناشناس ارائه شده توسط Shi شرح داده شده و ایراداتی که بر این دو پروتکل وارد هستند بیان خواهند گردید.

واژه‌های کلیدی: گمنامی کوانتومی، شام رمزنگاران

۱ مقدمه

رمزنگاری کوانتومی انتقال ایمن اطلاعات خصوصی بر پایه قوانین مکانیک کوانتومی را ایجاد می‌کند. مسئله گمنامی به‌عنوان یکی از مسایل امنیتی، نقشی مهم در رای گمنام در انتخاب‌های الکترونیکی و ارسال ایمیل ناشناس ایفا می‌کند. Boykin یک قالب کلی برای ارتباط کوانتومی گمنام^۱ (AQC) براساس درهم‌تنیدگی^۲ چند فتون ارائه کرد [۱]. Bouda و Sprojar یک AQC در حالت گیرنده-شناس^۳ ارائه کردند [۳]. علاوه بر آن Brassard و همکارانش [۴]، ناامن بودن طرح Bouda را نشان دادند و یک AQC ایمن از لحاظ تئوری اطلاعاتی بدون ساخت حالات درهم‌تنیده قبلی پیشنهاد کردند. Wang و همکارانش [۵] یک AQC بر اساس تک فتون به جای استفاده از چندین فتون به‌طور ماکسیمال درهم‌تنیده^۴ ارائه نمودند. اخیراً دو مقاله توسط Shi و همکارانش [۶] و همچنین Q. Wang و همکارانش [۷] ارائه شده که هر دو از ایده انتقال فتون‌ها در حالت غیرماکسیمال درهم‌تنیده^۵ استفاده کرده‌اند. در مقاله Shi و همکارانش دو پروتکل ارائه شده که اولی در حالت گیرنده-شناس و دومی در حالت فرستنده-ناشناس است. گمنامی گیرنده-شناس بدان معناست که در گروهی متشکل از چند نفر یک نفر می‌خواهد یک بیت اطلاعات را برای فرد دیگری در گروه که هویت آن برای همه آشکار است ارسال کند به طوری که هیچ فردی در گروه متوجه هویت فرستنده پیام نشود و گمنامی در حالت فرستنده-ناشناس بدین معناست که فردی متعلق به یک گروه می‌خواهد یک بیت اطلاعات برای سایر اعضای گروه ارسال کند به طوری که هویت او برای هیچ فرد در گروه آشکار نشود.

مسئله گمنامی به‌وسیله مسئله شام رمزنگاران بیان می‌شود. فرض کنید گروهی از رمزنگاران برای خوردن شام در یک رستوران جمع شده‌اند، آنها از قبل با مهماندار هماهنگ کرده‌اند که هویت فرد پرداخت‌کننده را آشکار نکند، اما با این حال

* سخنران

^۱ Anonymous Quantum communication

^۲ Entanglement

^۳ public-receiver

^۴ Maximally-Entangled

^۵ non-Maximally-Entangled



رمزنگاران مشتاق اند بدانند که آیا یکی از بین خودشان هزینه شام را پرداخت کرده است یا یک فرد خارجی همچون کارول. برای مطالعه بیشتر به [۹] مراجعه نمایید) از آنجایی که مقاله Shi و همکارانش از مفهوم (NESA) ^۶ استفاده می کنند، لذا لازم است قبل از بیان پروتکل ابتدا به مفهوم و لزوم استفاده از (NESA) بپردازیم. Shimizu و همکارانش [۸] نشان دادند که کدگذاری فوق چگال ^۷ به دلیل استفاده از پایه های Bell $|\Phi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|11\rangle + |00\rangle)$ ، $|\Phi^-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|11\rangle - |00\rangle)$ ، $|\Psi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|10\rangle + |01\rangle)$ و $|\Psi^-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|10\rangle - |01\rangle)$ نامن است.

ماکسیمال بودن پایه های Bell منجر به این می شود که شنودگر همواره بتواند یک حالت را هنگامی که تنها به یکی از فتون های آن دسترسی دارد با عملگر چرخش اسپین به یک حالت دیگر عضو پایه تبدیل کند.

با استفاده از پایه های درهم تنیده غیر ماکسیمال $|\mu^2\rangle = \sin\theta|\Phi^+\rangle_{AB} + |\mu^1\rangle = \cos\theta|\Phi^+\rangle_{AB} - \sin\theta|\Phi^-\rangle_{AB}$ ، $|\mu^3\rangle = \cos\theta|\psi^+\rangle_{AB} - \sin\theta|\psi^-\rangle_{AB}$ ، $|\mu^4\rangle = \sin\theta|\psi^+\rangle_{AB} + \cos\theta|\psi^-\rangle_{AB}$ می توان یک پروتکل توزیع کلید کوانتومی ایمن بین آلیس و باب ارایه نمود. حالات در مجموعه های $\{\mu^1, \mu^2\}$ ، $\{\mu^3, \mu^4\}$ تنها به وسیله چرخاندن اسپین یک فتون، قابل تبدیل به یکدیگر نیستند اما μ^1, μ^3 یا μ^2, μ^4 با اعمال عملگر پائولی σ_x روی یک فتون قابل تبدیل به یکدیگر هستند.

علاوه بر آن نمی توان با چرخاندن اسپین یک فتون $|\Phi^+\rangle$ آن را به یکی از حالت های $|\mu^i\rangle$ تبدیل کرد. با این حال با استفاده از یک فتون اضافه در حالت $|\phi^1\rangle_x$ و اعمال عملگر درهم ساز $K_{B,x}$ روی فتون های B و x به حالت درهم تنیده غیر ماکسیمال، می توان به طور تصادفی به یکی از حالت های μ^1 یا μ^2 دست یافت:

$$I_A \otimes K_{B,x} |\Phi^+\rangle_{AB} |\phi^1\rangle_x = \frac{1}{\sqrt{2}} (|\Phi^+\rangle_{AB} |\phi^1\rangle_x + i |\Phi^-\rangle_{AB} |\phi^2\rangle_x) = \frac{1}{\sqrt{2}} (|\mu^1\rangle_{AB} |\varphi^1\rangle_x + |\mu^2\rangle_{AB} |\varphi^2\rangle_x)$$

که در آن $|\varphi^1\rangle = \cos\theta|\phi^1\rangle_x - i\sin\theta|\phi^2\rangle_x$ و $|\varphi^2\rangle = \sin\theta|\phi^1\rangle_x + i\cos\theta|\phi^2\rangle_x$

۲ پروتکل گمنامی در حالت گیرنده-شناس

پروتکل Shi در حالت گیرنده-شناس برای سه شرکت کننده آلیس و باب و کارول در نظر گرفته می شود. فرض کنید کارول گیرنده ی پیام و باب فرستنده باشد، با حفظ کلیات، پروتکل بدین شرح است:

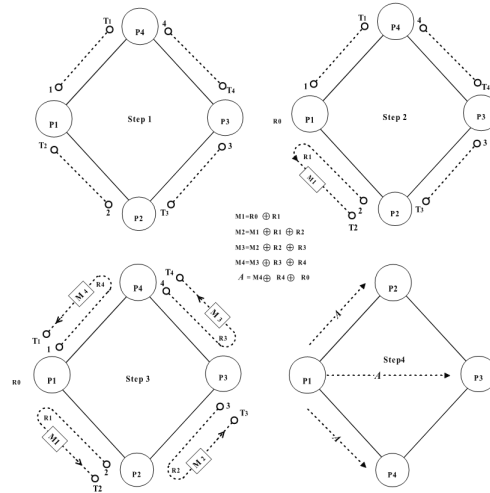
گام اول

آلیس و باب یک زوج EPR $|\Phi^+\rangle_{AB}$ تولید می کنند به طوری که فتون A در اختیار آلیس و فتون B در اختیار باب قرار می گیرد، باب عملگر درهم ساز $K_{B,x}$ را روی فتون های B و x اعمال می کند. x یک فتون اضافی در مجموعه $\{|\phi^1\rangle_x, |\phi^2\rangle_x\}$ است. سپس باب عمل اندازه گیری را روی فتون x در پایه های $\{|\varphi^1\rangle_x, |\varphi^2\rangle_x\}$ انجام می دهد. با توجه به خروجی آن $|\varphi^1\rangle_x / |\varphi^2\rangle_x$ قرار می دهد $R_{ab} = 1/0$ سپس باب فتون B را به آلیس باز می فرستد. آلیس با دریافت فتون B عمل NESA روی فتون های A و B در پایه های $\{|\mu^1\rangle, |\mu^2\rangle\}$ انجام می دهد و با توجه به نتیجه $|\mu^1\rangle / |\mu^2\rangle$ قرار می دهد $R_{ab} = 1/0$

گام دوم

کارول دو حالت $|\Phi^+\rangle_{c_a, T_a}$ ، $|\Phi^+\rangle_{c_b, T_b}$ تولید نموده و آن ها را بین آلیس و باب توزیع می کند به طوری که فتون های c_a, c_b رانزد خود نگه می دارد و T_a را برای آلیس و T_b را برای باب ارسال می کند. آلیس عملگر درهم ساز $K_{A,x}$ را روی فتون های A, x اعمال کرده و سپس فتون x را در پایه های $\{|\varphi^1\rangle_x, |\varphi^2\rangle_x\}$ اندازه گیری می کند. در ادامه با توجه به نتیجه آن $R_{ac} = 1/0$ ، قرار می دهد $R_{ac} = 1/0$.

سپس آلیس مقدار $M_{ac} = R_{ab} \oplus R_{ac}$ را محاسبه می کند و با توجه به مقدار M_{ac} ، عمل σ_x / I را روی فتون T_a



شکل ۱: پروتکل گمنامی فرستنده-ناشناس

اعمال نموده و آن را برای کارول ارسال می کند. توجه شود که اگر $M_{ac} = 0$ در این صورت اعمال عملگر σ_x روی T_a باعث می شود که حالت $|\mu^1\rangle/|\mu^2\rangle$ به حالت $|\mu^3\rangle/|\mu^4\rangle$ تبدیل شود، اما اگر $M_{ac} = 1$ در این صورت عملگر I هیچ تغییری را روی T_a ایجاد نمی کند. باب نیز با دریافت فتون T_b عمل درهمساز K_{Bx} را روی فتون B و فتون اضافه شده x اعمال می کند و سپس فتون x را در پایه های $\{|\varphi^1\rangle_x, |\varphi^2\rangle_x\}$ اندازه گیری می کند و مشابه فوق مقدار R_{bc} را تولید می کند. اگر باب بخواهد بیت ۰ را برای کارول ارسال کند، او مقدار $M_{ac} = R_{ab} \oplus R_{ac}$ را محاسبه می کند و در غیر این صورت، برای ارسال بیت ۱ مقدار $M_{ac} = \overline{R_{ab} \oplus R_{ac}}$ را محاسبه می کند. در پایان با توجه به مقدار $M_{bc} = 0/1$ عمل $M_{bc} = \sigma_x/I$ را روی T_b اعمال کرده و حاصل آن را برای کارول باز می فرستد.

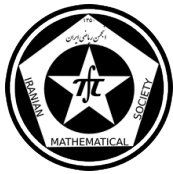
گام سوم

پس از آنکه کارول T_a, T_b را دریافت کرد، عمل NESa را روی زوج فتون های $(T_b, c_b), (T_a, c_a)$ انجام می دهد و مقدار $A = R_{ab} \oplus R_{bc} \oplus M_{ac} \oplus M_{bc}$ را محاسبه می کند. کارول نمی داند که فرستنده آلیس است یا باب. به منظور یافتن روشی برای بهبود پروتکل ارائه شده، آلیس و باب ابتدا تعداد زیادی زوج فتون $|\Phi^+\rangle_{AB}$ تولید می کنند و حضور شنودگر را بررسی می کنند. اگر شنودگر بخواهد با استفاده از حمله دریافت و پاسخ A کانال درهم تنیده ارتباطی آلیس و باب را شنود کند، با احتمال $\frac{1}{4}$ در ارسال حالت دریافتی ناکام مانده و حضور شنودگر برای آلیس و باب آشکار خواهد شد. یکی از ایراداتی که به این پروتکل گرفته می شود آن است که از آنجایی که آلیس فرستنده نیست، متوجه خواهد شد که باب فرستنده است و هویت فرستنده برای آلیس آشکار می گردد. بنابراین این پروتکل برای گروهی متشکل از سه نفر گمنامی را حفظ نمی کند و بایستی تعداد شرکت کنندگان را بیش از سه نفر در نظر بگیریم.

۳ پروتکل گمنامی در حالت فرستنده-ناشناس

فرض کنید $p = \{P_k : 1 \leq k \leq n\}$ مجموعه ای از n شرکت کننده در یک دستگاه کوانتومی باشد. شرکت کنندگان را در یک گراف دوری G با n راس نشان می دهیم به طوری که p_n آخرین نفر و P_1 مجاور P_n است. با حفظ کلیات این پروتکل را برای ۴ شرکت کننده بیان می کنیم.

گام اول



هر شرکت کننده $i \in \{1, 2, 3, 4\}, p_i$ یک زوج EPR در حالت $|\Phi^+\rangle_{i, T_i}$ تولید می‌کند به طوری که T_i را برای شرکت کننده P_{i-1} ارسال می‌کند. T_1 در اختیار P_n قرار می‌گیرد.

گام دوم

P_1 یک عمل درهمساز $K_{T_1, x}$ روی فتون‌های T_1, x که در آن x یک فتون اضافه شده است، اعمال می‌کند. سپس فتون x را در پایه‌های $\{|\varphi^1\rangle_x, |\varphi^2\rangle_x\}$ اندازه‌گیری کرده تا مقدار تصادفی R_1 را بدست آورد. سپس مقدار تصادفی $R_0 \in \{0, 1\}$ را تولید کرده و مقدار $M_1 = R_0 \oplus R_1$ را محاسبه می‌کند. در پایان وابسته به مقدار $0/1$ عمل $M_1 = 0/I$ عمل σ_x/I را روی فتون T_1 اعمال کرده و حاصل را برای P_2 ارسال می‌نماید.

گام سوم

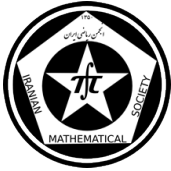
به ازای هر $i \geq 2$ شرکت کننده P_i برای تولید M_i مراحل زیر را اجرا می‌کنند پس از دریافت فتون T_i از P_{i-1} عمل NESa را روی i امین زوج فتون‌ها انجام می‌دهد و حاصل را به شکل زیر محاسبه می‌کند $(1, 1) \rightarrow (M_{i-1}, R_{i-1}) = (1, 1), |\mu^1\rangle \rightarrow (M_{i-1}, R_{i-1}) = (0, 0)$ و $|\mu^3\rangle \rightarrow (M_{i-1}, R_{i-1}) = (0, 1), |\mu^2\rangle \rightarrow (M_{i-1}, R_{i-1}) = (1, 0)$ سپس عمل درهمساز $K_{T_{i+1}, x}$ را روی فتون‌های T_{i+1}, x اعمال می‌کند و فتون اضافه شده x را در پایه‌های $\{|\varphi^1\rangle_x, |\varphi^2\rangle_x\}$ اندازه‌گیری کرده تا عدد تصادفی R_i را تولید کند. در ادامه P_i مقدار $M_i = M_{i-1} \oplus R_{i-1} \oplus R_i$ را برای ارسال بیت 0 و $M_i = M_{i-1} \oplus R_{i-1} \oplus R_i$ را برای ارسال بیت 1 محاسبه می‌کند. سرانجام P_i بسته به مقدار M_i عمل σ_x/I را روی فتون T_{i+1} اعمال کرده و حاصل را برای P_{i+1} ارسال می‌کند. پردازش تا زمانی که P_1 فتون T_1 را از P_n دریافت نکرده ادامه می‌یابد.

گام چهارم

P_1 مقدار $A = M_n \oplus R_n \oplus R_0$ را محاسبه کرده و حاصل را از طریق کانال کلاسیک برای همه ارسال می‌کند. در اینصورت تمامی شرکت‌کنندگان حاصل A را به شکل گمنام دریافت می‌کنند.

مراجع

- [1] P. O. Boykin, V. Roychowdhury, D. Cline, *Information security and quantum mechanics: security of quantum protocols*, Ph.D. Thesis, University of California, Los Angeles, 2002
- [2] M. Christandl, S. Wehner *Quantum anonymous transmissions*, Asiacrypt 2005, pp. 217-235. Springer, Berlin, 2005
- [3] J. Bouda, J. Sprojcar, *Anonymous transmission of quantum information*, The First International Conference on Quantum, Nano, and Micro Technologies, pp. 12-17. IEEE Press, New York, 2007
- [4] G. Brassard, A. Broadbent, J. Fitzsimons, *Anonymous quantum communication*, Asiacrypt 2007, pp. 460-473. Springer, Berlin, 2007
- [5] T. Y. Wang, Q. Y. Wen, F. C. Zhu, *Quantum communications with an anonymous receiver*, Sci. China. Phys. Mech. Astron. 53(12), 2010
- [6] R. H. Shi, Q. Su, Y. Guo, D. Z. Huang, *The dining cryptographer problem-based anonymous quantum communication via non-maximally entanglement state analysis*, Int. J. Theor. Phys. 52, Springer Science, Business Media, 2012
- [7] Q. L. Wang, k. J. Zhang, *Security Analysis and Improvement of the Dining Cryptographer Problem-based Anonymous Quantum Communication via Non-maximally Entanglement State Analysis*, Int. J. Theor. Phys. 54, Springer Science, Business Media New York, 2014
- [8] K. Shimizu, K. Tamaki, H. Fukasaka, *Two-way protocols for quantum cryptography with a nonmaximally entangled qubit pair*, Phys. Rev. A 022323, 80, 2009
- [9] D. Chaum, *The Dining Cryptographers Problem: Unconditional Sender and Recipient Untraceability*, International Association for Cryptologic Research, 65-75, 1998



محور میانی در فضای هندلولی

علی محدث
دانشگاه صنعتی امیرکبیر

مرتضی میرمحمدرضائی
دانشگاه صنعتی امیرکبیر

کژال عیب پوش
دانشگاه صنعتی امیرکبیر

چکیده

در این مقاله یک الگوریتم برای بدست آوردن محور میانی^۱ یک منیفلد هندلولی، به عنوان یک زیر منیفلد با کسر بعد یک ارائه کرده ایم. این الگوریتم تعمیمی از الگوریتم‌های مطرح در هندسه اقلیدسی است. در منیفلد هندلولی با انحنا ثابت ۱- تکنیک‌های محاسبات اشیاء هندسی ویژگی‌های خاصی دارد که متمایز از تکنیک‌های مطرح در هندسه اقلیدسی با انحنا صفر است. الگوریتم ارائه شده با توجه به این ویژگی‌ها طراحی شده است.

واژه‌های کلیدی: محور میانی، فضای هندلولی، دیاگرام ورونوی، دیسک پونکاره، دیسک کلاین

۱ مقدمه

محور میانی یک منیفلد، مکان هندسی نقاطی از آن است که بیشتر از یک ژئودزیک تا مرز منیفلد دارد و نقاط مرزی آن نسبت به این محور خاصیت تقارنی با توجه به متر تعریف شده دارند. محور میانی اولین بار توسط Blum در سال ۱۹۶۷ میلادی به عنوان اسکلت توپولوژی معرفی شد، که برای تشخیص شکل بیولوژیکی یک ابزار می باشد. چون محور میانی دارای اطلاعات توپولوژیک منیفلد می باشد، کاربردهای متنوع و گسترده‌ای برای آن وجود دارد. به عنوان مثال، تولید به کمک کامپیوتر مثل CNC، فشرده‌سازی شکل، انیمیشن و ردیابی، طراحی مسیر حرکت ربات و... به کمک آن انجام می‌گیرد. کارهای Blum در اواخر دهه شصت سبب شد محور میانی موضوع تحقیق دانشمندان زیادی در هندسه اقلیدسی شود و مطالعات زیادی برای توسعه کارآمد روش‌های محاسباتی برای بدست آوردن محور میانی در فضای اقلیدسی ۲ و ۳ بعدی انجام شده است. یکی از روش‌های محاسبه محور میانی در فضای اقلیدسی، استفاده از زیرگرافی از دیاگرام ورونوی زیر مجموعه‌ای از نقاط مرزی می باشد. برای اطلاعات بیشتر به مرجع [۱] مراجعه شود.

دیاگرام ورونوی در ۳ مدل هندسه هندلولی ارائه شده است که بین هر جفت از این مدل‌ها نداشت ایزومتريک وجود دارد. تاریخچه مختصری از الگوریتم‌های ارائه شده برای دیاگرام ورونوی در فضای هندلولی را می توان به صورت ذیل بیان کرد: دیاگرام ورونوی هندلولی (مدل نیم صفحه بالایی) در سال ۱۹۹۶ توسط Onishi و Takayama با ارائه الگوریتم استفاده از مثلث‌بندی دلونی و الگوریتم افزایشی مطرح شده است. [۲] سپس در سال ۲۰۱۰ دیاگرام ورونوی ۳ بعدی در همین مدل توسط نیلفروشان و میرمحمدرضائی ارائه شده است.

دیاگرام ورونوی هندلولی (مدل دیسک پونکاره) در سال ۲۰۰۶ توسط نیلفروشان و محدث با دو روش، الگوریتم افزایشی و الگوریتم استفاده از توابع خوش تعریف ارائه شده است. [۳]

دیاگرام ورونوی هندلولی (مدل دیسک کلاین) در سال ۲۰۰۹ توسط Nock و Nielsen که با به کارگیری power diagram در فضای اقلیدسی محاسبه شده است. [۴]

^۱medial axis



۱.۱ پیشنیازها

تعریف ۱.۱. محور میانی $MA(X)$ از فضای متریک (X, d) عبارت است از نقاطی مانند $p \in X$ بطوریکه یک گوی ماکزیمال $B(p, r) \subset X$, $r > 0$, وجود داشته باشد $B(p, r) = \{q \in X, d(p, q) \leq r\}$ ماکزیمال نامیده می شود هرگاه $q \in X, \tilde{r} > 0$ وجود نداشته باشد به طوریکه: $B(p, r) \subsetneq B(q, \tilde{r}) \subset X$.

ملاحظه ۲.۱. فرض کنید (X, g) یک منیفلد ریمانی کامل باشد در این صورت هر دو نقطه آن توسط یک ژئودزیک قطعه به قطعه با کوتاهترین طول به هم وصل می شوند (قضیه هاپف-رینو). طول این ژئودزیک را به عنوان یک متر d روی منیفلد ریمانی می توان تعریف کرد. (X, g) را کامل گوئیم اگر و تنها اگر (X, d) کامل باشد. از آنجا که هر منیفلد کامل، پیوسته، همبند ساده با انحنا ثابت -1 با فضای هذلولوی ایزومتریک می باشد. پس وجود ژئودزیک بین هر دو نقطه در فضای هذلولوی ممکن می باشد. پس در نتیجه ما در فضای هذلولوی می توانیم برای منیفلد معرفی شده محور میانی بیابیم.

تعریف ۳.۱. هر زیر مجموعه متناهی E از نقاط مرزی منیفلد مرزدار (X, g) یک نمونه برداری مرزی گوئیم و چگالی نمونه برداری E به صورت زیر تعریف می شود:

$$w^{-1} = \max_{x \in \partial X} d(x, E)$$

وقتی چگالی نمونه E به سمت بینهایت میل می کند و یا به عبارت دیگر وقتی نقاط E افزایش می یابد آنگاه E به مرز منیفلد همگرا می شود (که d متر بدست آمده از متریک ریمانی g است).

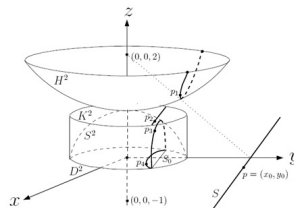
تعریف ۴.۱. نمونه برداری مرزی E را یک ε -نمونه برداری مرزی گوئیم هرگاه فاصله بین نقاط E و نقاط مرزی منیفلد (X, g) کمتر از ε باشد.

$$d(x, E) < \varepsilon$$

$$x \in \partial X$$

تعریف ۵.۱. فرض کنید $P = \{p_1, p_2, \dots, p_n\}$ مجموعه ای از نقاط که سایت نامیده می شوند در صفحه (یا هر فضای دیگر) داده شده باشد. مجموعه نقاط q از صفحه که به سایت p_i از P نزدیکتر هستند را با $V(p_i)$ نمایش داده و ناحیه ورونوی می نامیم. یعنی $\{q | d(q, p_i) < d(p_j, q), \forall i \neq j\}$ که d متر فضای تعریف شده است.

تعریف ۶.۱. فضای هذلولوی، فضایی با انحنا ثابت منفی می باشد و در این هندسه چندین مدل مختلف وجود دارد، که همه ی آنها هم ارز هستند اما دیدهای مختلفی را فراهم می کنند. در این قسمت به معرفی سه مدل می پردازیم:



شکل ۱: تصویری بین دیسک کلاین و R^2



مدل دیسک پونکاره: مدل دیسک پونکاره یک مدل از هندسه هذلولوی با خمیدگی منفی است. این مدل توسط مجموعه نقاط $\{ (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d \mid x_1^2 + \dots + x_d^2 < 1 \}$ و متر هذلولوی زیر تعریف می‌شود:

$$\frac{dx_1^2 + \dots + dx_d^2}{(1 - x_1^2 - \dots - x_d^2)^2}$$

مدل دیسک کلاین: این مدل توسط مجموعه نقاط $D_K^d = \{ (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d \mid x_1^2 + \dots + x_d^2 < 1 \}$ و متر هذلولوی زیر تعریف می‌شود:

$$\frac{dx_1^2 + \dots + dx_d^2}{1 - x_1^2 - \dots - x_d^2} + \frac{(x_1 dx_1 + \dots + x_d dx_d)^2}{(1 - x_1^2 - \dots - x_d^2)^2}$$

مدل نیم صفحه بالایی: این مدل توسط مجموعه نقاط $H^d = \{ (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d \mid x_d^2 < 1 \}$ و متر هذلولوی زیر تعریف می‌شود:

$$\frac{dx_1^2 + \dots + dx_d^2}{x_d^2}$$

۲ کار اصلی

در این قسمت نخست به ارائه الگوریتم محاسبه محور میانی هذلولوی منیفلد X در مدل دیسک پونکاره و مدل نیم صفحه بالایی و سپس در مدل دیسک کلاین می‌پردازیم. ما در الگوریتم محور میانی در دیسک پونکاره، ابتدا مرز منیفلد هموار X را به عنوان ورودی در نظر می‌گیریم و در گام بعدی به محاسبه ε -نمونه برداری مرزی E اقدام و سپس دیاگرام ورونوی هذلولوی را در دیسک پونکاره به طور افزایشی برای نقاط متناهی E رسم می‌کنیم. در گام پایانی، رئوس و یال‌های ورونوی هذلولوی داخل مرزی را به عنوان محور میانی هذلولوی تقریبی X ارائه می‌کنیم. اگر $\varepsilon > 0$ به صفر میل کند، بدیهی است که محور میانی هذلولوی تقریبی X به محور میانی هذلولوی دقیق X میل می‌کند.

قضیه ۱.۱.۲. زمان ساخت دیاگرام ورونوی n نقطه در دیسک پونکاره $O(n^2)$ به طور افزایشی می‌باشد. [۳]

نتیجه ۲.۰.۲. با توجه به قضیه ۱.۰.۲ زمان محاسبه محور میانی در دیسک پونکاره 2 بعدی $O(n^2)$ است. [۳]

با استفاده از الگوریتم مشابه می‌توان محور میانی منیفلد X را در مدل نیم صفحه بالایی بدست آورد. در ادامه علت استفاده از دیاگرام ورونوی هذلولوی برای محاسبه محور میانی منیفلد X در دیسک پونکاره را با توجه به لم‌های زیر بیان خواهد شد.

لم ۳.۰.۲. عمود منصف دو نقطه دلخواه از D ژئودزیکی از D است. [۳]

تعریف ۴.۰.۲. دایره هذلولوی: $C = \{ y \in D \mid d_D(x, y) = s \}$

لم ۵.۰.۲. هر دایره هذلولوی یک دایره اقلیدسی است و بالعکس. (با مرکز و شعاع متفاوت) [۳]

تعریف ۶.۰.۲. مکان هندسی تمام نقاطی از X که از دو نقطه $x_1, x_2 \in E \subset \delta X$ به یک فاصله هذلولوی هستند را عمودمنصف x_1, x_2 می‌گوییم.



در حالت کلی، هر یال ورونوی هذلولوی بخشی از یک عمود منصف می‌باشد. پس می‌توان نتیجه گرفت که برای هر نقطه c روی یال، حداقل دو نقطه در E وجود دارد که بوسیله ژئودزیک با فاصله یکسان به آنها متصل می‌شود. بنابراین می‌توان برای c گوی ماکزیمال هذلولوی رسم کرد که حداقل از دو نقطه از E می‌گذرد و بنابراین می‌توانیم رئوس و یال‌های دیاگرام ورونوی هذلولوی داخل مرزی را به عنوان محور میانی در دیسک پونکاره در نظر بگیریم. حال به ارائه الگوریتم محور میانی در فضای هذلولوی (مدل دیسک کلاین) در ذیل می‌پردازیم. که زمان محاسبه آن همانند زمان محاسبه دیاگرام ورونوی در دیسک کلاین می‌باشد و برابر است با: [۴]

$$O(n \log n + n^{\lceil \frac{d}{2} \rceil})$$

• ورودی: منیفلد هموار X و مرز آن δX

• گام ۱: ε -نمونه‌برداری مرزی $E = \{p_1, \dots, p_n\}$ از δX

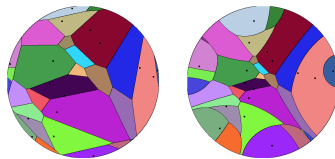
• گام ۲: محاسبه نقاط وزن‌دار به صورت دوایری با مرکز c_i و شعاع r_i برای نقاط مجموعه $E = \{p_1, \dots, p_n\}$

$$r_i = \frac{(\|p_i\|)^2}{4(1 - (\|p_i\|)^2)} - \frac{1}{\sqrt{1 - (\|p_i\|)^2}}, \quad c_i = \frac{p_i}{2\sqrt{1 - (\|p_i\|)^2}}$$

• گام ۳: محاسبه diagram power برای نقاط وزن‌دار در فضای اقلیدسی (که همان دیاگرام ورونوی هذلولوی نقاط مجموعه E در دیسک کلاین است).

• گام ۴: حفظ رئوس و یال‌های دیاگرام ورونوی هذلولوی که کاملاً در داخل δX و حذف بخش‌های خارج از مرز δX

• خروجی: زیرگراف باقیمانده از دیاگرام ورونوی هذلولوی نقاط E به عنوان محور میانی هذلولوی X در دیسک کلاین

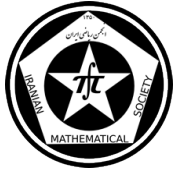


(آ) دیسک پونکاره (ب) دیسک کلاین

شکل ۲: دیاگرام ورونوی

مراجع

- [1] D. Attali, A. Montanvert, *Computing and simplifying 2D and 3D continuous skeletons*, Computer Vision and Image Understanding 67 261–273, 1997.
- [2] K. Onishi, N. Takayama, *Construction of Voronoi diagram on the upper halfplane*, IEICE Transactions 79-A(4) 533-539, 1996.
- [3] Z. Nilforoushan, A. Mohades, *Hyperbolic voronoi diagram*, ICCSA (5), 735–742, 2006.
- [4] F. Nielsen, R. Nock, *Hyperbolic Voronoi diagrams made easy*, ACM Computing Research Repository abs/0903.3287, 2009.



مرتب‌سازی زوج نقاط بر مبنای فاصله آن‌ها

محمد فرشی* ابوالفضل پورعیدی

ذریه سلطانی

آزمایشگاه تحقیقاتی الگوریتم‌های ترکیبیاتی و هندسی، گروه علوم کامپیوتر، دانشکده ریاضی، دانشگاه یزد

چکیده

مرتب‌سازی داده‌ها یکی از مسائل اساسی و اولیه در علوم کامپیوتر است که مطالعه وسیعی روی آن انجام شده است و مسائل بسیاری از آن استفاده می‌کنند. در بسیاری از مسائل که روی داده‌های هندسی نظیر مسائل روی نقاط و خطوط در صفحه یا فضای اقلیدسی با ابعاد بالاتر کار می‌کنند، مساله مرتب‌سازی زوج نقاط بر مبنای فاصله بین آنها مطرح می‌شود. با به کار بردن الگوریتم‌های معمول برای مرتب‌سازی داده‌ها، می‌توان برای هر n نقطه، $\binom{n}{2}$ زوج نقطه را بر مبنای فاصله بین آنها در زمان $\mathcal{O}(n^2 \log n)$ مرتب کرد. البته برای $\Theta(n^2)$ داده مستقل، این مساله راه حل سریع‌تری ندارد ولی با توجه به وابستگی اعداد در این حالت، موضوع امکان حل این مساله در زمان کمتر و یا داشتن همین کران پایین جالب به نظر می‌رسد. در این مقاله به این موضوع می‌پردازیم که آیا می‌توان این مساله را در زمان کمتری حل کرد یا این مساله دارای کران پایین $\Omega(n^2 \log n)$ است.

واژه‌های کلیدی: مرتب‌سازی، فاصله‌ها، فضای اقلیدسی، کران پایین، پیچیدگی.

Mathematics Subject Classification [2010]: 68Q25, 68Q17

۱ مقدمه

مساله مرتب‌سازی داده‌ها یکی از مسائل اساسی مطرح شده در علوم کامپیوتر است که نتایج کاملی از پیچیدگی انجام آن و همچنین الگوریتم‌های بهینه متعددی برای حل آن ارائه شده است. این مساله، در حل سایر مسائل نیز استفاده فراوانی دارد و هر نتیجه در این مساله مستقیماً به سایر مسائلی که از آن استفاده می‌کنند تاثیر می‌گذارد. مسائل پایه‌ای مانند جستجو، یافتن نزدیک‌ترین جفت نقاط، ساخت درخت پوشای کمینه، ساخت اشکال محدب بهینه (شامل تمام نقاط با کمترین مساحت)، انتخاب اعداد با مرتبه مشخص از نظر بزرگی در یک مجموعه (مثلاً چهارمین بزرگترین عدد) که خود در کاربردهای بزرگتری همچون پیاده‌سازی موتورهای جستجوگر، ایجاد نقشه‌ی راه، کنترل ترافیک هوایی، گرافیک کامپیوتری، رباتیک مورد استفاده قرار می‌گیرند، همگی از الگوریتم‌های مرتب‌سازی اعداد استفاده می‌نمایند.

همان‌طور که می‌دانیم در حالت کلی تمام الگوریتم‌های (مقایسه محور) مطرح شده برای مرتب‌سازی $\Theta(n)$ عدد، و دارای کران پایین $\Omega(n \log n)$ هستند و از طرفی پیچیدگی زمانی بسیاری از الگوریتم‌هایی که خود در زمانی کمتر از این کران انجام می‌شوند به دلیل نیاز به مرتب‌سازی داده‌هایشان بر اساس این کران تعیین می‌شود. از این جمله می‌توان به الگوریتم حریصانه برای ساخت پوشش‌های هندسی اشاره کرد [۳]. نکته قابل تأمل در تعدادی از این مسائل این است که آن‌ها به مرتب‌سازی اعدادی نیاز دارند که این اعداد همان فاصله‌های بین جفت نقاط در صفحه هستند. لذا، کران پایین ارائه شده برای مساله مرتب‌سازی، برای مرتب‌سازی فاصله‌ها قابل استفاده نیست. بنابراین در ادامه مساله جدیدی مطرح می‌شود که در این مقاله

* سخنران



برای یافتن راه حلی برای آن تلاش شده است. البته، در این مقاله به این سوال، پاسخی داده نخواهد شد، بلکه روشی برای بررسی مساله ارائه می‌شود که امید است با تکمیل آن، بتوان این مساله را حل نمود.

تعریف مسئله: مجموعه $S = \{p_1, p_2, \dots, p_n\} \subset \mathbb{R}^d$ شامل n نقطه داده شده است. هدف مرتب کردن تمام زوج نقاط (p_i, p_j) از نقاط S به ترتیب صعودی بر مبنای فاصله بین نقاط است.

با توجه به الگوریتم‌های موجود به راحتی می‌توان این زوج‌ها را در زمان $O(n^2 \log n)$ مرتب کرد (تعداد زوج نقاط $O(n^2)$ است). البته در حالت کلی نیز مرتب‌سازی $O(n^2)$ عدد دارای کران پایین $\Omega(n^2 \log n)$ است اما در این مساله، اعداد ورودی دارای این خاصیت اضافی هستند که هر کدام متناظر با فاصله بین دو نقطه در \mathbb{R}^d هستند. سوال این است که آیا در این مساله می‌توان زوج نقاط را در زمان $o(n^2 \log n)$ مرتب کرد یا این مساله نیز دارای کران پایین مساله مرتب‌سازی است؟

در این مقاله، این مساله را در ساده‌ترین حالت، یعنی وقتی نقاط از فضای \mathbb{R} انتخاب شده باشند، بررسی می‌شود.

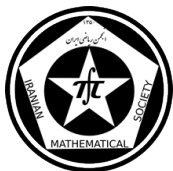
۲ درخت تصمیم مرتب‌سازی فاصله‌ها

برای یافتن کران پایین زمان مرتب‌سازی $\binom{n}{2}$ فاصله متمایز، یک روش، مشابه روش ارائه شده برای یافتن کران پایین برای مساله مرتب‌سازی n نقطه است (فصل هشت از کتاب [۱] را ببینید). در این روش، تعداد کل جایگشت‌های ممکن برای مرتب‌سازی $\binom{n}{2}$ فاصله تولید شده توسط n نقطه روی خط حقیقی را محاسبه و سپس روی آنها یک درخت تصمیم می‌سازیم که عمق این درخت تصمیم، کران پایین مساله را مشخص می‌کند. مشکل اساسی در ساخت این درخت تصمیم این است که با توجه به وابستگی اعداد حاصل از فاصله بین زوج نقاط، بسیاری از مقایسه‌ها که در داده‌های مستقل مورد نیاز است، در این حالت مورد نیاز نیست. این عدم نیاز، در صورتی که به تعداد زیادی مقایسه برسد، می‌تواند این مساله را به یک مساله قابل حل در زمان $O(n^2)$ تبدیل کند و در غیر این صورت، کران پایین $\Omega(n^2 \log n)$ را برای این مساله ثابت کند.

۱.۲ ساخت درخت تصمیم

در ساختن یک درخت تصمیم برای مرتب‌سازی n عدد، عملاً به درختی می‌رسیم که هر برگ آن متناظر با جایگشتی از اعداد ورودی است که با آن جایگشت، اعداد ورودی مرتب هستند. در صورت مستقل بودن اعداد، هر جایگشت از اعداد ورودی در یک برگ درخت تصمیم باید ظاهر شود. این موضوع در مرتب‌سازی فاصله‌ها متفاوت است زیرا بین فاصله‌ها وابستگی وجود دارد و ممکن است برخی از جایگشت‌های $\binom{n}{2}$ ، اصلاً اتفاق نیفتد و لذا این جایگشت‌ها لازم نیست در برگ‌های درخت تصمیم ظاهر شود. در این بخش به محدود کردن این جایگشت‌ها می‌پردازیم.

برای ساخت این درخت ابتدا لازم است ماتریس فاصله‌های بین نقاط و خواص این ماتریس بیان شوند. این ماتریس به ما کمک می‌کند تا از مقایسه‌های غیرضروری هنگام مرتب‌سازی فاصله‌ها اجتناب کنیم و تنها مقایسه‌هایی که نیاز هستند، انجام شود. فرض کنید همان‌طور که قبلاً بیان شد، n نقطه p_1, p_2, \dots, p_n به ترتیب از چپ به راست روی یک خط دلخواه داریم. به وضوح به ازای هر i ، فاصله p_i تا نقاط بعد از آن به همان ترتیب قرار گرفتن نقاط بعد از p_i است. به عبارت دیگر، به ازای هر i داریم: $|p_i p_{i+1}| < |p_i p_{i+2}| < \dots < |p_i p_n|$. ماتریس فاصله‌ی $D = (d_{i,j})_{n \times n}$ شامل فاصله‌ی بین تمام زوج نقاط $d_{i,j} = |p_i p_j|$ تعریف می‌شود. این ماتریس به وضوح نسبت به قطر اصلی متقارن است و تمام درایه‌های قطر اصلی صفر است. لذا فقط مرتب‌سازی عناصر بالای قطر اصلی ماتریس D مورد نظر است و از این به بعد تنها این عناصر را در نظر گرفته و مورد بحث قرار می‌دهیم. با توجه به این که نقاط روی خط قرار دارند، ماتریس D دارای خواص زیر است: اولاً عناصر هر سطر در حرکت از سمت چپ به سمت راست صعودی هستند و ثانیاً عناصر هر ستون از بالا به پایین نزولی هستند.



لذا در مرتب‌سازی، نیاز به بررسی زوج نقاطی که ترتیب آنها بر این مبنا مشخص است، نیست. هرچند در قسمت ۳ خواهیم دید که بخش زیادی از مقایسه‌های غیرضروری را این خاصیت صدق می‌کند ولی همه آنها در این خاصیت صدق نمی‌کنند.

با توجه به خاصیت اول ماتریس D ، کوچک‌ترین درایه ماتریس، یک درایه از عناصر روی قطر بلافاصله بعد از قطر اصلی ماتریس است. نکته بسیار مهم این است که با توجه به دو خاصیت ماتریس، هر درایه در صورتی می‌تواند به عنوان کوچک‌ترین درایه بعدی در مرتب‌سازی صعودی فاصله‌ها انتخاب شود که در حال حاضر درایه انتخاب نشده‌ای در سمت چپ و در پایین آن درایه نباشد.

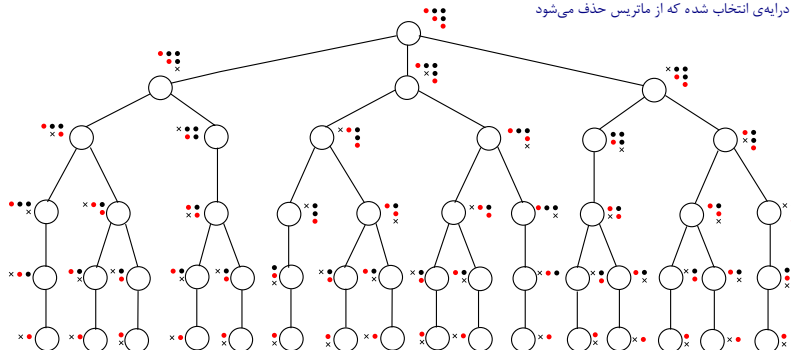
لذا در هر مرحله، عنصری می‌تواند به عنوان کوچک‌ترین بعدی انتخاب شود که سمت چپ و پایین آن خالی باشد، یعنی قبلاً در روند مرتب‌سازی برداشته شده باشند. پس برای انتخاب کوچک‌ترین عنصر (عنصر اول لیست مرتب شده) $n - 1$ انتخاب داریم. پس از انتخاب آن برای کوچک‌ترین بعدی (عنصر دوم لیست مرتب شده) بسته به اینکه عنصر دوم در کجاست، سطر مجاور به سطر عنصر اول یا سطر غیر مجاور به آن، به ترتیب $n - 1$ یا $n - 2$ انتخاب خواهیم داشت.

ما این روند انتخاب و تعداد امکان‌های ممکن برای انتخاب عناصر را در قالب ساختار درخت تصمیمی که شرح داده خواهد شد بیان می‌کنیم. مشابه روش اثبات کران پایین برای زمان اجرای مساله مرتب‌سازی اعداد، درخت تصمیم را متناظر با هر شکل اجرای الگوریتم تشکیل می‌دهیم. برگ‌های درخت، متناظر با تمام جایگشت‌هایی است که ممکن است در مرتب‌سازی فاصله‌ها رخ دهد. بوضوح، تمام جایگشت‌های روی $d_{i,j}$ ها معتبر نیست. به عنوان مثال جایگشتی که $d_{1,3}$ قبل از $d_{1,2}$ قرار گیرد اتفاق نمی‌افتد.

بر مبنای نکته کلیدی بیان شده در بالا، درخت به صورت زیر ساخته می‌شود:

در ریشه، باید کوتاه‌ترین فاصله (کوچک‌ترین درایه ماتریس) قرار گیرد. همانطور که دیدیم این عنصر می‌تواند هر درایه بلافاصله بعد از قطر اصلی ماتریس D باشد. فرض کنید امکان انتخاب عناصر روی این قطر از بالا به پایین به ترتیب به فرزندان ریشه از سمت راست به چپ نظیر شوند. لذا درجه ریشه $n - 1$ است. این درخت $(n - 1) \times n$ سطح دارد که در هر سطح یک عنصر لیست مرتب شده مشخص می‌شود: در سطح i ام درخت، i امین کوچک‌ترین عنصر ماتریس مشخص شده و از ماتریس حذف شده به لیست مرتب شده اضافه می‌شود. این درخت برای ۴ نقطه در روی خط و تمام جایگشت‌های ممکن برای مرتب‌سازی صعودی ۶ فاصله متمایز حاصل از این چهار نقطه در شکل ۱ شده است: پس از معرفی این درخت، که

- درایه‌ی ماتریس
- درایه‌ای که می‌تواند به عنوان عنصر بعدی انتخاب شود
- درایه‌ی انتخاب شده که از ماتریس حذف می‌شود

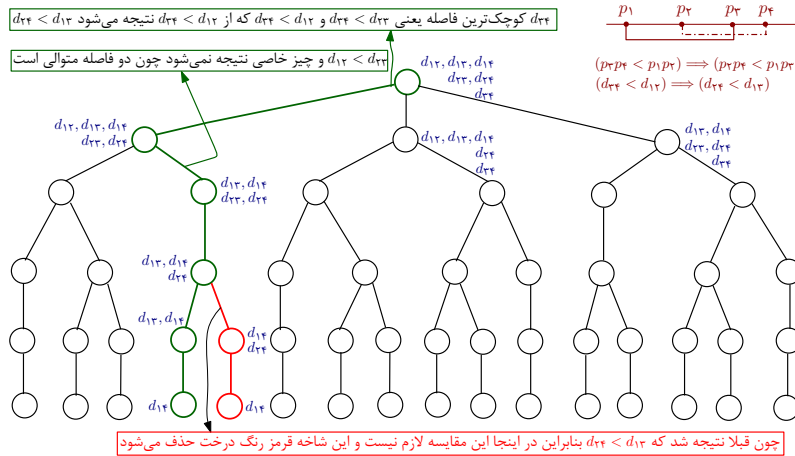


شکل ۱: درخت تصمیم مرتب‌سازی ۶ فاصله‌ی حاصل از ۴ نقطه روی خط.

آن را درخت تصمیم مرتب‌سازی فاصله‌ها می‌نامیم، مشخص است که این درخت تمام جایگشت‌های ممکن برای مرتب‌سازی را ایجاد می‌کند، هرچند تمام این مقایسه‌ها ضروری نیست. در ابتدا تصور می‌شد که برگ‌های این درخت برابر است با تعداد



دقیق جایگشت‌های معتبری که در آن‌ها هیچ مقایسه‌ی غیرضروری صورت نمی‌گیرد، اما همچنان که در شکل ۲ آمده، برای مرتب‌سازی چهار نقطه روی خط، با انجام مقایسه‌ی $d_{۱۲} < d_{۳۴}$ این نتیجه‌ی بدیهی حاصل می‌شود که $d_{۲۴} < d_{۱۳}$ است و بنابراین دیگر نیازی به انجام این مقایسه در سطح‌های پایین‌تر درخت نیست و لذا شاخه قرمز رنگ در مسیر مشخص شده دیگر نیاز نیست و باید حذف شود.



شکل ۲: یک مسیر اضافی در درخت تصمیم که به یک جایگشت معتبر منجر نمی‌شود.

۳ نتیجه‌گیری و کارهای آینده

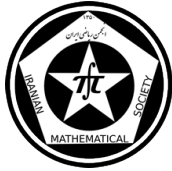
در این مقاله سعی شد در خصوص پیچیدگی مقایسه فاصله بین n نقطه روی خط حقیقی نتیجه‌ای بدست آید. هرچند این مهم حاصل نشد ولی به نظر می‌رسد ادامه همین روند با حذف جایگشت‌های غیر ضروری از درخت تصمیم و در نهایت شمارش تعداد برگ‌های درخت حاصل، بتوان برای پیچیدگی مساله کرانی بدست آورد. اگر این تعداد به اندازه کافی بزرگ باشد (یعنی از $\Omega(n^2 \log n)$ باشد، آنگاه نتیجه خواهد شد که مساله دارای کران پایین $\Omega(n^2 \log n)$ است و در صورت کمتر بودن تعداد برگ‌ها، این امید حاصل می‌شود که الگوریتمی با پیچیدگی $o(n^2 \log n)$ برای حل مساله موجود باشد. بررسی مساله در ابعاد بالاتر نیز جالب است.

مراجع

- [1] CORMEN, T. H., LEISERSON, C. E., RIVEST, R. L., AND STEIN, C. *Introduction to Algorithms*, 3rd ed. The MIT Press, Cambridge, Massachusetts, 2009.
- [2] DE BERG, M., CHEONG, O., VAN KREVELD, M., AND OVERMARS, M. *Computational Geometry: Algorithms and Applications*, 3rd ed. Springer-Verlag, Berlin, Germany, 2008.
- [3] NARASIMHAN, G., AND SMID, M. *Geometric Spanner Networks*. Cambridge University Press, 2007.

پست الکترونیکی: mfarshi@yazd.ac.ir
پست الکترونیکی: a.poureidi@GMail.com
پست الکترونیکی: z.soltani88@GMail.com

معادلات دیفرانسیل



برآورد ناحیه پایداری و وجود جواب پریودیک معادله ماتیو

حاجی محمد محمدی نژاد

محمد درویشی*

دانشگاه بیرجند-دانشکده علوم ریاضی و آمار-گروه ریاضی

دانشگاه بیرجند-دانشکده علوم ریاضی و آمار-گروه ریاضی

چکیده

در این مقاله به برآوردی از ناحیه پایداری معادله ماتیو برحسب ضرایب عددی پرداخته ایم. به کمک مضارب مشخصه فرم کلی جواب ها را بدست می آوریم و با توجه به مشخصه های نمایی، کراننداری جوابها وقتی زمان به بی نهایت می رود را بررسی می کنیم. در ادامه برحسب ضرایب، نواحی پایداری را تعیین و با توجه به فرم جواب ها وجود جواب پریودیک را ارزیابی می کنیم.

واژه های کلیدی: معادله ماتیو^۱، پایداری، جواب پریودیک، مضارب مشخصه^۲، مشخصه های نمایی^۳

Mathematics Subject Classification [2010]: 13D45, 39B42

۱ تعاریف و قضایا

معادله ماتیو یک معادله دیفرانسیل خطی درجه دو از نوع معادله هیل با تنها یک حالت هارمونیک است. این معادله برای اولین بار توسط امیل لئوناردو ماتیو در سال ۱۸۶۹ در رابطه با ارتعاشات پوسته بیضوی به کار رفته است. معادله ماتیو بعنوان مدل در زمینه های مختلفی مثلا پایداری ریل های راه آهن در حرکت قطار روی آنها و ... رشد کرده است. [۳] در سال ۱۸۹۲ لیاپونوف مفهوم پایداری را بکار برد. سوال اصلی این بود که اگر شرایط اولیه جواب های یک معادله به قدر کافی به هم نزدیک باشند آیا رفتار بلند مدت جوابها به قدر کافی به هم نزدیک می ماند. به عبارت دقیق تر اگر $x(t) = x(t, t_0, x_0)$ و $y(t) = x(t, t_0, y_0)$ دو جواب معادله $\dot{x} = p(t)x$ ، $x \in \mathbb{R}^n$ که به ترتیب در لحظه t_0 در x_0 ، y_0 و آنها به قدر کافی به هم نزدیک باشند آیا برای تمام زمانهای آینده $x(t)$ و $y(t)$ به هم نزدیک می ماند.

تعریف ۱.۱. فرض کنیم $x(t)$ جوابی از معادله $\dot{x} = p(t)x$ باشد. $x(t)$ را پایدار گوئیم هرگاه به ازای هر $\varepsilon > 0$ مفروض وجود داشته باشد عدد مثبتی چون $\delta = \delta(\varepsilon, t_0) > 0$ به طوریکه به ازای هر جواب دیگری چون $y(t)$ از نابرابری $\|y_0 - x_0\| < \delta$ بتوان نتیجه گرفت $\|y(t) - x(t)\| < \varepsilon$ ؛ $\forall t \geq t_0$. [۲] اگر جوابی پایدار نباشد آن را ناپایدار می گوئیم.

تعریف ۲.۱. ماتریسی که ستون های آن جواب های مستقل خطی معادله اند را ماتریس اساسی آن معادله می نامیم.

معادله زیر را در نظر بگیرید:

*سخنران

^۱Mathieu's equation

^۲characteristic numbers

^۳characteristic exponent



$$\dot{x} = p(t)x \quad (1)$$

فرض کنیم که $p(t)$ ، T -پریودیک باشد یا به عبارت دیگر وجود داشته باشد کوچکترین عدد حقیقی مثبت T که $p(t+T) = p(t)$ ، $-\infty < t < \infty$. حال اگر فرض کنیم که $\Phi(t)$ ماتریس اساسی معادله (۱) باشد آنگاه $\Phi(t+T)$ یک ماتریس اساسی دیگر برای معادله (۱) است در نتیجه

$$\Phi(t+T) = \Phi(t)E \quad (2)$$

که E ماتریس ثابت وارون پذیری می باشد.

تعریف ۳.۱. مقادیر ویژه ماتریس E را مضارب مشخصه معادله (۱) می گوئیم.

تعریف ۴.۱. فرض کنیم که μ مضرب مشخصه حقیقی یا مختلط معادله (۱) باشد تعریف می کنیم $\mu = e^{\rho T}$ و ρ را مشخصه نمایی معادله (۱) می نامیم.

قضیه های زیر فرم کلی جواب های سیستم (۱)، شرایط پایداری آنها و همچنین فرمولی برای محاسبه حاصلضرب مضارب مشخصه ارائه می کنند.

قضیه ۵.۱. سیستم $\dot{x} = p(t)x$ ، T -پریودیک است را در نظر بگیریم فرض کنیم که μ_i ها، $i = 1, 2, \dots, n$ مضارب مشخصه سیستم باشند آنگاه جواب های سیستم بصورت ترکیبی خطی از $x_i = p_i(t)e^{\rho_i t}$ اند که $\mu_i = e^{\rho_i T}$ و $p_i(t)$ یک تابع برداری با پریود T می باشند. و همچنین

$$\mu_1 \dots \mu_n = \exp\left(\int_0^T \text{tr} p(s) ds\right)$$

اثبات. به [۱] رجوع شود.

قضیه ۶.۱. تمام جواب های سیستم $\dot{x} = p(t)x$ پایداری دارند اگر و تنها اگر هر جواب سیستم وقتی $t \rightarrow \infty$ کراندار باشند.

اثبات. به [۱] رجوع شود.

۲ وجود ناحیه پایداری معادله ماتریس

معادله زیر که $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ را در نظر بگیریم

$$\ddot{x} + (\alpha + \beta \cos t)x = 0 \quad (3)$$

حال با در نظر گرفتن $\dot{x} = y$ داریم

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\alpha - \beta \cos t & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

در نتیجه معادله به فرم $\dot{x} = p(t)x$ ، $x \in \mathbb{R}^2$ است که $p(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\alpha - \beta \cos t & 0 \end{bmatrix}$ و پریودیک با پریود 2π می باشد. فرض کنیم که μ_1 و μ_2 مضارب مشخصه معادله (۳) باشند چون $\text{tr} p(t) = 0$ داریم

$$\mu_1 \mu_2 = e^0 = 1 \quad (4)$$



با توجه به رابطه (۲) مجموع مضارب مشخصه عبارتی بر حسب α, β بدست می آید. در نتیجه معادله مضارب مشخصه سیستم (۳) بصورت زیر است

$$\mu^2 - \phi(\alpha, \beta)\mu + 1 = 0 \quad (5)$$

با حل معادله (۵)، μ_1 و μ_2 بصورت زیر بدست می آیند.

$$\mu_1, \mu_2 = \frac{1}{2} [\phi(\alpha, \beta) \pm \sqrt{\phi^2(\alpha, \beta) - 4}]$$

حال با توجه به مقادیر مختلف $\phi(\alpha, \beta)$ ، فرم کلی جواب ها، پایداری و وجود جواب پریودیک سیستم را بررسی می کنیم. در تمام حالات c_1, c_2 عدد ثابت حقیقی و $p_1(t), p_2(t)$ چند جمله ای بر حسب t و 2π پریودیک اند. حالت اول: اگر $\phi(\alpha, \beta) > 2$ ، آنگاه μ_1 و μ_2 حقیقی، مختلف و مثبت اند و طبق (۴) یکی از آنها مثلا μ_1 بزرگتر از واحد است. در نتیجه $\sigma = \rho_1 > 0$ ، $\rho_2 = -\sigma < 0$ و معادله کلی جواب ها به صورت زیر است

$$x(t) = c_1 e^{\sigma t} p_1(t) + c_2 e^{-\sigma t} p_2(t)$$

این ناحیه وقتی $t \rightarrow \infty$ شامل جواب های بی کران است. این ناحیه را ناحیه پارامتری ناپایدار می گوئیم. حالت دوم: اگر $\phi(\alpha, \beta) = 2$ ، آنگاه $\mu_1 = \mu_2 = 1$ ، $\rho_1 = \rho_2 = 0$ و جواب کلی به فرم زیر می باشد

$$x(t) = c_1 p_1(t) + c_2 t p_1(t)$$

بنابراین روی منحنی $\phi(\alpha, \beta) = 2$ یک جواب 2π -پریودیک و بقیه جواب ها وقتی $t \rightarrow \infty$ بی کرانند. حالت سوم: اگر $2 < \phi(\alpha, \beta) < -2$ آنگاه $\mu_1 = \bar{\mu}_2$ و مختلط اند. از آنجائیکه $|\mu_1| = |\mu_2|$ داریم $\rho_1 = \rho_2 = i\vartheta$ که ϑ حقیقی می باشد معادله کلی بصورت زیر است

$$x(t) = c_1 e^{i\vartheta t} p_1(t) + c_2 e^{-i\vartheta t} p_2(t)$$

تمام جواب ها وقتی $t \rightarrow \infty$ کراندارند. این ناحیه را ناحیه پارامتری پایدار می گوئیم.

حالت چهارم: اگر $\phi(\alpha, \beta) = -2$ آنگاه $\mu_1 = \mu_2 = -1$ و $\rho_1 = \rho_2 = \frac{1}{2}i$ معادله کلی جواب ها بصورت

زیر است

$$x(t) = c_1 e^{\frac{1}{2}it} p_1(t) + c_2 t e^{\frac{1}{2}it} p_1(t)$$

در نتیجه یک جواب با پریود 4π دارد و بقیه ی جواب ها وقتی $t \rightarrow \infty$ بی کرانند.

حالت پنجم: اگر $\phi(\alpha, \beta) < -2$ آنگاه μ_1, μ_2 حقیقی و منفی اند. و با توجه به رابطه (۴) جواب کلی به فرم زیر

است

$$x(t) = c_1 e^{(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i)t} p_1(t) + c_2 e^{(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i)t} p_2(t)$$

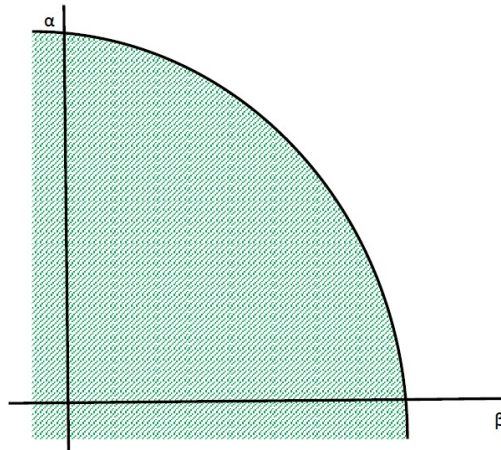
که $\partial > 0$ و حقیقی است. بنابراین وقتی $t \rightarrow \infty$ جواب ها بی کران و در نتیجه ناپایدارند.

با توجه به آنچه مورد بررسی قرار دادیم شکل زیر ناحیه پایداری و وجود جواب های پریودیک را برای معادله ماتیو نشان

می دهد.



منحنی فرضی $2 = |\phi(\alpha, \beta)|$ و ناحیه وجود جواب های با پریود $2\pi, 4\pi$:



شکل ۱: قسمت هاشور زده: ناحیه پایداری و بدون جواب پریودیک

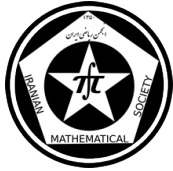
سپاس‌گزاری

خدا را سپاس می‌گویم که در تمام دوران زندگی همراه همیشگی من بوده است. و همچنین از استاد بزرگوارم کمال تشکر را دارم که همواره راهنمای اینجانب در این دوره بوده است. و در آخر از همسر گرامی ام که کوه صبر و شکیبایی است و تمام سختی‌ها را در این راه تحمل می‌کند قدر دانی می‌کنم.

مراجع

- [1] D.w.jordan,P.smith, *Nonlinear Ordinary Differential Equations*.
- [2] Ferdinand Verhulst, *Nonlinear Differential Equations and Dynamical Systems* .
- [3] Mritunjay Kumar, *study of mathieu equation near stability boundary*, Master of Technology in Computational Science., July, 2011.

پست الکترونیکی: hmohmmadin@yahoo.com
پست الکترونیکی: mohammaddarvishi28331325@gmail.com



پایداری زمان-ثابت و خاصیت سایه‌زنی

مهدی فاتحی‌نیا*
استادیار گروه ریاضی محض-دانشگاه یزد

غفار داداشی‌شنبرکی
دانشجوی کارشناسی ارشد-دانشگاه یزد

چکیده

در این مقاله، توسعه جدیدی از پایداری زمان-محدود یکنواخت را بررسی می‌کنیم. که به آن، پایداری زمان-ثابت گفته می‌شود [۲]. این پایداری خاصیت بسیار مهمی برای برخی کاربردها و بخصوص زمانی که زمان همگرایی از پیش تعریف شده در سیستم‌های کنترل، می‌باشد. شرایطی را بررسی می‌کنیم که یک سیستم تحت آن شرایط، دارای پایداری مجانبی و سپس، رابطه‌ی بین پایداری زمان-ثابت و خاصیت سایه‌زنی را بررسی می‌کنیم.

واژه‌های کلیدی: پایداری لیاپانوف، جاذب، پایداری زمان-ثابت، خاصیت سایه‌زنی.

Mathematics Subject Classification [2010]: 37B25, 37N35

۱ مقدمه

خاصیت پایداری زمان-ثابت موضعی، کلاسی از پایداری زمان-محدود می‌باشد. در این مقاله، سیستم زیر را در نظر می‌گیریم:

$$\dot{x} = f(t, x), \quad t \in \mathbb{R} \quad (1)$$

مبدأ را برای سیستم (۱)، پایدار لیاپانوف می‌گوییم، اگر برای هر $\varepsilon > 0$ و هر $t_0 \in I$ ، $\delta(\varepsilon)$ وجود داشته باشد، بطوریکه برای هر x_0 و هر $t \geq t_0$ که $\|x_0\| < \delta(\varepsilon, t_0)$ ، ایجاب کند $\|x(t, t_0, x_0)\| < \varepsilon$.

مبدأ را برای سیستم (۱)، جاذب زمان-محدود می‌گوییم، اگر برای هر $t_0 \in \mathbb{R}$ ، مجموعه $\nu(t_0) \subseteq \mathbb{R}^n$ وجود داشته باشد؛ بطوریکه برای هر $x_0 \in \nu(t_0)$:

۱. برای هر $t > t_0$ از سیستم (۱)، $x(t, t_0, x_0)$ وجود داشته باشد؛

۲. برای هر $x_0 \in \nu(t_0)$ و $t \in \mathbb{R}$ ، $T(t_0, x_0) < +\infty$.

مجموعه ماکسیمال $\nu(t_0)$ که در تعریف بالا صدق کند را پایه جاذب زمان-محدود می‌گوییم. مبدأ نقطه درونی $\nu(t_0)$ است.

*سخنران



تعریف ۱.۱. [۲] (جاذب زمان-محدود یکنواخت) مبدأ را برای سیستم (۱)، جاذب زمان-محدود یکنواخت گوییم، اگر جاذب زمان-محدود و یک جاذب نامتغییر با زمان با دامنه $\nu \subseteq \mathbb{R}^n$ ، وجود داشته باشد، بطوریکه تابع زمان-نشست $T(t_0, x_0)$ ، کراندار موضعی روی $\mathbb{R} \times \nu$ و یکنواخت روی $t_0 \in \mathbb{R}$ باشد. به عبارت دیگر: برای هر $y \in \nu$ ، وجود داشته باشد $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ ، بطوریکه $\varepsilon \subseteq \nu$ و $y + \mathcal{B}(\varepsilon)$ و $\sup\{T(t_0, x_0) \mid t_0 \in \mathbb{R}, x_0 \in y + \mathcal{B}(\varepsilon)\}$ منتهای باشد.

تعریف ۲.۱. [۱] (جاذب زمان-ثابت) مبدأ را برای سیستم (۱)، جاذب زمان-ثابت می‌گوییم، اگر جاذب زمان-محدود یکنواخت، با پایه جاذب ν و تابع زمان-نشست $T(t_0, x_0)$ ، که روی $\mathbb{R} \times \nu$ کراندار است. به عبارت دیگر، یک عدد $T_{max} \in \mathbb{R}_+$ وجود داشته باشد؛ بطوریکه اگر $x_0 \in \nu$ و $t_0 \in \mathbb{R}$ ، آنگاه $T(t_0, x_0) \leq T_{max}$.

تعریف ۳.۱. [۱] (پایداری زمان-ثابت) مبدأ برای سیستم (۱)، پایدار زمان-ثابت گفته می‌شود، اگر پایدار لیاپانوف و جاذب زمان-ثابت باشد.

اگر $\nu = \mathbb{R}^n$ ، آنگاه مبدأ برای سیستم (۱)، پایدار زمان-ثابت سرتاسری است. پایداری زمان-ثابت، تعریف سودمندتری برای یک سیستم کنترل با پوشش سرتاسری می‌باشد [۲، ۳].

قضیه ۴.۱. [۱] فرض کنیم $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ، تابع سره روی مجموعه ناتهی و باز $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ که $O \in \text{int}(\Omega)$ و تابع $W : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ معین مثبت پیوسته باشد و برای $t \in \mathbb{R}$ و $x \in \Omega \setminus \{0\}$ داشته باشیم $D_{F(t,x)}V(x) \leq -W(x)$ ؛ آنگاه مبدأ برای سیستم (۱)، پایدار مجانبی با دامنه جذب

$$U = \prod(V, \lambda(h)) \cap \mathcal{B}(h). \quad (۲)$$

که در آن، $\lambda(h) = \inf_{x \in \mathbb{R}^n: \|x\|=h} V(x)$ و $h \leq \sup_{r \in \mathbb{R}_+: \mathcal{B}(r) \subseteq \Omega} r$ ، اگر V ، سره سرتاسری باشد و $\Omega = \mathbb{R}^n$ ، آنگاه مبدأ برای سیستم (۱)، پایدار مجانبی سرتاسری است و $U = \mathbb{R}^n$.

فرض کنیم X ، یک فضای منیلفد هموار و ϕ یک دیفیومرفیسم روی آن باشد.

تعریف ۵.۱. دنباله $\xi = \{x_k \in X : k \in \mathbb{Z}\}$ را d -شبه‌مسیر (یا d -شبه‌مدار) از یک سیستم دینامیکی ϕ روی \mathbb{Z} تعریف می‌کنیم، اگر، در نامساوی زیر صدق کند:

$$r(\phi(x_k), x_{k+1}) < d, \quad k \in \mathbb{Z}. \quad (۳)$$

فرض کنیم $\varepsilon > 0$ ثابت است. اگر نقطه $x \in X$ وجود داشته باشد که به ازای هر $k \in \mathbb{Z}$ نامساوی

$$r(\phi^k(x), x_k) < \varepsilon, \quad k \in \mathbb{Z}. \quad (۴)$$

صدق کند، آنگاه گوییم، d -شبه‌مسیر $\xi = \{x_k\}$ توسط X ، ε پیموده می‌شود.

تعریف ۶.۱. فرض کنیم برای هر $\varepsilon > 0$ ، یک $d > 0$ وجود داشته باشد، که برای هر d -شبه‌مسیر ξ روی \mathbb{Z} ، یک نقطه $x \in X$ وجود داشته باشد که این شبه‌مسیر توسط x ، ε پیموده شود. در این صورت گوییم، ϕ دارای خاصیت سایه‌زنی است.



خاصیت سایه‌زنی، به طور مشابه روی شارهای حاصل از میدان‌های برداری تعریف می‌گردد. فرض کنیم $W(x)$ یک تابع معین مثبت است، اگر $\lim_{x \rightarrow +\infty} W(x) = +\infty$ ، آنگاه گوییم $W(x)$ ، بی‌کران شعاع است.

تعریف ۷.۱. فرض کنیم $V(t, x)$ تابع معین مثبت است. $V(t, x)$ ، بی‌کران شعاع است، اگر تابع معین مثبت و بی‌کران شعاع $W(x)$ وجود داشته باشد، بطوریکه $V(t, x) \geq W(x)$.

قضیه ۸.۱. فرض کنیم $V: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ، تابعی روی مجموعه ناتهی و باز $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ که $O \in \text{int}(\Omega)$ و تابع $W: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ معین مثبت پیوسته باشد و برای $t \in \mathbb{R}$ و $x \in \Omega \setminus \{0\}$ داشته باشیم $D_{F(t,x)}V(x) \leq -W(x)$ ؛ آنگاه مبدأ، دارای خاصیت سایه‌زنی است.

قضیه ۹.۱. فرض کنیم $V: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ، تابع پیوسته روی مجموعه سره و همبند باز Ω باشد. اعداد زیر را در نظر می‌گیریم؛ $\mu \in (0, 1)$ ، $\nu \in \mathbb{R}_+$ ، $r_\nu \in \mathbb{R}_+$ و $r_\mu \in \mathbb{R}_+$ که در نامساوی زیر صدق می‌کند.

$$D_{F(t,x)}V(x) \leq \begin{cases} -r_\mu V^{1-\mu}(x) & x \in \Omega : V(x) \leq 1 \\ -r_\nu V^{1+\nu}(x) & x \in \Omega : V(x) \geq 1 \end{cases} \quad t > t_0, x \in \Omega \quad (5)$$

آنگاه، مبدأ برای سیستم (۱)، پایدار زمان-ثابت، با دامنه جاذب U که در رابطه‌ی (۲)، تعریف شده است؛ می‌باشد. تخمین تابع ماکسیمم زمان-نشست، بوسیله رابطه‌ی زیر تعریف می‌گردد:

$$T(x) \leq T_{max} \leq \frac{1}{\mu r_\mu} + \frac{1}{\nu r_\nu}. \quad (6)$$

اگر $\Omega = \mathbb{R}^n$ و تابع V ، شعاع بی‌کران باشد، آنگاه مبدأ برای سیستم (۱)، پایدار زمان-ثابت سرتاسری است.

اثبات. با در نظر گرفتن قضیه (۸.۱)، مبدأ برای سیستم (۱)، پایدار مجانبی با دامنه جاذب U ، می‌باشد. برای هر $x_0 \in U$ و برای هر $t > t_0$ ، جواب $x(t, t_0, x_0)$ از سیستم (۱) وجود دارد. ثابت می‌کنیم که رابطه‌ی (۵)، جاذب زمان-ثابت می‌باشد. برای هر مسیر $x(t, t_0, x_0)$ از سیستم (۱) که $V(x_0) > 1$ ، یک رابطه‌ی

$$T_1 = T_1(x) \leq \frac{1}{\nu r_\nu} : V(x(T_1, t_0, x_0)) = 1. \quad (7)$$

وجود دارد. برای هر مسیر $x(t, t_1, x_1)$ که $V(x_1) < 1$ ، یک رابطه‌ی

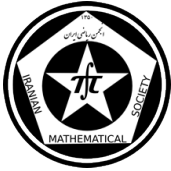
$$T_2 = T_2(x) \leq \frac{1}{\mu r_\mu} : V(x(t, t_1, x_1)) \rightarrow 0 \text{ برای } t \rightarrow T_2. \quad (8)$$

□

برای هر لحظه، وجود دارد. اثبات قضیه کامل می‌شود.

مثال ۱۰.۱. سیستم کنترل مد لغزشی زیر را در نظر می‌گیریم. (اثبات جزئیات در [۲] آمده است)

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = u + d(t) \\ u = -\frac{\alpha_1 + 3\beta_1 x^2 + \gamma}{2} \text{sing}[s] - (\alpha_2 s + \beta_2 s^3)^{[1/2]} \end{cases}$$



که در آن $x, y \in \mathbb{R}$ ، $|d(t)| < C$ ، $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}_+$ ، $\gamma > 2C$ و $C \in \mathbb{R}_+$ می‌باشد. رویه $s = 0$ ، بصورت زیر می‌باشد.

$$s = y + (y^{[2]} + \alpha_1 x + \beta_1 x^3)^{[1,2]}.$$

سیستم ناپیوسته اصلی، از دیفرانسیل شمول تمديد شده زیر، پیروی می‌کند.

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} \in \left\{ -\frac{\alpha_1 + 3\beta_1 x^2 + \gamma}{2} \cdot \overline{\text{sing}}[s] + \{-(\alpha_2 s + \beta_2 s^3)^{[3,2]} + [-c, c]\} \right. \end{cases}$$

ملاحظه می‌کنیم که تابع $V(s) = |s|$ می‌باشد. مشتق تعمیم‌یافته مسیر سیستم را محاسبه می‌کنیم.

$$D_F V(s) \leq -(\alpha_2 V(s) + \beta_2 V^3(s))^{[1,2]} \quad \text{برای } s \neq 0.$$

جاذب زمان-ثابت با تخمینی از زمان برای سطح لغزشی $s = 0$ ، بصورت زیر می‌باشد.

$$T_s \leq \frac{2}{\sqrt{\alpha_2}} + \frac{2}{\sqrt{\beta_2}}.$$

معادله حرکت لغزشی برای $s = 0$ ، بصورت زیر می‌باشد.

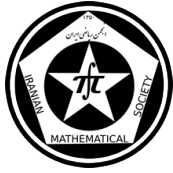
$$\dot{x} = -\left(\frac{\alpha_1}{2}x + \frac{\beta_1}{2}x^3\right)^{[1,2]}.$$

این سیستم، پایدار زمان-پابت و یک تخمین سرتاسری، از تابع زمان-نشست $T(x, y)$ ، برای سیستم اصلی بصورت زیر است.

$$T(x, y) \leq T_{max} \leq \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{\alpha_1}} + \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{\beta_1}} + \frac{2}{\sqrt{\alpha_2}} + \frac{2}{\sqrt{\beta_2}}.$$

مراجع

- [1] A. Polyakov, L. Fridman, *Stability notions and Lyapunov functions for sliding mode control systems*, Control Optim **351** (2014) 1831–1865.
- [2] A. Polyakov, *Nonlinear feedback design for fixed-time stabilization of linear control systems*, IEEE Trans. Autom. Control **57** (99)(2012)2106–2110.
- [3] E. Cruz-Zavala, J. Moreno, L. Fridman, *Uniform robust exact differentiator*, IEEE Trans. Autom. Control **56** (11) (2011) 2727–2733.
- [4] R. Wheeden, A. Zygmund, *Measure and Integral: An Introduction to Real Analysis*, Marcel Dekker, New York, 1977.
- [5] X. Liao, L. Wang, and P. Yu, *Stability of Dynamical Systems*, in Monograph Series on Nonlinear Science and Complexity. ed: Elsevier, 2007.



پایداری زمان-محدود و خاصیت سایه‌زنی

غفار داداشی‌شنبرکی

دانشجوی کارشناسی ارشد-دانشگاه یزد

مهدی فاتحی‌نیا*

استادیار گروه ریاضی محض-دانشگاه یزد

چکیده

هدف اصلی این مقاله، بررسی پایداری زمان-محدود برای سیستم‌های دینامیکی پیوسته می‌باشد. ابتدا، مفاهیم اساسی مانند، پایداری لیاپانوف، جاذب، جاذب زمان محدود و پایداری زمان-محدود را بیان می‌کنیم. با استفاده از این مفاهیم، شرایطی را بررسی می‌کنیم که یک سیستم تحت آن شرایط، دارای پایداری مجانبی و سپس، رابطه‌ی بین پایداری زمان-محدود و خاصیت سایه‌زنی را بررسی می‌کنیم.

واژه‌های کلیدی: پایداری لیاپانوف، پایداری زمان-محدود، خاصیت سایه‌زنی.

Mathematics Subject Classification [2010]: 37B25, 37N35

۱ مقدمه

برای سیستم‌های کنترل، پایداری زمان-محدود را بدست می‌آوریم [۱، ۳، ۵]. یکی از مثال‌های پایداری زمان-محدود، سیستم‌های کنترل مقاوم هستند. برای این کار، تابع زمان-نشست را بدست می‌آوریم.

در این مقاله سیستم زیر را در نظر می‌گیریم.

$$\dot{x} = f(t, x), \quad t \in \mathbb{R} \quad (1)$$

با توجه به قضیه یکتایی جواب در معادلات دیفرانسیل، سیستم (۱)، جوابی یکتا با شرط اولیه $x(t) = x_0$ دارد. $x(t, t_0, x_0)$ را جوابی برای سیستم (۱) در نظر می‌گیریم. مجموعه‌ی جواب‌ها را با $\Phi(t, x)$ نشان می‌دهیم. پس $x(t, t, x) \in \Phi(t, x)$.

تعریف ۱.۱. [۴] (پایداری لیاپانوف) مبدأ را برای سیستم (۱)، پایدار لیاپانوف می‌گوییم اگر برای هر $\varepsilon > 0$ و هر $t_0 \in I$ ، $\delta(\varepsilon)$ وجود داشته باشد، بطوریکه برای هر x_0 و هر $t \geq t_0$ که $\|x_0\| < \delta(\varepsilon, t_0)$ ، ایجاب کند $\|x(t, t_0, x_0)\| < \varepsilon$.

تعریف ۲.۱. [۱] (جاذب زمان-محدود) مبدأ را برای سیستم (۱)، جاذب زمان-محدود می‌گوییم، اگر برای هر $t_0 \in \mathbb{R}$ مجموعه $\nu(t_0) \subseteq \mathbb{R}^n$ وجود داشته باشد؛ بطوریکه برای هر $x_0 \in \nu(t_0)$:

۱. برای هر $t > t_0$ از سیستم (۱)، $x(t, t_0, x_0)$ وجود داشته باشد؛

۲. برای هر $x_0 \in \nu(t_0)$ و $t_0 \in \mathbb{R}$ $T(t_0, x_0) < +\infty$

* سخنران



مجموعه ماکسیمال $\nu(t_0)$ که در تعریف بالا صدق کند را پایه جاذب زمان-محدود می‌گوییم. مبدأ نقطه درونی $\nu(t_0)$ است.

تعریف ۳.۱. [۱] (پایداری زمان-محدود) مبدأ را برای سیستم (۱)، پایدار زمان-محدود می‌گوییم؛ اگر پایدار لیاپانوف و جاذب زمان-محدود باشد.

اگر $\nu(t_0) = \mathbb{R}^n$ ، آنگاه مبدأ را برای سیستم (۱)، پایدار زمان-محدود سرتاسری می‌گوییم. تابع زمان-نشست را برای سیستم (۱) به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$T(t_0, x_0) = \circ (x(t, t_0, x_0)) - t_0$$

$$x(t, t_0, x_0) \in \Psi(t_0, x_0)$$

قضیه ۴.۱. فرض کنیم $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ، تابع سره روی مجموعه ناتهی و باز $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ که $o \in \text{int}(\Omega)$ و تابع $W : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ معین مثبت پیوسته باشد و برای $t \in \mathbb{R}$ و $x \in \Omega \setminus \{o\}$ داشته باشیم $D_{F(t,x)}V(x) \leq -W(x)$ ؛ آنگاه مبدأ برای سیستم (۱)، پایدار مجانبی با دامنه جذب

$$U = \prod(V, \lambda(h)) \cap \mathcal{B}(h). \quad (2)$$

که در آن، $\lambda(h) = \inf_{x \in \mathbb{R}^n: \|x\|=h} V(x)$ و $r \leq \sup_{r \in \mathbb{R}_+: \mathcal{B}(r) \subseteq \Omega} r$.

فرض کنیم X ، یک فضای منیلفد هموار و ϕ یک دیفئومرفیسم روی آن باشد.

تعریف ۵.۱. دنباله $\xi = \{x_k \in X : k \in \mathbb{Z}\}$ را d -شبه‌مسیر (یا d -شبه‌مدار) از یک سیستم دینامیکی ϕ روی \mathbb{Z} تعریف می‌کنیم، اگر، در نامساوی زیر صدق کند:

$$r(\phi(x_k), x_{k+1}) < d, \quad k \in \mathbb{Z}. \quad (3)$$

فرض کنیم $\epsilon > 0$ ثابت است. اگر نقطه $x \in X$ وجود داشته باشد که به ازای هر $k \in \mathbb{Z}$ نامساوی

$$r(\phi^k(x), x_k) < \epsilon, \quad k \in \mathbb{Z}. \quad (4)$$

صدق کند، آنگاه می‌گوییم، d -شبه‌مسیر $\xi = \{x_k\}$ توسط X ، ϵ پیموده می‌شود.

تعریف ۶.۱. فرض کنیم برای هر $\epsilon > 0$ ، یک $d > 0$ وجود داشته باشد، که برای هر d -شبه‌مسیر ξ روی \mathbb{Z} ، یک نقطه $x \in X$ وجود داشته باشد که این شبه‌مسیر توسط x ، ϵ پیموده شود. در این صورت می‌گوییم، ϕ دارای خاصیت سایه‌زنی است.

خاصیت سایه‌زنی، به طور مشابه روی شارهای حاصل از میدان‌های برداری تعریف می‌گردد.

قضیه ۷.۱. فرض کنیم $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ، تابعی روی مجموعه ناتهی و باز $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ که $O \in \text{int}(\Omega)$ و تابع $W : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ معین مثبت پیوسته باشد و برای $t \in \mathbb{R}$ و $x \in \Omega \setminus \{o\}$ داشته باشیم $D_{F(t,x)}V(x) \leq -W(x)$ ؛ آنگاه مبدأ، دارای خاصیت سایه‌زنی است.



قضیه ۸.۱. فرض کنیم $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ تابع سره، روی مجموعه ناتهی و باز $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ و $O \in \text{int}(\Omega)$

$$D_{F(t,x)}V(x) \leq -1 \text{ برای } t \in \mathbb{R}, x \in \Omega \setminus \{0\} \quad (5)$$

آنگاه مبدأ برای سیستم (۱)، پایدار زمان-محدود با دامنه جذب U که در رابطه‌ی ۲ تعریف گردیده است؛ می‌باشد و

$$T(x_0) \leq V(x_0) \text{ برای } x_0 \in U. \quad (6)$$

اگر $T(0)$ تابع زمان-نشست باشد.

اگر V یک تابع سره سرتاسری روی $\Omega = \mathbb{R}^n$ باشد، آنگاه با توجه به نامساوی ۵، مبدأ برای سیستم (۱)، پایدار زمان-محدود سرتاسری می‌باشد.

اثبات. با توجه به قضیه ۷.۱، مبدأ برای سیستم (۱)، پایدار مجانبی با دامنه جذب U می‌باشد. برای هر $t > t_0$ و $x \in U$ ، جواب $x(t, t_0, x_0)$ ، وجود دارد. نشان می‌دهیم که، جاذب زمان-محدود است. بازه $[t_0, t_1]$ را که در آن $t_1 = t_0 + V(0)$ را در نظر می‌گیریم. فرض خلف را در نظر می‌گیریم: فرض می‌کنیم، برای هر $t \in [t_0, t_1]$ ، داشته باشیم $x(t, t_0, x_0) \neq 0$. بنابراین داریم $\tilde{V}(t) = V(x(t, t_0, x_0))$.

$$D_{\mathbb{k}}\tilde{V}(t) \leq D_{F(t,x)}V(x(t, t_0, x_0)) \leq -1, \text{ برای } t \in [t_0, t_1] \quad (7)$$

پس تابع $\tilde{V}(t)$ ، روی $[t_0, t_1]$ ، نزولی می‌باشد. و تقریباً همه جا روی $[t_0, t_1]$ ، دیفرانسیل پذیر است. پس داریم

$$\tilde{V}(t_1) - \tilde{V}(t_0) \leq \int_{t_0}^{t_1} \frac{d}{dt}\tilde{V}(\tau)d\tau \leq -(t_1 - t_0) = -V(x_0). \quad (8)$$

(اثبات جزئیات در [۲]). به این معنی که

$$\begin{aligned} \tilde{V}(t_1) = V(x(t_1, t_0, x_0)) &\leq \tilde{V}(t_0) - V(x_0) \\ &= V(x(t_0, t_0, x_0)) - V(x_0) = 0. \end{aligned} \quad (9)$$

وقتی که $V(x)$ معین مثبت باشد، آنگاه:

$$V(x(t_1, t_0, x_0)) \leq 0 \Rightarrow V(x(t_1, t_0, x_0)) = 0 \iff x(t_1, t_0, x_0) = 0$$

به این معنی که مبدأ برای سیستم (۱) جاذب زمان-محدود با تخمینی از تابع زمان-نشست، رابطه (۶) می‌باشد. □

اگر تحت شرایط قضیه (۸.۱)، یک تابع پیوسته $\bar{V} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ وجود داشته باشد، بطوریکه برای هر $x \in \Omega$ ، $V(x) \leq \bar{V}(x)$ ، آنگاه مبدأ برای سیستم (۱)، پایدار زمان-محدود یکنواخت می‌باشد.

مثال ۹.۱. سیستم زیر را در نظر می‌گیریم:

$$\dot{x} = -x^{\frac{1}{2}}(1 - |x|), \quad x \in \mathbb{R}$$



ص: ۴-۴

چهل و ششمین کنفرانس ریاضی ایران
۳-۶ شهریور ۱۳۹۴
دانشگاه یزد

پایداری زمان-محدود و خاصیت سایه‌زنی



دانشگاه یزد

سخنرانی

که تابع زمان-نشست آن بصورت :

$$T(x) = Ln \left(\frac{1 + |x|^{\frac{1}{2}}}{1 - |x|^{\frac{1}{2}}} \right)$$

می‌باشد. با توجه به قضیه (۸.۱) ، تابع زمان-نشست، پیوسته و سره روی $B(1)$ می‌باشد. همچنین دیفرانسیل پذیر برای $x \in B(1) \setminus \{0\}$ می‌باشد و داریم:

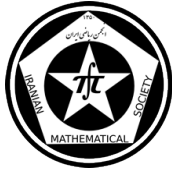
$$\dot{T}(x) = \frac{\partial T}{\partial x} \dot{x} = \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}(1 - |x|)} \dot{x} = -1 \quad \text{برای } x \neq 0$$

با توجه به این مثال می‌بینیم که تابع زمان-نشست از سیستم پایدار زمان-محدود، یک تابع لیاپانوف تعمیم یافته از تعمیم جهت می‌باشد. بنابراین با به کاربردن قضیه (۸.۱) توابع بسیار وسیعی را می‌توانیم داشته باشیم.

مراجع

- [1] A. Polyakov, L. Fridman, *Stability notions and Lyapunov functions for sliding mode control systems*, Journal of the Franklin Institute, **351** (2014) 1831–1865.
- [2] R. Wheeden, A. Zygmund, *Measure and Integral: An Introduction to Real Analysis*, Marcel Dekker, New York, 1977.
- [3] S. Bhat, D. Bernstein, *Finite time stability of continuous autonomous systems*, SIAMJ. Control Optim. **38 3** (2000) 751–766.
- [4] X. Liao, L. Wang, and P. Yu, *Stability of Dynamical Systems*, in Monograph Series on Nonlinear Science and Complexity. ed: Elsevier, 2007.
- [5] Y. Orlov, *Finite time stability and robust control synthesis of uncertain switched systems*, SIAMJ. Control Optim. **43 4** (2005) 1253–1271.

پست الکترونیکی: fatehiniam@yazd.ac.ir
پست الکترونیکی: ghafardadashi@gmail.com



سیستم‌های دینامیکی دنباله‌ای (SDS) و ارون‌پذیر

حبیبه رحمانی نعیم‌آبادی*
دانشگاه شهید باهنر کرمان

شکوفه صیاد
دانشگاه آزاد زاهدان

چکیده

هدف از انجام این پژوهش بررسی سیستم‌های دینامیکی دنباله‌ای و ارون‌پذیر است. در این بخش ما یک مشخصه کلی از سیستم‌های دینامیکی دنباله‌ای‌های و ارون‌پذیر ارائه می‌دهیم و همچنین نشان می‌دهیم که تابع رأس متقارن خاصی برای این نوع سیستم‌های دینامیکی دنباله‌ای وجود دارد و فضای فاز این نوع سیستم‌ها را مورد بررسی قرار می‌دهیم.

واژه‌های کلیدی: سیستم‌های دینامیکی دنباله‌ای و ارون‌پذیر، نگاشت دوسویی، کلاس همینگ

۱ مقدمه

فرض کنیم $k = |F_v| = \{0, 1\}$ باشد. نگاشتهای inv_k و id_k را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\begin{aligned} inv_k(x_1, \dots, x_k) &= (1 + x_1, \dots, 1 + x_k) \\ id_k(x_1, \dots, x_k) &= (x_1, \dots, x_k) \end{aligned} \quad (1)$$

تعریف ۱.۱. سیستم دینامیکی دنباله‌ای (SDS)، سه تایی $(Y, (F_v)_v, \pi)$ است. که در آن $Y = (V[Y], e[Y])$ یک گراف غیر جهت دار، بدون طوقه و $(F_v)_v$ خانواده‌ای از نگاشتهای موضعی و π یک جایگشت n -تایی می‌باشد: $(n$ تعداد راس‌های گراف Y می‌باشد). به طوری که نگاشت وابسته به آن عبارت است از: (ترتیب ترکیب را با π مشخص می‌کنیم)

$$[F_Y, \pi] = F_{\pi(n)} \circ F_{\pi(n-1)} \circ \dots \circ F_{\pi(1)} \quad (2)$$

تعریف ۲.۱. برای هر رأس v از Y با درجه راس $d(v)$ تابع رأس f_v را داریم که $k \rightarrow f_v : k^{d(v)+1}$ تابع موضعی f_v را تعریف می‌کنیم:

$$f_v : K^n \rightarrow K^n, F_{v_i}(x) = (x_{v_1}, \dots, x_{v_{i-1}}, f_{v_i}(x[v_i]), x_{v_{i+1}}, \dots, x_{v_n})$$

همان طور که می‌بینیم F_{v_i} تنها حالت رأس v_i - ام را تغییر می‌دهد و بقیه حالت‌ها ثابت می‌مانند [۱]، [۲].

تعریف ۳.۱. سیستم دینامیکی دنباله‌ای^۱ که نگاشت آن دو سویی باشد، یک SDS و ارون‌پذیر می‌گوئیم.

* سخنران

^۱Sequential dynamical system



تعریف ۴.۱. اگر نگاشت $[F_Y, \pi]$ دوسویی باشد و $\pi = (\pi_1, \dots, \pi_n)$ ، آنگاه معکوسش نگاشت $[F_Y, \pi^*]$ است به طوری که $\pi^* = (\pi_n, \pi_{n-1}, \dots, \pi_2, \pi_1)$ و داریم:

$$[F_Y, \pi]^{-1} = [F_Y, \pi^*] \quad (۳)$$

قضیه ۵.۱. سیستم دینامیکی دنباله‌ای $(Y, (F_v)_v, \pi)$ با نگاشت $[F_v, \pi]$ وارون‌پذیر است اگر و تنها اگر برای هر رأس $v_i \in V[Y]$ و هر $x'[v_i]$ (حالت رأس) نگاشت تعریف شده زیر دوسویی باشد.

$$g_{x'[v_i]} : |F_v \longrightarrow |F_v; g_{x'[v_i]}(x_{v_i}) = f_{v_i}(x[v_i])$$

اثبات. نگاشت $[F_Y, \pi]$ را در نظر می‌گیریم. داریم:

$$[F_Y, \pi] = F_{\pi_n} \circ F_{\pi_{n-1}} \circ \dots \circ F_{\pi_1} \quad (۴)$$

نگاشت $[F_y, \pi]$ دوسویی است اگر و تنها اگر $F_{\pi_n} \circ F_{\pi_{n-1}} \circ \dots \circ F_{\pi_1}$ دوسویی باشد و $F_{\pi_n} \circ F_{\pi_{n-1}} \circ \dots \circ F_{\pi_1}$ دوسویی است اگر و تنها اگر هر نگاشت موضعی F_{v_i} دوسویی باشد. بنا به تعریف F_{v_i} داریم:

$$F_{v_i}(x) = (x_{v_1}, \dots, x_{v_{i-1}}, f_{v_i}(x[v_i]), x_{v_{i+1}}, \dots, x_{v_n}) \quad (۵)$$

لذا نگاشت F_{v_i} دوسویی است اگر و تنها اگر نگاشت $g_{x'[v_i]}(x_{v_i}) = f_{v_i}(x[v_i])$ ثابت شده‌ی دلخواه دوسویی باشد. چون $x_{v_i} \in \{0, 1\}$ ، بنابراین حالت رأس v_i تحت نگاشت $g_{x'[v_i]}(x_{v_i})$ یا تغییر می‌کند یا تغییر نمی‌کند. بنابراین $g_{x'[v_i]}(x_{v_i}) = f_{v_i}(x[v_i])$ تنها می‌تواند یکی از نگاشتهای id یا inv باشد که هر دوی این نگاشتهای دوسویی هستند لذا نگاشت $g_{x'[v_i]}(x_{v_i})$ همواره دوسویی است. همچنین وقتی که $g_{x'[v_i]}(x_{v_i}) = f_{v_i}(x[v_i])$ یا نگاشت انعکاس (inv) و یا نگاشت همانی (id) باشد در این صورت $F_{v_i}^2$ لزوماً یک نگاشت همانی است. $F_{v_i}^2 = I$. پس داریم:

$$[F_Y, \pi^*] \circ [F_Y, \pi] = (F_{\pi(1)} \circ \dots \circ \underbrace{F_{\pi(n)} \circ F_{\pi(n)}}_I \circ F_{\pi(n-1)} \circ F_{\pi(1)}) \quad (۶)$$

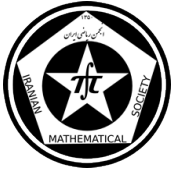
به همین ترتیب ادامه می‌دهیم بالاخره خواهیم داشت:

$$[F_Y, \pi^*] \circ [F_Y, \pi] = I \quad (۷)$$

بنابراین نگاشت $[F_Y, \pi^*]$ وارون (معکوس) نگاشت $[F_Y, \pi]$ می‌باشد. \square

ملاحظه ۶.۱. یک به یک بودن نگاشت $g_{x'[v_i]}(x_{v_i}) = f_{v_i}(x[v_i])$ به این معناست که: دو حالت سیستم که فقط در یک آراینده تفاوت دارند تحت این نگاشت به حالت‌های یکسانی نروند.

مثال ۷.۱. SDS القا شده توسط تابع رأس $f_{110}(x, y, z) = (1+y)(1+z) + (1+xyz)$ روی گراف circ_3 را در نظر می‌گیریم برای حالت‌های سیستم مختلف (x_{i-1}, x_i, x_{i+1}) تحت نگاشت f_{110} جدول زیر را داریم:



جدول ۱

(x_{i-1}, x_i, x_{i+1})	۱۱۱	۱۱۰	۰۰۱	۰۱۰	۰۱۱
$f_{۱۱۰}$	۰	۱	۱	۱	۱

چون حالت‌های $(۰, ۰, ۱)$ و $(۰, ۱, ۱)$ هر دو به حالت (۱) نگاشته شده‌اند. پس نگاشت $f_{۱۱۰}$ یک به یک نیست.

تعریف ۸.۱. توابع $parity_k$ و \overline{parity}_k را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\overline{parity}_k(x_1, \dots, x_k) = 1 + parity_k(x_1, \dots, x_k), \quad parity_k(x_1, \dots, x_k) = \sum_{i=1}^k x_i \pmod{2} \quad (۸)$$

ادعا: SDS القا شده توسط تابع رأس $parity_۴$ روی $circ_۴$ در نظر می‌گیریم. ادعا می‌کنیم SDS - نگاشت $[parity_{circ_۴}, (۰, ۱, ۲, ۳)]$ یک نگاشت وارون‌پذیر است و وارون آن را به دست می‌آوریم.

اثبات. برای هر رأس i ، $x'[i] = (x_{i-1}, x_{i+1})$ را ثابت نگه می‌داریم. نگاشت زیر را در نظر بگیرید:

$$g_{x'[i]}(x_i) = f_i(x_{i-1}, x_i, x_{i+1}) = x_{i-1} + x_i + x_{i+1} \pmod{2} \quad (۹)$$

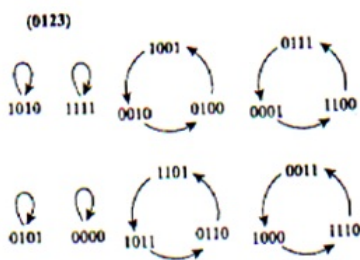
اگر $x_{i-1} + x_{i+1}$ برابر با صفر شود در این صورت $g_{x'[i]}$ یک نگاشت همانی است. از طرف دیگر؛ اگر $x_{i-1} + x_{i+1}$ برابر با یک شود در این صورت $g_{x'[i]}$ نگاشت انعکاس است.

بنابراین طبق (۵.۱) نگاشت $[parity_{circ_۴}, (۰, ۱, ۲, ۳)]$ وارون‌پذیر است و وارون آن عبارتست از:

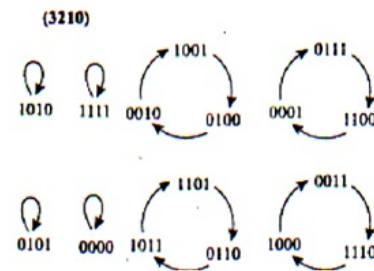
$$[parity_{circ_۴}, (۰, ۱, ۲, ۳)]^{-1} = [parity_{circ_۴}, (۳, ۲, ۱, ۰)]. \quad (۱۰)$$

□

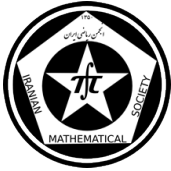
مثال ۹.۱. فضای فاز نگاشت $[parity_{circ_۴}, (۰, ۱, ۲, ۳)]$ و فضای فاز نگاشت $[parity_{circ_۴}, (۳, ۲, ۱, ۰)]$ در شکل‌های زیر نشان داده شده است. فضای فازها مانند هم هستند و اختلاف‌شان در جهت مدارها می‌باشد. در حالت کلی فضای فاز سیستم‌های دینامیکی دنباله‌ای SDS که توسط $parity$ القا می‌شود به صورت اجتماعی از دورها می‌باشد.



(ب) فضای فاز $[parity_{circ_۴}, (۰, ۱, ۲, ۳)]$



شکل ۱: (آ) فضای فاز $[parity_{circ_۴}, (۳, ۲, ۱, ۰)]$



تعریف ۱.۰.۱. تابع $H_K(x) = |F_Y \rightarrow |F_Y$ بطوریکه $H_k(x) = |\{x_i | x_i = 1\}$ باشد در نظر بگیرید.

به مجموعه $\{x \in |F_Y^n | sum_n(x) = k\}$ ؛ کلاس همینگ k می‌نامیم.

قضیه ۱.۱.۱. فرض کنیم (Y, F_Y, π) یک SDS وارون‌پذیر با تابع‌های رأس متقارن $(f_v)_v$ باشد. آنگاه f_v یکی از توابع متقارن روبرو است:

$$f_v = parity_v \quad \text{یا} \quad f_v = 1 + parity_v \quad (11)$$

اثبات. اثبات را با استقرا روی $-H$ کلاسهای k آغاز می‌کنیم. داریم $(\circ) = (\circ, \circ, \dots, \circ)$ پایه استقرا: فرض کنید $f_v(\circ) = y_\circ$. چون (Y, F_Y, π) وارون‌پذیر است لذا طبق قضیه (۴-۱-۲)، f_v یا نگاشت همانی و یا نگاشت انعکاس است. پس:

$$f_v(\circ, \circ, \dots, \circ) = y_\circ \implies f_v(1, \circ, \circ, \dots, \circ) = 1 + y_\circ \quad (12)$$

به طوری که $(1, \circ, \circ, \dots, \circ)$ نمایشی از $-H$ کلاس یک می‌باشد. گام‌های استقرا:

$$x_{L+1} = (\underbrace{1, 1, 1, \dots, 1}_{\text{تا } L+1}, \circ, \dots, \circ) \in H_{L+1} \quad \text{و} \quad x_L = (\circ, \underbrace{1, 1, 1, \dots, 1}_{\text{تا } L}, \circ, \circ, \dots, \circ) \in H_L \quad (13)$$

پس داریم:

$$f_k = (\circ, 1, 1, \dots, 1, \circ, \dots, \circ) = y_L$$

$$f_k = (1, 1, \dots, 1, \circ, \dots, \circ) = 1 + y_L.$$

بنابراین:

$$f_k = (1, 1, 1, \dots, \circ, \dots, \circ) = 1 + 1 + y_L = y_L.$$

□ لذا اگر $y_\circ = \circ$ باشد، آنگاه: $f_v = parity_v$ و اگر $y_\circ = 1$ باشد، آنگاه $f_v = 1 + parity_v$. [۳].

نتیجه ۱.۲.۱. سیستم‌های دینامیکی دنباله‌ای وارون‌پذیرند که، نگاشت موضعی آنها $parity$ یا \overline{parity} باشد [۴].

نتیجه ۱.۳.۱. وارون یک سیستم دینامیکی دنباله‌ای (SDS) دوباره یک سیستم دینامیکی دنباله‌ای است [۴]، [۵].

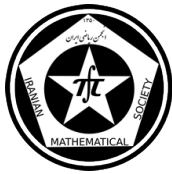
مراجع

- [1] James M. W. Duvall, Characterization of Fixed Points in Sequential Dynamical Systems, Virginia Polytechnic Institute and State University Department of Mathematics, 2009.
- [2] Mortveit H.S., Reidys C. M. An introduction to sequential dynamical systems, (2007).
- [3] Reidys C. M. On acyclic orientations and SDS Adv. Appl. Math., Submitted.
- [4] Henning christian, Barrett C.L., Mortveit H. S., Reidys.. An introduction to sequential dynamical systems, 2008.
- [5] BRIN, Stuck G. Introduction to dynamical systems.

پست الکترونیکی:

ha.rahmani172@gmail.com

Sh_sayad86@yahoo.com



کنترل بهینه‌ی یک مدل بیماری عفونی با واکسیناسیون و درمان

حسین خیری

دانشگاه تبریز

مهران محمدی*

دانشگاه تبریز

چکیده

در این مقاله یک مدل اپیدمی شامل دو کنترل کننده‌ی واکسن ناقص، برای افراد مستعد بیماری، و درمان، برای افراد عفونی، در نظر گرفته شده است که کنترل‌ها لزوماً با یک نرخ ثابت اعمال نمی‌شوند. هدف این است که با استفاده از نظریه‌ی کنترل بهینه حجم بیماری و هزینه‌های مربوط به درمان و واکسن را به حداقل برسانیم. برای این منظور سیستم بهینگی را به دست می‌آوریم و آن را به صورت عددی حل می‌کنیم.

واژه‌های کلیدی: مدل اپیدمی، کنترل بهینه، واکسیناسیون، درمان.

Mathematics Subject Classification [2010]: 13D45, 39B42

۱ مقدمه

هدف علم کنترل، تدوین تئوری‌ها و اصول و قواعد لازم برای تنظیم رفتار سیستم‌های دینامیکی است. در سال‌های اخیر سیستم‌های بیولوژیکی نظیر سیستم بدن انسان به عنوان مجموعه‌های بسیار ظریف و زیبا و اعجاب انگیز و در عین حال پیچیده‌ی کنترلی مورد مطالعه قرار گرفته است.

یک سیستم کنترل عبارت است از مجموعه‌ای از اجزای مختلف که به یکدیگر مربوط هستند و با هم به منظور انجام یک عمل بخصوص کار می‌کنند. یک سیستم کنترل بخصوص را می‌توان به عنوان یک مجموعه از اجزایی که به یک سیگنال پاسخ می‌دهند تعریف کرد. پاسخ این اجزا در حقیقت انجام یک عملکرد می‌باشد. در بسیاری از موارد این عملکرد عبارت است کنترل یک متغیر فیزیکی نظیر سرعت، درجه حرارت، وضعیت، ولتاژ و یا فشار.

یکی از راه‌هایی که می‌توان با استفاده از آن شیوع بیماری‌های همه‌گیر را مورد مطالعه قرار داد نظریه‌ی کنترل بهینه است، که بر پایه‌ی تعریف یک رویکرد برای کنترل سیستم و به دست آوردن بهترین نتیجه ممکن است. واکسیناسیون و درمان دو کنترل برای مدل‌های بیماری عفونی هستند.

در این مقاله مدل اپیدمی SVI^1 که در سال ۲۰۰۳ توسط گومل^۲ و مقدس^۳ ارائه شده در نظر گرفته شده است [۲]. گسترش بیماری عفونی در این مدل بوسیله‌ی یک مدل قطعی که شامل یک مرتبه غیر خطی بیماری، $\frac{I}{1+I}$ ، و دو کنترل کننده‌ی واکسن و درمان شرح داده می‌شود. کنترل‌ها با توجه به زمان متغیر در نظر گرفته شده‌اند و بوسیله‌ی نظریه‌ی کنترل بهینه مورد مطالعه قرار گرفته‌اند تا رویکردی را که منجر به حداقل رسیدن حجم بیماری و هزینه‌های مرتبط با مداخلات می‌شود را برگزینیم. برای این منظور سیستم بهینگی را به دست آورده و سپس به صورت عددی حل می‌کنیم. سپس، شبیه سازی عددی در سناریوهای مختلف نشان داده می‌شود.

*سخنران

^۱Susceptibles-Vaccinated-Infectious^۲A.B. gumel^۳S.M. moghadas



۲ معرفی مدل

مدل در نظر گرفته شده در این مقاله به فرم

$$\begin{aligned} \dot{S} &= \pi - c\beta_1 f(I)S + \alpha I - (\xi + \mu)S, \\ \dot{V} &= \xi S - c\beta_2 f(I)V - \mu V, \\ \dot{I} &= c\beta_1 f(I)S + c\beta_2 f(I)V - (\alpha + \mu)I, \end{aligned} \quad (1)$$

می‌باشد که در آن

$$f(I) = \frac{I}{1+I},$$

S جمعیت افراد مستعد بیماری، V جمعیت افراد واکسینه شده، I جمعیت افراد مبتلا شده به بیماری عفونی، π نرخ مستعد بیماری شدن افراد، β_1 احتمال مبتلا شدن افراد مستعد، β_2 احتمال مبتلا شدن افراد واکسینه شده، ξ نرخ واکسیناسیون افراد مستعد، α نرخ درمان افراد عفونی، μ مرگ طبیعی، c تعداد میانگین تماس بین افراد مستعد و درمان یافته می‌باشد.

۳ رویکرد مداخله‌ی بهینه

مدل (۱) را در نظر می‌گیریم که در آن واکسیناسیون و درمان به ترتیب با توابع $\xi(t)$ و $\alpha(t)$ در معادلات ظاهر شده‌اند. که در این مدل نقش کنترل کننده را دارند و همیشه برخی محدودیت‌هایی را برای آن‌ها در نظر می‌گیریم. برای مثال، ماکزیمم نرخ افراد می‌توانند در یک دوره از زمان واکسیناسیون یا درمان شوند. از این رو مجموعه‌ی کنترل به صورت

$$\Omega = \{(\xi(t), \alpha(t)) : 0 \leq \xi(t) \leq \xi_{\max}, 0 \leq \alpha(t) \leq \alpha_{\max}, t \in [0, T]\}$$

است. در این جا هدف این است که حجم بیماری و هزینه‌های مربوط به واکسیناسیون و درمان افراد را به حداقل برسانیم. هزینه‌های در نظر گرفته شده با مجذور توابع کنترل مربوطه متناسب هستند [۱]. از این رو، مسئله‌ی کنترل بهینه کمینه کردن تابع هدف

$$J(u) = \int_0^T [AI(t) + B\xi^2(t) + C\alpha^2(t)] dt$$

است که $A > 0$ ، $B > 0$ و $C > 0$ فاکتورهای هزینه‌ی بیماری و کنترل‌ها هستند. همچنین شرایط اولیه‌ی $S(0) = S_0$ ، $V(0) = V_0$ و $I(0) = I_0$ را در نظر می‌گیریم که مقادیر S_0 ، V_0 و I_0 همیشه مشخص هستند.

ما مسئله‌ی کنترل بهینه را با به کارگیری اصل بیشینه‌ی پونتریاگین [۳] حل می‌کنیم که شرایط لازم برای بهینگی را فراهم می‌کند. لذا برای این منظور همیلتونین [۳]

$$H(S, V, I, \xi, \alpha, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, t) = AI(t) + B\xi^2(t) + C\alpha^2(t) + \sum_{i=1}^3 \lambda_i f_i$$

را نقطه به نقطه کمینه می‌کنیم. که در آن $f_1 = \dot{S}$ ، $f_2 = \dot{V}$ و $f_3 = \dot{I}$ و λ_i ها متغیرهای الحاقی هستند. و معادلات



جدول ۱: مقادیر پارامترهایی که در سناریو اول استفاده می‌کنیم.

T	α_{max}	ξ_{max}	C	B	A	I_0	V_0	S_0	μ	c	β_2	β_1	π
۶	۰/۹	۰/۹	۱	۱	۵	۱۰۰	۰	۱۷۴۰۰	۰/۰۴	۴	3×10^{-6}	10^{-4}	۷۰۰

الحاقی به صورت

$$\begin{aligned}\dot{\lambda}_1 &= -\frac{\partial H}{\partial S} = \left(\frac{c\beta_1 I}{1+I} + \xi + \mu\right)\lambda_1 - \xi\lambda_2 - \frac{c\beta_1 I}{1+I}\lambda_3 \\ \dot{\lambda}_2 &= -\frac{\partial H}{\partial V} = \left(\frac{c\beta_2 I}{1+I} + \mu\right)\lambda_2 - \frac{c\beta_2 I}{1+I}\lambda_3 \\ \dot{\lambda}_3 &= -\frac{\partial H}{\partial I} = -A + \left(\frac{c\beta_1 S}{(1+I)^2} - \alpha\right)\lambda_1 + \frac{c\beta_2 V}{(1+I)^2}\lambda_2 + \left(\alpha + \mu - \frac{c\beta_1 S + c\beta_2 V}{(1+I)^2}\right)\lambda_3\end{aligned}$$

هستند که $\lambda_1(T) = \lambda_2(T) = \lambda_3(T) = 0$.

کنترل بهینه را با متغیر u^* نشان می‌دهیم. برای به دست آوردن کنترل بهینه‌ی u^* ، شرایط بهینگی

$$\frac{\partial H}{\partial \xi} = 0 \quad \text{و} \quad \frac{\partial H}{\partial \alpha} = 0$$

را در $\xi = \xi^*$ و $\alpha = \alpha^*$ روی مجموعه‌ی $\{t \in [0, T] : 0 \leq \xi \leq \xi_{max}, 0 \leq \alpha \leq \alpha_{max}\}$ در نظر می‌گیریم. از این رو

$$\xi^*(t) = S^* \frac{(\lambda_1 - \lambda_2)}{2B}, \quad \alpha^*(t) = I^* \frac{(\lambda_3 - \lambda_1)}{2C}$$

است و با در نظر گرفتن کران‌های ξ^* و α^* داریم:

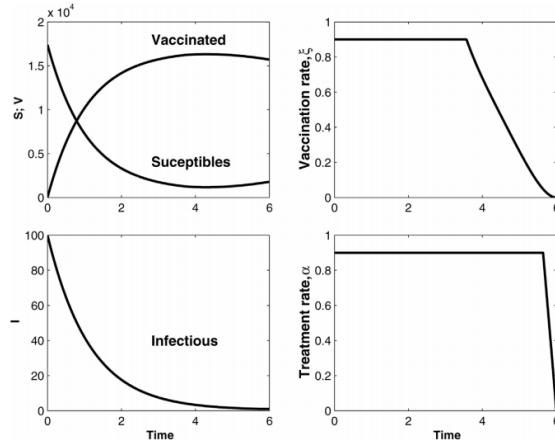
$$\xi^*(t) = \begin{cases} 0 & : S^*(\lambda_1 - \lambda_2) < 0 \\ S^*(\lambda_1 - \lambda_2)/2B & : 0 \leq S^*(\lambda_1 - \lambda_2) \leq 2B\xi_{max} \\ \xi_{max} & : S^*(\lambda_1 - \lambda_2) > 2B\xi_{max}. \end{cases}$$

و

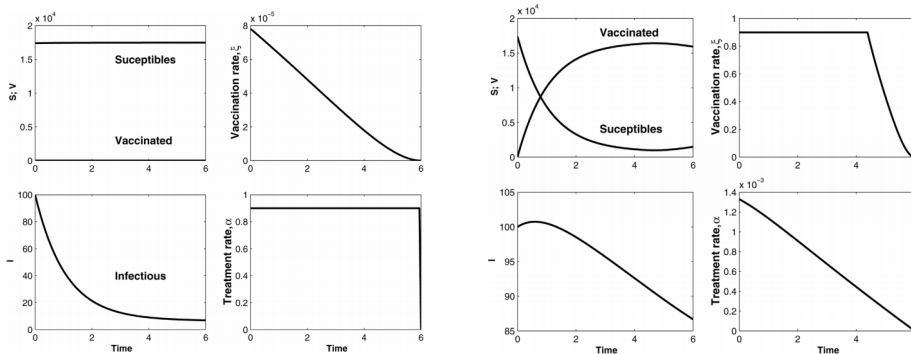
$$\alpha^*(t) = \begin{cases} 0 & : I^*(\lambda_3 - \lambda_1) < 0 \\ I^*(\lambda_3 - \lambda_1)/2C & : 0 \leq I^*(\lambda_3 - \lambda_1) \leq 2C\alpha_{max} \\ \alpha_{max} & : I^*(\lambda_3 - \lambda_1) > 2C\alpha_{max}. \end{cases}$$

۴ نتایج اصلی

معادلات حالت و الحاقی را با در نظر گرفتن مقادیر جدول ۱ (که در مرجع [۱] در نظر گرفته شده است) برای پارامترها با استفاده از روش رانگ کوتای مرتبه ۴ در متلب حل می‌کنیم و نتایج بهینه را به دست می‌آوریم [۱]. شکل ۱ را ببینید.



(آ) هزینه‌های مربوط به واکسن و درمان برابر باشد، برای مثال: $B = C = 1$.



(ب) درمان افراد عفونی بسیار پرهزینه‌تر از (ج) واکسیناسیون افراد مستعد بسیار بسیار پرهزینه‌تر از واکسیناسیون افراد مستعد باشد، برای مثال $B = 1$ و $C = 10^6$.

شکل ۱: نتایج بهینه‌ی سیستم با در نظر گرفتن مقادیر پارامترهای جدول ۱.

مراجع

- [1] B. Buonomo, D. Iacitignola, C. Vargas-De-León, *Qualitative analysis and optimal control of an epidemic model with vaccination and treatment*, Mathematics and Computers in Simulation, 100 (2014) 88–102.
- [2] A.B. Gumel, S.M. Moghadas, *A qualitative study of a vaccination model with non-linear incidence*, Appl. Math. Comput., 143 (2003) 409–419.
- [3] S. Lenhart and J.T. Workman. *Optimal control applied to biological models* Chapman Hall/CRC Mathematical and Computational Biology Series, Chapman Hall/CRC, Boca Raton, FL, 2007.

پست الکترونیکی: mehranmohammadi25@yahoo.com

پست الکترونیکی: hossein.kheiri@yahoo.com

آموزش ریاضی



بررسی بدفهمی‌های دانش‌آموزان در زمینه تبدیل کسر به اعشار در اعداد اعشاری

عباس مفاخری
آموزش و پرورش استان مرکزی

سهیلا غلام آزاد
پژوهشکده برنامه درسی و نوآوری‌های آموزشی

رضا معطی*
آموزش و پرورش استان مرکزی

چکیده

هدف از این مقاله مشخص کردن بخشی از یافته‌های پژوهشی در زمینه شناسایی بدفهمی‌های اعداد اعشاری در زمینه تبدیل کسر به اعشار در اعداد اعشاری است. برای شناسایی بدفهمی‌های رایج دانش‌آموزان در زمینه تبدیل کسر به اعشار در اعداد اعشاری از ۴۳۷ نفر از دانش‌آموزان دوره اول دبیرستان در شهرستان‌های تهران آزمون گرفته شد. نتایج به دست آمده از عملکرد دانش‌آموزان در آزمون طراحی شده نشان داد که یکی از بدفهمی‌های رایج در زمینه تبدیل کسر به اعشار این است که بسیاری از دانش‌آموزان در تمام کسرها صورت کسر را به عنوان جزء صحیح و مخرج کسر را به عنوان جزء اعشار در نظر می‌گیرند.

واژه‌های کلیدی: اعداد اعشاری، تبدیل کسر به اعشار، بدفهمی

Mathematics Subject Classification [2010]: 97F50, 97C99

۱ مقدمه

امروزه آموزش ریاضی در بسیاری از کشورها از اهمیت خاصی برخوردار است. نقش دانش‌آموزان و محتوای ریاضی مورد نیاز دانش‌آموزان دو موضوع مهم در آموزش ریاضی به شمار می‌آید. یکی از موضوعات مهمی که در ریاضیات مدرسه‌ای همواره مورد توجه برنامه‌ریزان درسی ریاضی بوده، اعداد اعشاری است. تبدیل کسر به اعشار یکی از زمینه‌های مهم مرتبط با اعداد اعشاری در ریاضی مدرسه‌ای است. هدف از این مقاله مشخص کردن بخشی از یافته‌های پژوهشی در زمینه بررسی و ریشه‌یابی بدفهمی‌های اعداد اعشاری در زمینه تبدیل کسر به اعشار است.

۲ پیشینه پژوهش

۱.۲ بدفهمی

از دیدگاه ساخت و سازگرایی یکی از مهم‌ترین عوامل در مطالعه یادگیری، چگونگی درک و فهم یادگیرنده از یک مفهوم است. گاهی درک و فهم یادگیرنده دچار اشکال است و با فهم درست مفهوم، فاصله دارد. به همین علت در ادبیات موضوعی روانشناسان یادگیری و آموزش ریاضی، این نوع درک ناقص و ناصحیح بدفهمی یا کج‌فهمی نامیده شده است [۱].

*سخنران



۲.۲ بدفهمی در تبدیل کسر به اعشار

بعضی از دانش‌آموزان با تبدیل کسر به اعشار و برعکس مشکل دارند و آن‌هایی که آن را انجام می‌دهند نمی‌توانند برای الگوریتم رویه‌ای خود منطقی ارائه دهند [۲]. دانش‌آموزان تصور می‌کنند که کسر و اعشار دو نوع متفاوت از اعداد هستند و هیچ کسر و عدد اعشاری برابر وجود ندارد. هیبرت (۱۹۸۶) به تبدیل‌های بی‌مورد اعداد اعشاری به کسرهای معمولی مانند $\frac{4}{10}$ به $\frac{4}{10}$ اشاره می‌کند [۳]. همچنین رسنیک و همکاران بدفهمی‌های دانش‌آموزان را به سه دسته تقسیم می‌کنند: تمرکز بر صورت کسر، $(\frac{3}{3} = 0)$ ، تمرکز بر مخرج کسر $(\frac{3}{3} = 1)$ ، ارتباط بین صورت و مخرج کسر $(\frac{3}{4} = \frac{3}{4})$ [۴].

۳ روش تحقیق

این پژوهش به روش توصیفی انجام گرفته است. برای انجام این پژوهش پرسشنامه‌ای شامل ۱ سؤال (دو قسمتی) ریاضی که براساس ادبیات پژوهشی طراحی و تدوین شد و برای اجرا در اختیار دانش‌آموزان پایه هفتم و هشتم دوره اول دبیرستان (دوم و سوم راهنمایی) قرار گرفت. جامعه آماری این پژوهش کلیه دانش‌آموزان پایه هفتم و هشتم شهرستان‌های استان تهران در سال تحصیلی ۹۲-۱۳۹۱ است. در این پژوهش روش نمونه‌گیری در دسترس مورد استفاده قرار گرفت. در نمونه مورد مطالعه ۴۳۷ نفر از دانش‌آموزان پایه هفتم و هشتم شرکت داشته‌اند. برای بررسی بدفهمی‌های دانش‌آموزان در زمینه تبدیل کسر به اعشار نیز از ابزار آزمون استفاده شده است و برای شناخت بدفهمی‌ها با برخی از دانش‌آموزان مصاحبه انجام شد.

۴ تجزیه و تحلیل داده‌ها

در این بخش به بررسی پاسخ دانش‌آموزان به سؤالات مطرح شده در آزمون خواهیم پرداخت. یک سؤال دو قسمتی در رابطه با تبدیل کسر به اعشار در نظر گرفته شده که به صورت زیر است:

”نمایش اعشاری کسرهای $\frac{24}{100}$ و $\frac{3}{4}$ را بنویسید.”

در بند اول این سؤال پاسخ‌های دانش‌آموزان در تبدیل کسر $\frac{24}{100}$ به یک عدد اعشاری در جدول ۱ خلاصه شده است. در این سؤال ۳۰ درصد از دانش‌آموزان پاسخ نادرست داده‌اند. برای بررسی پاسخ‌های دانش‌آموزان این پاسخ‌ها در پنج نوع

جدول ۱: نحوه و درصد پاسخ‌های دانش‌آموزان در تبدیل کسر $\frac{24}{100}$ به اعشار

نوع پاسخ	دسته	درصد	فراوانی	انواع پاسخ‌ها	تفکر
بدون پاسخ	---	۱۶	۷۰		
درست	---	۵۴	۲۳۶	$0/24$	
	دسته اول	$6/4$	۲۸	$24/100, 24/1$	صورت کسر به عنوان جزء صحیح و مخرج کسر به عنوان جزء اعشاری
	دسته دوم	$16/2$	۷۱	$0/24$	بدفهمی در تشخیص جایگاه صدم
نادرست	دسته سوم	$2/8$	۱۲	$24/001, 24/01, 24/04, 2/4$	ارتباط دادن رقم‌های صورت و مخرج
	دسته چهارم	۳	۱۳	$00/24, 24/00, 24$	تمرکز بر صورت کسر
	دسته پنجم	$1/6$	۷	---	دسته بندی نشده

دسته‌بندی شده‌اند. بدفهمی‌های دانش‌آموزان در این سؤال در چهار دسته در جدول ۱ معرفی شده است. با توجه به جدول ۱ بیشترین بدفهمی دانش‌آموزان در رابطه با دسته اول و دوم است.



در دسته اول دانش‌آموزان صورت کسر را به عنوان جزء صحیح در عدد اعشاری و مخرج کسر را به عنوان جزء اعشاری در نظر می‌گیرند و عدد کسری را به اعشاری تبدیل می‌کنند. در دسته دوم دانش‌آموزان در تشخیص جایگاه صدم با مشکل مواجه هستند، برخی از دانش‌آموزان به دلیل اینکه در عدد $0/1$ یک صفر قبل از رقم یک وجود دارد در عدد $0/24$ نیز یک صفر قبل از 24 در نظر می‌گیرند برخی دیگر با توجه به صفرهای عدد صد (مخرج کسر)، دو صفر برای عدد $0/24$ در نظر می‌گیرند، که یکی قبل از ممیز و یکی بعد از ممیز است.

در بند دوم سوال پژوهش پاسخ‌های دانش‌آموزان در تبدیل کسر $3/4$ به یک عدد اعشاری در جدول ۲ خلاصه شده است.

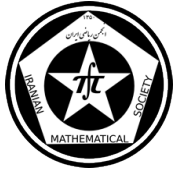
جدول ۲: نحوه و درصد پاسخ‌های دانش‌آموزان در تبدیل کسر $3/4$ به اعشار

تفکر	انواع پاسخ‌ها	فراوانی	درصد	دسته	نوع پاسخ
		۹۶	۲۲	---	بدون پاسخ
	$0/15$	۲۰	$4/6$	---	درست
صورت کسر به عنوان جزء صحیح	$3/20, 3/2$	۱۹۷	۴۵	دسته اول	
تمرکز بر صورت کسر	$0/003, 0/03, 0/3, 3$	۴۵	$10/3$	دسته دوم	
ضرب بین صورت و مخرج	$6/2, 6/6, 6, 2/6, 0/6$	۱۲	$2/8$	دسته سوم	
ارتباط بین صورت و مخرج با ممیز	$2/3, 2/03, 20/3, 3/020$	۳۴	$7/7$	دسته چهارم	نادرست
نمی‌توان عدد را به اعشار تبدیل کرد	اعشار ندارد، ندارد	۶	$1/4$	دسته پنجم	
بدفهمی در تبدیل کسر $15/100$ به اعشار	$15, 1/5, 0/105, 0/015$	۷	$1/6$	دسته ششم	
دسته بندی نشده		۲۱	$4/8$	دسته هفتم	

در این سوال ۷۳ درصد از دانش‌آموزان پاسخ نادرست داده‌اند که پاسخ‌های نادرست در هفت قسمت دسته بندی شده‌اند. بدفهمی‌های دانش‌آموزان در این سوال در شش دسته در جدول ۲ معرفی شده است. با توجه به جدول ۲ بیشترین بدفهمی دانش‌آموزان در رابطه با دسته اول و دوم است. در دسته اول ۴۵ درصد دانش‌آموزان صورت کسر را به عنوان جزء صحیح و مخرج کسر را به عنوان جزء اعشاری در نظر گرفته‌اند. در دسته دوم برخی از دانش‌آموزان فقط با توجه به صورت کسر عدد اعشاری را نوشته‌اند. در دسته‌های دیگر، دانش‌آموزان سعی در ارتباط بین صورت و مخرج داشته‌اند به طوری که برخی از دانش‌آموزان اعداد صورت و مخرج را ضرب کرده‌اند و برخی دیگر از دانش‌آموزان اعداد صورت و مخرج را دو طرف ممیز یا فقط در یک طرف ممیز به کار برده‌اند. در دسته پنجم برخی دانش‌آموزان معتقدند به دلیل اینکه مخرج کسر توانی از 10 نیست نمی‌توان این عدد را به عدد اعشاری تبدیل کرد.

۵ نتایج اصلی

یکی از بیشترین بدفهمی‌های دانش‌آموزان در رابطه با تبدیل کسرهایی می‌باشد که مخرج آنها مضربی از 10 نیست. بدفهمی‌های دانش‌آموزان در تبدیل کسر به اعشار را می‌توان به صورت زیر خلاصه کرد: تعداد زیادی از دانش‌آموزان صورت کسر را به عنوان جزء صحیح و مخرج کسر را به عنوان جزء اعشار در نظر می‌گیرند برای مثال کسر $3/20$ را به صورت $3/20$ تبدیل می‌کنند. در بعضی از پاسخ‌های دانش‌آموزان به دلیل این که مخرج کسر توانی از 10 نیست بر این باورند که نمی‌توان کسر را به اعشار تبدیل کرد. برخی دانش‌آموزان نیز در تبدیل $24/100$ به اعشار، با توجه به صفرهای عدد صد (مخرج کسر)، دو صفر برای عدد $0/24$ در نظر می‌گیرند، که یکی قبل از ممیز و یکی بعد از ممیز است. تعدادی از دانش‌آموزان تمرکز بیشتری بر صورت کسر دارند و صورت کسر را با ممیز یا نماد اعشاری ترکیب کرده و یک عدد اعشاری می‌نویسند. برخی دیگر از دانش‌آموزان نیز سعی می‌کنند یک ارتباط بین صورت و مخرج کسر ایجاد کنند و یک عدد اعشاری بنویسند.



مراجع

- [۱] گویا، زهرا. روایت معلمان. رشد آموزش ریاضی. شماره ۵۷. دفتر انتشارات کمک آموزشی. سازمان پژوهش و برنامه ریزی آموزشی. وزارت آموزش و پرورش. ۱۳۷۹.
- [2] M. Y LAI, and K. W. TSANG, . Understanding Primary Children's Thinking and Misconceptions in Decimal Numbers. International Conference on Primary Education15, 2009.
- [3] V. Steinle, Changes with Age in Students' Misconceptions of Decimal Numbers. Unpublished PhD thesis, University of Melbourne, Melbourne, 2004.
- [4] L. B. Resnick, P. Nesher, F. Leonard, S. Magone, S. Omanson, and I. Peled. Conceptual bases of arithmetic errors: The case of decimal fractions. Journal for Research in Mathematics Education, 20(1).(1989). PP. 8-27.

: r.moeti@yahoo.com
: soheila.azad@yahoo.com
: Abbas.mafakheri@gmail.com



بررسی درک دانش‌آموزان سال سوم متوسطه از مبحث حد در چارچوب نظریه APOS

زهرا شریفی*

دانشگاه تربیت دبیر شهید رجایی تهران

ابراهیم ریحانی

دانشگاه تربیت دبیر شهید رجایی تهران

چکیده

مفهوم حد از جمله مفاهیم ریاضی است که دانش‌آموزان در درک و فهم آن با مشکلات فراوانی روبرو هستند. تحقیق حاضر که یک به روش زمینه‌یابی انجام گرفته است، ساخت و سازهای ذهنی دانش‌آموزان در مفهوم حد را بررسی کرده و آن را با مدل APOS که یکی از نظریه‌های آموزش ریاضی است، تطابق داده است. واژه‌های کلیدی: حد، نظریه آموزش ریاضی، APOS، سوم متوسطه.

۱ مقدمه

حد یکی از مفاهیم مهم و کاربردی در ریاضیات است که پایه بسیاری از مفاهیم حساب دیفرانسیل و انتگرال را تشکیل می‌دهد و به بسیاری از مفاهیم دیگر نظیر بی‌نهایت بزرگ و بی‌نهایت کوچک و همگرایی و غیره مرتبط می‌شود. کارنو [۱] (۱۹۹۱) معتقد است که مفهوم حد دارای یک نقش محوری است که کاملاً ریشه در آنالیز ریاضی دارد. در ریاضیات دبیرستان، معمولاً از حد برای بیان رفتار یک تابع، یک سری یا دنباله‌ای از اعداد استفاده شده و به بررسی رفتار آن در نقاط روی صفحه و یا در بی‌نهایت پرداخته می‌شود. حد در حساب دیفرانسیل و انتگرال و نیز در آنالیز ریاضی، برای تعریف پیوستگی و مشتق و انتگرال مورد استفاده قرار می‌گیرد (ریحانی و همکاران، ۱۳۹۲).

بنا به تحقیقات انجام شده در این زمینه، اکثر دانش‌آموزان در درک مفهوم حد با مشکلات فراوانی روبرو هستند. اکثر این مشکلات به پیچیده بودن این مفهوم مربوط نمی‌شود، بلکه به جنبه‌های رشد شناختی مربوط است که صرفاً از تعاریف آن تولید نمی‌شود (کارنو، ص ۵۵). نتایج تحقیقاتی که در این زمینه انجام شده است نشان می‌دهد که دانش‌آموزان با تکیه بر دانش رویه‌ای و درک ابزاری به کمک قواعد و دستورهای حد، توانایی محاسبه حدهای پیچیده را دارند. آنها با تمرکز بر روشهای جبری و الگوریتمی برای محاسبه‌ی حد در مسایل معمولی کاملاً توانا هستند ولی برای حل مسایل غیر معمول و غیر روتین که نیازمند درک ویژگی‌های خاصی از مفهوم حد باشد ناتوان هستند (جوئر، ۲۰۰۶، نقل شده در ریحانی، ۱۳۹۲)، و چون دانش‌آموزان برای محاسبه حدود توابع همواره به یک روش روتین دسترسی ندارند، آن را سخت و دست نیافتنی می‌دانند و مفهوم حد را درک نمی‌کنند و همین عدم درک مفهومی برای آنها مشکلاتی ایجاد می‌کند که تا پایان تحصیل با آنها همراه خواهد بود. این نظریه یکی از نظریات یادگیری ریاضی در حوزه‌ی آموزش است و مدلی است که بر چارچوب موضعی رشد مفهومی فرد متمرکز است بطوریکه مرتبط با جنبه‌ی مفهومی خاص است و در آن یادگیرنده تلاش می‌کند اطلاعات در دسترس را بفهمد و با استفاده از تمام ساختارهای شناختی در دسترس خود در آن زمان، ارتباطاتی ایجاد نماید (عبدی و همکاران، ۱۳۸۶). با توجه به مطالب بیان شده می‌توان گفت سؤالی که تحقیق حاضر از هدایت می‌کند به صورت زیر است

درک و فهم دانش‌آموزان سال سوم متوسطه از مفهوم حد در کدام یک از سطوح APOS قرار می‌گیرد؟

* سخنران



۲ نتایج اصلی

چارچوب نظری مورد استفاده در این تحقیق APOS نام دارد. نظریه APOS یک نظریه ساختارگرایی است که بر اساس نظریه یادگیری پیازده [۱] بنا شده است. به عقیده پیازده یادگیری دانشی است که توسط فرد در ذهنش برای حل مسایل از طریق تعمق و تفکر ساخته می‌شود و فرآیندی فعال است که دانش‌آموزان در آن برای معنا بخشیدن به یک مفهوم از ساختارهای ذهنی استفاده می‌کنند (دوبینسکی و مک‌دونالد [۲]، ۲۰۰۱). بنابراین دیدگاه درک و فهم یادگیرنده از مفهومی مشخص، می‌تواند در یکی از سطوح عمل [۳]، فرآیند [۴]، شیء [۵] باشد و ممکن است یادگیرنده بتواند طرحواره‌ی [۶] مفهوم را تشکیل دهد (اسلامی مسلم، ۱۳۸۷).

معمولاً هر فرد در ابتدای یادگیری هر مفهومی، آن را در سطح عمل درک می‌کند. عمل به تعریف دوبینسکی و مک‌دونالد [۷] (۲۰۰۱)، تغییر دادن اشیاء از پیش ساخته شده توسط فرد در صورتی است که راه این تغییر به یادگیرنده یاد داده شده باشد. در این مرحله فرد برای انجام تکالیف و حل مسایل نیاز صریح به حافظه‌اش دارد تا بتواند آنها را به صورت گام به گام انجام دهد. زمانی که عملی تکرار می‌شود و شخص روی آن بازتاب می‌کند، می‌تواند یک ساختار ذهنی درونی بسازد که فرآیند نام دارد. در این مرحله شخص می‌تواند همان کار را بدون نیاز به محرک خارجی در مرحله‌ی عمل انجام دهد. همچنین فرد می‌تواند در مورد انجام فرآیند فکر کند بدون اینکه در حقیقت آن را انجام دهد. در یادگیری مفهوم تابع پس از اینکه یادگیرنده چندین بار با تابع به عنوان عمل مواجه شد و روی این عمل بازتاب کرد، می‌تواند عمل تابع را بدون اینکه واقعاً عملیات را اجرا کند درک کند. مثلاً بدون آنکه لازم باشد به ورودی خاصی فکر کند، می‌تواند تصور کند که تابعی خاص، ورودی‌هایی می‌گیرد و خروجی‌هایی می‌دهد. در این صورت فرد قادر است ترکیب توابع و مفهوم معکوس توابع را درک کند.

در این وضعیت می‌گوییم یادگیرنده تابع را به صورت فرآیند درک کرده است. در یادگیری مفهوم حد، زمانی یادگیرنده در سطح فرآیند است که قادر باشد برای محاسبه‌ی $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ یک فرآیند ذهنی از حد تابع برای مقادیری از x که به a نزدیک می‌شود، بسازد و با توجه به مقدارهای ورودی و تغییرات آن مقادیر خروجی را تولید کند. مثلاً حد توابع چند ضابطه‌ای در نقاط مرزی در این سطح قرار می‌گیرد.

پژوهش حاضر یک تحقیق پیمایشی است. نمونه مورد مطالعه ۲۳۴ نفر از دانش‌آموزان دختر پایه سوم تجربی و ریاضی شهرستان قرچک هستند که به شیوه تصادفی طبقه‌ای انتخاب شده‌اند. ابزار جمع‌آوری اطلاعات پرسشنامه محقق ساخته است که سؤالات آن با مشاوره‌ی اساتید محترم آموزش ریاضی و چند تن از دبیران ریاضی متوسطه از مفهوم حد طراحی شده است. آزمون اصلی شامل شش سؤال است که با کمک نرم‌افزار spss میزان آلفای کرونباخ آن ۰/۸۲ محاسبه گردید که بیانگر پایایی قابل قبول آزمون می‌باشد.

در این قسمت به تجزیه و تحلیل برخی سؤالات آزمون می‌پردازیم

۱- توابع زیر را در نظر گرفته و به سوالات آن پاسخ دهید.

$$g(x) = 2x + 1, x \neq 0, f(x) = 2x + 1$$

و

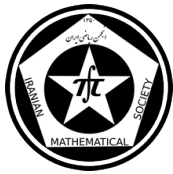
$$h(x) = \begin{cases} 2 + x & x \neq 0 \\ 3 & x = 0 \end{cases}$$

الف) مقادیر $h(2)$ ، $g(2)$ ، $f(2)$ (ب) حدهای زیر را محاسبه کنید.

$$\lim_{x \rightarrow 2} h(x), \lim_{x \rightarrow 2} g(x), \lim_{x \rightarrow 2} f(x)$$

ج) کدام تابع در پیوسته است؟ دلیل خود را توضیح دهید.

هدف از طرح این سؤال محاسبه مقدار توابع در نقطه‌ای خاص و در نظر گرفتن دامنه‌ی آنها و تفاوت بین محاسبه‌ی حدود توابع در همان نقطه، حتی در صورت تعریف نشدن در آن نقطه و بررسی پیوستگی آنها می‌باشد. انتظار می‌رود دانش‌آموزان



با دانشی که از تعریف حد و پیوستگی دارند بتوانند به این سؤال پاسخ دهند. تجزیه و تحلیل این سؤال در مبنای چارچوب AOPS در جدول (۱) ارائه شده است.

سوال	عمل	فرآیند	شی	طرحواره
سطح درک دانش‌آموزان از مفهوم تابع در پاسخ به قسمت الف	۹۴,۰۱	۴۵
سطح درک دانش‌آموزان از مفهوم حد در پاسخ به قسمت ب	۸۵	۵۹,۸۲
سطح درک دانش‌آموزان از مفهوم حد در پاسخ به قسمت ج	۳۵,۰۴	۳۰,۳۴

جدول ۱:

همانطور که در جدول مشاهده می‌شود درصد افرادی که در این سؤال توانسته‌اند درک خوب و درستی از مفهوم تابع و حد آن در سطح طرحواره نمایان سازند زیر ۳۵

پاسخ به سؤال تحقیق

درک و فهم دانش‌آموزان سال سوم متوسطه از مفهوم حد در کدام یک از سطوح AOPS قرار می‌گیرد؟ با توجه با نتایج بدست آمده از تجزیه و تحلیل پاسخها می‌توان نتیجه گرفت که سطح درک دانش‌آموزان شرکت کننده در این تحقیق از مفهوم حد به صورت زیر می‌باشد:

در سطح عمل: ۸۵ در سطح فرآیند: ۶۰ در سطح شیء: ۳۰ در سطح طرحواره: ۲۰ همانطور که مشاهده می‌شود هر چقدر سطوح درک در AOPS بالاتر می‌رود، درصد فراوانی افراد پایین‌تر می‌آید که نشان دهنده‌ی این مطلب می‌باشد که فهم اکثر دانش‌آموزان از حد در سطح عمل یا فرآیند است و زمانی که نیاز به تشکیل شیء حد می‌باشد، این فراوانی کمتر شده بطوریکه فقط ۲۰ درصد افراد شرکت کننده قادر به تشکیل طرحواره‌ای از حد هستند که این طرحواره برای درک مفاهیم مرتبط دیگر از جمله پیوستگی و مشتق و انتگرال لازم و ضروری می‌باشد.

مراجع

- [۱] (۱۳۸۷) اسلامی مسلم، بهزاد. مشکلات یادگیری در ریاضیات دانشگاهی (پایان نامه کارشناسی ارشد)، دانشگاه صنعتی شریف، تهران.
- [۲] ریحانی، ابراهیم؛ بخشعلی‌زاده، شهرناز؛ نظری، کامل. بررسی تأثیر تدریس بر میزان درک دانش‌آموزان دختر سال سوم ریاضی از مفهوم حد و رشد توانایی فضایی آنها با تأکید بر فعالیت‌های مبتنی بر تجسم. فصلنامه تازه‌های علوم شناختی. سال ۱۵. شماره ۱. (۱۳۹۲). ۲۷-۴۲.
- [۳] عبدی، حسین. فدایی، محمدرضا و گویا، زهرا. چرخه بنیادین ساخت مفهوم: زیربنای چارچوب‌های نظری گوناگون، رشد آموزش ریاضی، شماره ۸۸. (۱۳۸۶)
- [۴] سلطانی، محمد. بررسی بدفهمی‌های دانش‌آموزان سال سوم تجربی و ریاضی در مورد مفهوم حد. پایان نامه کارشناسی ارشد. تهران، دانشگاه تربیت دبیر شهید رجایی. (۱۳۹۱)
- [۵] نظری، کامل. بررسی تأثیر تدریس بر میزان درک دانش‌آموزان دختر سال سوم ریاضی از مفهوم حد و رشد توانایی فضایی آنها با تأکید بر فعالیت‌های مبتنی بر تجسم. پایان نامه کارشناسی ارشد. تهران، دانشگاه تربیت دبیر شهید رجایی. (۱۳۹۰)
- [6] Cornu, B. Limits. In A. J. Bishop (Managing Ed.), D. Tall (Vol. Ed.), Mathematics Education Library: Vol. 11. Advanced mathematical thinking. Dordrecht, the Netherlands: Kluwer ((1991) pp. 55-166.
- [7] Dubinsky, E., McDonald, M.A. APOS: A constructivist theory of learning in undergraduate mathematics education research. In Derek Holton et al. (eds.), The teaching and learning of mathematics at university level: An ICMI study (2001) pp. 273-280.



چهل و ششمین کنفرانس ریاضی ایران

۳-۶ شهریور ۱۳۹۴

دانشگاه یزد



دانشگاه یزد

ص: ۴-۴

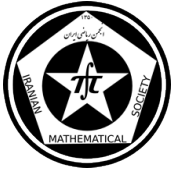
بررسی درک دانش‌آموزان سال سوم متوسطه از مبحث حد در چارچوب نظریه AOPS

سخنرانی

- [8] Erles Szydlik ,Jennifer. Mathematical Beliefs and Conceptual Understanding of the Limit of a Function. Journal for Research in Mathematics Education, 31, (2000) pp. 258-276.

پست الکترونیکی: zahra-sharifi1111@yahoo.com

رياضيات مالي



تحلیل رشد قیمت سهام به روش بیزی و استفاده از چگالی پیشین لاپلاس- دیریکله

دکتر سید کامران قریشی
هیئت علمی دانشگاه قم

الهام دادار*
هیئت علمی دانشگاه مفید

چکیده

در این مقاله رشد قیمت سهام به کمک مدل GARCH تحلیل بیزی می شود. فرض اساسی در این مدل بندی استفاده از نرخ بهره تصادفی است. در واقع فرض می شود که نرخ بهره از یک مدل اتورگرسیو مرتبه اول ایستا $AR(1)$ با عرض از مبدا غیر ثابت پیروی می کند. برای برآورد پارامترها از روش بیزی و توزیع پیشین لاپلاس- دیریکله استفاده می کنیم.

واژه‌های کلیدی: استنباط بیزی، دیریکله لاپلاس، نرخ بهره

Mathematics Subject Classification [2010]: 62F15, 62M05

۱ مقدمه

بدون شك قیمت سهام و نوسانات آن با تاثیرگذاري بر کیفیت قراردادها و اوراق مشتقه و اوراق قرضه و... تاثیر مهمی بر بازارهای مالی دارد. از این جهت پیش بینی قیمت سهام اهمیت قابل توجهی برای کنترل و مدیریت ریسک معاملات و تعیین سود قرضه منصفانه و در نتیجه ارتقای کیفیت قراردادها در بازارهای مالی خواهد داشت. در این مقاله به مدل هایی می پردازیم که می توانند در پیش بینی قیمت هایی که در آنها ویژگی نابرابری واریانسی وجود دارد، نقش بسزایی را ایفا می کنند. یکی از روشهای تجزیه و تحلیل داده های مالی و بررسی چگونگی تغییرات آنها در طول زمان معین در گذشته و پیش بینی چگونگی رخداد آن در آینده استفاده از مدل های سری زمانی است. در این مقاله رشد قیمت سهام به کمک مدل GARCH (معرفی شده توسط انگل [۳])، تحلیل بیزی می شود. فرض اساسی در این مدل بندی استفاده از نرخ بهره تصادفی به جای نرخ بهره ثابت است. در واقع فرض می شود که نرخ بهره از یک مدل اتورگرسیو مرتبه اول ایستا $AR(1)$ با عرض از مبدا غیر ثابت پیروی می کند. برای برآورد پارامترها از روش بیزی و توزیع پیشین لاپلاس- دیریکله استفاده می کنیم. در بخش ۲ مقدمات مورد نیاز و سپس نتایج اصلی ارائه خواهند شد. بخش ۳ به مطالعه شبیه سازی شده خواهد پرداخت.

*سخنران



۲ نتایج اصلی

۱.۲ مقدمات

به منظور مدل بندی قیمت سهام از مدل GARCH معرفی شده توسط انگل [۳] که به صورت زیر است استفاده می کنیم.

$$\ln \frac{S_t}{S_{t-1}} = r_t + \gamma \sqrt{h_t} - \frac{1}{2} h_t + \sqrt{h_t} z_t$$

$$h_t = \beta_0 + \beta_1 h_{t-1} + \beta_2 h_{t-1} (z_{t-1} - \eta)^2,$$

که در آن r_t نرخ بهره تصادفی و γ هزینه ریسک و z_t متغیر نوفه تصادفی است که دارای توزیع نرمال استاندارد می باشد. ما در این مقاله برای مدل بندی نرخ بهره از مدل اتورگرسیو مرتبه اول به شکل زیر استفاده می کنیم.

$$x_t - x_{t-1} := y_t = \delta_t + \beta x_{t-1} + \epsilon_t \quad (1)$$

که در آن $x_t = \log r_t$. لوما [۴] در مقاله خود با در نظر گرفتن توزیع t به عنوان چگالی پیشین برای ϵ_t و استفاده از استنباط بیزی و روشهای نمونه گیری MCMC به برآورد پارامترهای مدل فوق پرداخته است. ما در این مقاله می خواهیم از مدل های لاپلاس-دیریکله به عنوان چگالی پیشین استفاده نماییم. دلیل استفاده از این چگالی های پیشین در مقایسه با روش لوما [۴] در این است که چگالی های شرطی پارامترها موجود بوده و با استفاده از روش نمونه گیری گیبس به راحتی می توان از آن نمونه گرفت.

۲.۲ نتایج اصلی

مدل معادل (۱) را به صورت زیر در نظر بگیرید:

$$y_t = \theta_t + \epsilon_t$$

$$\theta_t = \delta_t + \beta x_{t-1} \quad (2)$$

با فرض چگالی پیشین نرمال با میانگین صفر و واریانس δ^2 برای ϵ_t و نیز توزیع پیشین نرمال با میانگین صفر و واریانس σ_t^2 برای θ_t داریم (۲) $\theta_t \sim N(0, \sigma_t^2(1 + x_{t-1}^2))$. به راحتی می توان دید که مدل (۲) به صورت زیر قابل بازنویسی است

$$y_t \sim N(\theta_t, \delta^2)$$

$$\theta_t \sim N(0, \sigma_t^2(1 + x_{t-1}^2)). \quad (3)$$

ما در اینجا فرض می کنیم $\sigma_t^2 = \psi_t \phi_t \tau$ است که در آن τ تغییرات کلی را کنترل می کند در صورتی که پارامترهای مکانی ϕ_t انحراف از واریانس ها را و ψ_t ها تغییرپذیری را اندازه گیری می کنند. در واقع این فرض امکان القاء تغییرات مکانی در مدل بندی را ایجاد می کند. با فرض چگالی پیشین دیریکله با پارامتر a برای ϕ_t ها و چگالی نمایی با پارامتر $1/2$ برای ψ_t ها، مدل (۳) به صورت زیر قابل بازنویسی است:

$$y_t \sim N(\theta_t, \delta^2)$$

$$\theta_t | \phi_t, \tau \sim DE(\tau \phi_t (1 + x_{t-1}^2)^{\frac{1}{2}}) \quad (4)$$

$$\phi_t \sim Beta(a, (n-1)a)$$

$$\tau \sim G(na, \frac{1}{\tau})$$



قضیه ۱.۲. با مفروضات داده شده در (۴) چگالی پسین به صورت زیر داده می شوند:

$$i.\theta_t | (\psi_t, \phi_t, \tau, x_{t-1}, y_t) \sim N(\mu_t, V_t^\psi)$$

که در آن

$$\mu_t = y_t \left(1 + \frac{1}{\tau^\psi \psi_t \phi_t^\psi (1 + x_{t-1}^\psi)}\right)^{-1}, \quad V_t^\psi = \left(1 + \frac{1}{\tau^\psi \psi_t \phi_t^\psi (1 + x_{t-1}^\psi)}\right)^{-1}.$$

$$ii.\psi_t | (\theta_t, \phi_t, \tau, x_{t-1}, y_t) \sim iG\left(\frac{\phi_t \tau (1 + x_{t-1}^\psi)^{1/2}}{|\theta_t|}, 1\right)$$

$$iii.\tau | (\phi_t, \theta_t, x_{t-1}, y_t) \sim giG\left(n(a-1), 1, \sum_{t=1}^n \frac{|\theta_t|}{\phi_t \sqrt{1 + x_{t-1}^\psi}}\right)$$

$$iv.\phi_t | (\theta_t, x_{t-1}, y_t) \sim \frac{T_t}{\sum_{t=1}^n T_t}$$

که در آن T_1, T_2, \dots, T_n مستقل بوده و دارای توزیع

$$T_t \sim giG\left(a-1, 1, \frac{2|\theta_t|}{\sqrt{1 + x_{t-1}^\psi}}\right)$$

می باشد.

با برآورد مقادیر $\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2, \dots, \hat{\theta}_n$ از توزیع پسین موردنظر و با توجه به رابطه $\theta_t = \delta_t + \beta x_{t-1}$ و حل دستگاه معادلات زیر پارامترهای $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n$ قابل محاسبه است. یعنی داریم

$$\hat{\theta}_1 = \delta_1 + \beta x_0$$

$$\hat{\theta}_2 = \delta_2 + \beta x_1$$

....

$$\hat{\theta}_n = \delta_n + \beta x_{n-1}$$

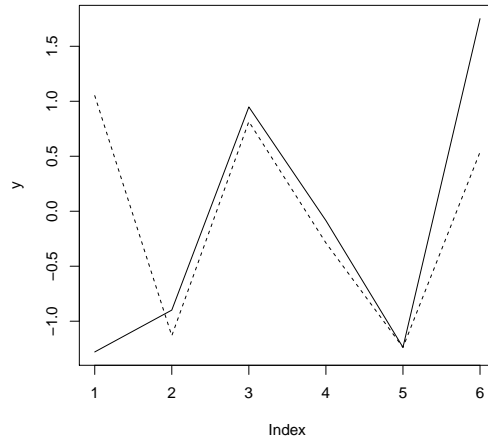
و در نتیجه

$$\beta = \frac{-\sum_{t=1}^n \delta_t}{\sum_{t=1}^n x_{t-1}}$$

رابطه آخر با توجه به $E(\theta_t) \simeq \frac{\sum_{t=1}^n \hat{\theta}_t}{n} = 0$ به دست می آید.

۳ نتایج حاصل از شبیه سازی

برای انجام یک مطالعه شبیه سازی شده ابتدا ۷ داده نرخ بهره کشور کانادا از سال ۱۹۹۰ تا ۲۰۱۰ انتخاب شد. الگوریتم ارائه شده در قضیه ۱.۲ ۱۰۰۰۰ بار تکرار و سپس برای برآورد پارامترها از میانگین استفاده شد. با استفاده از ملاک آماری میانگین توان دوم خطا (MSE) توانایی پیش بینی مدل (۳) ارزیابی شد. با توجه به $MSE = 0.5$ می بینیم که مدل (۳) توانایی بالایی در پیش بینی نرخ بهره دارد.



شکل ۱: مقایسه مقادیر واقعی (نمودار خط ممتد) و شبیه سازی شده (نمودار خط چین)

جدول ۱: مقایسه مقادیر واقعی و مقادیر پیش بینی شده

ردیف	مقادیر واقعی	مقادیر پیش بینی
۱	-۱,۲۷۹۵۹۶۴۱	۱,۰۵۱۳۲۱۹
۲	-۰,۸۹۹۰۵۴۴۴	-۱,۱۳۲۴۳۴۸
۳	۰,۹۴۸۴۹۰۸۱	۰,۸۱۵۲۷۵۱
۴	-۰,۰۸۴۷۵۲۷۹	-۰,۲۸۷۹۴۰۹
۵	-۱,۲۳۷۳۸۶۴۴	-۱,۲۳۸۲۰۷۹
۶	۱,۷۵۱۰۵۸۱۹	۰,۵۳۷۷۷۵۵

مراجع

- [۱] اندرس، والتر، اقتصادسنجی سریهای زمانی با رویکردی کاربردی، ترجمه صادقی شاهدانی مهدی و شوال پور سعید، دانشگاه امام صادق، ۱۳۸۶.
- [2] J. S. Dagpunar, *Simulation and Monte Carlo with applications in finance and MCMC*, John Wiley, 2007.
- [3] R. Engle, and V. Ng, *Measuring and testing the impact of news on volatility*, J. Finance, 48(1993), pp. 1749-1778.
- [4] A. Luoma, *Baysian analysis of equity-linked savings contracts with American-style options*, Quantitative Finance, 14(2014), pp. 343-356.

پست الکترونیکی: edadar@mofidu.ac.ir
پست الکترونیکی: atty-ghoreisi@yahoo.com



مدل‌بندی جواب معادلات دیفرانسیل تصادفی نوع ایتو به روش ماکسیمم درست‌نمایی مطالعه موردی: مدل‌سازی شاخص قیمت ذغال سنگ در بورس تهران

چکیده

معادلات دیفرانسیل تصادفی همیشه دارای جواب صریحی نیستند ناگزیر باید از روش‌های تقریبی برای تخمین جواب استفاده کرد. در این مقاله سعی شده تا با معرفی روش براورد درست‌نمایی ماکسیمم ضرایب این معادلات را برای داده‌های شاخص ذغال سنگ تخمین بزنیم و از معادله دیفرانسیل تصادفی بدست آمده برای پیش‌بینی داده‌های شاخص ذغال سنگ استفاده می‌کنیم.

واژه‌های کلیدی: برآورد درست‌نمایی ماکسیمم، معادلات دیفرانسیل تصادفی، پیش‌بینی

Mathematics Subject Classification [2010]: 13D45, 39B42

۱ مقدمه

یکی از ابزارها برای مدل‌سازی نوسانات شاخص‌های اقتصادی مانند قیمت گذاری سهام، آپشن‌ها، شاخص‌های بورس، نرخ بهره و غیره، معادلات دیفرانسیل تصادفی است. فرم کلی معادلات دیفرانسیل تصادفی که در مسائل مالی کاربرد دارد به صورت زیر است:

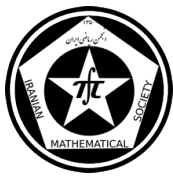
$$d(X_t, \theta) = f(X_t, \theta)dt + g(X_t, \theta)dW_t, \quad (1)$$

که در آن W_t حرکت بروانی استاندارد، توابع قطعی (غیر تصادفی) $f(\cdot, \cdot)$ و $g(\cdot, \cdot)$ به ترتیب توابع رانش و انتشار θ بردار پارامترهای مجهول است. به معادلات به این فرم، از نوع ایتو گفته می‌شود. با در نظر گرفتن فرم‌های مختلفی برای توابع $f(\cdot, \cdot)$ و $g(\cdot, \cdot)$ معادلات دیفرانسیل مختلفی با کاربرد های مالی بدست می‌آید. روشهای مختلفی برای این کار وجود دارد. یکی از این روش‌ها، روش آماری ماکسیمم درست‌نمایی است. در این روش با ماکسیمم سازی تابع درست‌نمایی، پارامترها برآورد می‌شوند. معادله درست‌نمایی تنها در برخی حالات خاص دارای جواب است. در حالت کلی معادله درست‌نمایی نیاز به روش‌های تقریبی دارد. از جمله روش‌هایی که می‌توان نام برد شبیه‌سازی‌های عددی [۴] و تقریب چگالی انتقال است که در ادامه با استفاده از تقریب چگالی انتقال و روش درست‌نمایی ماکسیمم پارامترهای مدل (۱) رابراورد می‌کنیم. فرض کنید X_{t_0} مقدار اولیه فرآیند X_t باشد و در نقاط زمانی t_0, t_1, \dots, t_n مقادیر $X_{t_0}, X_{t_1}, \dots, X_{t_n}$ ثبت شده باشد. اگر $\Delta t = t_i - t_{i-1}$ ثابت باشد، تابع چگالی انتقال فرآیند را به صورت زیر نشان می‌دهیم.

$$p_\theta(X_{t_i} | X_{t_{i-1}}, \Delta t) = p_\theta(\Delta t, X_{t_i}, X_{t_{i-1}})$$

با توجه به ویژگی مارکوفی فرآیند، تابع درست‌نمایی به صورت زیر نوشته می‌شود

$$L(\theta) = \prod_{i=1}^n p_\theta(\Delta t, x_i, x_{i-1}) p_\theta(x_0)$$



به لگاریتم آن یعنی $\ell_\theta = \sum_{i=0}^n \log p_\theta(\Delta t, x_i, x_{i-1}) + \log p_\theta(x_0)$ تابع لگاریتم درست‌نمایی گفته می‌شود. به مقداری از θ که این تابع را ماکسیمم می‌کند، برآورد ماکسیمم درست‌نمایی θ گفته می‌شود [۳]. معادله $\ell'(\theta) = 0$ همیشه دارای جواب صریح نیست. زیرا، تابع چگالی انتقال همیشه دارای فرم بسته‌ای نیست. بنابراین باید از روشهای تقریبی برای تقریب تابع چگالی انتقال استفاده شود. در این مقاله از روش‌های تقریبی اوزاکی^۱ و شوچی-اوزاکی^۲ (در اینجا به اختصار آن را شوچی می‌نامیم) استفاده شده است [۵]. در این روش‌ها، تابع رانش در معادلات دیفرانسیل تصادفی به وسیله‌ی یک تابع خطی تقریب زده می‌شود به همین دلیل به آن‌ها روش خطی‌سازی محلی نیز گفته می‌شود. تابع چگالی انتقال آن‌ها گاوسی است (برای مطالعه‌ی بیشتر [۵] را ببینید). از دو معیار AIC ^۳ و MAD ^۴ برای انتخاب بهترین مدل استفاده می‌کنیم. حالت کلی معیار AIC برابر $2k - 2\ln(L)$ که k تعداد پارامترهای مدل آماری است و L مقدار ماکسیمم درست‌نمایی برای مدل برآورد شده است. مدلی که دارای AIC کمتری باشد، مدل بهتری است [۳]. معیار MAD برابر $(\sum_{i=1}^n |X_i - \hat{X}_i|)/n$ است که X_i مقدار مشاهده شده، \hat{X}_i مقدار شبیه‌سازی شده و n تعداد داده‌ها است. مدلی که دارای MAD کمتری باشد، مدل بهتری است. مدل‌های زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{array}{ll} \text{مدل ۱} & dX_t = (\theta_1 \theta_2 X_t + \theta_3 X_{T^*}) dt + \theta_4 X_t^{\theta_5} dW_t \\ \text{مدل ۲} & dX_t = (\theta_1 + \theta_2 X_t) dt + \theta_3 X_t^{\theta_4} dW_t \\ \text{مدل ۳} & dX_t = (\theta_1 + \theta_2 X_t) dt + \theta_3 \sqrt{X_t} dW_t \\ \text{مدل ۴} & dX_t = (\theta_1 X_t) dt + \theta_2 X_t^{\theta_3} dW_t \end{array}$$

به مدل‌های ۱ تا ۴ به ترتیب آیت ساهالیا^۵، چان-کارلوی-لوگستف-سندرز^۶، کاکس-انگرسول-راس^۷، کشش ثابت واریانس^۸ گفته می‌شود.

۲ مدل‌بندی و پیش‌بینی

داده‌های شاخص ذغال سنگ شامل ۲۴۱ داده از تاریخ ۱۳۹۲/۶/۱۲ تا ۱۳۹۳/۶/۵ است. ما از ۲۲۹ داده برای برآورد پارامتر مدل‌های بالا استفاده می‌کنیم و از بقیه‌ی داده‌ها برای پیش‌بینی استفاده می‌کنیم. پارامترهای بدست آمده در جدول ۱ نشان داده شده است. برای هر مدل، روشی که دارای AIC و MAD کمتری باشد را انتخاب می‌کنیم. در مدل‌های ۱ و ۳ روش شوچی و در مدل‌های ۲ و ۴ روش اوزاکی روش‌های بهتری هستند. برای پیش‌بینی ۱۳ داده‌ی بعدی از این مدل‌ها استفاده می‌کنیم و با داده‌ی اصلی مقایسه می‌کنیم که در شکل ۱ و جدول ۲ نشان داده شده است. در مدل‌های انتخاب شده مدلی که دارای کمترین AIC است یعنی مدل ۲ را انتخاب می‌کنیم. همانطور که مشاهده می‌کنید بهترین تطبیق را با داده‌ی اصلی دارد.

مراجع

- [1] K.Boukhetala, A.Chouaib Guidoum *Estimation of Stochastic Differential Equations*, Sim.DiffProc Package Version 2.6, 2014.

^۱Ozaki

^۲Shoji-Ozaki

^۳Akaike Information Criterion

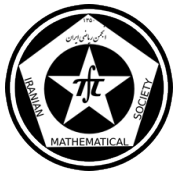
^۴Mean Absolute Deviations

^۵AitSahalia

^۶Chan-Karloyi-Logstaff-Sanders

^۷Cox-Ingersoll-Ross

^۸Constant Elasticity of Variance



جدول ۱: برآورد پارامترهای مدل‌های ۱، ۲، ۳ و ۴ برای داده‌های ذغال سنگ

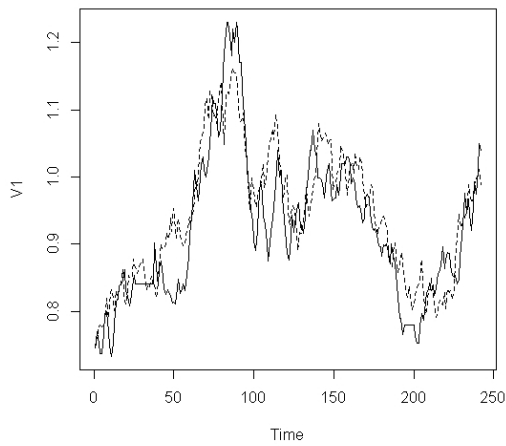
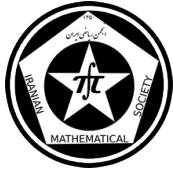
		θ_1	θ_2	θ_3	θ_4	θ_5	AIC	MAD
روش شوچی								
مدل ۱	Estimate	۰٫۰۶۵۳	-۰٫۱۱۵۲	۰٫۰۴۷۹	۰٫۰۲۴۱	۱٫۴۶۰	-۱۱۰۳٫۱۸	۰٫۰۵۸۱
	Std.Error	۰٫۰۸۶۳	۰٫۱۸۶۵	۰٫۰۹۹۸۶	۰٫۰۰۱۴	۰٫۴۰۴۱		
مدل ۲	Estimate	۰٫۰۲۴۴	-۰٫۰۲۶۱	-۰٫۰۲۴۲	۱٫۵۱۱۸	--	-۱۱۰۴٫۷۹۵	۰٫۰۵۲۸
	Std.Error	۰٫۰۱۲۴	۰٫۰۱۴۰	۰٫۰۰۱۴	۰٫۳۹۹۷			
مدل ۳	Estimate	۰٫۰۲۲۷	-۰٫۰۲۴۲	۰٫۰۲۲۴	--	--	-۱۱۰۰٫۳۸۲	۰٫۰۵۶۵
	Std.Error	۰٫۰۱۲۲	۰٫۱۳۳۶	۰٫۰۰۱۰				
مدل ۴	Estimate	۰٫۰۰۱۱	-۰٫۰۲۴۰	۱٫۴۷۸	--	--	-۱۱۰۲٫۸۸۷	۰٫۰۵۸۵
	Std.Error	۰٫۰۰۱۵	۰٫۰۰۱۴	۰٫۳۹۷۷				
روش اوزاکی								
مدل ۱	Estimate	۰٫۱۱۹۰	-۰٫۲۳۲۱	۰٫۱۱۰۶	-۰٫۰۲۴۸	۱٫۸۹۵۸	-۱۱۰۱٫۸۸۳	۰٫۰۵۹
	Std.Error	۰٫۰۸۷۸	۰٫۱۹۰۸	۰٫۱۰۲۷	۰٫۰۰۱۵	۰٫۴۰۷۵۱		
مدل ۲	Estimate	۰٫۰۲۴۳	-۰٫۰۲۶۰	-۰٫۰۲۳۹	۱٫۵۲۰۲	--	-۱۱۰۴٫۷۹۶	۰٫۰۴۹۷
	Std.Error	۰٫۰۱۲۴	۰٫۰۱۳۹	۰٫۰۰۱۴	۰٫۰۳۹۹۶			
مدل ۳	Estimate	۰٫۰۲۲۲	-۰٫۰۲۳۷	-۰٫۰۲۲۱	--	--	-۱۱۰۰٫۲۲۷	۰٫۰۵۳۹
	Std.Error	۰٫۰۱۲۲	۰٫۱۳۳	۰٫۰۰۱۰				
مدل ۴	Estimate	۰٫۰۰۱۲	-۰٫۰۲۴۱	۱٫۴۷۸۵	--	--	-۱۱۰۲٫۸۸۷	۰٫۰۵۴۸
	Std.Error	۰٫۰۰۱۵	۰٫۰۰۱۴	۰٫۳۹۷۸				

جدول ۲: ۱۳ داده‌ی اصلی و ۱۳ داده‌ی پیش‌بینی شده از تاریخ ۱۳۹۳/۵/۲۰ تا ۱۳۹۳/۶/۸. داده‌ها در 10^{-3} ضرب شده‌اند.

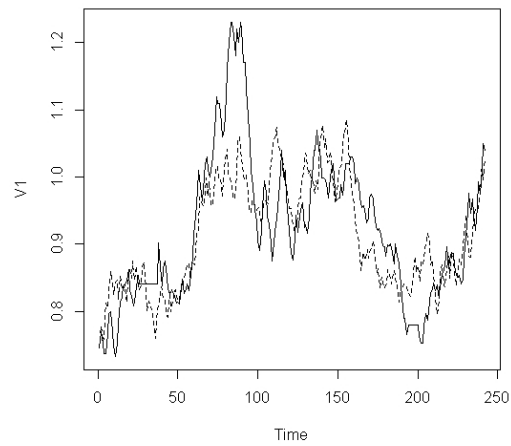
مدل	۰٫۸۸۰۷	۰٫۹۱۱۹	۰٫۹۴۷۵	۰٫۹۷۵	۰٫۹۴۵۸	۰٫۹۶۷۳	۰٫۹۴۴۴	۰٫۹۱۹۹	۰٫۹۵۵۵	۰٫۹۹۳۲	۰٫۹۷۴	۱٫۰۱۰۵	۱٫۰۴۷۵
مدل ۱	۱٫۰۲۷۳	۱٫۰۴۰۴	۱٫۰۹۱۶	۱٫۰۶۸۷	۱٫۰۲۸۴	۱٫۰۲۴۱	۱٫۰۵۹۷	۱٫۰۵۹۱	۱٫۰۴۶۸	۱٫۰۱۶۰	۱٫۰۲۴۰	۱٫۰۱۱۱	۰٫۹۶۳۰
مدل ۲	۰٫۸۹۵۳	۰٫۸۹۷۲	۰٫۸۸۷۲	۰٫۸۸۵۴	۰٫۹۰۱۴	۰٫۹۲۵۸	۰٫۹۲۳۴	۰٫۹۴۵۱	۰٫۹۲۲۶	۰٫۹۵۹۱	۰٫۹۶۲۰	۰٫۹۵۶۱	۰٫۹۶۶۵
مدل ۳	۱٫۰۰۲۹	۰٫۹۶۵۳	۱٫۰۰۷۵	۱٫۰۱۷	۱٫۰۰۱۴	۰٫۹۷۱۵	۱٫۰۱۲۸	۱٫۰۴۰۶	۱٫۰۳۶۶	۱٫۰۴۶۲	۱٫۰۱۳۹	۱٫۰۲۸۴	۱٫۰۶۶۱
مدل ۴	۰٫۸۹۹۶	۰٫۹۴۵۰۳	۰٫۹۸۷۳	۰٫۹۵۸۰	۰٫۹۵۲۸	۰٫۹۴۴۱	۰٫۹۳۳۰	۰٫۹۰۱۱	۰٫۹۳۱۶	۰٫۹۶۱۷۴	۰٫۹۵۷۷	۰٫۹۹۷۱	۱٫۰۲۹۶

- [2] K. P. Burnham, D. R. Anderson *Model Selection and Multimodel Inference : A Practical Information Theoretic Approach*, 2nd ed. Springer-Verlag, 2002.
- [3] L. Chenxu *Maximum-Likelihoods Estimation for Diffusion Processes via Closed-form Density Expansions* Institute of Mathematical Statistics, Vol.41, 2013, pp.1350-1380.
- [4] A. Lo *Maximum likelihood estimation of generalized Itô processes with discretely sampled data. Econometric Theory*, Vol.4, 1988, pp.231-247.
- [5] S. M. Iacus, *Simulation and Inference for Stochastic Differential Equations With R Examples*, Springer, Milano, 2008.

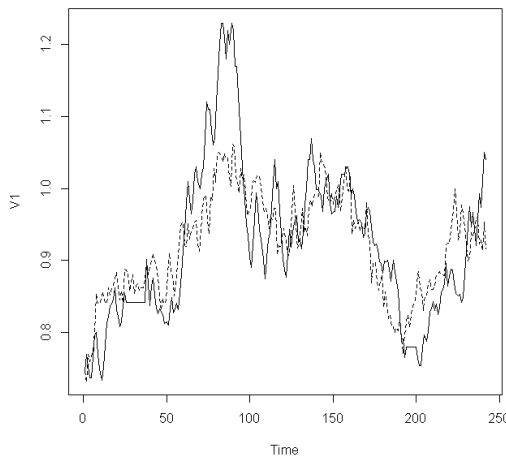
پست الکترونیکی: saryazdim@stu.yazd.ac.ir



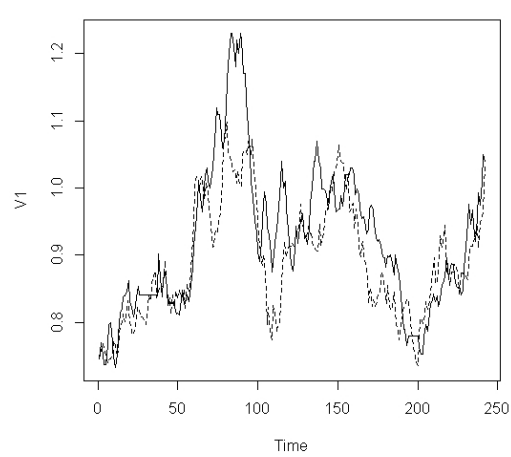
(ب) مدل ۲ روش اوزاکی



(آ) مدل ۱ روش شوچی



(د) مدل ۴ روش اوزاکی



(ج) مدل ۳ روش شوچی

شکل ۱: نمودار داده‌های اصلی (به رنگ سیاه) و نمودار داده‌های شبیه‌سازی شده (نقطه‌چین)

هندسه



توزیع های گسترده و اسپری ها

اسماعیل عزیزپور*

دانشگاه گیلان

چکیده

با فرض وجود یک میدان برداری مدرج به همراه یک توزیع گسترده روی یک منیفلد مدرج، نشان می دهیم یک سیستم مختصاتی وجود دارد که نسبت به آن میدان مذکور دارای نمایش یک میدان معادله دیفرانسیل مرتبه دوم است

واژه های کلیدی: منیفلد مدرج، توزیع گسترده، میدان معادله دیفرانسیل مرتبه دوم

Mathematics Subject Classification [2010]: 58 50, 34 26

۱ مقدمه

فرض کنید (M, \mathcal{A}_M) یک منیفلد مدرج [۲] از بعد (m, n) و \mathcal{D} یک توزیع گسترده از رتبه (r, s) باشد، در [۱] نشان داده شده است که برای هر $y \in M$ یک همسایگی مختصاتی U شامل y با مختصات

$$\{(q_a, y_i; \eta_\rho, \theta_\alpha) \mid 1 \leq q \leq m-r, 1 \leq i \leq m, 1 \leq \rho \leq n-s, 1 \leq \alpha \leq n\} \quad (1)$$

وجود دارد بطوریکه

$$\mathcal{D} = \left\langle \frac{\partial}{\partial y_i}; \frac{\partial}{\partial \theta_\alpha} \right\rangle, 1 \leq i \leq r, 1 \leq \alpha \leq s.$$

فرض کنید یک میدان برداری مدرج F روی (M, \mathcal{A}_M) داریم که به \mathcal{D} تعلق نداشته و $[F, \mathcal{D}] \cap \mathcal{D} = \{0\}$. نسبت به سیستم مختصاتی (۱)، F دارای نمایش موضعی زیر است

$$F = f^a \frac{\partial}{\partial q_a} + f^i \frac{\partial}{\partial y_i} + g^\rho \frac{\partial}{\partial \eta_\rho} + g^\alpha \frac{\partial}{\partial \theta_\alpha}. \quad (2)$$

مجموعه میدان های برداری مدرج روی (M, \mathcal{A}_M) که به صورت $V_1 + [F, V_2]$ نوشته می شود را با \mathcal{W} نمایش می دهیم. اگر قرار دهیم $C_i = [F, \frac{\partial}{\partial y_i}]$ و $C_\alpha = [F, \frac{\partial}{\partial \theta_\alpha}]$ در این صورت $\{ \frac{\partial}{\partial y_i}, C_i; \frac{\partial}{\partial \theta_\alpha}, C_\alpha \}$ یک پایه موضعی برای \mathcal{W} است.

نسبت به همسایگی $\mathcal{U} = (U, \mathcal{A}_U)$ از $U \subset M$ با مختصات $(q_a, y_i; \eta_\rho, \theta_\alpha)$ زیر منیفلد مدرجی از شروط $y_i = 0$ و $\theta_\alpha = 0$ حاصل خواهد شد که آنرا با (N, \mathcal{A}_N) نمایش می دهیم. تابع تصویر $(\pi, \pi^*) : \mathcal{U} \mapsto (N, \mathcal{A}_N)$ میدان های برداری مدرج C_α و C_i را بترتیب به \bar{C}_α و \bar{C}_i تصویر می کند. اگر توزیع تولید شده توسط \bar{C}_α و \bar{C}_i روی (N, \mathcal{A}_N) را با $\bar{\mathcal{W}}$ نمایش دهیم این توزیع متشکل از تصویر میدان های برداری مدرج تصویرپذیر در \mathcal{W} می باشد. این

* سخنران



توزیع، گسترده بوده و همانند قبل، یک سیستم مختصاتی مانند $(v_b, w_i; \gamma_\lambda, \sigma_\alpha)$ (برای $\lambda = 1, \dots, m - 2r$) وجود دارد بطوریکه نسبت به مختصاتی موضعی $(v_b, w_i, y_i; \gamma_\lambda, \sigma_\alpha, \theta_\alpha)$ روی (M, \mathcal{A}_M) داریم

$$C_i = [F, \frac{\partial}{\partial y_i}] = -\frac{\partial f^j}{\partial y_i} \frac{\partial}{\partial w_j} - \frac{\partial g^\alpha}{\partial y_i} \frac{\partial}{\partial \sigma_\alpha} \pmod{\mathcal{D}},$$

$$C_\alpha = [F, \frac{\partial}{\partial y_i}] = -(-1)^{|f^j|} \frac{\partial f^j}{\partial \theta_\alpha} \frac{\partial}{\partial w_j} - (-1)^{|g^\beta|} \frac{\partial g^\beta}{\partial \theta_\alpha} \frac{\partial}{\partial \sigma_\beta} \pmod{\mathcal{D}}.$$

قضیه ۱.۱. نسبت به مفروضات قبل برای $\mathcal{D}, \mathcal{W}, C_i$ و C_α ، مختصات موضعی $(\tilde{v}_b, \tilde{w}_i, \tilde{y}_i; \tilde{\gamma}_\lambda, \tilde{\sigma}_\alpha, \tilde{\theta}_\alpha)$ روی (M, \mathcal{A}_M) وجود دارد بطوریکه

$$\mathcal{D} = \left\langle \frac{\partial}{\partial \tilde{y}_i}; \frac{\partial}{\partial \tilde{\theta}_\alpha} \right\rangle, \quad 1 \leq i \leq r, \quad 1 \leq \alpha \leq s.$$

$$C_i = -\frac{\partial}{\partial \tilde{w}_i}; \quad C_\alpha = -\frac{\partial}{\partial \tilde{\sigma}_\alpha} \pmod{\mathcal{D}}.$$

اثبات. با توجه به مجاسبات انجام شده و با انجام تغییر مختصات مناسب، نتیجه حاصل خواهد شد. \square

آنچه که اکنون دنبال خواهیم کرد مشخص نمودن شکل و نمایش میدان F است.

باز هم همانند مفروضات قبل، فرض می‌کنیم \mathcal{D}, \mathcal{W} توزیع های گسترده، $F \in \mathcal{W}$ و $N = \{y \in M | F(y) \in \mathcal{D}\}$ غیر تهی باشد. همچنین فرض می‌کنیم هرکدام از میدان های برداری مدرج $[C_i, \frac{\partial}{\partial y_i}]$ ، $[C_\alpha, \frac{\partial}{\partial y_i}]$ و $[C_\beta, \frac{\partial}{\partial \theta_\alpha}]$ در توزیع \mathcal{D} باشند. در این صورت میدان های برداری $C_i = [F, \frac{\partial}{\partial y_i}]$ و $C_\alpha = [F, \frac{\partial}{\partial \theta_\alpha}]$ بر حسب مولد های \mathcal{W} یعنی $\{\frac{\partial}{\partial y_i}, \frac{\partial}{\partial \theta_\alpha}, C_j, C_\beta\}$ نوشته می‌شوند. اگر نمایش F در \mathcal{W} بصورت

$$F = f^i \frac{\partial}{\partial y_i} + \bar{f}^\alpha \frac{\partial}{\partial \theta_\alpha} + g^i C_i + \bar{g}^\alpha C_\alpha$$

باشد آنگاه به پیمانه \mathcal{D} ، نمایش C_i عبارتست از

$$C_i = -\frac{\partial g^j}{\partial y_i} C_j - \frac{\partial \bar{g}^\alpha}{\partial y_i} C_\alpha$$

در نتیجه $-\delta_i^j = \frac{\partial g^j}{\partial y_i}$ و $\frac{\partial \bar{g}^\alpha}{\partial y_i} = 0$. به همین ترتیب به پیمانه \mathcal{D} ، نمایش C_α عبارتست از

$$C_\alpha = -(-1)^{|F|} \frac{\partial g^i}{\partial \theta_\alpha} C_i - (-1)^{|F|} \frac{\partial \bar{g}^\alpha}{\partial \theta_\beta} C_\beta,$$

در نتیجه $\frac{\partial \bar{g}^\beta}{\partial \theta_\alpha} = (-1)^{|F|} \delta_\alpha^\beta$ و $\frac{\partial g^i}{\partial \theta_\alpha} = 0$.

از طرف دیگر ماتریس ژاکوبین توابع g^i و \bar{g}^α نسبت به $\frac{\partial}{\partial y_i}$ و $\frac{\partial}{\partial \theta_\alpha}$ ناتباهیده بوده و از رتبه (r, s) بوده و در نتیجه معرف زیر منیفلدی مانند N از (M, \mathcal{A}_M) است. اگر مختصات روی آنرا $(v_b, w_i; \gamma_\lambda, \sigma_\alpha)$ در نظر بگیریم نسبت به مختصات جدید، F دارای نمایش

$$F = h^i \frac{\partial}{\partial y_i} + \bar{h}^b \frac{\partial}{\partial v_b} + \bar{h}^b \frac{\partial}{\partial w_i} + l^\alpha \frac{\partial}{\partial \theta_\alpha} + \bar{l}^\lambda \frac{\partial}{\partial \gamma_\lambda} + \bar{l}^\alpha \frac{\partial}{\partial \sigma_\alpha} \quad (3)$$

است که ضرایب توابعی بر حسب $(v_b, w_i, y_i; \gamma_\lambda, \sigma_\alpha, \theta_\alpha)$ هستند.

قبلا گفته شد که روی این زیر منیفلد $C_\alpha = -\frac{\partial}{\partial \sigma_\alpha}$ ، $C_i = -\frac{\partial}{\partial w_i}$. با انجام محاسبات براحتی می‌توان نتیجه

گرفت

$$\bar{h} = 0, \quad \bar{h}^b = y_i, \quad \bar{l}^\alpha = \theta_\alpha.$$



قضیه ۲.۱. فرض کنید D و \mathcal{W} گسترده باشند. اگر $F \in \mathcal{W}$ و $N = \{y \in M \mid F(y) \in D\}$ ناتهی باشد در اینصورت یک سیستم مختصاتی وجود دارد که نسبت به آن F دارای نمایش یک میدان معادله دیفرانسیل مرتبه دوم است یعنی

$$F = y_i \frac{\partial}{\partial w_i} + h^i \frac{\partial}{\partial y_i} + \theta_\alpha \frac{\partial}{\partial \sigma_\alpha} + l^\alpha \frac{\partial}{\partial \theta_\alpha}$$

حال اگر F متعلق به \mathcal{W} نباشد از (۳) نتیجه می شود

$$\frac{\partial \bar{h}^b}{\partial w_i} = 0, \quad \frac{\partial \bar{l}^\lambda}{\partial w_i} = 0.$$

با استفاده از روابط

$$-\frac{\partial}{\partial w_i} = C_i = [F, \frac{\partial}{\partial y_i}]; \quad -\frac{\partial}{\partial \sigma_\alpha} = C_\alpha = [F, \frac{\partial}{\partial \theta_\alpha}]$$

نتیجه می شود

$$\frac{\partial \bar{h}^j}{\partial y_i} = \delta_i^j, \quad \frac{\partial \bar{l}^\alpha}{\partial y_i} = 0.$$

با انجام یک تغییر متغیر می توان نتیجه گرفت $\bar{l}^\beta = \theta_\beta$ و $\bar{h}^j = y_j$.

قضیه ۳.۱. فرض کنید D و \mathcal{W} گسترده باشند. اگر F متعلق به \mathcal{W} نباشد و $[F, \mathcal{W}] \subset \mathcal{W}$ در اینصورت یک سیستم مختصاتی وجود دارد که نسبت به آن F دارای نمایش زیر است

$$F = \frac{\partial}{\partial v_\gamma} + y_i \frac{\partial}{\partial w_i} + h^i \frac{\partial}{\partial y_i} + \frac{\partial}{\partial \gamma_\gamma} + \theta_\alpha \frac{\partial}{\partial \sigma_\alpha} + l^\alpha \frac{\partial}{\partial \theta_\alpha}.$$

مراجع

- [1] J. Monterde, J. Munoz-Masque and O.A. Sanchez-Valenzuela, *Geometric properties of involutive distributions on graded manifolds*, Indag. Mathem., N.S., 8 (1997), pp. 217–246.
- [2] V. S. Varadarajan, *Supersymmetry for mathematicians: an introduction*, Courant Lecture Notes. Courant Lecture Notes Series, New York, 2004.

پست الکترونیکی: eazizpour@gmail.com



دریویشنه‌های جبرهای توابع روی منیفلدها

نیره الیاسی*

دانشگاه خوارزمی

چکیده

هدف ما در این مقاله تجزیه دریویشنه‌های پیوسته جبر توابع هموار روی منیفلدهای هموار با مقادیر در جبرهای خاص مانند H^* جبرها با بعد دلخواه که لزوماً متناهی نیست، می باشد. تمام نتایج تعمیم قضایا در حالت جبرهای متناهی است. برای این منظور دو مفهوم جدید دریویشنه‌های نقطه ای و دیفرانسیلی را تعریف کرده ایم و در نهایت هر دریویشن پیوسته روی جبر توابع از منیفلدها به H^* جبرها را به صورت جمع مستقیم یک دریویشن نقطه ای و یک دریویشن دیفرانسیلی در آورده ایم.

واژه‌های کلیدی: جبر توابع هموار روی منیفلدها با مقادیر در یک جبر، دریویشن، دریویشن نقطه ای، دریویشن دیفرانسیلی

Mathematics Subject Classification [2010]: 16W25, 20G42, 46K05, 47C10, 58A05

۱ مقدمه

یافتن دریویشنه‌های جبرهای مختلف یک مساله اساسی در شاخه های جبرو آنالیز و هندسه می باشد. در این متن قصد داریم دریویشنه‌های پیوسته جبر توابع روی منیفلدها با مقادیر در برخی جبرها را به دست بیاوریم. کلیه تعاریف و تذکراتی که در مقدمه آمده اند، استانداردند و در کتب ویا مقالات چاپ شده یافت می شوند.

تعریف ۱.۱. اگر A یک جبر باشد، نگاشت خطی $D : A \rightarrow A$ را یک دریویشن روی A می نامند هرگاه برای هر $a, b \in A$ داشته باشیم

$$D(ab) = D(a)b + aD(b)$$

مثال ۲.۱. در هر جبر شرکت پذیر A برای هر عنصر $a \in A$ نگاشت $\delta_a : A \rightarrow A$ که به صورت $\delta_a(b) = ab - ba$ تعریف می شود یک دریویشن روی A است. به دریویشنه‌های به این شکل دریویشنه‌های درونی A گوئیم.

تعریف ۳.۱. اگر A یک جبر توپولوژیک (جبری که دارای توپولوژی نیز هست) باشد مجموعه دریویشنه‌های پیوسته A را با $Der(A)$ نشان می دهیم که یک فضای برداری و بعلاوه یک جبر لی است.

تعریف ۴.۱. در یک جبر A مرکز آن را که با $Z(A)$ نشان می دهیم به صورت زیر تعریف می شود و یک زیر جبر A است.

$$Z(A) = \{a \in A \mid \forall b \in A \quad ab = ba\}$$



ملاحظه ۵.۱. در یک منیفلد M جبر توابع هموار روی یک منیفلد هموار M با مقادیر حقیقی را با $C^\infty(M)$ نشان می دهند که جبری جابجایی و یکه دار است و دریویشنه‌های آن مجموعه میدانهای برداری روی M است که همان مجموعه برشهای کلاف TM است. جبر توابع هموار روی M با مقادیر در جبر A را با $C^\infty(M, A)$ نشان می دهیم. اگر A جبر شرکت پذیر و یکه دار باشد، $C^\infty(M, A)$ نیز با عمل ضرب نقطه ای شرکت پذیر و یکه دار است. جبر $C^\infty(M)$ با نداشت زیره طور طبیعی در $C^\infty(M, A)$ قرار می گیرد.

$$\phi : C^\infty(M) \longrightarrow C^\infty(M, A)$$

$$f \longmapsto f|_{C^\infty(M, A)}$$

که در بالا $1_{C^\infty(M, A)}$ تابع ثابت یک روی M می باشد.

تعریف ۶.۱. یک H^* جبر، عبارت است از یک $*$ جبر باناخ که بعلاوه فضای هیلبرت نیز می باشد و عمل $*$ تعریف شده روی جبر نسبت به ضرب داخلی $\langle \cdot, \cdot \rangle$ دارای خاصیت زیر باشد:

$$\langle xy, z \rangle = \langle x, zy^* \rangle, \quad \langle xy, z \rangle = \langle y, x^*z \rangle$$

۲ نتایج اصلی

در این بخش جبر H یک H^* جبر است.

تعریف ۱.۲. برای هر تابع هموار $q : M \longrightarrow \text{Der}(H)$ نگاشت خطی $D_q : C^\infty(M, H) \longrightarrow C^\infty(M, H)$ با ضابطه $D_q(f)(x) = q(x)(f(x)) \quad \forall x \in M$ یک دریویشن پیوسته روی $C^\infty(M, H)$ است. اینگونه دریویشنها را دریویشنه‌های نقطه ای می نامیم.

ملاحظه ۲.۲. اگر $\{e_\alpha\}_{\alpha \in I}$ یک پایه متعامد یکه از H باشد، با تعریف توابع ثابت $f_{e_\alpha} : M \longrightarrow H$ با ضابطه $f_{e_\alpha}(m) = e_\alpha \quad \forall m \in M$ می توانیم هر $\bar{f} \in C^\infty(M, H)$ را به صورت $\bar{f} = \sum_\alpha f_\alpha f_{e_\alpha}$ بنویسیم.

تعریف ۳.۲. برای هر میدان برداری $X \in \mathcal{X}(M)$ مشتق لی توابع در $C^\infty(M, H)$ را با L_X نشان می دهیم و به صورت زیر تعریف می کنیم. اگر $\bar{f} = \sum_\alpha f_\alpha f_{e_\alpha}$ اثر L_X روی \bar{f} را به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$L_X(\bar{f}) = \sum_\alpha X(f_\alpha) f_{e_\alpha}$$

محاسبه مستقیم نشان می دهد، L_X یک دریویشن $C^\infty(M, H)$ است.

اگر $h : M \longrightarrow Z(H)$ تابع همواری باشد و D یک دریویشن جبر $C^\infty(M, H)$ باشد، آنگاه $h.D$ نیز یک دریویشن این جبر است به خصوص برای هر میدان برداری $X \in \mathcal{X}(M)$ اپراتور $h.L_X$ نیز از دریویشنه‌های جبر $C^\infty(M, H)$ است.

با استفاده از این نکته یک تناظر یک به یک بین برشهای کلاف برداری $TM \otimes (M \times Z(H))$ و دریویشنه‌های $C^\infty(M, H)$ به صورت زیر برقرار می کنیم. چون برشهای نمونه ای کلاف $TM \otimes (M \times Z(H))$ به صورت $X \otimes h$ هستند که $X \in \mathcal{X}$ و $h : M \longrightarrow Z(H)$ تابعی هموار است، می توانیم دریویشن ایجاد شده توسط این برش را با $L_{X \otimes h}$ نشان دهیم که به صورت زیر عمل می کند.

$$L_{X \otimes h}(\bar{f}) = h.L_X(\bar{f})$$



کلاف $(TM \otimes (M \times Z(H)))$ را با $TM^{Z(H)}$ نشان می‌دهیم که هر تار آن یک $Z(H)$ -مدول است. در واقع برای هر $x \in M$ داریم $(TM^{Z(H)})_x = T_x M \otimes Z(H)$

تعریف ۴.۲. یک دریویشن روی $C^\infty(M, H)$ را دیفرانسیلی نامیم هر گاه اثر آن روی توابع ثابت صفر باشد.

مثال ۵.۲. دریویشنه‌های به صورت $L_{\widehat{X}}$ که \widehat{X} یک برش از $TM^{Z(H)}$ است، دیفرانسیلی هستند و تنها دریویشنی که هم دیفرانسیلی و هم نقطه‌ای باشد، دریویشن صفر است.

قضیه ۶.۲. هر دریویشن پیوسته $C^\infty(M, H)$ به طور یکتا مجموع یک دریویشن دیفرانسیلی و نقطه‌ای است.

اثبات. فرض کنید D یک دریویشن پیوسته روی $C^\infty(M, H)$ باشد. به ازای هر نقطه $a \in H$ ، f_a را تابع ثابت روی M با مقدار a در نظر می‌گیریم. برای هر $x \in M$ تابع $q(x) : H \rightarrow H$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$q(x)(a) = D(f_a)(x)$$

می‌توان دید که $q(x)$ یک دریویشن H است و q تابعی هموار است. D_q را دریویشن نقطه‌ای نظیر q تعریف می‌کنیم. قرار می‌دهیم $D' = D - D_q$. می‌توان دید D' یک دریویشن دیفرانسیلی است زیرا

$$\begin{aligned} D'(f_a)(x) &= D(f_a)(x) - D_q(f_a)(x) = D(f_a)(x) - q(x)(f_a(x)) \\ &= D(f_a)(x) - q(x)(a) = D(f_a)(x) - D(f_a)(x) = 0 \end{aligned}$$

□

برای مشخص سازی دریویشنه‌های جبر $C^\infty(M, H)$ کافیت دریویشنه‌های دیفرانسیلی آن را به دست آوریم.

لم ۷.۲. اگر D یک دریویشن دیفرانسیلی از جبر $C^\infty(M, H)$ باشد آنگاه برای هر تابع $\bar{f} \in C^\infty(M, H)$ که مقادیرش را در مرکز H می‌گیرد، $D(\bar{f})$ نیز مقادیرش را در مرکز H می‌گیرد.

اثبات. برای هر $a \in H, x \in M$ داریم

$$D(\bar{f})(x)a = (D(\bar{f})f_a)(x) = D(\bar{f}f_a)(x) = D(f_a\bar{f})(x) = (f_a D(\bar{f}))(x) = aD(\bar{f})(x)$$

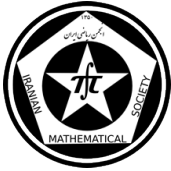
□

لم ۸.۲. اگر D_1 و D_2 دو دریویشن دیفرانسیلی باشند که اثر آنها روی توابع به فرم $f \in C^\infty(M, H)$ یکی باشند، آنگاه $D_1 = D_2$.

اثبات. چون H یک H^* جبر است یک پایه متعامد یکه مانند $\{e_\alpha\}$ دارد. هر تابع $g \in C^\infty(M, H)$ در توپولوژی ضعیف به فرم منحصر به فرد $g = \sum_{\alpha \in I} f^\alpha e_\alpha$ نوشته می‌شود که $\langle e_\alpha, b \rangle = f^\alpha(b)$ و $f^\alpha \in C^\infty(M)$ و $\forall \alpha$

$$\begin{aligned} D_1(g) &= D_1(\sum_{\alpha} f^\alpha e_\alpha) = \sum_{\alpha} D_1(f^\alpha e_\alpha) \\ &= \sum_{\alpha} D_1(f^\alpha) e_\alpha = \sum_{\alpha} D_2(f^\alpha) e_\alpha \\ &= \sum_{\alpha} D_2(f^\alpha e_\alpha) = D_2(\sum_{\alpha} f^\alpha e_\alpha) \\ &= D_2(g) \end{aligned}$$

□



ص: ۴-۴

چهل و ششمین کنفرانس ریاضی ایران

۳-۶ شهریور ۱۳۹۴

دانشگاه یزد

دریویشنه‌های جبرهای توابع روی منیفلدها



دانشگاه یزد

سخنرانی

قضیه ۹.۲. همه دریویشنه‌های دیفرانسیلی $C^\infty(M, H)$ به فرم $L_{\tilde{X}}$ هستند که \tilde{X} برشی از کلاف $TM^{Z(H)}$ است.

اثبات. اگر D یک دریویشن دیفرانسیلی از $C^\infty(M, H)$ باشد برای هر تابع $f \in C^\infty(M)$ طبق لم ۱، $D(f)$ مقادیرش را در مرکز H می‌گیرد. با انتخاب یک زیر پایه متعامد یکه از $\{e_\alpha\}_{\alpha \in I}$ برای $Z(H)$ مانند $\{e_{\alpha_j}\}$ خواهیم داشت

$$D(f) = \sum_j D_j(f) f_{e_{\alpha_j}}$$

که D_j ها دریویشنه‌هایی روی $C^\infty(M)$ هستند که وابسته به آنها میدانهای برداری $X_i \in \mathcal{X}M$ موجودند که $L_{X_j} = D_j$. اگر قرار دهیم

$$\tilde{X} = \sum_j X_j \otimes f_{e_j}$$

آنگاه محاسبه سراسر نشان می‌دهد که اثر دو دریویشن D و $L_{\tilde{X}}$ روی توابع به فرم $f|_{C^\infty(M, H)}$ یکی است. پس طبق لم ۱ داریم $D = L_{\tilde{X}}$.

□

به این ترتیب کلیه دریویشنه‌های پیوسته جبر $C^\infty(M, H)$ متناظر برشهای کلاف زیر می‌باشند.

$$TM^{Z(H)} \oplus (M \times \text{Der}(H))$$

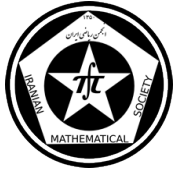
سپاس‌گزاری

در پایان از راهنمایی‌های ارزشمند همکارانم و به خصوص جناب آقای دکتر بروجردیان کمال تشکر را دارم.

مراجع

- [1] H. G. Dales, F. Ghahramani, *Derivations into iterated duals of banach algebras*, STUDIA MATHEMATICA, 128 (1), 1998.
- [2] J. M. Lee, *Introduction to smooth manifolds*, Springer 2003.
- [3] J. Munkres, *topology*, 2nd ed., Prentice-Hall, 2000.
- [4] K. H. Neeb, *Infinite-Dimensional Lie Groups*, 3eme cycle. Monastir (Tunisie), 2005, pp.76.
- [5] B. Russo, *Derivations*, lectures, University of California, Irvine, 28 Feb, 2012. FEBRUARY 28, 2012.
- [6] M. F. Smiley, *Right H^* -Algebras*, Proceedings of the American Mathematical Society, Vol. 4, No. 1 (Feb., 1953), pp. 1-4

پست الکترونیکی: elyasi82@khu.ac.ir



معرفی یک رده‌ی خاص از گروه‌های لی و بررسی مترهای شبه‌ریمانی

مهران طاهری دهکردی

دانشگاه علم و هنر یزد

میثم طاهری دهکردی*

دانشگاه جامع علمی کاربردی

چکیده

اگر G یک گروه لی حل‌پذیر باشد، هر متر پایای چپ روی G دارای انحنا برشی صفر و یا انحنا اسکالر اکیداً منفی است. همچنین اگر G غیرآبلی باشد، یک متر پایای چپ با انحنا اسکالر اکیداً منفی است. \mathfrak{G} یک رده‌ی خاص از گروه‌های لی حل‌پذیر است اگر دارای این خاصیت باشد: یک گروه غیرآبلی G متعلق به \mathfrak{G} است اگر جبر لی آن یعنی \mathfrak{g} دارای این خاصیت باشد که برای هر $x, y \in \mathfrak{g}$ بتوان $[x, y]$ را به صورت ترکیب خطی x و y نوشت. در این مقاله مثالی از یک گروه لی $G \in \mathfrak{G}$ آورده می‌شود، مترهای شبه‌ریمانی پایای چپ روی گروه‌های متعلق به این رده‌ی خاص بررسی می‌شود و نتایجی در مورد این گروه‌ها بیان می‌شود.

واژه‌های کلیدی: مترهای شبه‌ریمانی، رده‌ی خاص \mathfrak{G} ، جبر لی، پایای چپ

Mathematics Subject Classification [2010]: 13D45, 39B42

۱ مقدمه

اگر G یک گروه لی و \mathfrak{g} جبر لی آن باشد در این صورت \mathfrak{g} را پوچتوان می‌گوییم اگر زنجیر $\mathfrak{g} \supset [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \supset \dots \supset \mathfrak{g} \supset \mathfrak{g} \supset \dots$ یک‌جا صفر شود. همچنین یک جبر لی آبلی نامیده می‌شود اگر $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = 0$. هدف نهایی، در این مقاله، بررسی مترهای شبه‌ریمانی پایای چپ روی گروه‌های لی متعلق به رده‌ی خاص \mathfrak{G} است. این هدف با بررسی نتایج قبلی در مورد مترهای ریمانی و تعمیم آن به حالت شبه‌ریمانی و یا به‌طور مستقل برای حالت شبه‌ریمانی دنبال شده است.

۲ رده‌ی خاص \mathfrak{G}

تعریف ۱.۲. یک گروه غیرآبلی G متعلق به \mathfrak{G} است اگر جبر لی آن یعنی \mathfrak{g} دارای این خاصیت باشد که برای هر دو عضو $x, y \in \mathfrak{g}$ بتوان $[x, y]$ را به صورت ترکیب خطی x, y نوشت. از این خاصیت \mathfrak{G} استنباط می‌شود که: \mathfrak{g} دارای خاصیت فوق است اگر و فقط اگر یک ایده‌آل آبلی \mathfrak{n} از هم‌بُعد^۱ ۱ و یک عضو $b \notin \mathfrak{n}$ موجود باشد که $[b, x] = x$ برای هر $x \in \mathfrak{n}$ ([۱]).

* سخنران

^۱ فرض کنیم W زیرفضایی خطی از فضای برداری V باشد. هم‌بُعد (codimension) W در V عبارت است از بُعد فضای خارج‌قسمتی V/W . اگر V متناهی‌البعد باشد آن‌گاه:

$$\text{codim}(W) = \dim(V/W) = \dim(V) - \dim(W)$$

۱.۲ مثالی از یک گروه لی $G \in \mathfrak{S}$

در اینجا مثالی از یک گروه لی G متعلق به رده‌ی خاص \mathfrak{S} می‌آوریم. گروه لی G را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$G = \mathfrak{A}(n) = \{x \rightarrow Ax + b : A \in GL(n, \mathbb{R}), b \in \mathbb{R}^n\}$$

$\mathfrak{A}(n)$ با عمل ضرب $(A, a)(B, b) = (AB, a + Ab)$ یک گروه $(n+1)$ بُعدی است که آن را گروه تبدیلات آفین می‌نامیم. عضو خنثی این گروه (I, \circ) می‌باشد. همچنین وارون (A, b) عبارت است از $(A^{-1}, -A^{-1}b)$.
نگاشت:

$$\eta : \mathfrak{A}(n) \rightarrow GL(n+1, \mathbb{R})$$

$$(A, b) \mapsto \begin{pmatrix} A & b \\ \circ & 1 \end{pmatrix}$$

یک نمایش از $\mathfrak{A}(n)$ است. (یک همومورفیسم بین گروه‌های لی است) و لذا $\mathfrak{A}(n)$ را می‌توان به صورت زیر نمایش داد:

$$\mathfrak{A}(n) = \left\{ \begin{pmatrix} A & b \\ \circ & 1 \end{pmatrix} : A \in GL(n, \mathbb{R}), b \in \mathbb{R}^n \right\} \leq GL(n+1, \mathbb{R})$$

اکنون حالت خاص $(n=1)$ را در نظر می‌گیریم داریم:

$$G = \mathfrak{A}(1) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ \circ & 1 \end{pmatrix} : a > \circ, a, b \in \mathbb{R} \right\}$$

که در آن:

$$(a, b)(c, d) = (ac, ad + b), \quad e = (1, \circ), \quad (a, b)^{-1} = \left(\frac{1}{a}, -\frac{b}{a} \right)$$

همچنین:

$$R_{(a,b)}(c, d) = (ac, bc + d)$$

$$L_{(a,b)}(c, d) = (ac, ad + b)$$

می‌توان نشان داد که $G \in \mathfrak{S}$.

۳ بررسی مترهای شبه‌ریمانی پایای چپ، روی گروه‌های لی $G \in \mathfrak{S}$

در این بخش مترهای شبه‌ریمانی پایای چپ، روی گروه‌های لی $G \in \mathfrak{S}$ را مورد مطالعه قرار می‌دهیم اما قبل از آن نیازمند مقدماتی هستیم که در ادامه مورد استفاده قرار می‌گیرند:

فرض کنیم G یک گروه لی باشد با یک متر ریمانی پایای چپ و انحناء بُرشی ثابت و منفی، با جبر لی \mathfrak{g} . در مرجع [۵]، E. Heintze، ثابت کرده است که \mathfrak{g} شامل یک ایده آل آبله مانند \mathfrak{u} از هم بُعد ۱ است. و برای هر $b \notin \mathfrak{u}$

$$ad(b)|_{\mathfrak{u}} = \lambda I + B$$

که در آن λ عدد حقیقی غیر صفر، و B یک تبدیل خطی است که نسبت به ضرب داخلی متر ریمانی پایای چپ (القا شده توسط \mathfrak{g})، کج-الحاق، می‌باشد.

همچنین گروه‌های لی متعلق به \mathfrak{S} ، دقیقاً آنهایی هستند که برای آنها B برابر صفر است. از این توضیحات می‌توان نتیجه گرفت:



نتیجه ۱.۳. فرض کنیم G یک گروه لی با بُعد زوج باشد. اگر G یک متر ریمانی پایای چپ با انحنا بُرشی ثابت و منفی، بپذیرد، آن‌گاه G یک متر لورنتز پایای چپ با انحنا بُرشی ثابت (با هر علامت ممکن) می‌پذیرد.

اثبات. به مرجع [۴] مراجعه کنید. \square

نتیجه ۲.۳. گروه‌های لی از بُعد فرد وجود دارند که مترهای ریمانی پایای چپ، با انحنا بُرشی ثابت و منفی می‌پذیرند بدون آنکه بتوان برای آنها یک متر لورنتز پایای چپ با انحنا بُرشی ثابت منفی و یا صفر، تعریف نمود.

اثبات. به مرجع [۴] مراجعه کنید. \square

قضیه ۳.۳. فرض کنیم جبر لی گروه لی G یعنی \mathfrak{g} ، دارای این خاصیت باشد که برای هر $x, y \in \mathfrak{g}$ بتوان $[x, y]$ را به صورت ترکیب خطی x و y نوشت. آن‌گاه هر متر ریمانی پایای چپ روی G ، دارای انحنا بُرشی ثابت و منفی می‌باشد.

نتیجه ۴.۳. اگر $G \in \mathcal{G}$ ، آن‌گاه هر متر ریمانی پایای چپ روی G ، دارای انحنا بُرشی ثابت و منفی می‌باشد.

در این قسمت ابتدا لم زیر را برای مترهای لورنتز پایای چپ، روی G می‌آوریم و سپس حالت کلی‌تر را برای مترهای شبه‌ریمانی، بیان و اثبات می‌کنیم:

لم ۵.۳. فرض کنیم $\langle \cdot, \cdot \rangle$ یک متر لورنتز پایای چپ، روی گروه لی G باشد و n یک ایده‌آل آبله از هم‌بُعد ۱ برای \mathfrak{g} باشد به قسمی که تحدید $\langle \cdot, \cdot \rangle$ به n ، ناتباهیده باشد. و فرض کنیم $b \in \mathfrak{g}$ بر n عمود باشد و $r = \langle b, b \rangle = \pm 1$. اگر $ad(b)|_n = \lambda I + B$ که B یک تبدیل کج-الحاق است، آن‌گاه G دارای انحنا بُرشی برابر $-r\lambda^2$ می‌باشد.

لم ۶.۳. فرض کنیم G یک گروه لی با ساختار یک متر شبه‌ریمانی پایای چپ باشد. و فرض کنیم جبر لی G به صورت زیر تجزیه شود:

$$\mathfrak{g} = \langle b \rangle \oplus n$$

که در آن n ، یک ایده‌آل آبله است و b بر n عمود می‌باشد و نیز $\langle b, b \rangle = \pm 1$. اگر $L = ad(b)|_n = \lambda I + B$ که B قسمت کج-الحاق L است و $\lambda \in \mathbb{R}$ ، آن‌گاه G دارای انحنا بُرشی ثابت، برابر $K = -\epsilon\lambda^2$ می‌باشد.

در این قسمت نیز ابتدا قضیه‌ی زیر را در مورد مترهای لورنتز پایای چپ، روی G می‌آوریم و سپس در قضیه‌ی بعد حالت کلی‌تر را برای مترهای شبه‌ریمانی، بیان و اثبات می‌کنیم:

قضیه ۷.۳. فرض کنیم G یک گروه لی باشد متعلق به \mathcal{G} آن‌گاه:

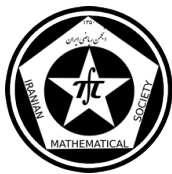
۱. هر متر لورنتز پایای چپ (با نشان $(-, +, \dots, +)$) دارای انحنا بُرشی ثابت می‌باشد.

۲. به ازاء هر عدد ثابت و دلخواه k ($k > 0$ or $k = 0$ or $k < 0$)، می‌توان یک متر لورنتز پایای چپ با انحنا بُرشی k روی G تعریف نمود.

قضیه ۸.۳. فرض کنیم G یک گروه لی از بُعد n ، متعلق به \mathcal{G} باشد آن‌گاه:

۱. هر ساختار شبه‌ریمانی پایای چپ روی G با نشان $(p, n-p)$ ، دارای انحنا بُرشی ثابت k می‌باشد.

۲. به ازاء هر $p \in \mathbb{N}$ که $0 < p < n$ ، و هر $k \in \mathbb{R}$ ، می‌توانیم یک متر پایای چپ با نشان $(p, n-p)$ و با انحنا بُرشی ثابت k روی G تعریف کنیم. همچنین در حالت‌های $k < 0$ ، $p = 0$ و $k > 0$ ، $p = n$ نیز نتایج مشابهی خواهیم داشت.



نتیجه ۹.۳. هر گروه لی غیر آبله، یک متر پایایی چپ از نشان $(p, n-p)$ می‌پذیرد که $S < \circ, p < n$ یا $S > \circ, p > \circ$. اثبات. دو حالت را در نظر می‌گیریم:

حالت اول: اگر جبر لی گروه لی G ، دارای این خاصیت باشد که میدان‌های برداری مستقل x, y, z داشته باشد که $[x, y] = z$ ، در این صورت حکم برقرار است.

حالت دوم: اگر چنین نباشد یعنی برای هر $x, y \in \mathfrak{g}$ ، $[x, y]$ با بقیه عناصر وابسته خطی باشد، در این صورت طبق تعریف، $G \in \mathfrak{S}$ ، و بنابر این طبق قسمت (۲) قضیه ۸.۳، حکم برقرار است. \square

این بخش را با معرفی دسته‌ی دیگری از گروه‌های لی، و بیان قضیه‌ی مهمی در مورد انحناهای بُرشی، به پایان می‌بریم: **تعریف ۱۰.۳.** مجموعه همهی گروه‌های لی که هر متر پایایی چپ از نشان $(p, n-p)$ روی آنها، دارای انحنا بُرشی با علامت ثابت است را با $\mathfrak{F}(p)$ نمایش می‌دهیم.

تذکر ۱۱.۳. $\mathfrak{S} = \mathfrak{F}(\circ) = \mathfrak{F}(1) = \dots = \mathfrak{F}(n)$.

اثبات. اولاً طبق قضیه ۳.۳، $\mathfrak{S} \subset \mathfrak{F}(\circ)$ ، از طرفی $\mathfrak{F}(\circ) \subset \mathfrak{S}$ [۱]. در حالت کلی طبق قضیه ۸.۳ می‌توان گفت:

$$\mathfrak{S} \subset \mathfrak{F}(\circ) \subset \mathfrak{F}(1) \subset \dots \subset \mathfrak{F}(n)$$

برای اثبات عکس فرض کنیم $p \neq \circ$ ، $\mathfrak{F}(p)$ را مجموعه همهی گروه‌های لی می‌گیریم که هر متر پایایی چپ از نشان $(p, n-p)$ روی آنها، دارای انحنا بُرشی با علامت ثابت منفی است. نشان می‌دهیم $\mathfrak{F}(p) \subset \mathfrak{S}$. برای این منظور باید نشان دهیم برای هر $x, y \in \mathfrak{g}$ ، $[x, y]$ را می‌توان به صورت ترکیب خطی x, y نوشت. فرض کنیم چنین نباشد یعنی فرض کنیم $[x, y] = z$ (که $z \in \mathfrak{g}$ و x, y, z مستقلند) در این صورت، می‌توان یک متر پایایی چپ روی $\mathfrak{F}(p)$ از نشان $(p, n-p)$ پیدا کرد که دارای انحنا بُرشی با علامت مثبت باشد و این تناقض است. \square

قضیه ۱۲.۳. فرض کنیم M ، یک منیفلد همبند از بُعد $n \geq 3$ با یک ساختار متر ناتبا هیده باشد. اگر انحنا بُرشی M ، از بالا و یا پائین کراندار باشد در این صورت M دارای انحنا ثابت می‌باشد.

اثبات. به مرجع [۳] مراجعه کنید. \square

نتیجه ۱۳.۳. از قضیه فوق می‌توان نتیجه گرفت برای یافتن گروه‌های لی در $\mathfrak{F}(p)$ ، $(n \geq 3, \circ < p < n)$ ، می‌توان گروه‌هایی را جستجو کرد که برای هر متر پایایی چپ روی آنها، انحنا بُرشی ثابت باشد.

مراجع

- [1] J. Milnor., *Curvature of Left Invariant Metrics on Lie Groups*, Adv in Math. Vol. 21 (1976), 293–329.
- [2] P. Olver., *Equivalence, Invariants, and Symmetry*, Cambridge University Press, 1996.
- [3] R. S. Kulkarni, *The Values of Sectional Curvature in Indefinite Metrics*, Comment. Math. Helvetici 54 (1979) 173–176.
- [4] F. Barnet., *On Lie Groups That admit Left Invariant Lorentz Metrics of Constant Sectional Curvature*, Illinois J. Math. 33 (1998), 631–642.
- [5] E. Heintze., *On Homogeneous Manifolds of Negative Curvature*, Math. Ann., Vol. 211, 1974.



هم ارزی زیرفضاهای مستوی کنترل روی برخی از جبرهای لی مختلط سه بعدی

فیروز پاشایی
دانشگاه مراغه

سید محمد شهیدی*
دانشگاه مراغه

چکیده

فضاهای مستوی کنترل روی جبرهای لی مختلط نقش مهمی در مطالعه فرایندهای کنترلی دارند. در این ارائه، به مطالعه زیرفضاهای مستوی کنترل روی برخی از جبرهای لی مختلط سه بعدی می پردازیم. با استفاده از سطوح تراز یک رده بندی کاملی از دستگاههای تمام رتبه روی $sl(2, \mathbb{R})$ و $su(2)$ مطرح می شود و برای کنترل پذیری یک دستگاه تمام رتبه روی گروههای لی $SL(2, \mathbb{R})$ و $SU(2)$ شرایطی هم ارز ارائه می گردد.

واژههای کلیدی: دستگاههای کنترل ناورداي چپ؛ زیرفضاهای مستوی؛ کلاف مماس؛ کنترل قابل قبول؛ دستگاه همگن.

Mathematics Subject Classification [2010]: 93A10, 93C10

۱ مقدمه

هر دستگاه کنترل (هموار) متشکل از یک چند-دستگاه^۱ دینامیکی (هموار) (M, \mathcal{X}) به همراه یک رده U از ورودی های قابل قبول می باشد. که M یک منیفلد (هموار) بعنوان فضای حالت و $\mathcal{X} = (X_u)_{u \in U}$ خانواده ای از میدان های برداری X_u روی M است. در چنین دستگاه کنترل هموار رده ای از توابع کنترل بصورت $I \rightarrow U$: $u(\cdot)$ مورد استفاده قرار می گیرد که U یک فضای متریک تفکیک پذیر می باشد و در اغلب موارد فضای اقلیدسی \mathbb{R}^l بعنوان مجموعه کنترلی U بکار گرفته می شود. (گاهی U را زیرمجموعه محدب و فشرده از \mathbb{R}^l نیز در نظر میگیرند). از بین دستگاههای مختلف کنترل، دستگاه های کنترل ناوردا روی گروه های لی بیشترین توجه را به خود جلب نموده است. دستگاه های کنترل ناوردا روی گروه های لی برای اولین بار (در سال ۱۹۷۲) [۱] و [۲] مطرح شده است. قاعده دینامیکی دستگاههای کنترل ناوردا بصورت $\Xi : G \times U \rightarrow TG$ است. همچنین TG را می توان بطور موضعی با $G \times \mathfrak{g}$ یکسان گرفت که $\mathfrak{g} = T_e G$ از جبرهای لی وابسته مشخص می شود. بطور معمول یک دستگاه کنترل را می توان بصورت زیر نمایش داد:

$$\dot{g} = \Xi(g, u), \quad g \in G, \quad u \in U$$

که $\Xi(g, u) = g\Xi(e, u) \in TG$. در این مقاله، فرض می کنیم U یک منیفلد هموار l -بعدی باشد. کنترل های قابل قبول بصورت نگاشت های U -مقدار که پیوستگی تکه ای داشته و روی بازه $[0, T]$ فشرده می باشند را در نظر می گیریم. نگاشت ریختی $\Phi : \Sigma \rightarrow \dot{\Sigma}$ در دستگاه های کنترل ناورداي چپ بصورت نگاشت

$$\Phi : G \times U \rightarrow \dot{G} \times \dot{U}, \quad (g, u) \mapsto (\phi(g), \varphi(g, u))$$

*سخنران

^۱polysystem



می باشد که مؤلفه های حالت و بازخورد بصورت نگاشت های $\phi : G \rightarrow \hat{G}$ و $\varphi : G \times U \rightarrow \hat{U}$ هموار می باشند.

تعریف ۱.۱. دستگاه Σ می تواند تمام رتبه باشد اگر مولد یک جبر لی کامل باشد. شرط لازم برای تمام رتبه بودن یک دستگاه، قابل کنترل بودن آن است.

هر $-DF_{loc}$ هم ارزی میان دو دستگاه را می توان به هم ارزی میان همسایگی های همانی آن ها تقلیل داد. به ازای هر $a \in \hat{G}$ و $\hat{a} \in \Sigma$ دستگاه های Σ و $\hat{\Sigma}$ ، $-DF_{loc}$ هم ارز می باشند اگر و فقط اگر دو دستگاه به ازای $1 \in G$ و $1 \in \hat{G}$ $-DF_{loc}$ هم ارز باشند. در این مقاله فرض می کنیم هر $-DF_{loc}$ هم ارزی میان همسایگی های همانی دو دستگاه می باشد.

۲ نتایج اصلی

۱.۲ جبر لی مختلط سه بعدی نیم ساده شبه قائم $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$

گروه خطی خاص

$$SL(2, \mathbb{R}) = \{g \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det g = 1\}$$

با جبر لی

$$\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R}) = \left\{ \begin{bmatrix} \frac{x}{2} & \frac{y-z}{2} \\ \frac{y+z}{2} & -\frac{x}{2} \end{bmatrix} : x, y, z \in \mathbb{R} \right\}$$

را در نظر می گیریم. به سادگی می توان نشان داد که خودریختی $\phi \in \text{Aut}(SL(2, \mathbb{R}))$ وجود دارد، بطوریکه نگاشت مماس $T_1\phi$ برابر ماتریس

$$\varsigma = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

است.

گزاره ۱.۲. $d\text{Aut}(SL(2, \mathbb{R})) = \text{Aut}(\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R}))$

تعریف ۲.۲. ضرب لورنزی \odot روی $\mathfrak{so}(2, 1)$ بصورت زیر بدست می آید:

$$A \odot B = a_1 b_1 + a_2 b_2 - a_3 b_3$$

قرار می دهیم $A = \sum_{i=1}^3 a_i E_i$ و $B = \sum_{i=1}^3 b_i E_i$ هر اتومورفیسم ψ عمل \odot را حفظ می کند:
 $(\psi \cdot A) \odot (\psi \cdot B) = A \odot B$ برای سطوح تراز (زیرمنیفلد) داریم:

$$\mathcal{H}_\alpha = \{A \in \mathfrak{so}(2, 1) : A \odot A = \alpha, A \neq 0\}$$

\mathcal{H}_α یک هذلولی متشکل از دو صفحه می باشد زمانی که $\alpha < 0$ ولی اگر $\alpha > 0$ باشد دارای یک صفحه و اگر $\alpha = 0$ باشد، یک مخروط می باشد.



تعریف ۳.۲. سطوح تراز رده بندی های مفید و کامل را برای زیرفضاهای مستوی بوجود می آورد. یک مشخصه $\sigma(\Gamma)$ از یک زیرفضای مستوی Γ (یک یا دوبعدی) معرفی می کنیم. برای $\Gamma = A + \langle B \rangle$ یا $\Gamma = A + \langle B_1, B_2 \rangle$ ، تابع $\sigma(\Gamma)$ مشخصه از Γ به ترتیب بشکل زیر می باشد:

$$\sigma(\Gamma) = \text{sgn}(B \odot B) \text{ و } \sigma(\Gamma) = \text{sgn} \left(\begin{pmatrix} B_1 \odot B_1 & B_1 \odot B_2 \\ B_1 \odot B_2 & B_2 \odot B_2 \end{pmatrix} \right).$$

اگر فضای Γ° در جهت تقاطع با داخل مخروط \mathcal{H}_α باشد، $\sigma(\Gamma) = -1$. اگر فضای Γ° مماس با \mathcal{H}_α باشد $\sigma(\Gamma) = 0$ در غیر اینصورت $\sigma(\Gamma) = 1$. چنان که اتومورفیسم عمل \odot را حفظ می کند، یک محاسبه دقیق نشان می دهد که $\sigma(\psi \cdot \Gamma) = \sigma(\Gamma)$ برای $\psi \in \text{Aut}(\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R}))$.

قضیه ۴.۲. هر دستگاه تمام رتبه روی $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$ دقیقاً با یکی از دستگاه های زیر هم ارز می باشد:

$$\begin{aligned} \Sigma_1^{(1,1)} &: E_2 + u(E_1 + E_3), \sigma(\Gamma) = 0 \\ \Sigma_2^{(1,1)} &: \alpha E_2 + uE_3, \alpha > 0, \mathfrak{E}^\odot(\Gamma) \odot \mathfrak{E}^\odot(\Gamma) = \alpha^2, \sigma(\Gamma) = -1 \\ \Sigma_3^{(1,1)} &: \alpha E_1 + uE_2, \alpha > 0, \mathfrak{E}^\odot(\Gamma) \odot \mathfrak{E}^\odot(\Gamma) = \alpha^2, \sigma(\Gamma) = 1 \\ \Sigma_4^{(1,1)} &: \alpha E_3 + uE_2, \alpha > 0, \mathfrak{E}^\odot(\Gamma) \odot \mathfrak{E}^\odot(\Gamma) = -\alpha^2, \sigma(\Gamma) = 1 \\ \Sigma_5^{(2,0)} &: u_1 E_1 + u_2 E_2, \sigma(\Gamma) = 1 \\ \Sigma_6^{(2,0)} &: u_1 E_2 + u_2 E_3, \sigma(\Gamma) = -1 \\ \Sigma_7^{(2,1)} &: E_3 + u_1 E_1 + u_2 (E_2 + E_3), \sigma(\Gamma) = 0 \\ \Sigma_8^{(2,1)} &: \alpha E_1 + u_1 E_2 + u_2 E_3, \alpha > 0, \mathfrak{E}^\odot(\Gamma) \odot \mathfrak{E}^\odot(\Gamma) = \alpha^2, \sigma(\Gamma) = -1 \\ \Sigma_9^{(2,1)} &: \alpha E_3 + u_1 E_1 + u_2 E_2, \alpha > 0, \mathfrak{E}^\odot(\Gamma) \odot \mathfrak{E}^\odot(\Gamma) = -\alpha^2, \sigma(\Gamma) = 1. \end{aligned}$$

قرار می دهیم $\alpha > 0$.

گزاره ۵.۲. فرض کنید $A \in \mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$. پس $A \odot A < 0$ اگر و فقط اگر $\exp(tA)$ متناوب باشد.

لم ۶.۲. فقط دستگاه $\Sigma_3^{(1,1)}$ روی $\text{SL}(2, \mathbb{R})$ کنترل پذیر نمی باشد.

نتیجه ۷.۲. یک دستگاه تمام رتبه Σ روی $\text{SL}(2, \mathbb{R})$ کنترل پذیر است اگر و فقط اگر همگن باشد یا $A \in \Gamma$ وجود داشته باشد که $A \odot A < 0$.

۲.۲ جبر لی مختلط سه بعدی نیم ساده قائم $\mathfrak{su}(2)$

گروه لی همبند

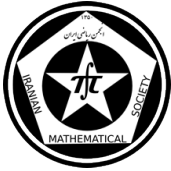
$$\text{SU}(2) = \{g \in \mathbb{C}^{2 \times 2} : gg^\dagger = 1, \det g = 1\}$$

با جبر لی

$$\mathfrak{su}(2) = \left\{ \begin{bmatrix} \frac{i}{2}x & \frac{1}{2}(iz + y) \\ \frac{1}{2}(iz - y) & -\frac{i}{2}x \end{bmatrix} : x, y, z \in \mathbb{R} \right\}$$

را در نظر می گیریم.

گزاره ۸.۲. $d\text{Aut}(\text{SU}(2)) = \text{Aut}(\mathfrak{su}(2)) = \text{Aut}(\mathfrak{so}(3)) = \text{SO}(3)$.



تعریف ۹.۲. حاصلضرب نقطه ای \bullet روی جبر لی $\mathfrak{su}(2)$ بصورت زیر تعریف می شود:

$$A \bullet B = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$$

قرار می دهیم $A = \sum_{i=1}^3 a_i E_i$ و $B = \sum_{i=1}^3 b_i E_i$. هر اتومورفیسم ψ عمل \bullet را حفظ می کند:

$$(\psi \cdot A) \bullet (\psi \cdot B) = A \bullet B$$

برای سطوح تراز (زیرمنیفولد) داریم:

$$S_\alpha = \{A \in \mathfrak{su}(2) : A \bullet A = \alpha\}$$

برای هر $\alpha > 0$ S_α ها کره هایی با شعاع $\sqrt{\alpha}$ می باشند، که توسط اتومورفیسم حفظ می شوند.

گزاره ۱۰.۲. برای هر زیرفضای مستوی ناهمگن $\Gamma = A + \langle B \rangle$ یا $\Gamma = A + \langle B_1, B_2 \rangle$ که با کره S_α مماس

بوده به ترتیب داریم:

$$\mathcal{C}^\bullet(\Gamma) = A - \frac{A \bullet B}{B \bullet B} B$$

$$\mathcal{C}^\bullet(\Gamma) = A - [B_1 \quad B_2] \begin{bmatrix} B_1 \bullet B_1 & B_1 \bullet B_2 \\ B_1 \bullet B_2 & B_2 \bullet B_2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} A \bullet B_1 \\ A \bullet B_2 \end{bmatrix}$$

که قرار می دهیم $\alpha = \mathcal{C}^\bullet(\Gamma) \bullet \mathcal{C}^\bullet(\Gamma)$.

گزاره ۱۱.۲. $\mathcal{C}^\bullet(\psi \cdot \Gamma) = \mathcal{C}^\bullet(\Gamma)$ برای هر اتومورفیسم $\psi \in \text{Aut}(\mathfrak{su}(2))$.

قضیه ۱۲.۲. هر دستگاه تمام رتبه روی $\mathfrak{su}(2)$ دقیقاً با یکی از دستگاه های زیر هم ارز می باشد:

$$\Sigma_\alpha^{(1,1)} : \alpha E_1 + E_2, \mathcal{C}^\bullet(\Gamma) \bullet \mathcal{C}^\bullet(\Gamma) = \alpha^2$$

$$\Sigma_\alpha^{(2,0)} : u_1 E_1 + u_2 E_2$$

$$\Sigma_\alpha^{(2,1)} : \alpha E_1 + u_1 E_2 + u_2 E_3, \mathcal{C}^\bullet(\Gamma) \bullet \mathcal{C}^\bullet(\Gamma) = \alpha^2$$

$$\Sigma_\alpha^{(3,0)} : u_1 E_1 + u_2 E_2 + u_3 E_3.$$

قرار می دهیم $\alpha > 0$.

ملاحظه ۱۳.۲. چنانچه $SU(2)$ فشرده باشد، تمام دستگاه های موجود کنترل پذیر می باشد.

مراجع

- [1] R.W. Brockett, *System theory on group manifolds and coset spaces*, SIAM J. Control 10(2)(1972), 265-284.
- [2] V. Jurdjevic, H.J. Sussmann, *Control systems on Lie groups*, J. Differential Equations, 12 (1972), 313-329.
- [3] J.B. Lee, K.Y. Ha, *invariant metrics and curvatures on simply connected three-dimensional Lie groups*, Math. Nachr., 282 (2009), 868-898.
- [4] R. Biggs, C.C. Remsing, *A category of control systems*, An. S. tiint. Univ. "Ovidius" Constant. a Ser. Mat., 20 (2012), 355-367.

آنالیز عددی



جواب های فرم بسته معادله ماتریسی $X - A^T X^{-1} B = CY + R$

گل نوش عزیز پور*

محمد رضا اصلاحچی

دانشگاه تربیت مدرس

دانشگاه تربیت مدرس

چکیده

معادله ماتریسی $X - A^T X^{-1} B = CY + R$ کاربردهای بسیاری در تئوری کنترل، برنامه ریزی پویا، فیلترهای تصادفی و ... دارد. در این تحقیق جواب های فرم بسته معادله ماتریسی $X - A^T X^{-1} B = CY + R$ با استفاده از ضرایب چندجمله ای مشخصه، ضرایب ماتریس الحاقی و ضرایب چندجمله ای های ماتریسی ارائه داده شده است.

واژه های کلیدی: معادلات ماتریسی، جواب های فرم بسته، جواب های پارامتریک، فرم نرمال اسمیت، چندجمله ای مشخصه

۱ مقدمه

مطالعه ی حل پذیری و یافتن جواب معادلات ماتریسی یکی از شاخه های مهم نظریه ماتریس هاست که به دلیل کاربردهای فراوانی که در علوم و مهندسی دارند، در سال های اخیر گسترش قابل ملاحظه ای داشته است. معادلات ماتریسی نقش بسیار مهمی را در نظریه سیستم کنترل و نظریه پایداری ایفا می کنند [۱]. بسیاری از مسائل کنترل به عنوان مثال تخصیص قطب [۲] رابطه ی نزدیکی با تعمیم معادله ماتریسی سیلوستر ناهمگن مرتبه دوم دارد. در [۳] جواب های صریح با استفاده از فرم نرمال کاهش از ماتریس های چندجمله ای بدست می آیند و همچنین فرم معادل جواب ها براساس ماتریس مشاهده گر و ماتریس کنترل بیان می شوند. در این مقاله، معادله ماتریسی

$$X - A^T X^{-1} B = CY + R, \quad (1)$$

را در نظر می گیریم که $A \in R^{n \times n}$ و ماتریسی معکوس پذیر و متقارن، $B \in R^{n \times n}$ ، $C \in R^{n \times n}$ و $R \in R^{n \times n}$ است. در سراسر این مقاله، ما میدان اعداد حقیقی را بوسیله R ، مجموعه ماتریس های $n \times n$ را بوسیله $R^{n \times n}$ نشان می دهیم. برای $A \in R^{n \times n}$ ترانواده و ماتریس الحاقی A را به ترتیب توسط A^T و $adj A$ نشان می دهیم. ماتریس همانی $n \times n$ را بوسیله I_n نشان می دهیم و آن را بصورت I نیز می نویسیم. بعلاوه برای $A \in R^{n \times n}$ چندجمله ای مشخصه بصورت زیر می باشد:

$$f_{(I,A)}(s) = \det(I - sA) = \alpha_n s^n + \alpha_{n-1} s^{n-1} + \dots + \alpha_1 s + 1,$$

* سخنران



۲ نتیجه اصلی

در این بخش جواب فرم بسته معادله ماتریسی $X - A^T X^{-1} B = CY + R$ را بدست می آوریم. برای بدست آوردن جواب فرم بسته معادله ماتریسی (۱) ما به لم زیر با ادعایی از فرم نرمال کاهشی اسمیت^۱ نیاز داریم.

لم ۱.۲. ماتریس های $A \in R^{n \times n}$ ، $B \in R^{n \times n}$ و $C \in R^{n \times n}$ داده شده اند. فرض کنید

$$\{s | \det(I - sA^T B^{-1}) = 0\} \cap \lambda\{B^{-1} A^T\} = \phi,$$

آنگاه ماتریس های چندجمله ای $L(s) \in R^{n \times n}[s]$ و $H(s) \in R^{n \times n}[s]$ و چندجمله ای $\Delta(s) \in R[s]$ وجود دارند بطوریکه

$$(I - sA^T B^{-1})L(s) - CH(s) = \Delta(s)I, \quad (2)$$

که

$$\Delta(\gamma) \neq 0, \quad \forall \gamma \in \lambda(B^{-1} A^T).$$

اثبات. فرض کنید $P(s) \in R^{n \times n}[s]$ و $Q(s) \in R^{2n \times 2n}[s]$ دو چندجمله ای ماتریسی *unimodular* باشند که

$$\begin{bmatrix} I - sA^T B^{-1} & -C \end{bmatrix}$$

را به فرم نرمال اسمیت^۲ تبدیل می کند.

$$P(s) \begin{bmatrix} I - sA^T B^{-1} & -C \end{bmatrix} Q(s) = \begin{bmatrix} \text{diag}_{i=1}^n d_i(s) & 0 \end{bmatrix}, \quad (3)$$

چون

$$\{s | \det(I - sA^T B^{-1}) = 0\} \cap \lambda\{B^{-1} A^T\} = \phi,$$

آنگاه

$$d_i(\gamma) \neq 0, \quad i \in I[1, n], \quad \forall \gamma \in \lambda(B^{-1} A^T),$$

$Q(s)$ را به $[Q_1(s), Q_2(s)]$ تفکیک می کنیم با $Q_1(s) \in R^{n \times n}[s]$. از (۳) داریم:

$$P(s) \begin{bmatrix} I - sA^T B^{-1} & -C \end{bmatrix} Q_1(s) = \text{diag}_{i=1}^n d_i(s)$$

$$\iff P(s) \begin{bmatrix} I - sA^T B^{-1} & -C \end{bmatrix} Q_1(s) \text{diag}_{i=1}^n \frac{d_n(s)}{d_i(s)} = I_n d_n(s)$$

$$\iff \begin{bmatrix} I - sA^T B^{-1} & -C \end{bmatrix} (Q_1(s) \text{diag}_{i=1}^n \frac{d_n(s)}{d_i(s)}) P(s) = I_n d_n(s).$$

بنابراین یکی از انتخاب ها می تواند

$$\Delta(s) = d_n(s)$$

و

$$\begin{bmatrix} L(s) \\ H(s) \end{bmatrix} = (Q_1(s) \text{diag}_{i=1}^n \frac{d_n(s)}{d_i(s)}) P(s)$$

باشد که در رابطه ی (۲) صدق می کند.

^۱ Smith normal form reduction

^۲ Smith normal form



قضیه ۲.۲. فرض کنید $Z \in R^{n \times n}$, $R \in R^{n \times n}$, $C \in R^{n \times n}$, $A \in R^{n \times n}$ باشد و فرض کنید

$$\{s | \det(I - A^T B^{-1}) = 0\} \cap \lambda\{B^{-1} A^T\} = \phi,$$

باشد و ماتریس های چندجمله ای

$$L(s) = \sum_{i=0}^{t-1} L_i s^i \in R^{n \times n}[s]$$

و

$$H(s) = \sum_{i=0}^t H_i s^i \in R^{n \times n}[s]$$

و چندجمله ای $\Delta(s) = \sum_{i=0}^t \Delta_i s^i \in R[s]$ که در رابطه ی (۲) صدق می کنند با $\Delta(\gamma) \neq 0$, $\forall \gamma \in \lambda(B^{-1} A^T)$ بعلاوه،

$$f_{(I, A^T B^{-1})}(s) = \det(I - s A^T B^{-1}) = \alpha_n s^n + \alpha_{n-1} s^{n-1} + \dots + \alpha_1 s + \alpha_0, \quad \alpha_0 = 1,$$

$$\text{adj}(I - s A^T B^{-1}) = R_{n-1} s^{n-1} + \dots + R_1 s + R_0.$$

آنگاه جواب های معادله ماتریسی (۱) می توانند بصورت زیر مشخص شوند:

$$X = \sum_{i=0}^{n-1} R_i C Z (A^{-T} B)^i + \sum_{i=0}^{n-1} A^T [R_i C Z (A^{-T} B)^i]^{-1} B$$

$$+ \sum_{i=0}^{t-1} L_i R [\Delta(A^{-T} B)]^{-1} (A^{-T} B)^i + \sum_{i=0}^{t-1} A^T [L_i R [\Delta(A^{-T} B)]^{-1} (A^{-T} B)^i]^{-1} B,$$

$$Y = Z f_{(I, A^T B^{-1})}(A^{-T} B) + \sum_{i=0}^t H_i R [\Delta(A^{-T} B)]^{-1} (A^{-T} B)^i.$$

اثبات. ابتدا نشان می دهیم ماتریس های X و Y داده شده در قضیه، جواب های معادله ماتریسی (۱) هستند.

(۴)

$$X - A^T X^{-1} B = \sum_{i=0}^{n-1} R_i C Z (A^{-T} B)^i + \sum_{i=0}^{n-1} A^T [R_i C Z (A^{-T} B)^i]^{-1} B$$

$$+ \sum_{i=0}^{t-1} L_i R [\Delta(A^{-T} B)]^{-1} (A^{-T} B)^i + \sum_{i=0}^{t-1} A^T [L_i R [\Delta(A^{-T} B)]^{-1} (A^{-T} B)^i]^{-1} B$$

$$- \sum_{i=0}^{n-1} A^T [R_i C Z (A^{-T} B)^i]^{-1} B - \sum_{i=0}^{n-1} A^T B^{-1} R_i C Z (A^{-T} B)^i A^{-T} B$$

$$- \sum_{i=0}^{t-1} A^T [L_i R [\Delta(A^{-T} B)]^{-1} (A^{-T} B)^i]^{-1} B - \sum_{i=0}^{t-1} A^T B^{-1} L_i R [\Delta(A^{-T} B)]^{-1} (A^{-T} B)^i A^{-T} B$$

$$= R_0 C Z + \sum_{i=0}^{n-1} (R_i - A^T B^{-1} R_{i-1}) C Z (A^{-T} B)^i - A^T B^{-1} R_{n-1} C Z (A^{-T} B)^n + L_0 R [\Delta(A^{-T} B)]^{-1}$$

$$+ \sum_{i=0}^{t-1} (L_i - A^T B^{-1} L_{i-1}) R [\Delta(A^{-T} B)]^{-1} (A^{-T} B)^i - A^T B^{-1} L_{t-1} R [\Delta(A^{-T} B)]^{-1}.$$



با استفاده از رابطه ی

$$(I - sA^T B^{-1})adj(I - sA^T B^{-1}) = Idet(I - sA^T B^{-1}),$$

داریم:

$$\begin{aligned} R \circ CZ + \sum_{i=0}^{n-1} (R_i - A^T B^{-1} R_{i-1}) CZ (A^{-T} B)^i - A^T B^{-1} R_{n-1} CZ (A^{-T} B)^n \\ = CZ \sum_{i=0}^n \alpha_i (A^{-T} B)^i = CZ f_{(I, A^T B^{-1})} (A^{-T} B). \end{aligned} \quad (5)$$

با استفاده از رابطه ی (۲) داریم:

$$\begin{aligned} (CH_0 + \Delta_0 I) R [\Delta(A^{-T} B)]^{-1} + \sum_{i=1}^{t-1} (CH_i + \Delta_i I) R [\Delta(A^{-T} B)]^{-1} (A^{-T} B)^i \\ + (CH_t + \Delta_t I) R [\Delta(A^{-T} B)]^{-1} = \sum_{i=0}^t CH_i R [\Delta(A^{-T} B)]^{-1} (A^{-T} B)^i \\ + \sum_{i=0}^t \Delta_i R [\Delta(A^{-T} B)]^{-1} (A^{-T} B)^i = \sum_{i=0}^t CH_i R [\Delta(A^{-T} B)]^{-1} (A^{-T} B)^i + R. \end{aligned} \quad (6)$$

با جایگذاری (۶) و (۵) در (۴) نتیجه می شود:

$$\begin{aligned} X - A^T X^{-1} B &= CZ f_{(I, A^T B^{-1})} (A^{-T} B) + \sum_{i=0}^t CH_i R [\Delta(A^{-T} B)]^{-1} (A^{-T} B)^i + R \\ &= C(Z f_{(I, A^T B^{-1})} (A^{-T} B) + \sum_{i=0}^t H_i R [\Delta(A^{-T} B)]^{-1} (A^{-T} B)^i) + R \\ &= CY + R. \end{aligned}$$

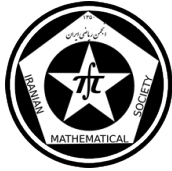
□ بنابراین ماتریس های X و Y داده شده در قضیه در معادله ماتریسی (۱) صدق می کنند.

مراجع

- [1] S. Barnett, C Storey, *Matrix Methods in Stability Theory*, Nelson, London. .1970
- [2] F. Rincon, *Feedback stabilization of second-order models*, Ph.D. Dissertation, Northern Illinois University, De Kalb, Illinois, USA, .1992
- [3] G.R. Duan, A.G. Wu, G. Feng, J. Hu, *Closed-form solutions to the nonhomogeneous Yakubovich-conjugate matrix equation*, App. Math. Appl. 214(2009) .442-450

پست الکترونیکی: eslahchi@modares.ac.ir

پست الکترونیکی: golnoosh.azizipoor@modares.ac.ir



پایداری عملی سیستم‌های گسسته زمانی کسری مثبت با استفاده از پس‌خورد حالت

مرضیه سپهر*
دانشگاه شاهرود

حجت احسنی طهرانی
دانشگاه شاهرود

چکیده

در این مقاله روش جدید از پایداری عملی سیستم‌های گسسته زمانی مثبت کسری معرفی و هم‌چنین شرایط لازم و کافی برای پایداری عملی این سیستم‌ها بیان می‌شود. ماتریس پس‌خورد حالت سیستم را با استفاده از تبدیلات تشابهی به گونه‌ای محاسبه می‌کنیم که مقادیر ویژه ماتریس حلقه بسته، مقادیر از پیش تعیین شده در دایره واحد باشند. در پایان یک مثال برای تعیین روش ارائه می‌دهیم.

واژه‌های کلیدی: پایداری عملی، سیستم‌های گسسته، کسری، حلقه بسته، مثبت
Mathematics Subject Classification [2010]: 93C05, 93D15

۱ مقدمه

در سیستم‌های مثبت متغیرهای ورودی، حالت و خروجی‌ها را با مقادیر نامنفی در نظر می‌گیرند. نمونه‌ای از انواع مدل‌های مثبت را که رفتار خطی دارند را می‌توان در علوم فنی و مهندسی، علم مدیریت، اقتصاد، علوم اجتماعی، زیست‌شناسی، پزشکی و ... یافت. در دهه‌های اخیر مسأله تجزیه و تحلیل سیستم‌های دینامیکی با استفاده از تفاضلات مرتبه کسری^۱ در بسیاری از مقالات از جمله [۳] مطرح شده است. توصیفی از سیستم‌های خطی گسسته زمانی کسری مثبت در [۵] و هم‌چنین مفهوم پایداری عملی^۲ و شرایط پایداری این سیستم‌ها در [۴] ارائه شده است.

۱ ۲

سیستم خطی گسسته زمانی کسری مثبت با معادلات فضای حالت زیر را در نظر بگیرید:

$$\Delta^\alpha x_{k+1} = Ax_k + Bu_k, \quad k \in \mathbb{Z}_+ \quad (1)$$

$$y_k = Cx_k + Du_k \quad (2)$$

که در آن $x_k \in \mathbb{R}_+^n$, $u_k \in \mathbb{R}_+^m$ و $y_k \in \mathbb{R}_+^p$ به ترتیب بردارهای حالت، ورودی و خروجی و ماتریس‌های $A \in \mathbb{R}_+^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}_+^{n \times m}$ و $C \in \mathbb{R}_+^{p \times n}$ ماتریس‌های مثبت با ابعاد مناسب هستند، و

$$\Delta^\alpha x_k = \sum_{j=0}^k (-1)^j \binom{\alpha}{j} x_{k-j}, \quad 0 < \alpha < 1 \quad (3)$$

* سخنران

^۱Fractional

^۲Practical



و $\alpha \in \mathbb{R}$ مرتبه مشتق کسری است. با استفاده از رابطه (۳) می‌توانیم معادله (۱) را به صورت زیر بنویسیم:

$$x_{k+1} + \sum_{j=1}^{k+1} (-1)^j \binom{\alpha}{j} x_{k-j+1} = Ax_k + Bu_k \quad (4)$$

در مسائل عملی فرض بر این است که j توسط برخی اعداد طبیعی h محدود می‌شود، در این صورت از رابطه (۴) داریم:

$$x_{k+1} = A_\alpha x_k + \sum_{j=1}^h c_j x_{k-j} + Bu_k, \quad k \in \mathbb{Z}_+ \quad (5)$$

$$A_\alpha = A + \alpha I_n \quad (6)$$

$$c_j = c_j(\alpha) = (-1)^j \binom{\alpha}{j+1} > 0, \quad j = 1, 2, \dots,$$

توجه کنید که معادلات (۵) و (۲) توصیف یک سیستم گسسته زمانی با h تأخیر در حالت است.

تعریف ۱.۲. [۴] سیستم کسری (۴) و (۲) پایدار عملی نامیده می‌شود، اگر و تنها اگر سیستم (۵) و (۲) پایدار مجانبی باشد.

با تعریف بردار حالت جدید

$$\bar{x}_k = \begin{bmatrix} x_k \\ x_{k-1} \\ \vdots \\ x_{k-h} \end{bmatrix}$$

معادلات (۵) و (۲) را به صورت زیر می‌نویسیم

$$\bar{x}_{k+1} = \bar{A}\bar{x}_k + \bar{B}u_k, \quad k \in \mathbb{Z}_+ \quad (7)$$

$$y_k = \bar{C}\bar{x}_k + \bar{D}u_k \quad (8)$$

که

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} A_\alpha & c_1 I_n & c_2 I_n & \cdots & c_{h-1} I_n & c_h I_n \\ I_n & o & o & \cdots & o & o \\ o & I_n & o & \cdots & o & o \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ o & o & o & \cdots & I_n & o \end{bmatrix} \in \mathbb{R}_+^{\bar{n} \times \bar{n}}, \quad \bar{B} = \begin{bmatrix} B \\ o \\ \vdots \\ o \end{bmatrix} \in \mathbb{R}_+^{\bar{n} \times m}$$

$$\bar{C} = [C \quad o \quad \cdots \quad o] \in \mathbb{R}_+^{p \times \bar{n}}, \quad \bar{D} = D \in \mathbb{R}_+^{p \times m}, \quad \bar{n} = (1+h)n$$

۳ مسأله اصلی

سیستم (۷) با $rank(\bar{B}) = m$ و پس‌خورد حالت

$$u(t) = K\bar{x}(t) \quad (9)$$



که $K \in \mathbb{R}^{m \times \bar{n}}$ ماتریس پس‌خورد حالت است را در نظر می‌گیریم. با جایگذاری رابطه (۹) در (۷) داریم:

$$\bar{x}_{k+1} = (\bar{A} + \bar{B}K)\bar{x}_k = \Gamma \bar{x}_k \quad (10)$$

که Γ سیستم حلقه بسته است. در واقع ما به دنبال ماتریس پس‌خورد K هستیم به طوری که طیف (مجموعه مقادیر ویژه) سیستم حلقه بسته که با $\Lambda(\Gamma)$ نشان می‌دهیم در دایره واحد قرار بگیرد، آنگاه گوئیم که سیستم (۱۰) پایدار مجانبی است. انتقال حالت زیر را در نظر بگیرید:

$$\bar{x}(t) = T\tilde{x}(t)$$

که ماتریس T را می‌توان با عملیات تشابهی مقدماتی که در [۱] شرح داده شد، به دست آورد. در این روش

$$\tilde{A} = T^{-1}\bar{A}T, \quad \tilde{B} = T^{-1}\bar{B}$$

فرم همدم برداری ماتریس‌های A و B هستند که به صورت زیر تعریف می‌شوند.

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} G_0 & & \\ & \dots & \\ I_{\bar{n}-m} & & O_{\bar{n}-m \times m} \end{bmatrix}, \quad \tilde{B} = \begin{bmatrix} B_0 \\ \dots \\ O_{\bar{n}-m \times m} \end{bmatrix}$$

که G_0 یک ماتریس $m \times \bar{n}$ و B_0 یک ماتریس $m \times m$ بالا مثلثی است. اگر ناورداهای کرونکر زوج (\bar{B}, \bar{A}) منظم باشند آنگاه \tilde{A} و \tilde{B} به فرم فوق هستند [۱]، و در غیر این صورت اگر ناورداهای کرونکر نامنظم باشند بعضی از سطرهای $I_{\bar{n}-m}$ از \tilde{A} پخش می‌شوند [۲]. ماتریس پس‌خورد حالت برای زوج (\tilde{B}, \tilde{A}) که مقادیر ویژه صفر را به سیستم اختصاص می‌دهد برابر است با:

$$u = -B_0^{-1}G_0\tilde{x} = \tilde{F}\tilde{x}$$

در نتیجه ماتریس پس‌خورد اولیه برای زوج (\bar{B}, \bar{A}) به صورت $F_p = \tilde{F}T^{-1}$ تعریف می‌شود. بنابراین ماتریس حلقه بسته همدم برداری $\tilde{\Gamma}_0 = \tilde{A} + \tilde{B}\tilde{F}$ به فرم جردن که همه مقادیر ویژه آن صفر است به دست می‌آید.

حال تعریف می‌کنیم $D = \text{diag}\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$ و $A_\lambda = \tilde{\Gamma}_0 + D$ که با استفاده از عملیات تشابهی آن را به فرم

$$\tilde{A}_\lambda = \begin{bmatrix} G_\lambda & & \\ & \dots & \\ I_{n-m} & & O \end{bmatrix} \text{ همدم برداری تبدیل می‌کنیم و سپس ماتریس پس‌خورد حالت به فرم}$$

$$K = B_0^{-1}(-G_0 + G_\lambda)T^{-1}$$

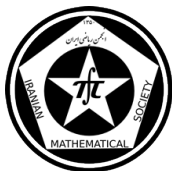
تعریف می‌شود.

مثال ۱.۳. پایداری عملی سیستم کسری مثبت زیر را بررسی می‌کنیم.

$$\Delta^\alpha x_{k+1} = Ax_k + Bu_k, \quad K \in \mathbb{Z}_+, \alpha = 0.9, h = 2$$

که در آن

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 1 & -1 \\ 4 & -1 & 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$



حل. مقادیر ویژه ماتریس حلقه باز (A) به صورت:

$$\{0.5393, 1.7027, -0.5272, 0.1904, -0.1644, -0.0043 \pm 0.0544i, -0.161 \pm 0.0971i\}$$

می‌خواهیم ماتریس پس‌خورد حالت را به گونه‌ای محاسبه نماییم که مقادیر ویژه ماتریس حلقه بسته در طیف

$$\Lambda = \{0.1, -0.2, -0.45, -1/8, 0.06, -0.8, 0.62, -0.25, 0.7\}$$

قرار گیرد. پس با استفاده از روش ارائه شده داریم:

$$K = \begin{bmatrix} -4.2317 & 2.1017 & -1.6383 & 0.0057 & 0.0057 & -0.017 & 0.0081 & 0.0081 & -0.0243 \\ -0.0967 & -1.43 & -0.6667 & -0.0227 & -0.0227 & 0 & -0.0045 & -0.0045 & 0 \\ 1.7 & -1.5167 & 1.1167 & 0.3133 & -0.1567 & -0.47 & 0.157 & -0.0785 & -0.2355 \end{bmatrix}$$

۴ نتیجه‌گیری

در این جا یک روش برای بررسی پایداری عملی با تخصیص مقادیر ویژه در دایره واحد، با استفاده از پس‌خورد حالت مطرح شده است. این روش طبق خواص همدم برداری به دست آمده است. در این مقاله با بررسی پایداری مجانبی سیستم و محدود کردن تعداد و مقادیر تأخیری، پایدار عملی سیستم را تخمین می‌زنیم. مزیت این روش این است که می‌توان با استفاده از عملیات تشابهی مقدماتی محاسبات را بسیار ساده‌تر از روش‌های دیگر انجام داد.

مراجع

- [1] S.M. Karbassi and D.J. Bell, *Parametric time-optimal control of linear discrete-time systems by state feedback-Part 1: Regular Kronecker invariants*, International Journal of Control, Vol. 57, pp. 817-830, 1993.
- [2] S.M. Karbassi and D.J. Bell, *Parametric time-optimal control of linear discrete-time systems by state feedback-Part 2: Irregular Kronecker invariants*, International Journal of Control, Vol. 57, pp. 831-839, 1993.
- [3] S. Das, *Functional Fractional Calculus for System Identification and Controls*, Springer, Berlin, (2008).
- [4] T. Kaczorek, *Practical stability of positive fractional discrete-time linear systems*, Vol. 56, No. 4, 2008.
- [5] M.D. Ortigueira, *Fractional discrete-time linear systems*, Proc. Vol. 3, pp. 2241-2244, (1997).



جایابی قطب با استفاده از مشتق حالت

حجت احسنی طهرانی

دانشگاه شاهرود

علیرضا قرنلی پور*

دانشگاه شاهرود

چکیده

در این مقاله متغیرکنترل متناسب بامشتق بردار حالت در نظر گرفته می شود و سپس با استفاده از تعریف یک سیستم جدید و اختصاص قطب های وارون، ماتریس پس خورد حالت با استفاده از تبدیلات تشابهی به گونه ای محاسبه می گردد که ماتریس حلقه بسته سیستم اولیه دارای قطبهای معینی باشد در پایان مثالی جهت توضیح روش ارائه می گردد.

واژه های کلیدی: سیستم خطی، جایابی قطب، پس خورد مشتق حالت، پایداری، پس خورد حالت

Mathematics Subject Classification [2010]: 93B52, 93B55

۱ مقدمه

مساله مهم در تئوری و عمل طراحی سیستم های کنترل، طراحی، کنترل کننده های پس خورد است که قطب های حلقه بسته سیستم را در جایگاه مناسب قرار دهند. آثار تحقیقی کاملی در این زمینه وجود دارد. مساله کنترل پس خورد حالت در جامعه کنترل، ظرف سه دهه گذشته، بطور کامل مورد توجه بوده است چندین محقق، روشهای را برای دسته گسترده ای از سیستم های خطی تحت پس خورد حالت کامل با هدف کنترل سیستم خطی ارائه نموده اند [۵] و [۴]. ولی در زمینه پس خورد مشتق حالت کارچندانی صورت نگرفته است. یکی از انگیزه های پس خورد مشتق حالت، جلوگیری از نوسانات کنترل شده سیستم های مکانیکی می باشد. [۳]

۲ کنترل سیستم خطی پیوسته زمانی با استفاده از پس خورد مشتق حالت

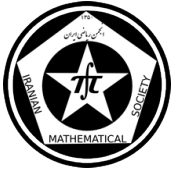
یک سیستم خطی با زمان ثابت به صورت زیر در نظر بگیرید:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad (1)$$

که $x(t) \in R^n$ و $u(t) \in R^m$ به ترتیب بردار حالت و ورودی کنترل می باشند، در حال که $A \in R^{n \times n}$ و $B \in R^{n \times m}$ به ترتیب ماتریس های سیستم و کنترل می باشند. فرض می کنیم $rank(A) = n$ و $rank(B) = m$ و $rank(A + Bk) = n$ هدف جایابی قطب برای سیستم با استفاده از پس خورد مشتق حالت است با تعریف قانون کنترل

$$u(t) = -k\dot{x}(t) \quad (2)$$

* سخنران



که پایداری سیستم را ایجاد کند. با جایگذاری (۲) در (۱) داریم:

$$\dot{x}(t) = (I + Bk)^{-1} Ax(t) \quad (۳)$$

مساله، یافتن ماتریس بهره k است بطوری که ماتریس حلقه بسته $(I + Bk)^{-1} A$ مقادیر ویژه دلخواه مخالف صفر $\Lambda_1 = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$ را اختیار کند با توجه به اینکه ماتریس حلقه بسته مساله اصلی $(I + Bk)^{-1} A$ است داریم:

$$\left((I + Bk)^{-1} A \right)^{-1} = A^{-1} (I + Bk) = A^{-1} + A^{-1} Bk \quad (۴)$$

که با اختیار $B_n = A^{-1} B$ و $A_n = A^{-1}$ داریم:

$$\left((I + Bk)^{-1} A \right)^{-1} = A_n + B_n k \quad (۵)$$

معادله جدید

$$\dot{q}(t) = A_n q(t) + B_n w(t) \quad (۶)$$

باقانون کنترل

$$w(t) = kq(t) \quad (۷)$$

در نظر می گیریم با جایگذاری (۷) در (۶) داریم: $\dot{q}(t) = (A_n + B_n k) q(t)$ ماتریس پس خوردحالت را به گونه ای تعیین می کنیم که مقادیر ویژه ماتریس حلقه بسته $A_n + B_n k$ متعلق به مجموعه $\Lambda_2 = \{\lambda_1^{-1}, \lambda_2^{-1}, \dots, \lambda_n^{-1}\}$ باشد آنگاه مقادیر ویژه ماتریس حلقه بسته سیستم (۳) متعلق به مجموعه Λ_1 می باشد.

۱.۲ تبدیل فضای استاندارد به فضای همدم برداری

با استفاده از ماتریس تبدیل T فضای استاندارد را به فضای همدم برداری به صورت زیر تبدیل می کنیم:
 $q(t) = T\tilde{q}(t)$ و با جایگذاری در معادله (۶) داریم:

$$\dot{\tilde{q}}(t) = T^{-1} A_n T \tilde{q}(t) + T^{-1} B_n w(t) \quad (۸)$$

که بادر نظر گرفتن $\tilde{A}_n = T^{-1} A_n T$ و $\tilde{B}_n = T^{-1} B_n$ معادله (۸) بصورت زیر تبدیل می شود

$$\dot{\tilde{q}}(t) = \tilde{A}_n \tilde{q}(t) + \tilde{B}_n w(t) \quad (۹)$$

که در آن زوج $(\tilde{B}_n, \tilde{A}_n)$ به فرم همدم برداری است که دارای ساختاری بصورت زیر می باشد:

$$\tilde{A}_n = \begin{bmatrix} G_0 \\ G_1 \end{bmatrix} \text{ که } B_0 \text{ یک ماتریس } m \times m \text{ بالا مثلثی و معکوس پذیر است. } G_0 \text{ ماتریس دلخواه } m \times m \text{ و } G_1 \text{ ماتریس } (n-m) \times m \text{ می باشد:}$$

۱- آخرین ستون G_1 برابر صفر است و بقیه ستونها از ماتریس I_{n-m} هستند. ۲- اگر e_1, e_2, \dots, e_{n-m} به ترتیب ستونهای اول تا $(n-m)$ ام ماتریس I_{n-m} باشد آنگاه این بردارها به ترتیب اندیس در ستونهای G_1 ظاهر می شود. اگر ناوردای

$$\tilde{A}_n = \begin{bmatrix} G_0 \\ I_{n-m} \quad \circ_{(n-m) \times m} \end{bmatrix} \text{ کرونکر منظم باشد فرم همدم برداری بصورت}$$

خواهد بود در غیر این صورت ستونهای ماتریس I_{n-m} پایینی \tilde{A}_n پخش می شوند. [۱] و [۲]



۲.۲ جایابی قطب با استفاده از ماتریس پس خورد حالت

در این قسمت ابتدا فرم همدم برداری معادله (۶) را به صورت (۹) بدست می آوریم. قانون کنترل $w(t) = Fq(t)$ یا معادل آن

$$w(t) = FT\tilde{q}(t) \quad (10)$$

را تعریف می کنیم. با جایگذاری رابطه (۱۰) در معادله (۹) داریم:

$$\dot{q}(t) = (\tilde{A}_n + \tilde{B}_n\tilde{F})\tilde{q}(t) \quad (11)$$

در صورتی که ماتریس پس خورد را بصورت $\tilde{F} = -B_0^{-1}G_0$ تعریف کنیم مقادیر ویژه حلقه بسته $\tilde{\Gamma}_0 = \tilde{A}_n + \tilde{B}_n\tilde{F}$ همگی برابر صفر می شود با محاسبه \tilde{F} ماتریس پس خورد فضای اولیه F بصورت $F = \tilde{F}T^{-1}$ محاسبه می شود و از آنجا که $\tilde{\Gamma}_0$ و Γ متشابه هستند مقادیر ویژه Γ نیز برابر صفر هستند.

حال هدف این است که ماتریس پس خورد حالت K را بطوری تعیین کنیم که مقادیر ویژه حلقه بسته $\Gamma = A_n + B_nk$ با قانون (۷) در مجموعه $\Lambda_2 = \{\lambda_1^{-1}, \lambda_2^{-1}, \dots, \lambda_n^{-1}\}$ باشد.

برای این منظور ماتریس قطری $D = \text{diag}(\lambda_1^{-1}, \lambda_2^{-1}, \dots, \lambda_n^{-1})$ را با $\tilde{\Gamma}_0$ جمع می نماییم یعنی $A_\lambda = \tilde{\Gamma}_0 + D$ مقادیر ویژه A_λ همان مقادیر ویژه D مجموعه Λ_2 می باشد. حال با عملیات ستونی مقدماتی و سطری مقدماتی نظیر A_λ را به فرم همدم برداری $\tilde{A}_\lambda = \begin{bmatrix} G_{\lambda_{m \times n}} \\ I_{n-m} \end{bmatrix}$ تبدیل می کنیم. از آنجایی که A_λ و \tilde{A}_λ متشابه اند پس مقادیر ویژه \tilde{A}_λ همان مجموعه Λ_2 می شود. حال ماتریس پس خورد حالت را به فرم زیر تعریف می شود:

$$\tilde{K} = \tilde{F} + B_0^{-1}G_\lambda = B_0^{-1}(-G_0 + G_\lambda) \rightarrow \tilde{K} = \tilde{F} + \tilde{K}_\lambda$$

و داریم: $\tilde{K}_\lambda = B_0^{-1}G_\lambda$ و $K_\lambda = \tilde{K}_\lambda T^{-1}$ و $F = \tilde{F}T^{-1}$ از روابط بالا K بصورت زیر محاسبه می شود:

$$K = F + K_\lambda = (-B^{-1} \cdot G_0 + B^{-1} \cdot G_\lambda) T^{-1} = \tilde{K} T^{-1}$$

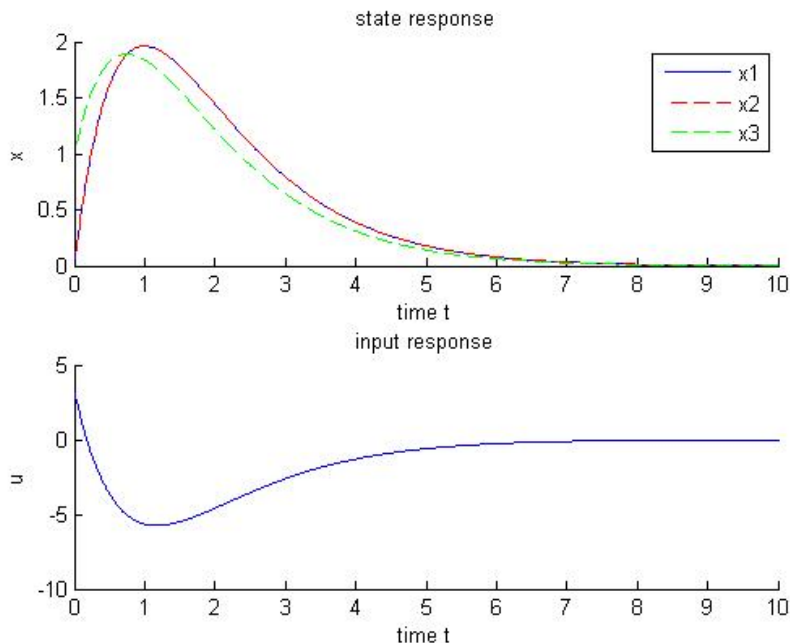
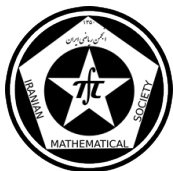
۳ مثال

مثال ۱.۳. مثال: سیستم $\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$ بطوری که $A = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{-3}{4} & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 4 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 4 & 11 \\ 1 & 2 \\ 3 & 8 \end{bmatrix}$ می خواهیم با استفاده از ماتریس پس خورد مشتق حالت قطب های دلخواه $\Lambda_1 = \{-1, \frac{-1}{4}, -1\}$ را اختیار کند.

حل. با توجه به تغییری که می دهیم معادله سیستم بصورت $\dot{q}(t) = A_n q(t) + B_n w(t)$ که در آن $A_n = A^{-1}$ و $B_n = A^{-1}B$ می شود حال با استفاده روش ارائه شده ماتریس پس خورد حالت K به صورت زیر محاسبه می شود.

$$K = F + K_\lambda = \begin{bmatrix} 0 & -6 & \frac{1}{4} \\ -2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

شکل ۱ نمودار پاسخ حالت و ورودی مثال ۱.۳ می باشد که نشان می دهد که سیستم پایدار است.



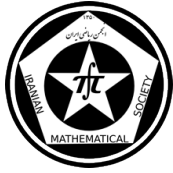
شکل ۱: نمودار پاسخ گذرا و ورودی

۴ نتایج اصلی

پس خورد مشتق حالت به این دلیل پیشنهاد می گردد که نوسانات متغیر حالت از اهمیت ویژه ای برخوردار است. در این مقاله روشی را برای حل مساله جایابی قطبها با استفاده از مشتق حالت برای سیستم های خطی زمان ثابت ارائه شده است و شرایطی را برای جایابی قطب یادآور شده است. استفاده از تبدیلات تشابهی به این دلیل است که این روش عملی تر و نیاز به محاسبات پیچیده سایر روشها را ندارد و درانتها با ارائه مثالی کارایی روش راست آزمایی شده است.

مراجع

- [1] S. M. Karbassi and D. J. Bell, *Parametric time -optimal control of linear discrete-time systems by state feedback-Part 1 : Regular Kronecker invariants.*, International Journal of Control, 57, (1993), 817-830.
- [2] S. M. Karbassi and D. J. Bell, *New method of parametric eigenvalue assignment in state feedback control*, IEE Proc. Control Theory and Applications, 141, (1994), 223-226.
- [3] T.H.S. Abdelaziz and M. Valasek, *A direct algorithm for pole placement by statederivative feedback for single-input linear systems*, Acta Polytechnica 43 (2003), 6, 52-60.
- [4] M. Valasek , N. Olgac, *Pole Placement for Linear time- -varying Non-lexicographically Fixed MIMO Systems*, Automatica, 1999, Vol. 35, No. 11, p. 101-108.
- [5] W. G. Tuel , *On the transformation to (phase-variable) canonical form*, IEEE Trans. on Automatic Control, AC-11, 1966, p. 607.



حل عددی معادلات انتگرال فردهلم نوع دوم با استفاده از روش های چندگامی

سید موسی ترابی
دانشگاه شاهدابوالفضل تاری
دانشگاه شاهدلیلا سعیدی*
دانشگاه شاهد

چکیده

در این مقاله معادله انتگرال فردهلم نوع دوم را با استفاده از روش های چندگامی حل خواهیم کرد. ابتدا ساختار روش را آرایه خواهیم کرد و سپس به بررسی وجود و یکتایی جواب و همچنین همگرایی روش خواهیم پرداخت. در پایان نیز چند مثال عددی با روش آرایه شده حل شده است.

واژه های کلیدی: معادلات انتگرال فردهلم، روش های چندگامی، همگرایی

Mathematics Subject Classification [2010]: 65R20

۱ مقدمه

معادله فردهلم نوع دوم زیر را در نظر بگیرید

$$y(x) = g(x) + \int_a^b K(x, t, y(t)) dt \quad (1)$$

که در آن K و g توابعی هموار می باشند. ابتدا از طرفین معادله انتگرال، مشتق گرفته و آن را به یک معادله انتگرال-دیفرانسیل تبدیل می کنیم و سپس با استفاده از روش های چندگامی در معادلات دیفرانسیل، معادله انتگرال را حل خواهیم کرد. با مشتق گرفتن از رابطه (۱) خواهیم داشت

$$y'(x) = g'(x) + \int_a^b \frac{\partial K}{\partial x} K(x, t, y(t)) dt$$

قرار می دهیم $\bar{K} = \frac{\partial K}{\partial x}$ و لذا خواهیم داشت

$$y'(x) = g'(x) + \int_a^b \bar{K}(x, t, y(t)) dt \quad (2)$$

معادله (۲) را می توان به صورت زیر در نظر گرفت

$$y'(x) = f(x, y(x)), \quad y(\circ) = y_\circ \quad (3)$$

* سخنران



که در آن به دنبال جوابی در بازه $a \leq x \leq b$ هستیم که a و b متناهی می باشند و y_0 را با روش مناسب می توان به دست آورد.

اگر معادله مورد نظر به صورت معادله انتگرال-دیفرانسیل فردهلم به صورت زیر باشد،

$$y'(x) = y(x) + \int_a^b K(x, t, y(t)) dt + g(x), \quad y(0) = y_0.$$

می توان مستقیماً معادله را به صورت (۳) در نظر گرفت.

۲ روش های چندگامی

برای بررسی روش روی معادله (۳) بازه $[a, b]$ را به صورت $x_n = a + nh$, $n = 0, 1, 2, \dots, N-1$ افزایش می کنیم که در آن h طول گام روش می باشد. فرض می کنیم y_n نشان دهنده تقریبی برای جواب $y(x_n)$ باشد و قرار می دهیم $f_n = f(x_n, y_n)$. معادله (۳) را به صورت زیر در نظر می گیریم

$$\sum_{j=0}^k \alpha_j y_{n+j} = h \sum_{j=0}^k \beta_j f_{n+j} \quad (4)$$

که در آن α_j و β_j اعدادی ثابت هستند. حال با استفاده از روش های چندگامی (یا تک گامی) برای حل مسایل ODE ، معادله (۴) را می توان حل نمود. همچنین برای تقریب f_n کافیست قسمت انتگرالی آن را با یکی از روش های انتگرال گیری عددی جایگزین کنیم، یعنی

$$f_n = g'_n + \sum_{j=0}^N \gamma_j \bar{K}(x_n, x_j, y_j)$$

حال اگر از روش تک گامی برای حل معادله (۴) استفاده کنیم، N مجهول y_1, y_2, \dots, y_N و N معادله خواهیم داشت که با استفاده از آنها مجهولات را می یابیم، و اگر از روش r -گامی استفاده کنیم، y_1, \dots, y_{r-1} معلوم و y_r, \dots, y_N مجهول خواهند بود یعنی، $N - r + 1$ مجهول و $N - r + 1$ معادله خواهیم داشت که با استفاده از آنها مجهولات به دست خواهند آمد.

به عنوان مثال رابطه (۴) با استفاده از چند قاعده مختلف به صورت زیر در می آید

قاعده دوزنقه:
$$y_{n+1} - y_n = \frac{h}{2}(f_{n+1} + f_n)$$

قاعده سیمپسون:
$$y_{n+2} - y_n = \frac{h}{3}(f_{n+2} + 4f_{n+1} + f_n)$$

قاعده آدامز-مولتون:
$$y_{n+2} - y_{n+1} = \frac{h}{12}(5f_{n+2} + 8f_{n+1} + f_n)$$



۳ وجود، یکتایی و همگرایی

قضیه زیر از [۱] شرایط وجود جواب یکتا را برای معادله (۳) بیان می‌کند.

قضیه ۱.۳. فرض کنید $f(x, y)$ در رابطه (۳) برای همه نقاط (x, y) در ناحیه D که توسط $a \leq x \leq b$ و $-\infty < y < \infty$ تعریف می‌شود، تعریف شده و پیوسته باشد، a و b متناهی باشند و فرض کنید ثابت L وجود داشته باشد به طوری که برای هر x, y و y^* که (x, y) و (x, y^*) هر دو در D باشند داشته باشیم

$$|f(x, y) - f(x, y^*)| \leq L |y - y^*|. \quad (۵)$$

آنگاه، اگر y عددی معلوم باشد، یک جواب یکتای $y(x)$ برای معادله (۳) وجود دارد که برای هر $(x, y) \in D$ پیوسته و مشتق پذیر است.

قبل از بیان قضیه همگرایی روش، تعریف "صفر-پایدار" را به صورت زیر در نظر می‌گیریم.

تعریف ۲.۳. روش چند گامی (۴)، صفر-پایدار نامیده می‌شود اگر هیچ ریشه‌ای از چند جمله‌ای مشخصه، قدر مطلق بزرگتر از یک نداشته باشد و اگر هر ریشه با قدر مطلق یک ساده باشد.

قضیه زیر از [۲] شرایط همگرایی روش چند گامی را بیان می‌کند.

قضیه ۳.۳. شرایط لازم و کافی برای همگرایی این است که روش چندگامی (۴) از مرتبه حداقل یک باشد و نیز صفر-پایدار باشد.

۴ نتایج عددی

مثال ۱.۴. معادله انتگرال فردهلم نوع دوم زیر را از [۳] در نظر بگیرید

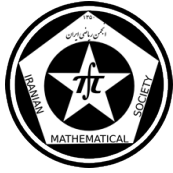
$$y(x) = x - \frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{4} \int_0^1 x^2 y^2(t) dt \quad 0 \leq t \leq 1$$

که در آن $y(0) = 0$ و جواب دقیق آن به صورت $y(x) = x$ می‌باشد. با اعمال روش چندگامی ارایه شده روی این معادله، جواب دقیق روی نقاط افراز به دست می‌آید.

مثال ۲.۴. به عنوان مثال دوم، معادله انتگرال-دیفرانسیل فردهلم زیر را از [۴] در نظر بگیرید

$$y'(x) = \int_0^1 e^{xt} y(t) dt + y(x) + \frac{1 - e^{t+1}}{t+1} \quad 0 \leq t \leq 1$$

که در آن $y(0) = 1$ و جواب دقیق آن به صورت $y = e^x$ می‌باشد. نتایج حاصل از اعمال روش ارایه شده، در جدول ۱ نمایش داده شده است.



جدول ۱: نتایج عددی مثال ۲

$N = 30$		
x_i	خطای روش موجود در [۴]	خطای روش ارایه شده
۰,۱	۰,۵e-۳	۰,۱۳e-۷
۰,۲	۰,۱e-۲	۰,۶e-۷
۰,۳	۰,۱e-۲	۰,۱۱e-۶
۰,۴	۰,۳e-۲	۰,۱۸e-۶
۰,۵	۰,۴e-۲	۰,۲۶e-۶
۰,۶	۰,۵e-۲	۰,۳۶e-۶
۰,۷	۰,۷e-۲	۰,۴۷e-۶
۰,۸	۰,۹e-۲	۰,۶۱e-۶
۰,۹	۰,۱e-۱	۰,۷۸e-۶
$N = 60$		
x_i	خطای روش موجود در [۴]	خطای روش ارایه شده
۰,۱	۰,۵e-۳	۰,۲۳e-۸
۰,۲	۰,۱e-۳	۰,۶۵e-۸
۰,۳	۰,۱e-۳	۰,۱۱e-۷
۰,۴	۰,۷e-۲	۰,۱۷e-۷
۰,۵	۰,۲e-۲	۰,۲۴e-۷
۰,۶	۰,۴e-۲	۰,۳۲e-۷
۰,۷	۰,۳e-۲	۰,۴۲e-۷
۰,۸	۰,۶e-۲	۰,۵۳e-۷
۰,۹	۰,۱e-۱	۰,۶۷e-۷

مراجع

- [1] J. D. Lambert, *Computational methods in ordinary differential equations*, London: Weily, 1973.
- [2] H. Brunner, J. D. Lambert, *Stability of numerical methods for Volterra Integro-Differential equations*, Springer Verlag, 12 (1974), pp. 75-89.
- [3] P. Darania, A. Ebadian, *Development of the Taylor expansion approach for nonlinear integro-differential equations*, Int. J. Contemp. Math. Sciences, Vol. 1, (2006), pp. 651-664.
- [4] A. Shahsavaran, *Numerical solution of linear Volterra and Fredholm integro differential equations using Haar wavelets*, Mathematics Scientific Journal, Vol. 6, (2010), pp. 85-96.

پست الکترونیکی: L.saeedi@shahed.ac.ir
پست الکترونیکی: tari@shahed.ac.ir
پست الکترونیکی: sm.torabi@shahed.ac.ir



روش هم محلی بی اسپلاین مکعبی برای حل معادلات دیفرانسیل معمولی با شرایط مرزی

سید مهدی عبدالهی مایوان*
دانشگاه دامغان

دکتر علی طهماسبی
دانشگاه دامغان

چکیده

در این مقاله روش هم محلی بی اسپلاین درجه سوم را برای مسائل

$$A(x)w''(x) + B(x)w'(x) + D(x)w(x) = H(x)$$

با مقادیر مرزی $w(x) = \alpha, w(x) = \beta$ بیان می کنیم. به کمک قضایای همگرایی می توان همگرایی روش هم محلی را برای معادلات دیفرانسیل معمولی بدست آورد.

واژه‌های کلیدی: معادلات دیفرانسیل معمولی، روش هم محلی بی اسپلاین، مرتبه همگرایی

Mathematics Subject Classification [2010]: 13D45, 39B42

۱ مقدمه

برای حل مسائل معادلات دیفرانسیل روش های بسیار زیادی وجود دارد. دو دسته کلی از این روشها در مقالات مورد استفاده بیشتری قرار گرفته اند.

دسته اول: روشهای نیمه تحلیلی هستند که مبتنی بر بسط سری تیلور می باشند و برای حل مسئله و تقریب جواب، نیازی به افراز بازه مورد نظر و گسسته سازی مسئله بر روی دامنه ندارند که می توان به روش تجزیه آدومیان و اختلال هموتوپی و تکرار های تغییراتی و روش های مشابه اشاره کرد.

دسته دوم: از روش های مورد استفاده روش های مبتنی بر افراز و گسسته سازی می باشند. از جمله این روش ها می توان به روش های تفاضلات متناهی، عناصر متناهی و غیره اشاره کرد.

روش هم محلی یکی از انواع روش های مبتنی بر گسسته سازی می باشد که به یک ابزار قدرتمند برای حل اینگونه مسائل تبدیل شده است. ما در این مقاله روش هم محلی را بر مبنای استفاده از پایه های بی اسپلاین بکار برده ایم.

بطور اجمالی یک روش هم محلی برای تقریب جواب مسئله $A(x)y'' + B(x)y' + D(x)y = H(x)$ به این صورت عمل می کند که ابتدا یک فضای تقریب مانند X با بعد r و یک پایه مانند $\{\varphi_1, \dots, \varphi_r\}$ برای X انتخاب می شوند طوری که بتوان هر $w \in X$ را به صورت $w = \sum_{i=1}^r c_i \varphi_i(x)$ نوشت که در آن c_i ها درجه آزادی نامیده می شوند. توابع $\varphi_i(x)$ انتخابی هستند پس با انتخاب آنها مجهولات ما c_i ها خواهند بود که باید تعیین شوند. حال یک مجموعه ای از نقاط مانند $T = T_I \cup T_B$ که نقاط هم محلی نام دارند، انتخاب می شوند و سپس با قرار دادن $w(x)$ در معادلات هم محلی به شکل زیر:

* سخنران



$$A(x)w''(x) + B(x)w'(x) + D(x)w(x) = H(x) \quad x \in T_I$$

$$w(x) = \alpha, \quad w(x) = \beta \quad x \in T_B$$

مسئله تبدیل به یک دستگاه از معادلات جبری می شود که با حل آن ضرایب c_i و در نتیجه $w(x)$ بدست می آیند. انتخاب فضای تقریب، شکل توابع پایه ای $\varphi_i(x)$ و نقاط هم محلی، تأثیر بسیار زیادی در دقت و حجم عملیات انجام شده برای بدست آوردن جواب تقریبی ایفا می کنند. پایه هایی که ما برای تقریب جواب در نظر می گیریم پایه های فضای بی اسپلاین های چند جمله ای درجه سوم می باشد که دارای همواری از مرتبه c^2 هستند.

۲ تشریح روش هم محلی بی اسپلاین مکعبی

فرض کنید معادله دیفرانسیل زیر را داشته باشیم

$$A(x)y'' + B(x)y' + D(x)y = H(x) \quad (1)$$

که دارای شرایط مرزی $y(a) = \alpha$, $y(b) = \beta$ است. روش هم محلی بی اسپلاین مکعبی را برای بدست آوردن جواب تقریبی از مسئله (۱) با شرایط مرزی بیان می کنیم. فرض کنید بازه $I = [a, b]$ را به n قسمت مساوی به صورت

$$\Pi : a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$$

افزای می کنیم که در آن $h = \frac{b-a}{n}$ و همچنین $S_{\Pi}(\Pi)$ فضای توابع اسپلاین مکعبی Π باشد، بنابراین می توانیم توابع پایه ای $\{B_i(x)\}$ بی اسپلاین مکعبی را برای $n \geq i \leq n$ به صورت زیر بیان کنیم.

$$B_i(x) = \frac{1}{h^3} \begin{cases} (x - x_{i-2})^3, & x \in [x_{i-2}, x_{i-1}] \\ h^3 + 3h^2(x - x_{i-1}) + 3h(x - x_{i-1})^2 - 3(x - x_{i-1})^3 & x \in [x_{i-1}, x_i] \\ h^3 + 3h^2(x_{i+1} - x) + 3h(x_{i+1} - x)^2 - 3(x_{i+1} - x)^3 & x \in [x_i, x_{i+1}] \\ (x_{i+2} - x)^3 & x \in [x_{i+1}, x_{i+2}] \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases} \quad (2)$$

که هر B_i دو بار مشتق پذیر پیوسته است و مقادیر B_i , B_i' و B_i'' به راحتی قابل محاسبه است. برای حل مسائل معادلات دیفرانسیل معمولی که دارای مقادیر مرزی ثابت است با روش بی اسپلاین مرتبه سوم به صورت زیر عمل می کنیم.

فرض کنید معادله دیفرانسیل زیر را داشته باشیم

$$A(x)y'' + B(x)y' + D(x)y = H(x)$$

که دارای شرایط مرزی $y(a) = \alpha$, $y(b) = \beta$ است و همچنین گره های روش به صورت $x_i = a + ih$ است و فاصله بین گره ها برابر مقدار h است. در این صورت با در نظر گرفتن برای رابطه ی (۱) داریم:

$$A(x_i)y'' + B(x_i)y' + D(x_i)y = H(x_i) \quad (3)$$

با نامگذاری $y_i = y(x_i)$, $y_i' = y'(x_i)$ و $y_i'' = y''(x_i)$ وبا توجه به روابط

$$\begin{cases} y_i = c_{i-1} + 4c_i + c_{i+1} \\ y_i' = \frac{3}{h}(c_{i-1} - c_{i+1}) \\ y_i'' = \frac{6}{h^2}(c_{i-1} - 2c_i + c_{i+1}) \end{cases} \quad (4)$$

حال با استفاده از روابط (۴) در معادله (۳) داریم

$$\left(\frac{6}{h^2}A(x_i) + \frac{3}{h}B(x_i) + D(x_i)\right)c_{i-1} + \left(\frac{-12}{h^2}A(x_i) + 4D(x_i)\right)c_i$$



$$+ \left(\frac{\delta}{h^2} A(x_i) - \frac{\gamma}{h} B(x_i) + D(x_i) \right) c_{i+1} = H(x_i) \quad (5)$$

چون $0 \leq i \leq n$ لذا دارای $n+1$ معادله و $n+3$ مجهول است. بنابراین کافی است دو مجهول c_{n+1} و c_{-1} را (به کمک دو شرط اولیه مسئله) از دستگاه حذف کنیم. اینک با استفاده از رابطه (5) و حذف دو متغیر c_{n+1} و c_{-1} دستگاه معادلات خطی $T_n c_n = f_n$ نتیجه می شود که در آن عناصر ماتریس ضرایب T_n به صورت زیر است

$$\begin{cases} t_{0,0} = \frac{\gamma\delta}{h^2} A(a) - \frac{\gamma}{h} B(a) \\ t_{j,j-1} = \frac{\delta}{h^2} A(x_j) + \frac{\gamma}{h} B(x_j) + D(x_j) \\ t_{j,j} = \frac{\gamma\delta}{h^2} A(x_j) + \gamma D(x_j) \\ t_{j,j+1} = \frac{\delta}{h^2} A(x_j) - \frac{\gamma}{h} B(x_j) + D(x_j) \\ t_{n,n} = \frac{\gamma\delta}{h^2} A(a) + \frac{\gamma}{h} B(a) \\ t_{i,j} = 0, \quad \forall |i-j| > 1 \end{cases}$$

هم چنین مقادیر بردار سمت راست دستگاه معادلات خطی به صورت زیر است

$$\begin{cases} f_0 = H(a) - (D(a) + \frac{\delta}{h^2} A(a) + \frac{\gamma}{h} B(a)) \alpha \\ f_i = H(x_i) \quad \text{for } 1 \leq i \leq n-1 \\ f_n = H(b) - (D(b) + \frac{\delta}{h^2} A(b) - \frac{\gamma}{h} B(b)) \beta \end{cases}$$

از حل دستگاه معادلات خطی مذکور مقادیر $n+1$ مجهول c_i محاسبه خواهد شد، سپس با استفاده از رابطه (4) مقادیر عددی y_i ها و در نتیجه خطای مطلق روش بی اسپلاین حاصل خواهد شد.

۳ همگرایی درونیابی اسپلاین

حال نشان می دهیم بعضی از نتایج درونیابی اسپلاین مکعبی را که در [۲] بحث شده است که در ساختار روش هم محلی اسپلاین مرتبه بالا مورد استفاده قرار می گیرد.

لم ۱.۳. فرض کنید $S(x)$ درونیابی یکتا در $S_3(\Pi)$ برای $y(x)$ با شرایط مرزی معادله (1) باشد. اگر $y(x) \in C[a, b]$ آنگاه روابط زیر برقرار است

$$S(x_i) = y(x_i), \quad S'(x_i) = y'(x_i) + O(h^4)$$

$$S''(x_i) = y''(x_i) - \frac{h^2}{12} y^{(4)}(x_i) + O(h^4)$$

این لم نتیجه مستقیمی از [۲] است. علاوه بر روابط بالا داریم:

$$\|y'' - S''\|_\infty = O(h^2) \quad \|y' - S'\|_\infty = O(h^3) \quad \|y - S\|_\infty = O(h^4)$$

نتیجه ۲.۳. با توجه به فرضیات لم بالا داریم:

$$\frac{S'''(x_i) - 2S''(x_i) + S'(x_i)}{h} = y^{(4)}(x_i) + O(h^4) \quad 1 \leq i \leq n-1$$

رابطه بین $S''(x_i)$ و $y^{(4)}(x_i)$ بوسیله استفاده مستقیم از لم بالا بدست آمده است در حالی که بوسیله بسط تیلور بصورت زیر می توان نشان داد

$$y^{(4)}(x_0) = 2y^{(4)}(x_1) - y^{(4)}(x_2) + O(h^2)$$

$$y^{(4)}(x_n) = 2y^{(4)}(x_{n-1}) - y^{(4)}(x_{n-2}) + O(h^2)$$



۴ نتایج عددی

در مثال های زیر روش هم محلی بی اسپلاین را برای مقادیر متفاوت n (n تعداد زیر بازه ها است) اجرا کرده ایم و به نتایج مطلوب که در جدول درج شده است دست یافته ایم.
مثال (۱):

$$\begin{cases} y'' + y = 3x \sin(x) \\ y(0) = 2 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$$

جواب واقعی: $y = 2 \cos(x) + \sin(x) + \frac{3}{4}(x \sin(x) - x^2 \cos(x))$

مثال (۲):

$$\begin{cases} x^2 y'' - xy = x \\ y(1) = 2 \\ y(2) = 4 \end{cases}$$

جواب واقعی: $y = x^2 - x + 2$

در جدول زیر، $E = \|y - y^*\|_2$ که در آن y جواب دقیق مسئله، y^* جواب تقریبی (مقدار عددی مسئله) و n تعداد زیر بازه هاست.

مثال/n	۱۰	۱۰۰	۱۰۰۰
مثال (۱)	$E = 5/3 \times 10^{-3}$	$E = 1/6738 \times 10^{-4}$	$E = 5/2934 \times 10^{-6}$
مثال (۲)	$E = 1/3 \times 10^{-3}$	$E = 4/1280 \times 10^{-5}$	$E = 6/5070 \times 10^{-6}$

مراجع

- [1] S. Chandra Sekhara Rao, Mukesh Kumar, *Optimal B-spline collocation method for self-adjoint singularly perturbed boundary value problems*, App. Math. Comput, Vol. 188, 2007, pp. 749-761.
- [2] T.R. Lucas, *Error bounds for interpolating cubic splines under various end conditions*, SIAM J. Numer. Anal., Vol. 11, 1974, pp. 569-584.
- [3] E.P. Doolan, J.J.H. Miller, W.H.A. Schilders, *Uniform Numerical Methods for Problems with Initial and Boundary Layers*, Boole Press, Du 'n Laoghaire, 1980.

پست الکترونیکی: abdollahi.seyedmahdi@yahoo.com
پست الکترونیکی: tahmasbi@du.ac.ir



روش اجزای محدود گالرکین برای حل معادله دیفرانسیل انتشار با چند ترم مشتقات زمان-مکان ریتز کسری در فضای دو بعدی

محمد رضا اصلاحچی
دانشگاه تربیت مدرس

زینب غریبی*
دانشگاه تربیت مدرس

چکیده

مسئله مقدار مرزی-اولیه برای معادلات انتشار با چند ترم مشتقات زمان-مکان ریتز در فضای دو بعدی در نظر می‌گیریم. فرم ضعیف و هم‌چنین طرح نیمه گسسته مسئله را بوسیله روش اجزای محدود گالرکین، بدست می‌آوریم و وجود و یکتایی جواب ضعیف را ثابت می‌کنیم. علاوه بر این یک طرح کاملاً گسسته بر اساس روش تفاضلات متناهی برای گسسته سازی مشتقات زمان توسعه داده شده است و وجود، پایداری و همگرایی جواب بحث شده است.

واژه‌های کلیدی: روش اجزای محدود، معادله دیفرانسیل انتشار با چند ترم مشتقات زمان

Mathematics Subject Classification [2010]: 13D45, 39B42

۱ مقدمه

محاسبات کسری شاخه‌ای از ریاضی است که در مورد انتگرال و مشتق از مرتبه‌های دلخواه بحث می‌کند. اخیراً محاسبات کسری با توجه به کاربرد گسترده در علوم و مهندسی به یک موضوع داغ تبدیل شده است. به خوبی می‌دانیم که جواب‌های تحلیلی برای معادلات دیفرانسیل کسری به سختی بدست می‌آیند و (اگر خوشبختانه بدست آیند) همیشه شامل سری نامتناهی است که ارزیابی آن خیلی هزینه بر است. بنابراین ما به برخی از روش‌های عددی متوسل می‌شویم. روش اجزای محدود یکی از روش‌های عددی برای حل معادلات دیفرانسیل کسری است، که همیشه با مرتبه همگرایی بالا است و هنوز در مرحله اول توسعه است. تاکنون، نویسندگان بیشتر توجه خود را به استفاده از روش اجزای محدود برای معادلات دیفرانسیل چند ترم زمان-مکان کسری یک بعدی متمرکز کرده‌اند و تنها تعداد اندکی از محققان به مسائل دو بعدی بحث کرده‌اند. در این مقاله، مسئله مقدار مرزی-اولیه زیر برای معادله انتشار چندترم زمان-مکان ریتز کسری در نظر می‌گیریم

$$\begin{aligned} P({}_0^C D_t)u(x, y, t) &= \kappa_1 {}^R D_{|x|}^\beta u(x, y, t) + \kappa_2 {}^R D_{|y|}^\gamma u(x, y, t), \\ (x, y, t) &\in \Omega \times (0, T], \\ u(x, y, 0) &= g(x, y), \quad (x, y, t) \in \Omega \\ u(x, y, t) &= 0, \quad (x, y, t) \in \partial\Omega \times (0, T] \end{aligned} \quad (1)$$

که $\kappa_1 \geq 0$, $\kappa_2 \geq 0$ و g تابع پیوسته، $1 < \beta, \gamma \leq 2$ مرتبه‌های مشتق مکان کسری و $\Omega = [a, b] \times [c, d]$ ناحیه مسئله می‌باشد. در اینجا عملگر دیفرانسیل $P({}_0^C D_t)$ بصورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$P({}_0^C D_t) = \sum_{i=1}^m b_i {}_0^C D_t^{\alpha_i}.$$

* سخنران



که $b_i > 0$ برای $i = 1, \dots, m$ و $0 < \alpha_m \leq \dots \leq \alpha_1 \leq 1$ مرتبه مشتق زمان کسری با مشتق کسری کاپاتو چپ ${}^C D_t^\mu$ که به صورت زیر تعریف می‌شود:

$${}^C D_t^\mu u(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\mu)} \int_0^t (t-\tau)^{-\mu} \frac{du(\tau)}{d\tau} d\tau, \quad 0 < \mu \leq 1$$

همچنین عملگر ریتز ${}^R D_{|x|}^\beta$ بصورت زیر تعریف می‌شود:

$${}^R D_{|x|}^\beta = \frac{-1}{2 \cos(\beta\pi/2)} ({}^R D_x^\beta + {}^R D_b^\beta),$$

که

$${}^R D_x^\theta u(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\theta)} \frac{d^n}{dx^n} \int_a^x (x-\tau)^{n-1-\theta} u(\tau) d\tau, \quad n-1 < \theta < n$$

$${}^R D_b^\theta u(x) = \frac{(-1)^n}{\Gamma(n-\theta)} \frac{d^n}{dx^n} \int_x^b (\tau-x)^{n-1-\theta} u(\tau) d\tau.$$

بطور مشابه، می‌توان مشتق مکان کسری ریتز ${}^R D_{|y|}^\gamma$ نیز تعریف کرد. فرم ضعیف و طرح نیمه گسسته: در این مقاله $\|\cdot\|_k$ و $\|\cdot\|_0$ به ترتیب نماد نرمهای $L^2(\Omega)$ و $H^k(\Omega)$ می‌باشند و C ثابتی است که در موقعیت‌های مختلف، متفاوت می‌باشد. فرم ضعیف مسئله (۲) را می‌توان به این صورت بدست آورد: برای $u(x, y, \circ) \in L^2(\Omega)$ داده شده، پیدا می‌کنیم $u \in L^2([0, T]; V) \cap C^0([0, T]; L^2(\Omega))$ بطوری که در رابطه ذیل صدق کند:

$$\begin{cases} (P({}^C D_t)u, v) = -A(u, v), \quad \forall v \in V \equiv H^{\beta/2} \cap H^{\gamma/2} \\ u(x, y, \circ) = g(x, y). \end{cases} \quad (2)$$

که

$$A(u, v) := c_1 \{ ({}^R D_x^{\beta/2} u(x, y, t), {}^R D_b^{\beta/2} v(x, y, t)) + ({}^R D_b^{\beta/2} u(x, y, t), {}^R D_x^{\beta/2} v(x, y, t)) \} + c_2 \{ ({}^R D_y^{\gamma/2} u(x, y, t), {}^R D_d^{\gamma/2} v(x, y, t)) + ({}^R D_d^{\gamma/2} u(x, y, t), {}^R D_y^{\gamma/2} v(x, y, t)) \},$$

و

$$c_1 = \frac{\kappa_1}{2 \cos(\beta\pi/2)}, \quad c_2 = \frac{\kappa_2}{2 \cos(\gamma\pi/2)}.$$

به منظور بحث آنالیز خطا، شبه نرم و نرم زیر را به ترتیب به صورت ذیل تعریف می‌کنیم

$$\|u\|_{(\beta, \gamma)} := \left(|({}^R D_x^{\beta/2} u, {}^R D_b^{\beta/2} u)| + |({}^R D_y^{\gamma/2} u, {}^R D_d^{\gamma/2} u)| \right)^{1/2},$$

$$\|u\|_{(\beta, \gamma)} := (\|u\|_0^2 + \|u\|_{(\beta, \gamma)}^2)^{1/2}.$$

قضیه ۱.۱. ([۱]) فرم $A(u, v)$ تعریف شده، یک فرم دوخطی، پیوسته و *coercive* است.

قضیه ۲.۱. ([۱]) اگر u جواب ضعیف مسئله (۲) باشد، پس ثابت C وجود دارد که

$$\|u(t)\|_0 \leq C \|u(0)\|_0.$$



در واقع قضیه بالا، ایجاب می‌کند که اگر مسئله (۲) حل پذیر باشد، پس جواب یکتا برای مسئله تغییرات (۲) وجود دارد.

اکنون به طرح نیمه گسسته می‌پردازیم. بدین منظور ناحیه Ω را به المان‌های مثلثی تقسیم می‌کنیم و تعریف می‌کنیم فضای اجزای محدود $X_h^r := \{v_h \in C(\bar{\Omega}), v_h|_e = P_r(x, y), v_h|_{(x,y) \neq \Omega_h} = 0\}$ بطوری که برای h کوچک و $v \in H^\mu \cap H^{max\{\beta/2, \gamma/2\}}$ رابطه ذیل را داشته باشیم:

$$\inf_{\chi \in X_h^r} (\|v - \chi\|_0 + h\|\nabla(v - \chi)\|_0) \leq h^\mu \|v\|_\mu, \quad 1 \leq \mu < r$$

فرض کنیم $V_h = V \cap X_h^r$ ، می‌توان نشان داد فرم نیمه گسسته مسئله (۳) به صورت زیر است. پس مطلوب است پیدا کردن $u_h \in V_h$ که در رابطه ذیل صدق نماید:

$$\begin{cases} (P({}^C D_t)u_h, \chi) = -A(u_h, \chi), \quad \forall \chi \in V_h \\ u_h(x, y, 0) = g_h(x, y). \end{cases}$$

بطوری که $g_h \in X_h^r$ تقریب داده اولیه g است.

هم چنین پایداری مسئله تغییرات نیمه گسسته با استفاده از اثبات قضیه ۳ قابل بررسی است.

۲ نتایج اصلی

طرح کاملاً گسسته. برای گسسته سازی مشتقات زمان کسری، بازه $[0, T]$ را بطور یکنواخت با طول گام زمانی $\tau = T/K$ برای $K \in \mathbb{N}$ تقسیم می‌کنیم. با استفاده از گسسته سازی زمان [۲] برای $P({}^C D_t)u(t)$ در $t = t_{n+1}$ خواهیم داشت:

$$P({}^C D_t)u(t_{n+1}) = P_\tau({}^C \bar{D}_t)u(t_{n+1}) + R_\tau^{n+1}.$$

که عملگر دیفرانسیل گسسته $P_\tau({}^C \bar{D}_t)$ به صورت ذیل تعریف می‌شود:

$$P_\tau({}^C \bar{D}_t)u(t_{n+1}) := \sum_{j=0}^n P_j(u(x, y, t_{n+1-j}) - u(x, y, t_{n-j})) + r_{\alpha, \tau}^{n+1}.$$

که ضرایب $\{P_j\}_{j=0}^n$ به صورت ذیل تعریف می‌شوند:

$$P_j = \sum_{i=1}^m \frac{b_i d_{\alpha_i, j}}{\Gamma(\tau - \alpha_i) \tau^{\alpha_i}}, \quad j \in \mathbb{N}$$

سپس طبق [۲] خطای برشی موضعی R_τ^{n+1} از تقریب $P_\tau({}^C \bar{D}_t)u(t_{n+1})$ به صورت ذیل کران می‌شود:

$$|R_\tau^{n+1}| \leq C \max_{0 \leq t \leq T} |u_{tt}(x, y, t)| \left(\sum_{i=1}^m b_i \tau^{\tau - \alpha_i} \right) \leq C \tau^{\tau - \alpha_1} \max_{0 \leq t \leq T} |u_{tt}(x, y, t)|.$$

اکنون طرح کاملاً گسسته زیر را استخراج می‌کنیم. مطلوب است پیدا کردن $U^{n+1} \in V_h$ بطوری که در رابطه ذیل صدق کند:

$$\begin{cases} (P_\tau({}^C \bar{D}_t)U^{n+1}, \chi) = -A(U^{n+1}, \chi), \quad \forall \chi \in V_h \\ U^0 = g_h(x, y). \end{cases}$$



طرح کاملاً گسسته فوق معادل با پیدا کردن $U^{n+1} \in V_h$ است بطوری که در رابطه ذیل صدق کند:

$$\begin{cases} P_n(U^{n+1}, \chi) + A(U^{n+1}, \chi) = \sum_{j=0}^{n-1} (P_j - P_{j+1})(U^{n-j}, \chi) + P_n(U^0, \chi), \quad \forall \chi \in V_h \\ U^0 = g_h(x, y). \end{cases}$$

قضیه ۱.۲. فرض می‌کنیم که $g \in L^2(\Omega)$ ، پس طرح کاملاً گسسته دارای جواب یکتا است.

اثبات. اثبات مشابه [۱] می‌باشد. □

قضیه ذیل پایداری نامشروط طرح کاملاً گسسته را نتیجه می‌دهد.

قضیه ۲.۲. طرح کاملاً گسسته فوق پایدار نامشروط است؛ یعنی برای هر $n \in \mathbb{N}$

$$\|U^n\|_0 \leq C \|U^0\|_0.$$

اثبات. اثبات مشابه [۲] می‌باشد. □

قضیه ذیل همگرایی را نتیجه می‌دهد.

قضیه ۳.۲. اگر $u(x, y, t)$ و U^n به ترتیب جوابهای مسئله اصلی و کاملاً گسسته باشند، پس برآورد خطای زیر داریم

$$\|u(t_n) - U^n\|_{(\beta, \gamma)}^2 \leq \left\{ \tau^{3-\alpha} + \|u(t_0) - U^0\|_{\max\{\beta, \gamma\}}^2 + h^{2r+2-2\lambda} \left(\|u(t_0)\|_{r+1}^2 + \tau^3 \|u_t\|_{r+1}^2 + \|u(t_n)\|_{r+1}^2 \right) \right\}$$

$$\text{که } \lambda = \max\{\beta/2, \gamma/2\} \text{ و } \|u\|_{\circ, l} := \left(\int_0^T \|u(\cdot, t)\|_l^2 dt \right)^{1/2}$$

مراجع

- [1] Bu, W., Y. Tang, and J. Yang, *Galerkin finite element method for two-dimensional Riesz space fractional diffusion equations*, Journal of Computational Physics, 2014.276, p.26 – 38.
- [2] Jin, B., et al, *The Galerkin finite element method for a multi-term time-fractional diffusion equation*, Journal of Computational Physics, 2015.281, p.825 – 843.

پست الکترونیکی: پست الکترونیکی: eslahchi@modares.ac.ir
پست الکترونیکی: پست الکترونیکی: zeinab.gharibi@modares.ac.ir



روش جداسازی عملگرها و کاربرد آن در حل یک مسئله سهموی غیرخطی

علی ذاکری

دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی

زهرا نوروزی*

دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی

چکیده

در این مقاله روش جداسازی عملگر^۱ مبتنی بر یافتن ریشه یک معادله به روش نیوتن به منظور حل معادلات دیفرانسیل غیر خطی ارائه می‌شود. جواب‌های تقریبی حاصل از بکارگیری این روش و مقایسه آن با جواب واقعی نشان دهنده دقت و همگرایی مناسب این روش است.

واژه‌های کلیدی: روش جداسازی عملگر، معادلات دیفرانسیل غیرخطی، روش نیوتن، روش تفاضلات متناهی، مسئله‌ی نفوذ

۱ مقدمه

در مسائل مربوط به معادلات دیفرانسیل با مشتقات پاره‌ای برخی کلاس‌های شناخته شده از معادلات نظیر معادله گرما، موج، انتقال، انتشار و ... وجود دارد که تا کنون روش‌های متفاوت عددی یا تحلیلی بسیاری برای حل آن‌ها ارائه شده است. در بسیاری از پدیده‌های طبیعی نظیر معادله‌ی انتقال-انتشار، چندین عبارت دیفرانسیلی در یک معادله در کنار یکدیگر قرار می‌گیرند که روش‌های عددی موجود برای حل آنها به جهت عدم برقراری شرایط پایداری، همگرایی یا سازگاری روش مورد استفاده، کارآمد نمی‌باشد.

ایده‌ی اساسی روش جداسازی عملگر بر پایه جداسازی مسئله به مسائل ساده‌تر که به آن‌ها زیر مسئله گفته می‌شود استوار است. در سال ۱۹۵۰ اولین بار این روش موسوم به روش جداسازی لی-تروتتر^۲ مطرح شد و در سال ۱۹۵۷ در حل معادلات دیفرانسیل با مشتقات پاره‌ای توسط گادونوف^۳ و باگرینفسکی^۴ به کارگرفته شد. همچنین از روش مزبور با انتخاب روش تفاضلات متناهی برای هر زیر مسئله خطی در سال ۱۹۶۰ استفاده شد. از این روش برای حل مسائل غیرخطی از سال ۲۰۰۵ تا کنون استفاده شده است [۲، ۴].

در روش جداسازی عملگر به جای حل مسئله‌ی اولیه زیر مسئله‌های ساده‌تر با استفاده از روش‌های عددی مشهور حل می‌شوند. لذا قابلیت ترکیب روش‌های عددی خاص برای بدست آوردن جواب مسئله‌ی اصلی فراهم می‌گردد. به طور مثال برای معادله انتقال-انتشار هر یک از معادلات در حوزه‌ی پایداریشان حل شده و جواب اصلی با تکنیک‌های روش جداسازی از متصل کردن جواب زیر مسئله‌ها بدست خواهد آمد. استفاده از این روش می‌تواند حافظه‌ی مورد نیاز محاسبات را کاهش دهد و در بعضی مسائل الگوریتمی ایجاد کند که به طور نامشروط پایدار است. همچنین در برخی مسائل چند بعدی روش جداسازی عملگر تنها روش حل ممکن است.

* سخنران

^۱operator splitting method

^۲Lie-Trotter

^۳Gadonov

^۴Bagrinovskii



در این مقاله ابتدا به بیان یک مسئله غیرخطی سهموی در فضای یک بعدی پرداخته و پس از معرفی روش‌های جداسازی عملگر روش تکراری نیوتن در جداسازی عملگرها را بیان کرده سپس به الگوریتم حل آن با استفاده از روش ارائه شده می‌پردازیم. در آخر با بیان مثالی از معادله دیفرانسیل با مشتقات پارهای غیر خطی تقریب جواب حاصل از این روش و خطای آن محاسبه می‌گردد.

۲ بیان مسئله

فرض کنید $D(u) = a(t)u^2 + b(t)$ که در آن $a, b > 0$ توابع تعریف شده بر دامنه $t \geq 0$ باشند. در این صورت مسئله غیر خطی سهموی به صورت زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{aligned} u_t - (D(u)u_x)_x &= f(x, t), & 0 < x < 1, & \quad t \geq 0 \\ u(x, 0) &= p(x), & u(0, t) &= q_1(x), & u(1, t) &= q_2(x) \end{aligned} \quad (1)$$

قضیه ۱.۲. چنان که شرایط مرزی همگن باشند، مسئله‌ی فوق جواب یکتا دارد.

□

اثبات. رک [۷].

۳ روش‌های جداسازی عملگرها

به طور کلی روش‌های جداسازی عملگرها را می‌توان به دو دسته‌ی روش‌های دنباله‌ای و روش‌های تکراری تقسیم کرد. روش‌های دنباله‌ای تنها برای عملگرهای دیفرانسیلی خطی کاربرد دارند، در صورتی که روش‌های تکراری که در سال‌های اخیر مطرح شده‌اند علاوه بر کاربرد آن‌ها در جداسازی عملگرهای دیفرانسیلی خطی به جداسازی عملگرهای دیفرانسیلی غیرخطی نیز می‌پردازند. به منظور مطالعه بیشتر الگوریتم‌های روش جداسازی به [۲، ۳] رجوع کنید.

در ادامه به بیان چگونگی پیاده‌سازی روش‌های تکراری جداسازی عملگرها برای معادلات دیفرانسیل غیرخطی می‌پردازیم:

$$\frac{\partial U}{\partial t} = A(U(t))U(t) + B(U(t))U(t), \quad t \in [t_0, T], \quad U(t_0) = U_0. \quad (2)$$

که در آن $X \rightarrow X : A(U), B(U)$ عملگرهای دیفرانسیلی تعریف شده بر فضای باناخ X می‌باشند. برای مطالعه بیشتر در حالتی که A و B عملگرهای دیفرانسیلی خطی می‌باشند به [۴، ۵] رجوع کنید. همچنین همگرایی این روش با استفاده از قضیه همگرایی لکس در [۱، ۶] آمده است.

در روش‌های تکراری برخلاف روش‌های دنباله‌ای دو عملگر در هر زیر مسئله نقش دارند و طبق الگوریتم زیر در هر زیر بازه $[t^n, t^{n+1}]$ که حاصل از افراز بازه‌ی زمانی کل با طول گام یکسان است، روش جداسازی عملگر اعمال می‌شود:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_i(t)}{\partial t} &= A(u_i(t))u_i(t) + B(u_{i-1}(t))u_{i-1}(t) & u_i(t^n) &= u_{sp}^n \\ \frac{\partial u_{i+1}(t)}{\partial t} &= A(u_i(t))u_i(t) + B(u_{i+1}(t))u_{i+1}(t) & u_{i+1}(t^n) &= u_{sp}^n \end{aligned} \quad (3)$$

که در آن $i = 1, 3, \dots, 2m+1$ ، نقطه شروع تکرار $u_0(t) = 0$ ، یک حدس اولیه دلخواه (که معمولا $u_0(t) = 0$ اختیار می‌گردد) می‌باشد. همچنین در این مقاله u_{sp} تقریب جواب واقعی u حاصل از روش جداسازی است که $u_{sp}^n = U(t_0)$ و در $t = t^n$ ، u_{sp}^n مقداری معلوم و در لحظه $t = t^{n+1}$ داریم: $u_{sp}^{n+1} = u_{2m+2}(t^{n+1})$.



۴ روش تکراری جداسازی عملگر مبتنی بر روش نیوتن

برای حل هر یک از زیر مسئله‌ها روش‌هایی از جمله روش‌های حل معادلات دیفرانسیل با مشتقات پاره‌ای نظیر روش تفاضلات متناهی، روش عناصر متناهی و ... به کار گرفته می‌شود. در این بخش از روش نیوتن برای حل زیر مسئله‌ها استفاده شده است.

روش نیوتن: اگر $F(c) = 0$ که در آن F یک تابع است را مد نظر قرار دهیم برای یافتن تقریبی از ریشه تابع، تکرار

$$c^{k+1} = c^k - D(F(c^k))^{-1} F(c^k)$$

که در آن $D(F(c))$ ماتریس ژاکوبی تابع F است را تا رسیدن به دقت دلخواه ε یعنی تا زمان برقراری شرط $|c^{k+1} - c^k| \leq \varepsilon$ ادامه می‌دهیم. اینک برای حل زیر مسئله‌های روش تکراری با استفاده از روش نیوتن دو تابع زیر تعریف می‌شوند:

$$F_1(u_i) = \frac{\partial u_i}{\partial t} - A(u_i)u_i - B(u_{i-1})u_{i-1} = 0, \quad u_i(t^n) = u_{sp}^n \quad (4)$$

$$F_2(u_{i+1}) = \frac{\partial u_{i+1}}{\partial t} - A(u_i)u_i - B(u_{i+1})u_{i+1} = 0, \quad u_{i+1}(t^n) = u_{sp}^n \quad (5)$$

حال با بکارگیری روش نیوتن به ترتیب برای (۴) و (۵) الگوریتم‌های زیر بدست می‌آیند:

$$u_i^{k+1} = u_i^k - D(F_1(u_i^k))^{-1} \left(\frac{\partial u_i^k}{\partial t} - A(u_i^k)u_i^k - B(u_{i-1}^k)u_{i-1}^k \right), \quad (6)$$

$$D(F_1(u_i^k)) = -\left(A(u_i^k) + \frac{\partial A(u_i^k)}{\partial u_i^k} u_i^k \right), \quad u_i^k(t^n) = u_{sp}^n$$

$$u_{i+1}^{k+1} = u_{i+1}^k - D(F_2(u_{i+1}^k))^{-1} \left(\frac{\partial u_{i+1}^k}{\partial t} - A(u_i^k)u_i^k - B(u_{i+1}^k)u_{i+1}^k \right), \quad (7)$$

$$D(F_2(u_{i+1}^k)) = -\left(B(u_{i+1}^k) + \frac{\partial B(u_{i+1}^k)}{\partial u_{i+1}^k} u_{i+1}^k \right), \quad u_{i+1}^k(t^n) = u_{sp}^n$$

و در نتیجه $u_{sp}^{n+1} = u_{\gamma m + \gamma}(t^{n+1})$ ، جواب تقریبی حاصل از روش جداسازی در زمان $t = t^{n+1}$ می‌باشد. اکنون مسئله (۱) را در نظر بگیرید. قرار می‌دهیم:

$$A(u)u = \left((a(t)u^\gamma + b(t)) \frac{\partial^\gamma u}{\partial x^\gamma} \right) u, \quad B(u)u = \left(\gamma a(t)u \left(\frac{\partial}{\partial x} \right)^\gamma \right) u.$$

در این صورت بکارگیری روش نیوتن (۳) برای مسئله مورد نظر توابع زیر را نتیجه می‌دهد:

$$F_1(u_i) = \frac{\partial u_i}{\partial t} - \left((a(t)u_i^\gamma + b(t)) \frac{\partial^\gamma u_i}{\partial x^\gamma} \right) - \left(\gamma a(t)u_{i-1} \left(\frac{\partial u_{i-1}}{\partial x} \right)^\gamma \right), \quad u_i(t^n) = u_{sp}^n$$

$$F_2(u_{i+1}) = \frac{\partial u_{i+1}}{\partial t} - \left((a(t)u_i^\gamma + b(t)) \frac{\partial^\gamma u_i}{\partial x^\gamma} \right) - \left(\gamma a(t)u_{i+1} \left(\frac{\partial u_{i+1}}{\partial x} \right)^\gamma \right), \quad u_{i+1}(t^n) = u_{sp}^n \quad (8)$$

سپس روش تفاضلات متناهی جهت تقریب u_t و u_x و u_{xx} بکار گرفته می‌شود چنانکه $x^l = lh$ و $t^j = jk$ که در آن h طول گام مکانی و k طول گام زمانی می‌باشد. در آخر با اعمال روش (۸) در هر تکرار تقریبی از $u(x^l, t^{j+1})$ محاسبه خواهد شد.



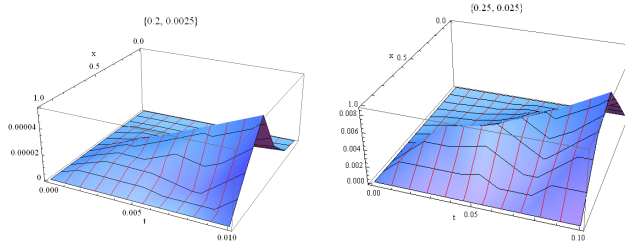
۵ نتایج عددی

مثال ۱.۵. مسئله‌ی نفوذ غیر خطی که به فرم کلی (۱) می‌باشد و شرایط اولیه و مرزی آن را به صورت زیر در نظر بگیرید:

$$u_t - (((t^2 + 1)u^2 + (3t)u_x)_x = 1 + e^t x^2 - 8e^{2t}(1+t^2)x^2(t + e^t x^2) - 2e^t(3t + (1+t^2)(t + e^t x^2)^2).$$

$$0 < x < 1, \quad t \geq 0, \quad u(x, 0) = x^2, \quad u(0, t) = t, \quad u(1, t) = e^t + t.$$

حل. با جایگذاری توابع F_1, F_2 ، تعریف شده در (۸) در الگوریتم‌های (۵) و (۶) تابع خطا در نقاط (x^l, t^j) در نمودارهای ذیل ارائه شده است.



شکل ۱: تابع خطای روش تکراری جداسازی عملگرها برای $m = 4$

(ب) $h = 0.2, k = 0.25$

(ا) $h = 0.25, k = 0.25$

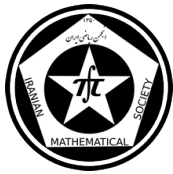
شکل ۱: تابع خطای روش تکراری جداسازی عملگرها برای $m = 4$

مراجع

- [1] J. Geiser, *Iterative Splitting Methods for Differential Equations*, CRC Press, 2011.
- [2] J. Geiser, *Coupled System: Theory, Model, and Applications in Engineering*, CRC Press, 2014.
- [3] H. Holden, K. Krlsen, K. Lie, N. Risebro, *Splitting Methods For Partial Differential Equations with Rough Solutions*, EMS, 2010.
- [4] J. Geiser, *Modified Jacobian Newton Iterative Method: Theory and Applications*, Mathematical Problems in Engineering, doi:10.1155/2009/307298.
- [5] J. Geiser, *Nonlinear iterative operator splitting methods and applications for nonlinear differential equations*, PAMM. Proc. Appl. Math. Mech. 7, 1041205–1041206 (2007).
- [6] J. Geiser, *Iterative Splitting Methods for Differential Equations: Proof techniques and Applications*, International Mathematical Forum, Vol. 6, no. 56, pp. 2737-2770, 2011.
- [7] R. Di Nardo, *Nonlinear elliptic and parabolic equations with measure data*, Ph.D Thesis, Dipartimento di Matematica R. Caccioppoli, Università degli Studi di Napoli Federico II, 2007-2008.

پست الکترونیکی: azakeri@kntu.ac.ir

پست الکترونیکی: z.noroozi@mail.kntu.ac.ir



کرانی برای شعاع طیفی حاصل ضرب ماتریس‌های همراه

الهه پامرغی*
گروه ریاضی، دانشگاه بیرجند

مهدی پناهی
گروه ریاضی، دانشگاه بیرجند

چکیده

شرایطی روی ضرایب چندجمله‌ای‌های مشخصه k ماتریس همراه طوری منظور می‌شود که تضمین می‌کند شعاع طیفی حاصل ضرب ماتریس‌های مذکور به وسیله t^k کراندار است، که در آن $0 < t < 1$.

واژه‌های کلیدی: ماتریس‌های همراه، حاصل ضرب ماتریس‌ها، شعاع طیفی

Mathematics Subject Classification [2010]: 15A42, 15B99

۱ مقدمه

اخیراً در [۲] کرانی برای شعاع طیفی حاصل ضرب متناهی از ماتریس‌های همراه ارائه شده است. کارهای دیگری نیز قبلاً در مورد حاصل ضرب ماتریس‌های همراه انجام شده است [۴]. در بخش ۳ این مقاله اثباتی، با استفاده از نماد ماتریسی، برای کران ارائه شده در [۲]، آورده شده است. در بخش ۲، حالت خاص این نتیجه مرتبط با قضیه انسترام-کاکایا^۱ که در مورد موقعیت صفرهای یک چندجمله‌ای است [۱]، ارائه می‌شود.

۲ قضیه انسترام-کاکایا

ماتریس همراه $n \times n$,

$$C = \begin{bmatrix} -a_1 & -a_2 & -a_3 & \cdots & -a_{n-1} & -a_n \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad (1)$$

را در نظر بگیرید. چندجمله‌ای مشخصه آن به صورت

$$p(\lambda) = \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \cdots + a_n,$$

می‌باشد. از قضیه انسترام-کاکایا [۱]، فرض

$$1 \geq a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_n \geq 0, \quad (2)$$

* سخنران

¹The Eneström-Kakaya theorem



نتیجه می‌دهد که تمام ریشه‌های $p(\lambda) = 0$ در رابطه‌ی $|\lambda| \leq 1$ صدق می‌کنند. بنابراین با فرض (۲)، شعاع طیفی $\rho(C)$ از C حداکثر ۱ است.

این نتیجه را، با استفاده از نماد ماتریسی، به صورت زیر اثبات می‌کنیم. فرض کنید A یک ماتریس $(n+1) \times (n+1)$ به صورت

$$A = \begin{bmatrix} C & 0 \\ u & 1 \end{bmatrix}, \quad (3)$$

باشد، که در آن $u = (0, 0, \dots, 0, 1)$ یک بردار سطری با بعد n است. فرض کنید

$$B = \begin{bmatrix} 1 - a_1 & a_1 - a_2 & a_2 - a_3 & \dots & a_{n-1} - a_n & a_n \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad (4)$$

یک ماتریس همراه $(n+1) \times (n+1)$ و L ماتریسی $(n+1) \times (n+1)$ تعریف شده به صورت

$$L = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

باشد. با محاسبه‌ی ساده بدست می‌آوریم که $AL = LB$ ، بنابراین

$$L^{-1}AL = B.$$

در نتیجه A و B متشابه‌اند و $\rho(A) = \rho(B)$. پس داریم

$$\rho(C) \leq \rho(A) = \rho(B) = 1,$$

که B یک ماتریس تصادفی [۳] است، یعنی یک ماتریس نامنفی می‌باشد که مجموع عناصر هر سطر آن ۱ است.

۳ تعمیم قضیه

از همین ایده برای اثبات لم زیر استفاده می‌کنیم.

لم ۱.۳. ماتریس‌های همراه $C_i, i = 1, 2, \dots, k$ ، به شکل (۱) به ترتیب با سطرهای اول $(a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in})$ را در نظر بگیرید. فرض کنید

$$1 \geq a_{i1} \geq a_{i2} \geq \dots \geq a_{in} \geq 0, i = 1, 2, \dots, k.$$

در این صورت

$$\rho(C_1 C_2 \dots C_k) \leq 1.$$



اثبات. ماتریس‌های A_i و B_i را به ترتیب به شکل (۳) و (۴)، تشکیل می‌دهیم. توجه کنید که

$$\rho(C_1 C_2 \cdots C_k) \leq \rho(A_1 A_2 \cdots A_k) = \rho(B_1 B_2 \cdots B_k) = 1,$$

□ زیرا $B_1 B_2 \cdots B_k$ یک ماتریس تصادفی سطری است.

اکنون نتیجه‌ی اصلی را بدست می‌آوریم.

قضیه ۲.۳. ماتریس‌های همراه C_i ، $i = 1, 2, \dots, k$ ، به شکل (۱) به ترتیب با سطرهای اول $(a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in})$ را در نظر بگیرید. فرض کنید

$$a_{i0} := 1 > a_{i1} > a_{i2} > \cdots > a_{in} \geq 0, i = 1, 2, \dots, k.$$

تعریف کنید

$$t = \max_{i=1}^k \max_{j=1}^n \frac{a_{i,j}}{a_{i,j-1}} < 1.$$

در این صورت

$$\rho(C_1 C_2 \cdots C_k) \leq t^k < 1.$$

اثبات. تعریف می‌کنیم $\tilde{a}_{i,j} = t^{-j} a_{i,j}$ و ماتریس‌های همراه متناظر \tilde{C}_i را ایجاد می‌کنیم. فرض کنید

$$W = \text{diag}(1, t^{-1}, \dots, t^{-n+1}).$$

در این صورت

$$C_i = tW\tilde{C}_iW^{-1}.$$

با بکارگیری لم ۱.۳، روی ماتریس‌های \tilde{C}_i ، رابطه‌ی

$$\rho(C_1 C_2 \cdots C_k) = t^k \rho(\tilde{C}_1 \tilde{C}_2 \cdots \tilde{C}_k) \leq t^k,$$

□ نتیجه می‌شود.

مراجع

- [1] P. Borwein and T. Erdélyi, *Polynomials and Polynomial Inequalities*, Springer-Verlag, New York, 1995.
- [2] A. Blumenthal and B. Fernandez, *Population dynamics and globally coupled degrade-and-fire oscillators*, Submitted, available at <http://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00986128>.
- [3] R. Horn and C. Johnson, *Matrix Analysis*, Cambridge University Press, Cambridge, 1985.
- [4] E. Key and H. Volkmer, *Eigenvalue multiplicities of products of companion matrices*, Electron. J. Linear Algebra, 11 (2004), pp. 103-114.

پست الکترونیکی: pamorghi-num.analysis93@birjand.ac.ir
پست الکترونیکی: mpanahi@birjand.ac.ir



یافتن جواب های قوی فازی حاصل از حل دستگاه های فازی با استفاده از الگوریتم ژنتیک

علیمحمد لطیف
دانشگاه یزد

لیلا محمدی
دانشگاه یزد

فاطمه صابری راد*
دانشگاه یزد

چکیده

در این مقاله روشی برای حل عددی دستگاه های خطی فازی با ماتریس ضرایب حقیقی و بردار سمت راست فازی با استفاده از الگوریتم ژنتیک ارائه گردیده است. در این روش جواب های دستگاه به صورت یک بردار حقیقی که همان کروموزوم های الگوریتم ژنتیک می باشند، تعریف شده است. با استفاده از یک تابع برازندگی مناسب، سعی شده الگوریتم ژنتیک از یک جمعیت تصادفی اولیه به سمت جواب دستگاه همگرا شود. برای ارزیابی روش ارائه شده، مثال هایی با روش های تکراری ژاکوبی و گاوس سیدل و روش پیشنهادی حل شد و مشاهده گردید مثالی که در روش های ژاکوبی و گاوس سیدل واگراست، در این روش به سمت جواب دستگاه همگرا می شود.

واژه های کلیدی: اعداد فازی مثلثی، روش های تکراری در حل دستگاه های خطی فازی، الگوریتم ژنتیک

Mathematics Subject Classification [2010]: 13D45, 39B42

۱ مقدمه

مدل کلی حل دستگاه خطی فازی با ماتریس ضرایب حقیقی و بردار سمت راست فازی، اولین بار توسط فریدمن مطرح شد [۲]. او و همکارانش با به کارگیری روش جایگزینی، دستگاه خطی فازی $n \times n$ را به یک دستگاه خطی حقیقی $2n \times 2n$ تبدیل کرده و سپس آن را حل نمودند. چندین الگوریتم برای حل دستگاه ها توسط نویسندگان دیگر مطرح شده اند [۱]. در این مقاله، توانایی روش های تکراری ژاکوبی و گاوس سیدل را برای حل دستگاه خطی فازی به طور عددی بررسی کرده و الگوریتم ژنتیک را برای مواردی که این روش ها کارآمد نیستند پیشنهاد می نمایم.

تعریف ۱.۱. عدد فازی U ، به صورت زوج مرتب (\underline{u}, \bar{u}) برای هر $0 \leq r \leq 1$ تعریف می شود که در شرایط زیر صدق می کند:

• (۱) $\underline{U}(r)$ ، تابعی کراندار، از چپ پیوسته و صعودی اکید بر بازه $[0, 1]$ باشد.

• (۲) $\bar{U}(r)$ ، تابعی کراندار، از چپ پیوسته و نزولی اکید بر بازه $[0, 1]$ باشد.

• (۳) برای هر $0 \leq r \leq 1$ ، $\underline{U}(r) \leq \bar{U}(r)$.

* سخنران



تعریف ۲.۱. دستگاه معادلات خطی فازی $1 \leq i \leq n$ را در نظر بگیرید که در آن $A = (a_{ij})_{n \times n}$ ماتریس ضرایب حقیقی و $1 \leq i \leq n, y_i \in E^1$ اعداد فازی هستند. به منظور حل دستگاه فازی داده شده، ابتدا دستگاه خطی زیر را تشکیل می دهیم:

$$\sum_{j=1}^n s_{ij} \underline{x}_j - \sum_{j=1}^n s_{ij+n} \bar{x}_j = \underline{y}_i, \quad 1 \leq i \leq n,$$

$$\sum_{j=1}^n s_{ij} \underline{x}_j - \sum_{j=1}^n s_{ij+n} \bar{x}_j = \bar{y}_i, \quad n+1 \leq i \leq 2n$$

که در آن $s_{i,j}$ به صورت زیر مشخص می شود:

$$\begin{cases} s_{ij} = s_{i+n, j+n} = a_{ij}, & a_{ij} \geq 0 \\ s_{i, j+n} = s_{i+n, j} = -a_{ij}, & a_{i,j} < 0 \end{cases}$$

و سایر $s_{i,j}$ ها برابر صفر خواهند بود. دستگاه $SX = Y$ که در آن $S = (s_{ij})$ و $1 \leq i, j \leq 2n$

$$X = (\underline{x}_1, \underline{x}_2, \dots, \underline{x}_n, -\bar{x}_1, -\bar{x}_2, \dots, -\bar{x}_n)^T, Y = (\underline{y}_1, \underline{y}_2, \dots, \underline{y}_n, -\bar{y}_1, -\bar{y}_2, \dots, -\bar{y}_n)^T.$$

اکنون یک دستگاه تابعی فازی $(2n \times 2n)$ می باشد که دارای جواب یکتای X است اگر و فقط اگر ماتریس S وارون پذیر باشد. در این صورت جواب دقیق دستگاه عبارتست از $X = S^{-1}Y$.

تعریف ۳.۱. جواب $X = (\underline{x}_1, \underline{x}_2, \dots, \underline{x}_n, -\bar{x}_1, -\bar{x}_2, \dots, -\bar{x}_n)^T$ حاصل از حل دستگاه $SX = Y$ را یک جواب قوی فازی این دستگاه نامند هر گاه تمام مولفه های جواب آن اعداد فازی باشند. اگر حداقل یکی از مولفه های جواب، عدد فازی نباشد، آن جواب یک جواب ضعیف فازی است.

قضیه ۴.۱. [۲] جواب یکتای X ، از حل معادله $X = S^{-1}Y$ برای هر بردار دلخواه Y ، یک بردار فازی است اگر و فقط اگر $1 \leq i, j \leq 2n, (S^{-1})_{ij} \geq 0$.

۲ الگوریتم ژنتیک

الگوریتم های ژنتیکی با الهام از سیستم های تطبیقی بیولوژیکی و بر مبنای مفهوم انتخاب در تحولات ژنتیکی به وجود آمده است. پاسخ های فرضی به صورت تصادفی کد می شوند، این بردارها را کروموزوم می نامند. این کروموزوم ها طی نسل های متوالی تکامل پیدا می کنند. طی هر نسل میزان برازندگی هر کروموزوم محاسبه می شود که این برازندگی معیاری برای میزان بهبود تابع هدف می باشد. نسل بعدی طی فرایند انتخاب، ترکیب و جهش در کروموزوم های نسل قبل ایجاد می شود. میزان برازندگی هر کروموزوم، میزان احتمال ترکیب آن کروموزوم را تعیین می کند. عملگر ترکیب، اطلاعات داده شده را با گزینش بخش هایی تصادفی از هر یک تلفیق می کند و به صورت دو نمونه در نسل بعدی ظهور می دهد. عملگر جهش برای حفظ پراکندگی در جمعیت استفاده می شود. به دلیل اثر انتخابی اعمال شده طی نسل های متوالی، سازگاری نسل ها به سمت برازندگی بهتر کروموزوم ها حرکت می کند.



۳ نتایج عددی

در این بخش مثال هایی از دستگاه های فازی را که دارای جواب دقیق فازی بوده مطرح می کنیم و همگرایی روش ها را برای نقطه شروع اولیه $X^{(0)}$ ، به طور عددی مورد بررسی قرار می دهیم. بعد از هر مثال نیز جدولی ارائه شده که سرعت همگرایی روش ها را با هم مقایسه می کند.

مثال ۱.۳. دستگاه فازی قطر غالب زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{cases} 4x_1 + x_2 + x_3 + x_5 = (6/5 + 6/5r, 18/5 - 6/5r) \\ -x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 = (-1/6 + 4/6r, 5/4 - 2/4r) \\ 2x_1 + x_2 + 5x_3 - x_4 - x_5 = (-1/8 + 7/8r, 11/2 - 5/2r) \\ -x_1 - x_2 - x_3 + 4x_4 = (-3/5 + 3/5r, 4/5 - 4/5r) \\ 2x_2 - x_3 + x_4 + 4x_5 = (7/6 + 6/6r, 19/6 - 5/6r) \end{cases} \quad (1)$$

که جواب دقیق آن برابر است با:

$$X_1^* = (1 + r, 3 - r), X_2^* = (0/2 + 0/8r, 1/2 - 0/2r), X_3^* = (0/3 + 0/7r, 1/3 - 0/3r)$$

$$X_4^* = (0/5 + 0/5r, 1/5 - 0/5r), X_5^* = (2 + r, 4 - r)$$

این مثال با استفاده از نقطه شروع $x_1^{(0)} = (-4 + 2r, -1 - r)$ ، $x_2^{(0)} = (1 + 4r, 6 - r)$ ، $x_3^{(0)} = (-6 + 3r, -2 - r)$ و $x_4^{(0)} = (-5 + 3r, -1 - r)$ ، $x_5^{(0)} = (2 + r, 4 - r)$ توسط روش های تکراری ژاکوبی و گاوس سیدل حل شده و نتایج در جدول ۱ نشان داده شده است. مشاهده می گردد که همگرایی روش ژاکوبی نسبت به روش گاوس سیدل به صورت قابل ملاحظه ای کندتر است.

جدول ۱: نتایج مربوط به مثال ۱،۳

N	Jacobi, $\ x_N - x^*\ _\infty$	$\ \bar{x}_N - \bar{x}^*\ _\infty$	Gaus-Seidel, $\ x_N - x^*\ _\infty$	$\ \bar{x}_N - \bar{x}^*\ _\infty$
۵	۰/۷۴۴۸۳۷۲۳۹	۰/۷۵۴۱۸۵۰۶۹۲	۰/۰۳۳۰۰۴۸۹۴	۰/۰۳۷۸۹۹۲۶۴
۱۵	۰/۲۳۸۵۷۲۳۱۲	۰/۲۳۹۰۱۲۷۵۰	۰/۰۰۰۰۰۰۰۸۶	۰/۰۰۰۰۰۰۰۷
۲۵	۰/۰۸۰۴۹۲۰۸۵	۰/۰۸۰۴۹۴۶۱۸	۰/۰۰۰۰۰۰۰۰۲	۰/۰۰۰۰۰۰۰۱

مثال ۲.۳. دستگاه فازی زیر را در نظر بگیرید که قطر غالب نمی باشد:

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + x_3 = (2/7 + 4/3r, 9/7 - 2/7r) \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = (2/9 + 5/1r, 10/9 - 2/9r) \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 = (3/8 + 5/2r, 12/8 - 3/8r) \end{cases} \quad (2)$$

و جواب دقیق آن برابر است با:

$$X_1^* = (1 + r, 3 - r), X_2^* = (0/2 + 0/8r, 1/2 - 0/2r), X_3^* = (0/3 + 0/7r, 1/3 - 0/3r)$$

این مثال با استفاده از نقطه شروع $x_1^{(0)} = (0/9 + r, 2/9 - r)$

$$x_2^{(0)} = (0/2 + 0/7r, 1/1 - 0/2r), x_3^{(0)} = (0/4 + 0/5r, 1/5 - 0/6r)$$

توسط روش های تکراری ژاکوبی و گاوس سیدل حل شده و نتایج در جدول ۲ ارائه شده است. همان طور که ملاحظه می گردد، روش گاوس سیدل در حل این مساله همگرا ولی روش ژاکوبی واگراست.



مثال ۳.۳. دستگاه فازی زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 - 3x_5 = (-1/9 + 4/9r, 6/1 - 3/1r) \\ -2x_1 + x_2 + x_3 - x_4 + x_5 = (-2/5 + 2/5r, 2/95 - 2/95r) \\ 1x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 + x_5 = (0/15 + 3/85r, 6 - 2r) \\ -x_3 + x_4 + 2x_5 = (-0/45 + 2/45r, 4/2 - 2/2r) \\ x_1 - 2x_2 + x_5 = (-1/7 + 1/7r, 1/4 - 1/4r) \end{cases} \quad (3)$$

که جواب دقیق آن برابر است با:

$$X_1^* = (0/4 + 0/6r, 1/1 - 0/1r), X_2^* = (0/6 + 0/4r, 1/2 - 0/2r), X_3^* = (0/2 + 0/8r, 1/3 - 0/3r)$$

$$X_4^* = (0/25 + 0/75r, 1/4 - 0/4r), X_5^* = (0/3 + 0/7r, 1/5 - 0/5r)$$

روش های ژاکوبی و گاوس سیدل برای حل این دستگاه و اگر هستند اما جواب قوی فازی حاصله از الگوریتم ژنتیک به صورت زیر است.

$$X_1 = (0/2894 + 0/5972r, 1/1189 - 0/1286r), X_2 = (0/5516 + 0/3798r, 1/2542 - 0/1708r)$$

$$X_3 = (0/2015 + 0/8138r, 1/2805 - 0/3072r), X_4 = (0/3634 + 0/7660r, 1/5142 - 0/3629r)$$

$$X_5 = (0/3485 + 0/6884r, 1/3577 - 0/5117r)$$

جدول ۲: نتایج مربوط به مثال ۲، ۳

N	Jacobi, $\ x_N - x^*\ _\infty$	$\ \bar{x}_N - \bar{x}^*\ _\infty$	Gaus-Seidel, $\ x_N - x^*\ _\infty$	$\ \bar{x}_N - \bar{x}^*\ _\infty$
۵	۳/۸۹۲۷۰۸	۳/۸۹۲۷۰۸	۰/۳۹۶۴	۰/۳۹۶۴
۱۵	۱۴۰/۶۱۴۱۸۸	۱۴۰/۶۱۴۱۸۸	۰/۰۰۵۳۱۲	۰/۰۰۵۳۱۲
۲۰	۸۴۵/۱۲۰۴۴۶	۸۴۵/۱۲۰۴۴۶	۰/۰۰۱۴۰۵	۰/۰۰۱۴۰۵

۴ نتیجه گیری

در این مقاله دستگاه های فازی مورد بررسی قرار گرفتند که دارای جواب دقیق فازی بوده اما جواب های تقریبی تکراری ممکن است در بعضی مراحل فازی نباشند. در مواردی که روش های ژاکوبی و گاوس سیدل کارا نیستند، می توان از الگوریتم ژنتیک برای دستیابی به جواب مطلوب استفاده کرد. نکته قابل توجه اینکه، الگوریتم ژنتیک را می توان به گونه ای طراحی نمود که جواب های تقریبی از دقت مطلوبی برخوردار بوده و قوی فازی نیز باشند.

مراجع

- [1] M. Dehghan, B. Hashemi, *Iterative solution of fuzzy linear systems*, Appl. Math. Comput. 175 (2006) 645-674.
- [2] M. Friedman, Ma Ming, A. Kandel, *Fuzzy linear systems*, Fuzzy Sets Syst. 34 (1996) 201-209.



یک محدودکننده اساساً غیر نوسانی وزن‌دار ساده برای حل قوانین بقاء با روش گالرکین ناپیوسته رونگه کوتاه

نقی کریمیان*

دانشگاه صنعتی سهند تبریز

دکتر جواد فرضی

دانشگاه صنعتی سهند تبریز

چکیده

در این مقاله، یک محدودکننده ساده بر اساس رهیافت اساساً غیر نوسانی وزن دار (WENO)^۱ برای روش های گالرکین ناپیوسته رونگه کوتاه (DGRK)^۲ ارائه می شود که برای حل قوانین بقاء با هدف به دست آوردن جواب قوی و روند محدود سازی مرتبه بالا جهت دستیابی همزمان به دقت مرتبه بالای یکنواخت و عبور از شوک به صورت دقیق و غیر نوسانی مورد استفاده قرار می گیرد. ایده این محدودکننده بازسازی کل چند جمله ای به جای بازسازی مقادیر نقطه ای یا ممان ها در بازسازیهای WENO کلاسیک است. یعنی، چند جمله ای بازسازی در سلول هدف یک ترکیب محدب از چند جمله ایها در این سلول و سلولهای مجاور آن است و وزنه های غیر خطی ترکیب محدب از روند WENO کلاسیک پیروی می کنند. مزیت اصلی این محدودکننده سادگی آن در پیاده سازی است. واژه های کلیدی: روش گالرکین ناپیوسته رونگه کوتاه، محدودکننده WENO، معادلات بقاء.

۱ مقدمه و بیان مسئله

هدف حل معادلات بقاء هذلولوی به شکل زیر است

$$\begin{cases} u_t + f(u)_x = 0, \\ u(x, 0) = u_0(x). \end{cases} \quad (1)$$

که در آن توابع $u: R \times [0, \infty) \rightarrow R^n$ جواب ضعیف و $f: R^n \rightarrow R^n$ شار می باشد. در اینجا فقط حالت اسکالر ($n = 1$)، مورد بررسی قرار داده می شود. بعد از آنکه u با روش RKDG [۱] به دست آمد، روند پردازش پسین زیر را که حاصل از محدودکننده WENO می باشد طرح و سپس اجرا خواهد شد [۲].

ابتدا سلول آشفته شده، یعنی سلولی که در آن ناپیوستگی رخ داده است مشخص می شود. بدین ترتیب که ابتدا میانگین های سلولی زیر در نظر گرفته می شوند

$$\bar{u}_j = \frac{1}{\Delta x_j} \int_{I_j} u dx, \quad \Delta x_j = x_{j+1/2} - x_{j-1/2}, \quad I_j = [x_{j-1/2}, x_{j+1/2}].$$

و نیز

$$\tilde{u}_j^- = u_{j+1/2}^- - \bar{u}_j, \quad \tilde{u}_j^+ = \bar{u}_j - u_{j-1/2}^+,$$

که در آن \tilde{u}_j^- و \tilde{u}_j^+ هردو به وسیله محدودکننده minmod معمولی به شکل زیر اصلاح می شوند [۳]

$$\tilde{u}_j^{(mod)} = m(\tilde{u}_j^-, \Delta_+ \bar{u}_j, \Delta_- \bar{u}_j), \quad \tilde{u}_j^{(mod)} = m(\tilde{u}_j^+, \Delta_+ \bar{u}_j, \Delta_- \bar{u}_j).$$

* سخت‌رنان

^۱ Weighted Essentially Nonoscillatory Limiter^۲ Runge-Kutta Discontinuous Galerkin



که در آن

$$\Delta_+ \bar{u}_j = \bar{u}_{j+1} - \bar{u}_j, \quad \Delta_- \bar{u}_j = \bar{u}_j - \bar{u}_{j-1}.$$

با استفاده از تابع minmod تابع m به شکل زیر تعریف می‌شود:

$$m(a_1, \dots, a_l) = \begin{cases} s \cdot \min_{1 \leq j \leq l} |a_j| & \text{if } s = \text{sign}(a_1) = \dots = \text{sign}(a_l), \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

همچنین بر اساس تابع minmod اصلاح‌شده TVB^۳ [۴]

$$\tilde{m}(a_1, \dots, a_l) = \begin{cases} a_1 & \text{if } |a_1| \leq Mh^2, \quad h = \max_{1 \leq j \leq l} |\Delta x_j|, \\ m(a_1, \dots, a_l) & \text{otherwise.} \end{cases}$$

که در آن $M > 0$ یک مقدار ثابت است [۵]. حال اگر $\tilde{u}_j^{(mod)} = \tilde{u}_j$ و $\tilde{u}_j^{(mod)} = \tilde{u}_j$ به صورت همزمان برقرار باشند، سلول زام سلول آشفته شده نیست. در غیر اینصورت سلول به عنوان سلول آشفته شده معرفی می‌شود و عملیات زیر بر روی آن انجام می‌شود:

چند جمله‌ای‌های جواب DG از u را روی سلول‌های I_{j-1}, I_j, I_{j+1} به ترتیب با $p_0(x), p_1(x), p_2(x)$ نشان داده می‌شود. اکنون تغییرات زیر اعمال می‌شود

$$\tilde{p}_0(x) = p_0(x) - \bar{p}_0 + \bar{p}_1, \quad \tilde{p}_2(x) = p_2(x) - \bar{p}_2 + \bar{p}_1,$$

که در آن

$$\bar{p}_0 = \frac{1}{\Delta x_j} \int_{I_j} p_0(x) dx, \quad \bar{p}_1 = \frac{1}{\Delta x_j} \int_{I_j} p_1(x) dx, \quad \bar{p}_2 = \frac{1}{\Delta x_j} \int_{I_j} p_2(x) dx.$$

چند جمله‌ای بازسازی شده‌ی غیر خطی نهایی WENO، یعنی $p_1^{new}(x)$ به صورت زیر نمایش داده می‌شود

$$p_1^{new}(x) = w_0 \tilde{p}_0(x) + w_1 p_1(x) + w_2 \tilde{p}_2(x).$$

وزن‌های غیر خطی نرمال‌شده‌ی w_l با استناد به [۲] به صورت زیر به دست آمده‌اند

$$w_l = \frac{\bar{w}_l}{\sum_{s=0}^2 \bar{w}_s}, \quad l = 0, 1, 2,$$

و نیز وزن‌های غیر خطی و غیر نرمال‌شده‌ی \bar{w}_l توابعی هستند از وزن‌های خطی γ_l و شاخص همواری β_l به صورت زیر

$$\bar{w}_l = \frac{\gamma_l}{(\varepsilon + \beta_l)^2}, \quad \varepsilon = 10^{-6},$$

$$\gamma_0 = 0.001, \quad \gamma_1 = 0.998, \quad \gamma_2 = 0.001,$$

$$\beta_l = \sum_{s=1}^{k-1} \int_{I_j} \Delta x_j^{s-1} \left(\frac{\partial^s}{\partial x^s} P_l(x) \right) dx.$$

در اینجا فرض می‌شود $k = 3$ و $P_l(x)$ چند جمله‌ای درونیاب در فاصله‌ی $(x_{j-1/2}, x_{j+1/2})$ می‌باشد [۲].^۳ Total Variation Bounded



۲ نتایج اصلی

مثال ۱.۰۲. معادله برگرز^۴

$$u_t + \left(\frac{u^2}{\gamma}\right)_x = 0, \quad 0 \leq x \leq 2\pi,$$

با شرط اولیه $u(x, 0) = 0.5 + \sin(x)$ و شرایط مرزی دوره‌ای در نظر گرفته شده است. معادله در زمان $t = 0.5$ برای تعداد سلول N و ثابت CFL متفاوت حل شده و نتایج در دو جدول زیر به ترتیب برای حالت شبکه یکنواخت و حالت شبکه غیر یکنواخت قرار داده شده است. این معادله علی‌رغم داشتن شرط اولیه هموار، جواب آن دارای شوک می‌باشد که روش ارائه شده این ناپیوستگی را با دقت مناسب نشان می‌دهد.

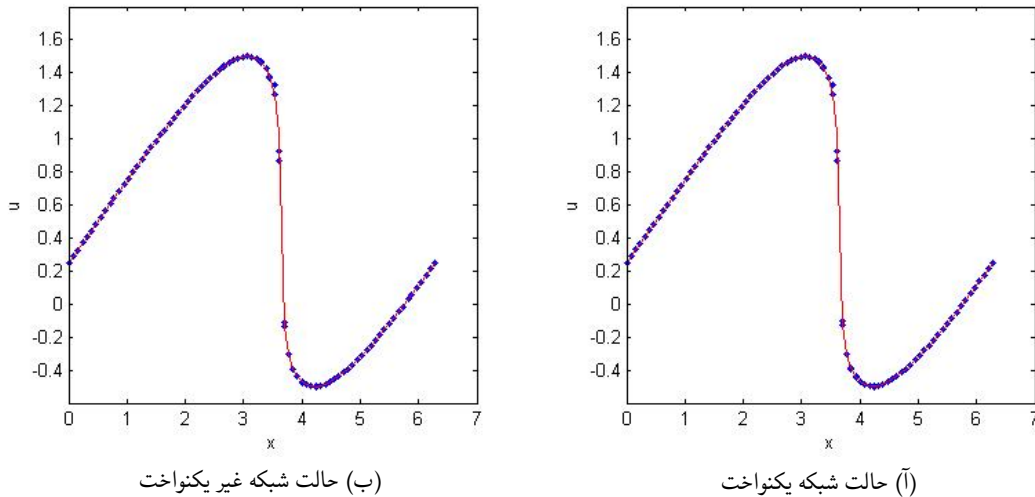
CFL	N	DG without limiter				DG with WENO limiter(M=0.01)			
		L_1error	Order	$L_\infty error$	Order	L_1error	Order	$L_\infty error$	Order
0.3	20	3.81E-03	-	3.82E-02	-	7.65E-03	-	6.86E-02	-
	40	9.46E-04	2.01	1.03E-02	1.90	1.81E-03	2.08	2.01E-02	1.77
	80	2.35E-04	2.01	2.65E-03	1.95	3.06E-04	2.57	3.10E-03	2.70
	160	5.89E-05	2.00	6.73E-04	1.98	5.93E-05	2.37	6.73E-04	2.20
	320	1.47E-05	2.00	1.70E-04	1.98	1.47E-05	2.01	1.70E-04	1.98
0.15	20	2.73E-04	-	5.07E-03	-	2.68E-04	-	5.08E-03	-
	40	4.22E-05	2.69	8.96E-04	2.50	4.17E-05	2.68	8.96E-04	2.50
	80	6.17E-06	2.77	1.60E-04	2.48	6.17E-06	2.76	1.60E-04	2.48
	160	8.86E-07	2.80	2.55E-05	2.65	8.92E-07	2.79	2.55E-05	2.65
	320	1.25E-07	2.82	3.79E-06	2.75	1.27E-07	2.81	3.79E-06	2.75

جدول ۱: نتایج حاصل از حل مثال ۱.۰۲ در حالت شبکه یکنواخت.

CFL	N	DG without limiter				DG with WENO limiter(M=0.01)			
		L_1error	Order	$L_\infty error$	Order	L_1error	Order	$L_\infty error$	Order
0.3	20	3.84E-03	-	4.01E-02	-	6.35E-03	-	7.32E-02	-
	40	9.85E-04	1.96	1.28E-02	1.65	1.93E-03	1.72	2.07E-02	1.84
	80	2.44E-04	2.02	3.09E-03	2.05	3.16E-04	2.61	3.16E-03	2.71
	160	6.14E-05	1.99	8.28E-04	1.90	6.22E-05	2.35	8.28E-04	1.93
	320	1.53E-05	2.00	2.36E-04	1.81	1.53E-05	2.02	2.36E-04	1.81
0.15	20	2.86E-04	-	4.87E-03	-	2.79E-04	-	4.88E-03	-
	40	4.43E-05	2.69	7.68E-04	2.66	4.38E-05	2.67	7.68E-04	2.67
	80	6.37E-06	2.80	1.61E-04	2.25	6.37E-06	2.78	1.61E-04	2.25
	160	9.08E-07	2.81	2.83E-05	2.51	9.16E-07	2.80	2.83E-05	2.51
	320	1.30E-07	2.81	4.12E-06	2.78	1.32E-07	2.80	4.12E-06	2.78

جدول ۲: نتایج حاصل از حل مثال ۱.۰۲ در حالت شبکه غیر یکنواخت.

^۴ Burgers

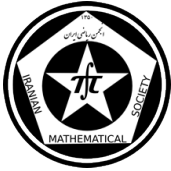


شکل ۱: معادله برگرز در $t=1s$ با $N=8^{\circ}$ سلول و ثابت $CFL=0/3$.

مراجع

- [1] Jan S. Hesthaven, Tim Warburton, *Nodal Discontinuous Galerkin Methods*, Springer 2008, Vol. 54, pp. 1-72.
- [2] Shu.Chi-Wang, Tim Warburton, *Essentially non-oscillatory and weighted essentially non-oscillatory schemes for hyperbolic conservation laws*, Springer Berlin Heidelberg, 1998.
- [3] A. Harten, High resolution schemes, *hyperbolic conservation laws*, Journal of Computational Physics 49 (1983), pp.357-393.
- [4] C.-W. Shu, *TVB uniformly high-order schemes for conservation laws*, Mathematics of Computation 49 (1987), pp.105-121.
- [5] B. Cockburn, S.-Y. Lin, C.-W. Shu, *TVB Runge-Kutta local projection discontinuous Galerkin finite element method for conservation laws III: one dimensional systems*, Journal of Computational Physics 84 (1989), pp. 90-113.
- [6] Shu.Chi-Wang, Xinghui Zhong, *A simple weighted essentially nonoscillatory limiter for Runge-Kutta discontinuous Galerkin methods*, Journal of Computational Physics 232 (2013), pp. 397-415.

تحقیق در عملیات



ارایه یک روش مبتنی بر فیلتر برای حل دستگاه‌های یکنوا در فضای هیلبرت

فرشید ارزانی*
دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی

محمدرضا پیغامی
دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی

چکیده

در این مقاله یک روش طیفی مانده‌ای اصلاح شده برای حل دستگاه‌های یکنوا در فضای هیلبرت معرفی می‌شود. این روش با افزودن مفهوم فیلتر روی روش طیفی مانده‌ای ارایه شده توسط کروزر در سال ۲۰۱۳ طراحی و پیاده سازی شده است. فیلتر معرفی شده در این روش دارای ویژگی‌هایی است که مشکلات روش‌های قبلی را برطرف می‌کند. همگرایی سراسری این روش تحت فرضیات استاندارد اثبات شده است. این روش روی مجموعه مسایل آزمونی اجرا شده است. نتایج عددی حاصل حاکی از کارایی بهتر و سرعت بیشتر این روش نسبت به روش‌های قبلی و حتی روش‌های بدون فیلتر است.

واژه‌های کلیدی: دستگاه معادلات، بهینه سازی بدون مشتق، فضای هیلبرت، فیلتر

Mathematics Subject Classification [2010]: 65K05, 90C30, 90C06

۱ مقدمه

مساله مورد نظر در این مقاله، حل معادله غیرخطی در فضای هیلبرت H است که به صورت زیر در نظر گرفته می‌شود:

$$F(x) = 0 \quad (1)$$

که در آن F یک نگاشت یکنوا و پیوسته لیپ شیتز از یک فضای هیلبرت به داخل خودش می‌باشد. فضای هیلبرت به یک ضرب داخلی $\langle \cdot, \cdot \rangle$ و نرم متناظر آن $\|\cdot\| = \sqrt{\langle \cdot, \cdot \rangle}$ مجهز شده است. اینگونه دستگاه‌ها در مسائل مختلفی از قبیل معادلات دیفرانسیل، اقتصاد، مهندسی و مدیریت کاربرد دارند. مطالعات در این زمینه در سال‌های اخیر در [۱، ۲، ۵] صورت گرفته است.

کروز و همکاران در سال ۲۰۱۳ [۵] روشی برای حل (۱) ارائه دادند که می‌توان آن را بسطی از روش مطرح شده با عنوان $SANE$ و $DF-SANE$ در [۶] در نظر گرفت. این روش از مانده $d = F(x)$ به عنوان جهت جستجو که با یک طول گام مناسب ترکیب شده است، استفاده می‌کند. همچنین این روش مجهز به یک جستجوی خطی نایکنوا می‌باشد. مطلب قابل توجه در کار کروزر نسبت به کارهای قبلی در این زمینه عدم نیاز به مشتق‌پذیری در اثبات همگرایی است. در الگوریتم کروزر نقطه جدید به صورت زیر به دست می‌آید:

$$x_{k+1} = x_k - \lambda_k \alpha_k F(x_k) \quad k \geq 0 \quad (2)$$

* سخنران



که در آن $\lambda_k > 0$ طول گام می‌باشد که با استفاده از روش‌های جستجوی خطی به دست می‌آید و $-\alpha_k F(x_k)$ جهت جستجو است که ضریب α_k با استفاده از روش برزیلا-بروین [۷] بدست می‌آید. در سال ۲۰۱۲ اچبست و همکاران در [۴] نحوه بکارگیری مفهوم فیلتر را برای روش‌های حل دستگاه‌های معادلات غیرخطی بیان کردند. روشی که ایشان برای پیاده سازی مفهوم فیلتر در نظر گرفته بود، برای حل دستگاه‌های غیر خطی غیر مربعی و کراندار استفاده شده است که این روش در دسته‌ی روش‌های بهینه سازی بدون مشتق قرار می‌گیرد. با توجه به موارد فوق، هدف ما در این مقاله پیاده سازی روش فیلتر ارائه شده توسط ارزانی و پیغامی در [۹] بر روی الگوریتم کروز می‌باشد. لازم به ذکر است که این پیاده سازی با توجه به نکات ذکر شده در [۴] توسط اچبست برای تضمین همگرایی الگوریتم پیشنهادی است. همچنین در ساختار جستجوی خطی و اثبات همگرایی روش تغییراتی بر اساس آنچه در [۴] آمده است خواهیم داد.

۲ الگوریتم پیشنهادی

در الگوریتم پیشنهادی، ساختار فیلتر بر اساس فیلتر مطرح شده توسط فاطمی و مهدوی امیری در [۸] پیاده سازی شده است. شرط پذیرش نقاط در فیلتر جدید به صورت

$$\theta_j(x_k^+)^{\mu_2} + \lambda_2 \|\theta(x_k^+)\|_{\psi}^{\mu_1} \leq \theta_j(x_l)^{\mu_2} + \lambda_1 \|\theta(x_l)\|_{\psi}^{\mu_1} \quad (3)$$

که در آن $\frac{1}{\sqrt{p}} < \lambda_2 < \lambda_1 < 0$ ، $0 < \mu_1 < \mu_2 < 0$ و p بعد نقاط مساله است. حال الگوریتم پیشنهادی را به صورت زیر ارائه می‌کنیم:

الگوریتم پیشنهادی:

گام صفر: مقادیر $x_0 \in H$ ، $k_0 \geq 0$ ، $0 < \alpha_0 < \alpha_{\max}$ ، $0 < \alpha_{\max} < \infty$ ، $0 < \partial < 1$ ، $0 < \gamma < 1$ داده شده. قرار ده $k := 0$ و $Filter = \emptyset$. تا زمانی که شرط $\|F(x_k)\| \leq \varepsilon$ برقرار نشده است گام‌های یک تا سه را تکرار کن:

گام یک: جهت $d_k = -\alpha_k F(x_k)$ را محاسبه کن و قرار ده $\lambda_0 = 1$ و $linesearch = true$.

گام دو: برای $i = 1 : N$ ، مراحل زیر را تکرار کن:

۱- محاسبه z_k^i با استفاده از روش برزیلا-بروین

۲- اگر z_k^i در فیلتر پذیرفته شد، آن‌گاه قرار ده: $x_{k+1} = z_k^i$ و نقطه جدید را به مجموعه $Filter$ اضافه کن و فیلتر را

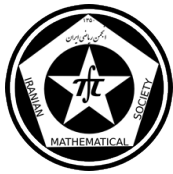
به‌نگام کن. قرار ده: $k := k + 1$ و $linesearch = false$. از گام دو خارج شو.

۳- اگر شرط گریپو [۳] برای نقطه جدید برقرار است، قرار ده: $x_{k+1} = z_k^i$ ، $k := k + 1$ و $linesearch = false$.

از گام دو خارج شو.

گام سه: اگر $linesearch = true$ ، آن‌گاه طول گام λ_k را در جهت d_k با استفاده از الگوریتم جستجوی خطی بدست

آور و قرار ده: $x_{k+1} = x_k + \lambda_k d_k$ و $k := k + 1$.



۳ آنالیز همگرایی

با استفاده از چند لم مقدماتی، قضیه همگرایی به شرح زیر برقرار است:

قضیه ۱.۳. فرض کنید F یک نگاشت یکنوا و پیوسته لیب شیتز از یک فضای هیلبرت به داخل خودش و $\{x_k\}$ دنباله تولید شده توسط الگوریتم پیشنهادی باشد. آنگاه با در نظر گرفتن شرایط الگوریتم، خواهیم داشت:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|F(x_k)\| = 0$$

۴ نتایج

الگوریتم پیشنهادی در این مقاله به همراه الگوریتم‌های کروز و $DF - SANE$ در محیط $MATLAB$ تحت سیستم عامل لینوکس $Ubuntu$ پیاده سازی شد. هر سه الگوریتم روی مسایل آزمونی مطرح شده در [۵] اجرا شدند. مقایسه نتایج حاصل از الگوریتم پیشنهادی با دو الگوریتم دیگر نشان می‌دهد که الگوریتم پیشنهادی کارایی بهتر و سرعت بیشتری نسبت به دو الگوریتم دیگر دارد.

مراجع

- [1] W. Zhou, D.H. Li, *A globally convergent BFGS method for nonlinear monotone equations without any merit functions*, Math. Comput. 77 (2008) pp 2231–2240.
- [2] W. Zhou, D.H. Li, *Limited memory BFGS method for nonlinear monotone equations*, J. Comput. Math. 25 (2007) 89–96.
- [3] L. Grippo, F. Lampariello, S. Lucidi, *A nonmonotone line search technique for Newton's method*, SIAM Journal on Numerical Analysis 23 (1986) 707–716.
- [4] N. Echebest, M.L. Schuverdt, R.P. Vignau, *A derivative-free method for solving box-constrained underdetermined nonlinear systems of equations*, Applied Mathematics and Computation 219 (2012) 3198–3208.
- [5] William La Cruz, *Residual spectral algorithm for solving monotone equations on a Hilbert space*, Applied Mathematics and Computation 219 (2013) 6633–6644.
- [6] W. La Cruz, J.M. Martínez, M. Raydan, *Spectral residual method without gradient information for solving large-scale nonlinear systems of equations*, Math. Comput. 75 (2006) 1429–1448.
- [7] J. Barzilai, J.M. Borwein, *Two-point step size gradient method*, IMA J. Numer. Anal., 8, pp. 141–148. 1988.
- [8] M. Fatemi, N. Mahdavi-Amiri, *A filter trust-region algorithm for unconstrained optimization with strong global convergence properties*, Comput. Optim. Appl., 52, pp. 239–266. 2012.
- [9] F. Arzani, M. Reza Peyghami, *A new nonmonotone filter Barzilai–Borwein method for solving unconstrained optimization problems*, Int. J. Comput Math., 2015, doi:10.1080/00207160.2015.1009903.

پست الکترونیکی: farzani@dena.kntu.ac.ir

پست الکترونیکی: peyghami@kntu.ac.ir



بررسی دسته‌ای از نامساویهای معتبر برای مساله پستچی چینی با سود بیشینه

مصطفی خرمی زاده

دانشگاه صنعتی شیراز

فرزانه حیدری*

دانشگاه صنعتی شیراز

چکیده

در این مقاله ابتدا یک مدل برنامه ریزی ریاضی برای مساله پستچی چینی با سود بیشینه معرفی و بررسی می شود. سپس دسته‌ای از نامساوی های خاص برای فضای شدنی مساله معرفی می شوند و ثابت خواهد شد که این دسته نامساویها برای فضای شدنی مساله هستند. علاوه بر این ثابت خواهد شد که این نامساوی ها تعریف کنندهی وجهک هستند و بنابراین تقریب مناسبی از فضای شدنی بدست می دهند. در پایان با ارایه نتیجه عددی کارایی این نامساوی ها مورد مطالعه قرار خواهد گرفت.

واژه‌های کلیدی: مساله پستچی چینی با سود بیشینه، نامساوی معتبر، روش شاخه و برش، گراف همبند، تور

Mathematics Subject Classification [2010]: 13D45, 39B42

۱ مقدمه

در مساله پستچی چینی هدف یافتن کوتاهترین مسیری است که در آن، پستچی با شروع از یک راس که مبدا نامیده می شود، هر یال گراف را حداقل یکبار پیمایش کند و سپس به نقطه مبدا برگردد. مساله‌ای که در اینجا مورد بحث قرار می‌گیرد تعمیمی از مساله پستچی چینی است که مساله‌ی پستچی چینی با سود بیشینه نامیده می‌شود. در این مساله هر یال یک هزینه c_e برای هر پیمایش همراه با سرویس‌دهی، یک هزینه c_e^d برای پیمایش یال بدون سرویس‌دهی و یک سود حاصل از پیمایش یال دارد. هر زمان که یالی پیمایش شود، یک سود تولید می‌شود. هدف یافتن یک گشت بسته با حداکثر سود خالص بیشینه است که از مبدا شروع شده، یال‌هایی را به تعداد دفعات مشخص پیمایش می‌کند و به مبدا بازمی‌گردد که تور جواب نامیده می‌شود. برخلاف مساله‌ی پستچی چینی در این مساله می‌توان برخی از یال‌ها را پیمایش نکرد و اگر یالی بیش از یک بار نیز پیمایش شود سودی به آن تعلق می‌گیرد. قبل از شرح مدل نمادهایی که در ادامه استفاده می‌شود را بیان می‌کنیم. فرض کنید $G = (V, E)$ گراف همبند و بی‌سویی است. بدون کاستن از کلیت راس فرض کنید $1 \in V$ مبدا است. به هر یال $e \in E$ ، $n_e \geq 0$ سود ناخالص سرویس دهی یال برای اولین بار، دومین بار، ...، n_e امین بار اختصاص می‌یابد که به ترتیب آنها را با نماد $b_e^1, \dots, b_e^{n_e}$ نشان می‌دهیم. علاوه بر این به هر یال $e \in E$ ، $n_e + 1$ هزینه‌های $c_e^1, \dots, c_e^{n_e}, c_e^d$ اختصاص می‌یابد. n_e هزینه‌ی اول مربوط به هزینه‌ی پیمایش و سرویس‌دهی یال e برای اولین بار، دومین بار، ...، n_e امین بار می‌باشد، در حالی‌که هزینه‌ی c_e^d فقط مربوط به پیمایش یال بدون هیچ سرویس‌دهی می‌باشد که اصطلاحاً هزینه‌ی سربار نامیده می‌شود. بنابراین سود خالص t امین پیمایش یال e برابر $b_e^t - c_e^t$ برای $t = 1, 2, \dots, n_e$ است در حالی‌که سود خالص سربار برابر $-c_e^d$ می‌باشد. قبل از این‌که مدل مساله را شرح دهیم، نیاز به بیان قضیه‌ی زیر داریم و اثبات آن در مرجع [۱] آمده است.

* سخنران



قضیه ۱.۱. مساله روی یک گراف با $n_e + 1$ سود خالص اختصاص یافته به هر یال e معادل با مساله‌ای است که به هر یال فقط دو سود خالص b_e^{odd} و b_e^{even} اختصاص داده می‌شود. اگر $n_e = 0$ ، $b_e^{odd} = b_e^{even} = -c_e^d$ در غیر این صورت

$$b_e^{odd} = \max\left\{\sum_{l=1}^k \bar{b}_e^l : k \leq n_e + 1, \text{ فرد } k\right\}, \quad b_e^{even} = \max\left\{\sum_{l=1}^k \bar{b}_e^l : k \leq n_e + 1, \text{ زوج } k\right\} - b_e^{odd}$$

به عنوان نتیجه‌ای از قضیه ۱.۱، مساله را می‌توان با استفاده از دو متغیر دودویی x_e و y_e برای هر یال $e = (i, j) \in E$ فرمول‌بندی کرد که به ترتیب اولین و دومین پیمایش را نشان می‌دهد. اگر یال e پیمایش شود متغیر x_e مقدار یک و در غیر این صورت مقدار صفر خواهد گرفت. در حالی که اگر یال e دوبار پیمایش شود متغیر y_e مقدار یک و در غیر این صورت مقدار صفر خواهد گرفت. $S \subseteq V$ را در نظر بگیرید. فرض می‌کنیم $\delta(S) = (S : V \setminus S)$ و

$E(S) = \{e = (i, j) \in E : i, j \in S\}$ تابع هدف این مساله به صورت بیشینه $\sum_{e \in E} (b_e^{odd} x_e + b_e^{even} y_e)$ است. دسته محدودیت اول ایجاب می‌کند که جواب هر راس i را به تعداد دفعات زوج پیمایش کند، که به صورت $\sum_{e \in \delta(i)} (x_e + y_e) \equiv 0 \pmod{2}, \forall i$ است. دسته محدودیت دوم همبندی جواب را نشان می‌دهد که به صورت $\sum_{e \in \delta(S)} (x_e + y_e) \geq 2x_f, \forall S \subset V \setminus \{1\}, \forall f \in E(S)$ است و نامساوی همبندی نامیده می‌شود. محدودیت سوم مطمئن می‌سازد که دومین پیمایش زمانی اتفاق می‌افتد که قبلاً پیمایش شده باشد که به صورت $x_e \geq y_e, \forall e \in E$ است و آخرین محدودیت $x_e, y_e \in \{0, 1\}, \forall e \in E$ می‌باشد. توجه داشته باشید که دسته محدودیت اول غیر خطی است، اگرچه می‌توان با معرفی چندین متغیر صحیح به صورت خطی تبدیل کرد. چون $(x, y) = (0, 0)$ در همبندی محدودیت‌های بالا صدق می‌کند، لذا یک جواب شدنی برای مساله است. در ادامه فرض می‌کنیم گراف G همبند سه-یالی است اگر هر زیر مجموعه سره $S \subset V$ ، شامل حداقل سه یال باشد. به عبارت دیگر گراف G همبند سه-یالی است اگر و تنها اگر برای هر جفت راس i و j از V ، حداقل سه مسیر با یال‌های متمایز وجود داشته باشد که i و j را به هم متصل می‌کند. فرض کنیم که (β, b_0) ، یک نامساوی خطی باشد. این نامساوی را نسبت به چندوجهی $P \subseteq \mathbb{R}^d$ یک نامساوی معتبر گوئیم، هرگاه P زیر مجموعه‌ای از مجموعه $\{x \mid \beta^T x \leq b_0\}$ باشد. به عبارت دیگر، به ازای هر $x \in P$ ، نامساوی خطی $\beta^T x \leq b_0$ برقرار باشد. فرض کنیم که F یکی از وجه‌های چندوجهی P باشد. در این صورت اگر بعد F برابر با $1 - \dim(P)$ باشد، آن را یک وجهک و نامساوی متناظر با آن را، نامساوی تعریف‌کننده‌ی وجهک می‌نامیم. فرض کنید $F \subseteq \delta(S), S \subset V \setminus \{1\}$ و تعداد یال‌های F فرد باشد. دسته نامساوی‌های زیر را در نظر بگیرید.

$$(x - y)(\delta(S) \setminus F) \geq (x - y)(F) - |F| + 1 \quad \forall S \subset \delta(S), \quad |F| \text{ فرد} \quad (1)$$

قضیه ۲.۱. دسته نامساوی‌های (۱) برای فضای شدنی مساله پستچی چینی با سود بیشینه معتبر است.

اثبات: فرض کنید (x^*, y^*) یک تورجواب باشد. کافی است ثابت کنیم $(x^*, y^*)(\delta(S) \setminus F) \geq (x^*, y^*)(F) - |F| + 1$. که اثبات آن در مرجع [۱] آمده است. \square

قضیه ۳.۱. دسته نامساوی‌های زوجیت ۱ برای فضای جواب مساله تعریف‌کننده‌ی وجهک هستند اگر گراف G همبند سه-یالی و گراف‌های $G(S)$ و $G(V \setminus S)$ همبند دو-یالی باشند.

اثبات: نامساوی ۱ را می‌توان به فرم $(x - y)(F) - (x - y)(\delta(S) \setminus F) \leq |F| - 1$ نوشت. فرض کنید نامساوی معتبر $ax + by \leq c$ وجود دارد به طوری که

$$\begin{aligned} & \{(x, y) \in MBCPP(G) : (x - y)(F) - (x - y)(\delta(S) \setminus F) = |F| - 1\} \\ & \subseteq \{(x, y) \in MBCPP(G) : ax + by \leq c\} \end{aligned}$$



فرض کنید $(i, j) \in E(S) \cup E(V \setminus S)$. با توجه به این که گراف G همبند سه-یالی است، گراف $\{(i, j)\} \setminus G$ همبند است، و یک تور جواب به نام (x^1, y^1) وجود دارد که ۱ را به صورت تساوی برآورده می‌کند و راس i را ملاقات می‌کند. تور جواب (x^2, y^2) از (x^1, y^1) با اضافه کردن دو بار پیمایش یال (i, j) به دست می‌آید و ۱ را به صورت تساوی برآورده می‌سازد. پس $ax^1 + by^1 = c$ و $ax^2 + by^2 = c$ برقرار است. بعد از کم کردن اولین معادله از دومین به دست می‌آوریم:

$$a_{ij} + b_{ij} = 0 \quad \forall (i, j) \in E(S) \cup E(V \setminus S)$$

فرض کنید $(i, j) \in E(V \setminus S)$. با توجه به این که گراف G همبند سه-یالی و گراف $G(V \setminus S)$ همبند دو-یالی است، می‌توانیم دو مسیر با یال‌های متمایز P_1 و P_2 بسازیم که راس‌های i و j را به هم متصل می‌کند ولی شامل یال (i, j) نیست، به طوری که حداقل یکی از آن‌ها در $G(V \setminus S)$ باشد. اگر هر دو مسیر در $G(V \setminus S)$ باشد، می‌توانیم یک تور جواب (x^1, y^1) در G بسازیم که نامساوی همبندی را به صورت تساوی برآورده سازد به طوری که یال (i, j) را دقیقاً یک بار پیمایش می‌کند. می‌توانیم سه تور جواب (x^2, y^2) ، (x^3, y^3) و (x^4, y^4) را با استفاده از تور (x^1, y^1) بسازیم. همه‌ی این تورها نامساوی همبندی را به صورت تساوی درآورده و همچنین $ax + by = c$ را برآورده می‌سازند. فرض کنید $\alpha(P_i) = \sum_{e \in P_i^1} a_e + \sum_{e \in P_i^2} b_e$ که P_i^1 مجموعه یال‌هایی در مسیر P_i است که فقط یک بار در تور (x^1, y^1) پیمایش می‌شوند و P_i^2 مجموعه یال‌هایی در مسیر P_i است که در تور (x^1, y^1) یا اصلاً پیمایش نمی‌شوند یا دو بار پیمایش می‌شوند. اگر $ax^1 + by^1 = c$ را از $ax^2 + by^2 = c$ کم کنیم، رابطه‌ی $\alpha(P_1) + \alpha(P_2) = 0$ را به دست می‌آوریم. به همین ترتیب، با مقایسه‌ی تورهای ۳ و ۴ داریم $\alpha(P_1) = \alpha(P_2) = 0$ و در نتیجه $\alpha(P_1) = \alpha(P_2) = 0$. در نهایت، اگر تور ۱ و ۳ را با هم مقایسه کنیم، داریم $a_{ij} = 0$ و $a_{ij} = 0$. از آنجایی که $a_{ij} + b_{ij} = 0$ ، پس $b_{ij} = 0$. برای هر یال $(i, j) \in E(S)$ ، با یک استلال مشابه داریم $a_{ij} = b_{ij} = 0$. حال فرض کنید که مسیر P_k در $G(V \setminus S)$ نباشد. با توجه به این که گراف $G(S)$ همبند است، می‌توان فقط e_1 و e_2 را پیمایش کرد. سه حالت را در نظر می‌گیریم:

۱. $e_1, e_2 \in F$. فرض کنید (x^1, y^1) تور جواب باشد که نامساوی همبندی را به صورت تساوی برآورده می‌سازد و یال (i, j) و همه‌ی یال‌های در $F \setminus \{e_2\}$ را یک بار پیمایش می‌کند ولی یال e_2 را پیمایش نمی‌کند. توجه داشته باشید که وقتی یک کپی از هر یال را به مسیر P_k اضافه می‌کنیم، یک تور جواب به دست می‌آوریم که هر یال در $F \setminus \{e_1\}$ را یک بار و یال e_2 را دو بار پیمایش می‌کند.

۲. $e_1, e_2 \notin F$. فرض کنید (x^1, y^1) یک تور جواب باشد که نامساوی همبندی را به صورت تساوی برآورده می‌سازد. این تور یال (i, j) و همه‌ی یال‌های $F \cup \{e_1\}$ را یک بار پیمایش می‌کند ولی یال e_2 را پیمایش نمی‌کند. وقتی یک کپی از هر یال را به مسیر P_k اضافه می‌کنیم، یک تور جواب به دست می‌آوریم که هر یال در $F \cup \{e_2\}$ را یک بار و یال e_1 را دوبار پیمایش می‌کند.

۳. $e_1 \in F, e_2 \notin F$. فرض کنید (x_1, y_1) یک تور جواب باشد که نامساوی همبندی را به صورت تساوی برآورده می‌سازد. اگر یک کپی از هر یال را به مسیر P_k اضافه کنیم، یک تور جواب به دست می‌آوریم که هر یالی در $F \cup \{e_2\}$ را دقیقاً یک بار پیمایش می‌کند.

در هر سه حالت بالا، برای هر یال $(i, j) \in E(V \setminus S)$ به دست می‌آوریم $a_{ij} = b_{ij} = 0$. همان نتیجه را می‌توان برای هر یال $(i, j) \in E(S)$ نیز انجام داد.

حال یال $(i, j) \in \delta(S)$ را در نظر بگیرید. یک تور جواب به نام (x^1, y^1) وجود دارد که نامساوی همبندی را به صورت تساوی برآورده می‌سازد و یال (i, j) را پیمایش نمی‌کند در حالی که راس i و j را ملاقات می‌کند. (x^2, y^2) توری است که



بعد از اضافه کردن دوبار یال (i, j) به تور (x^1, y^1) به دست آمده است. از آنجایی که $ax^1 + by^1 = ax^2 + by^2 = c$ با کم کردن این دو رابطه برای هر یال $(i, j) \in \delta(S)$ داریم $a_{ij} + b_{ij} = 0$. فرض کنید $e_1, e_2 \in F$. فرض کنید (x^1, y^1) تور جواب باشد که همه یال‌های $F \setminus \{e_1\}$ را دقیقاً یک بار و یال e_1 را دو بار پیمایش می‌کند. (x^2, y^2) توری باشد که همه یال‌های $F \setminus \{e_2\}$ را دقیقاً یک بار و یال e_2 را دو بار پیمایش می‌کند. هر دو تور نامساوی همبندی را به صورت تساوی برآورده می‌کنند. با مقایسه آن‌ها و در نظر گرفتن این‌که برای هر یال $(i, j) \in E(S) \cup E(V \setminus S)$ داریم $a_{ij} = b_{ij} = 0$ به دست می‌آوریم $b_{e_1} = b_{e_2}$ و بنابراین، $a_{e_1} = a_{e_2}$. با تکرار این روش برای همه $(i, j) \in F$ به دست می‌آوریم $a_{ij} = \lambda$ و $b_{ij} = -\lambda$. برای هر $e_1 \in \delta(S) \setminus F$ ، $e_2 \in F$ را در نظر بگیرید. فرض کنید (x^1, y^1) یک تور جواب باشد که همه یال‌های متعلق به $F \cup \{e_2\}$ را دقیقاً یک بار استفاده می‌کند و تور (x^2, y^2) همه یال‌های در $F \setminus \{e_2\}$ را دقیقاً یک بار و یال e_2 را دو بار پیمایش می‌کند. با مقایسه آن‌ها داریم $a_{e_1} = b_{e_2} = -\lambda$ و بنابراین $b_{e_1} = -\lambda$. بنابراین $\lambda x(F) - \lambda y(F) - \lambda x(\delta(S) \setminus F) + \lambda y(\delta(S) \setminus F) \leq c$ ، $ax + by \leq c$ و از این‌رو، نامساوی $ax + by \leq c$ به $\lambda|F| - \lambda = c$ کاهش می‌دهد.

مراجع

- [1] Angel Corberan, Isaac Plana, Antonio M. Rodríguez-Chía, José M. Sanchis, *A branch-and-cut algorithm for the maximum benefit Chinese postman problem*, Math. Program, 141 (2013), pp. 21–49.
- [2] C. Malandraki, M.S. Daskin, *The maximum benefit chinese postman problem and the maximum benefit traveling salesman problem*, Eur. J. Oper. Res, 65 (1993), pp. 218–234.
- [3] M. Alvarez-Manilla, A. Jung, K. Keimel, *The probabilistic powerdomain for stably compact spaces*, Theoretical Computer Science, 328 (2004), pp. 221–244.
- [4] M. Alvarez-Manilla, *Measure theoretic results for continuous valuations on partially ordered spaces*, Ph.D. Thesis, Imperial College, University of London, 2001.
- [5] G. B. Folland, *Real Analysis: Modern Techniques and Their Applications*, 2nd ed., John Wiley, 1999.
- [6] F. Topsze, *Topology and Measure*, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 133, Springer, Berlin, 1970.

پست الکترونیکی: f.heidari@sutech.ac.ir
پست الکترونیکی: m.khorrami@sutech.ac.ir



بررسی کارای چندین ساختار همسایگی برای حل مساله مسیریابی وسایل نقلیه با ناوگان ناهمگن

افسانه محمودی*
دانشگاه صنعتی شیراز

مصطفی خرمی زاده
دانشگاه صنعتی شیراز

چکیده

در این مقاله چندین ساختار مختلف و متنوع از همسایگی‌های شناخته شده را برای حل مساله مسیریابی وسایل نقلیه با ناوگان ناهمگن شرح می‌دهیم. سپس به هر همسایگی یک مجموعه از ساختارهای داده‌ای متناسب با مساله نسبت داده و شرح می‌دهیم که چگونه می‌توان این ساختارهای داده‌ای را با انجام هر همسایگی توری به‌نگام کرد که جواب در مرحله بعد برای مساله شدنی باشد در پایان با ارایه نتایج عددی کارایی این ساختارهای همسایگی را مورد بحث قرار می‌دهیم. از این ساختارهای همسایگی می‌توان در روش‌های فراابتکاری برای حل این مساله بهره جست.

واژه‌های کلیدی: روش‌های فراابتکاری؛ ساختار همسایگی؛ مسیریابی وسایل نقلیه با ناوگان ناهمگن؛

Mathematics Subject Classification [2010]: 90B22, 90B99, 90C90

۱ مقدمه

یکی از مباحث مهم که در چند دهه اخیر کاربرد بسیار بالایی در عمل داشته و برای افزایش کارایی و بهره‌وری سیستم‌های حمل و نقل مطرح شده است بحث مسیریابی وسایل نقلیه^۱ است [۳]. به علاوه چون هزینه حمل و نقل یکی از مولفه‌های مؤثر در قیمت تمام شده کالا و هم چنین سطح رضایت‌مندی مشتری است از این رو همواره کاهش هزینه‌های حمل و نقل کالا مورد علاقه تولیدکنندگان است تا به این طریق آن‌ها بتوانند رقابت پذیری کالایشان را در مقایسه با دیگر کالاهای مشابه ارتقا بخشند و مقدار فروش و سوددهی خود را افزایش دهند [۱].

فرض کنید $G = (V, E)$ یک گراف جهت دار باشد، که در آن مجموعه رأس‌ها $V = \{0, 1, \dots, n\}$ است که از $n + 1$ رأس تشکیل شده است و مجموعه کمان‌ها به شکل $E = \{(i, j) : i, j \in V, i \neq j\}$ می‌باشد. رأس ۰ نشان دهنده نقطه شروع است که در آن ناوگان وسایل نقلیه قرار دارد و مجموعه $V' = V \setminus \{0\}$ از سایر رأس‌ها که نشان دهنده n مشتری هستند، تشکیل شده است. هر مشتری $i \in V$ دارای تقاضای q_i است. ناوگان از m نوع وسیله نقلیه مختلف تشکیل شده است. با فرض $M = \{1, 2, \dots, m\}$ برای هر $u \in M$ و m_u وسیله نقلیه وجود دارند، که هر کدام دارای ظرفیت Q_u است. برای هر وسیله نقلیه یک هزینه ثابت در نظر می‌گیریم که آن را با نماد f_u نشان می‌دهیم. در پایان برای هر کمان یک هزینه $c_{ij}^u = d_{ij} r_u$ در نظر می‌گیریم که در آن d_{ij} فاصله بین رأس‌های i و j است و r_u هزینه وابسته وسیله نقلیه u برای هر واحد فاصله می‌باشد [۲]. در این مساله هر مسیر با زوج مرتب (R, u) مشخص می‌شود، که در آن $R = (i_1, i_2, \dots, i_{|R|})$ و $i_1 = i_{|R|} = 0$ و $i_2, \dots, i_{|R|-1} \in V'$ به عبارت دیگر، هر مسیر یک دور در گراف است که شامل نقطه شروع می‌باشد و به وسیله نقلیه u اختصاص یافته است. اگر میزان تقاضای مشتریان از ظرفیت وسیله نقلیه

* سخنران
Vehicle Routing^۱



تجاوز نکند، آنگاه می‌گوییم مسیر (R, u) شدنی است. هزینه اختصاص یافته به یک مسیر جمع هزینه ثابت وسیله نقلیه متناظر و هزینه کمان‌های پیموده شده می‌باشد. در این صورت مساله مسیریابی وسایل نقلیه ناهمگن عبارت است از یافتن مسیرهای شدنی، به طوری که هر مشتری دقیقاً یکبار ملاقات شود؛ بیشینه تعداد مسیرهای تعریف شده برای وسیله نقلیه $u \in M$ از m_u بیشتر نشود و مجموع هزینه‌ها کمینه شود [۴].

۲ شرح ساختارهای همسایگی

در مساله مسیریابی وسایل نقلیه با ناوگان ناهمگن از مجموعه ساختار همسایگی استفاده می‌شود. به منظور بهبود و بهنگام سازی^۲ مسیرهایی که در ساختار همسایگی قرار گرفتند، برای هر مسیر تقاضای (Demand) مشتریان مربوط به هر مسیر در نظر گرفته می‌شود و از r یک سری ساختارهای داده‌ای کمکی که به شش مولفه مجموع تقاضای مشتریان اختصاص یافته به هر مسیر $(SumD[r])$ ، بیشترین تقاضای مشتریان هر مسیر $(MaxD[r])$ ، کمترین تقاضای مشتریان هر مسیر $(MinD[r])$ ، بیشینه جمع تقاضای دو مشتری مجاور $(MaxPairD[r])$ ، کمینه جمع تقاضای دو مشتری مجاور $(MinPairD[r])$ و تقاضای تجمعی در هر رأس از مسیر $(CumD[r_i])$ تقسیم‌بندی می‌شود به هر مسیر اختصاص می‌دهیم.

$Sh(1,0)$: در این ساختار همسایگی که آن را با نماد $Sh(1,0)$ نشان می‌دهیم یک مشتری مانند K به تصادف از مسیر r_1 به مسیر r_2 انتقال داده می‌شود. به منظور اجتناب از بررسی حرکت‌های ناشدنی باید شرایط زیر برآورده شود. اگر $MinD[r_1] + SumD[r_2] > Q$ آنگاه انتقال هر مشتری از مسیر r_1 به مسیر r_2 شدنی نمی‌باشد. ناشدنی بودن جواب کاملاً روشن است. زیرا هنگامی که مشتری با حداقل تقاضا شرایط ورود به مسیر r_2 را ندارد، پس سایر مشتریان دیگر که دارای تقاضای بیشتر یا مساوی با حداقل تقاضا می‌باشد شرایط ورود نخواهند داشت. علاوه بر این اگر $D[k] + SumD[r_2] > Q$ باشد پس مشتری K به هیچ موقعیتی از مسیر r_2 انتقال داده نمی‌شود. حال اگر امکان انتقال از مسیر r_1 به مسیر r_2 وجود داشت، مشتری به انتهای مسیر r_2 انتقال داده می‌شود و باید ساختارهای داده‌ای کمکی مسیرهای تغییر کرده بهنگام شوند، که نحوه بهنگام کردن آن‌ها به صورت زیر آورده شده است.

از آنجای که مشتری تصادفی K از مسیر r_1 برداشته شده و به مسیر r_2 اضافه شده پس مجموع تقاضای مسیر r_1 به اندازه تقاضای مشتری تصادفی K کاهش یافته و مسیر r_2 به همان اندازه افزایش می‌یابد. حال اگر مشتری K در مسیر r_1 بیشترین (کمترین) تقاضا را دارا بوده است باید بیشترین (کمترین) تقاضا در کل مسیر بهنگام شود در غیر این صورت همان مقدار قبلی در نظر گرفته می‌شود در مسیر r_2 تقاضای مشتری K با بیشترین (کمترین) تقاضا در مسیر مقایسه می‌شود در صورت بیشتر بودن به عنوان بیشترین (کمترین) تقاضا در نظر گرفته می‌شود در غیر این صورت بدون تغییر باقی می‌ماند. برای بهنگام کردن بیشینه (کمینه) جمع تقاضای دو مشتری مجاور در مسیر r_1 باید توجه شود که مشتری K به تصادف انتخاب شده پس باید از مشتری K به بعد بهنگام سازی انجام شود و بیشینه (کمینه) جمع تقاضای دو مشتری مجاور در مسیر مشخص شود ولی در مسیر r_2 مشتری K به انتهای مسیر اضافه می‌شود برای بهنگام کردن بیشینه (کمینه) جمع تقاضای دو مشتری مجاور کفایت دو مشتری آخر بررسی شده و مقایسه شود و در صورت بیشتر بودن جایگزین شود. برای بهنگام کردن تقاضای تجمعی در هر رأس از مسیر r_1 تا قبل مشتری K تقاضای تجمعی مانند قبل است ولی از مشتری K به بعد تقاضای تجمعی به مقدار تقاضای K کاهش می‌یابد ولی تقاضای تجمعی در مسیر r_2 فقط برای مشتری آخر باید به مسیر اضافه شود.

$Sh(2,0)$: در این ساختار همسایگی که با $Sh(2,0)$ نمایش داده می‌شود دو مشتری مجاور مانند K و L به تصادف از مسیر r_1 به مسیر r_2 انتقال داده می‌شود. این حرکت را می‌توان به صورت انتقال کمان در نظر گرفت، از این رو دو کمان (K, L) و (L, K) به مسیر r_2 منتقل می‌شود قبل از شروع انتقال مشتری از مسیر r_1 به مسیر r_2 باید شرایط زیر بررسی



شود: $MinD[r_1] + SumD[r_2] \leq Q$ حال اگر امکان انتقال از مسیر r_1 به مسیر r_2 وجود داشت، مشتریان به انتهای مسیر r_2 انتقال داده می‌شود و باید ساختارهای داده‌ای کمکی مسیرهای تغییر کرده بهنگام شوند، که نحوه بهنگام کردن آن‌ها به صورت زیر آورده شده است. از آنجا که دو مشتری مجاور مانند K و L از مسیر r_1 برداشته شده و به مسیر r_2 اضافه شده‌اند پس مجموع تقاضای مسیر r_1 به اندازه تقاضای مشتری تصادفی K و L کاهش یافته و مسیر r_2 به همان اندازه افزایش می‌یابد. حال اگر مشتریان K و L در مسیر r_1 بیشترین (کمترین) تقاضا را دارا بوده است باید بیشترین (کمترین) تقاضا در کل مسیر بهنگام شود در غیر این صورت همان مقدار قبلی در نظر گرفته می‌شود در مسیر r_2 تقاضای مشتریان K و L با بیشترین (کمترین) تقاضا در مسیر مقایسه می‌شود در صورت بیشتر بودن، K یا L به عنوان بیشترین (کمترین) تقاضا در نظر گرفته می‌شود در غیر این صورت بدون تغییر باقی می‌ماند. برای بهنگام کردن بیشینه (کمینه) جمع تقاضای دو مشتری مجاور در مسیر r_1 باید توجه شود که مشتری K به تصادف انتخاب شده پس باید از مشتری K و L به بعد بهنگام سازی انجام شود و بیشینه (کمینه) جمع تقاضای دو مشتری مجاور در مسیر مشخص شود ولی در مسیر r_2 مشتری K و L به انتهای مسیر اضافه می‌شود برای بهنگام کردن بیشینه (کمینه) جمع تقاضای دو مشتری مجاور کفایت سه مشتری آخر بررسی شده و مقایسه شود و در صورت بیشتر بودن جایگزین شود. برای بهنگام کردن تقاضای تجمعی در هر رأس از مسیر r_1 تا قبل مشتری K و L تقاضای تجمعی مانند قبل است ولی از مشتری K و L به بعد تقاضای تجمعی به مقدار تقاضای K و L کاهش می‌یابد ولی تقاضای تجمعی در مسیر r_2 فقط برای دو مشتری آخر باید به مسیر اضافه شود.

$Sw(1,1)$: در این ساختار همسایگی که با $Sw(1,1)$ نشان داده می‌شود جایگشت بین مشتری مانند K از مسیر r_1 و مشتری مانند L از مسیر r_2 به صورت تصادفی انجام می‌گیرد. به منظور اجتناب از بررسی حرکت‌های ناشدنی، باید شرایط زیر برآورده شود: $MinD[r_1] - MaxD[r_2] + SumD[r_2] \leq Q$ و $D[K] + SumD[r_2] - MaxD[r_2] \leq Q$ حال اگر امکان جایگشت بین دو مسیر r_1 و مسیر r_2 انجام می‌شود و باید ساختارهای داده‌ای کمکی مسیرهای تغییر کرده بهنگام شوند، که نحوه بهنگام کردن آن‌ها به صورت زیر آورده شده است. از آنجا که مشتری تصادفی K از مسیر r_1 و مشتری تصادفی L از مسیر r_2 جایگشت می‌کنند پس مجموع تقاضای مسیر r_1 به اندازه تقاضای مشتری تصادفی K کاهش و به اندازه تقاضای مشتری L افزایش یافته و در مسیر r_2 به صورت عکس اعمال می‌شود. حال اگر مشتری K در مسیر r_1 بیشترین (کمترین) تقاضا را دارا بوده است با مشتری L مقایسه می‌شود در صورت بیشتر بودن به عنوان بیشترین تقاضا در نظر گرفته می‌شود در غیر این صورت L با بیشترین (کمترین) تقاضا در مسیر مقایسه می‌شود و در صورت بیشتر بودن جایگزین می‌شود در غیر این صورت همان مقدار قبلی در نظر گرفته می‌شود در مسیر r_2 مانند مسیر r_1 عمل می‌شود. برای بهنگام کردن بیشینه (کمینه) جمع تقاضای دو مشتری مجاور در مسیر r_1 باید توجه شود که مشتری K به تصادف انتخاب شده پس باید از مشتری K به بعد بهنگام سازی انجام شود و بیشینه (کمینه) جمع تقاضای دو مشتری مجاور در مسیر مشخص شود. در مسیر r_2 مانند مسیر r_1 عمل می‌شود. برای بهنگام کردن تقاضای تجمعی در هر رأس از مسیر r_1 تا قبل مشتری K تقاضای تجمعی مانند قبل است ولی از مشتری K به بعد تقاضای تجمعی به مقدار تقاضای K کاهش و به مقدار تقاضای L افزایش می‌یابد. در مسیر r_2 نیز عکس می‌شود.

$Sw(2,1)$: در این ساختار همسایگی جایگشت دو مشتری مجاور مانند K و L از مسیر r_1 با مشتری مانند k' از مسیر r_2 به صورت تصادفی انجام می‌شود. همانند $Shift(2,0)$ دو کمان (K,L) و (L,K) در نظر گرفته می‌شود. برای جلوگیری از بررسی حرکات ناشدنی، باید شرایط زیر در نظر گرفته شود: $MinPairD[r_1] - MaxD[r_2] + SumD[r_2] \leq Q$ حال اگر امکان جایگشت از مسیر r_1 به مسیر r_2 وجود داشت، باید ساختارهای داده‌ای کمکی مسیرهای تغییر کرده بهنگام شوند، که نحوه بهنگام کردن آن‌ها به صورت زیر آورده شده است. مسیر r_1 مانند مسیر r_1 در $Sh(2,0)$ بهنگام می‌شود و مسیر r_2 مانند مسیر r_2 در $Sw(1,1)$ بهنگام می‌شود.

$Sw(2,2)$: در این ساختار همسایگی که با $Sw(2,2)$ نمایش داده می‌شود جایگشت بین دو مشتری مجاور مانند K و L از مسیر r_1 با دو مشتری مجاور مانند k' و L' از مسیر r_2 به صورت تصادفی. سپس چهار ترکیب شدنی از تبادل



کمان‌های (K, L) و (K', L') در نظر گرفته می‌شود. بنابراین برای جلوگیری از بررسی حرکات ناشدنی باید شرایط زیر در نظر گرفته شود: $MinPairD[r_1] - MaxPairD[r_2] + SumD[r_2] \leq Q$ حال اگر امکان جایگشت از مسیر r_1 به مسیر r_2 وجود داشت، باید ساختارهای داده‌ای کمکی مسیرهای تغییر کرده بهنگام شوند، که نحوه بهنگام کردن آن‌ها $SW(1,1)$ می‌باشد. با این تفاوت که بجای یک مشتری، دو مشتری به تصادف انتخاب شده است.

۳ نتایج اصلی

پیاپی سازی در محیط سیستم عامل WINV و با استفاده از یک رایانه با $4Gig$ حافظه و پردازشگر مرکزی $Corei5$ انجام شده است. از بزرگترین مساله آزمون ارایه شده در که دارای ۱۰۰ وسایل نقلیه و ۲۰ مشتری است استفاده شده است.

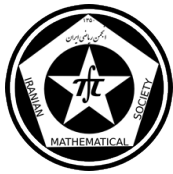
شماره	نام	بهترین جواب	میانگین جواب	کل زمان
۱	Sh(1,0)	۷۰۹۳.۸۰۰۲۹۳	۱۴۹۸۵.۴۹۸۰۴۷	۲۳۴
۲	Sh(2,0)	۷۲۲۵.۴۰۰۳۹۱	۱۵۲۴۴.۴۶۵۸۲۰	۵۱۴
۳	SW(1,1)	۷۳۲۶.۴۰۰۳۹۱	۱۵۶۱۹.۲۱۶۷۹۷	۱۰۷۱
۴	SW(2,1)	۶۸۶۸.۰۰۰۰۰۰	۱۶۸۰۲.۶۳۸۶۷۲	۲۸۰
۵	SW(2,2)	۶۳۶۵.۵۹۹۶۰۹	۱۵۴۰۳.۹۷۴۶۰۹	۲۳۹۰

از جدول بالا مشاهده می‌شود که بهترین جواب مربوط به همسایگی $SW(2,2)$ است همان‌طور که قبلاً گفته شد در دو $SW(2,2)$ مشتری از مسیر با دو مشتری از مسیری دیگر جایگشت می‌شود و چون حداکثر جایگشت در هر مسیر دو مشتری می‌باشد و تنها در $SW(2,2)$ این اتفاق روی می‌دهد و این امکان را به مسیر می‌دهد که توانایی بررسی چهار حالت ممکن را داشته باشد و بهترین را انتخاب نموده و باعث بهبود کیفیت جواب می‌شود. هم‌چنین نسبت به بقیه همسایگی‌ها دارای زمان محاسباتی بیشتری می‌باشد. کمترین زمان محاسباتی مربوط به همسایگی $Sh(1,0)$ است. در $Sh(1,0)$ تنها یک مشتری از مسیر انتقال داده می‌شود و انجام محاسبات آسان‌تر شده و باعث می‌شود به زمان محاسباتی کمتری نیاز داشته باشد.

مراجع

- [1] Baldacci R., Mingozzi A. "A unified exact method for solving different classes of vehicle routing problems", *Math. Program*, (2009).
- [2] Chen P., Huang HK. and Dong XY., "Iterated variable neighborhood descent algorithm for the capacitated vehicle routing problem", *Expert Syset with Appl.*, **37**, 1620-1627 (2010).
- [3] Golden B. L., Assad A. A., Gheysens F. G. and Levy L., "The feet size and mixed vehicle routing problem Comput", *Oper. Res.*, **11**, 49-66 (1984).
- [4] Ochi L., Vinna D. and Drummond L. M. A. and Vector A., "A parallel evolutionary algorithm for the vehicle routing problem with heterogeneous fleet", *Future Gener Comput. Syst.*, **14**, 285-292 (1998).

پست الکترونیکی: a.mahmudi@sutech.ac.ir
پست الکترونیکی: m.khorrami@sutech.ac.ir



پایداری ورودی-خروجی کراندار برای سیستم‌های کنترل خطی فازی

مهرآسا آیت‌اللهی* فاطمه امینی الهام واثقی
دانشگاه پیام نور دانشگاه پیام نور دانشکده فنی و حرفه‌ای دکتر شریعتی

چکیده

این مقاله، پایداری یک سیستم کنترل خطی فازی را از دیدگاه ریاضی مورد بررسی قرار می‌دهد. پایداری مورد بحث، مربوط به زمانی است که ورودی و خروجی‌های کراندار برای سیستم، مطرح باشند. شرایط لازم و کافی برای دستیابی به این نوع پایداری به صورت یک قضیه ارائه و با استفاده از ریاضیات فازی اثبات خواهد گردید.

واژه‌های کلیدی: سیستم کنترل خطی فازی، پایداری، ورودی و خروجی کراندار
Mathematics Subject Classification [2010]: 34H05, 93C42, 06D72, 34K20

۱ مقدمه

در این قسمت برخی مفاهیم و تعاریف اولیه مورد نیاز در زمینه تئوری فازی و نظریه کنترل ارائه می‌گردد. مجموعه اعداد فازی را با نماد E روی مجموعه اعداد حقیقی \mathbb{R} در نظر می‌گیریم.

تعریف ۱.۱ ([۱]) یک عدد فازی در فرم پارامتری عبارتست از زوج مرتب $(\underline{u}(\alpha), \bar{u}(\alpha))$ که $0 \leq \alpha \leq 1$ و در شرایط زیر صدق می‌کند:

۱. $\underline{u}(\alpha)$ تابعی کراندار و غیر کاهشی است که روی $[0, 1]$ پیوستگی راست دارد.

۲. $\bar{u}(\alpha)$ تابعی کراندار و غیر افزایشی است که روی $[0, 1]$ پیوستگی چپ دارد.

۳. $\underline{u}(\alpha) \leq \bar{u}(\alpha), 0 \leq \alpha \leq 1$.

تعریف ۲.۱ ([۲]) به ازای هر $0 \leq \alpha \leq 1$ مجموعه آلفا-برش برای عدد فازی $u \in E$ عبارتست از:

$$[u]_{\alpha} = \begin{cases} \{x \in \mathbb{R} | u(x) \geq \alpha\} & \text{if } \alpha > 0 \\ cl(supp u) & \text{if } \alpha = 0 \end{cases} \quad (1)$$

بدین ترتیب مجموعه آلفا-برش هر عدد فازی، یک بازه بسته و کراندار به صورت $[\underline{u}(\alpha), \bar{u}(\alpha)]$ تعریف می‌کند که $\underline{u}(\alpha)$ و $\bar{u}(\alpha)$ به ترتیب نقاط انتهایی چپ و راست $[u]_{\alpha}$ هستند. برای نمایش هر عدد حقیقی و دلخواه $y \in \mathbb{R}$ کفایت قرار دهیم:

$$\tilde{y}(t) = \begin{cases} 1 & \text{if } t = y \\ 0 & \text{if } t \neq y \end{cases} \quad (2)$$

مثلا $\tilde{0} = [0]_{\alpha} = (0, 0)$

* سخنران



تعریف ۳.۱. ([۳]) فاصله هاسدورف بین دو عدد فازی $u = (\underline{u}(\alpha), \bar{u}(\alpha))$ و $v = (\underline{v}(\alpha), \bar{v}(\alpha))$ عبارتست از نگاشت $d : E \times E \rightarrow \mathbb{R}_+ \cup \{0\}$ که:

$$d(u, v) = \sup \max\{|\underline{u}(\alpha) - \underline{v}(\alpha)|, |\bar{u}(\alpha) - \bar{v}(\alpha)|\} \quad (۳)$$

به سادگی دیده می‌شود که d یک متر روی E تعریف می‌کند.

قضیه ۴.۱. فرض کنیم $f(t)$ یک تابع فازی مقدار روی $[a, \infty)$ باشد که $[f(t)]_\alpha = (\underline{f}(t, \alpha), \bar{f}(t, \alpha))$. همچنین فرض کنیم به ازای هر $\alpha \in [0, 1]$ توابع $\underline{f}(t, \alpha)$ و $\bar{f}(t, \alpha)$ روی $[a, b]$ (به ازای $b \geq a$) انتگرال‌پذیر ریمان باشند و توابع مثبت $\underline{M}(\alpha)$ و $\bar{M}(\alpha)$ چنان موجود باشند که $\int_a^b |\underline{f}(t, \alpha)| dt \leq \underline{M}(\alpha)$ و $\int_a^b |\bar{f}(t, \alpha)| dt \leq \bar{M}(\alpha)$. در این صورت تابع $f(t)$ انتگرال‌پذیر ریمان فازی روی $[a, \infty)$ است و حاصل این انتگرال یک عدد فازی است. علاوه بر این داریم:

$$\left[\int_a^\infty f(t) dt \right]_\alpha = \left(\int_a^\infty \underline{f}(t, \alpha) dt, \int_a^\infty \bar{f}(t, \alpha) dt \right) \quad (۴)$$

□

اثبات. برای اثبات به [۴] مراجعه شود.

اکنون سیستم تک ورودی-تک خروجی:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases} \quad (۵)$$

را که $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times 1}$, $C \in \mathbb{R}^{1 \times n}$, $D \in \mathbb{R}$ و $x : \mathbb{R}^n \rightarrow E$, $u : \mathbb{R} \rightarrow E$ ، $y : \mathbb{R} \rightarrow E$ به عنوان یک سیستم کنترل خطی فازی در نظر می‌گیریم.

تعریف ۵.۱. اگر $u(t)$ به عنوان یک ورودی ضربه فازی به سیستم (۵) وارد شود آنگاه خروجی فازی ناشی از $u(t)$ را با $g(t)$ نمایش داده به عنوان پاسخ ضربه تعریف می‌کنیم و داریم:

$$y(t) = \int_0^t g(t-\tau)u(\tau)d\tau = \int_0^t g(t)u(t-\tau)d\tau \quad (۶)$$

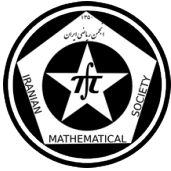
تعریف ۶.۱. ورودی $u(t)$ برای سیستم (۵) کراندار فازی نامیده می‌شود هرگاه $u_m = (\underline{u}_m(\alpha), \bar{u}_m(\alpha))$ وجود داشته باشد که:

$$d(|u(t)|, \bar{\circ}) \leq d(u_m, \bar{\circ}) \quad (۷)$$

با توجه به تعریف فوق، پایداری ورودی-خروجی کراندار فازی بدین معناست که هر ورودی کراندار فازی $u(t)$ منجر به یک خروجی کراندار فازی گردد.

۲ نتایج اصلی

در این قسمت شرایط لازم و کافی برای پایداری ورودی-خروجی کراندار برای سیستم (۵) بیان و اثبات می‌گردد.



قضیه ۱.۲. سیستم کنترل فازی تک ورودی-تک خروجی (۵) پایداری ورودی-خروجی کراندار دارد اگر و تنها اگر پاسخ ضربه فازی $g(t)$ روی $[0, \infty)$ مطلقاً انتگرال‌پذیر فازی باشد. به عبارت دیگر، داشته باشیم:

$$d\left(\int_0^{\infty} |g(t)| dt, \tilde{\sigma}\right) \leq d(M, \tilde{\sigma}) < \infty$$

جاییکه $M = (\underline{M}(\alpha), \overline{M}(\alpha)) \in E$.

اثبات. فرض کنیم $g(t)$ مطلقاً انتگرال‌پذیر فازی باشد و $u(t)$ یک ورودی فازی کراندار دلخواه باشد؛ یعنی $u_m = (\underline{u}_m(\alpha), \overline{u}_m(\alpha))$ وجود داشته باشد که:

$$d(|u(t)|, \tilde{\sigma}) \leq d(u_m, \tilde{\sigma}), \forall t \geq 0$$

طبق (۶):

$$d(|y(t)|, \tilde{\sigma}) = d\left|\int_0^t g(t-\tau)u(\tau)d\tau\right|, \tilde{\sigma}$$

از طرفی:

$$\left|\int_0^t \underline{g}(\tau, \alpha) \underline{u}(t-\tau, \alpha) d\tau\right| \leq \int_0^t |\underline{g}(\tau, \alpha)| |\underline{u}(t-\tau, \alpha)| d\tau \leq \underline{u}_m(\alpha) \int_0^t \underline{g}(\tau, \alpha) d\tau \leq \underline{u}_m(\alpha) \underline{M}(\alpha)$$

و

$$\left|\int_0^t \overline{g}(\tau, \alpha) \overline{u}(t-\tau, \alpha) d\tau\right| \leq \int_0^t |\overline{g}(\tau, \alpha)| |\overline{u}(t-\tau, \alpha)| d\tau \leq \overline{u}_m(\alpha) \int_0^t \overline{g}(\tau, \alpha) d\tau \leq \overline{u}_m(\alpha) \overline{M}(\alpha)$$

بنابراین طبق تعریف فاصله هاسدورف داریم:

$$d\left(\int_0^{\infty} |g(t)| dt, \tilde{\sigma}\right) \leq d(M, \tilde{\sigma})$$

بنابراین خروجی فازی به دست آمده، کراندار است.

حال فرض کنیم سیستم (۵) پایداری ورودی-خروجی کراندار دارد اما $g(t)$ مطلقاً انتگرال‌پذیر فازی نیست. در این صورت t_1 وجود دارد که:

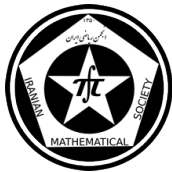
$$d\left(\int_0^{t_1} |g(\tau)| d\tau, \tilde{\sigma}\right) = \infty$$

یا به عبارت دیگر برای هر عدد فازی $N = (\underline{N}(\alpha), \overline{N}(\alpha))$ داریم:

$$d\left(\int_0^{t_1} |g(\tau)| d\tau, \tilde{\sigma}\right) \geq d(N, \tilde{\sigma})$$

اکنون یک ورودی فازی کراندار به صورت زیر انتخاب می‌کنیم:

$$u(t_1 - \tau, \alpha) = \begin{cases} \tilde{\sigma} & g(\tau, \alpha) \geq \tilde{\sigma} \\ -\tilde{\sigma} & g(\tau, \alpha) < \tilde{\sigma} \end{cases}$$



آنگاه:

$$\underline{y}(t, \alpha) = \int_0^{t_1} \underline{g}(\tau, \alpha) \underline{u}(t_1 - \tau, \alpha) d\tau = \int_0^{t_1} |\underline{g}(\tau, \alpha)| d\tau \geq \underline{N}(\alpha)$$

و:

$$\bar{y}(t, \alpha) = \int_0^{t_1} \bar{g}(\tau, \alpha) \bar{u}(t_1 - \tau, \alpha) d\tau = \int_0^{t_1} |\bar{g}(\tau, \alpha)| d\tau \geq \bar{N}(\alpha)$$

با توجه به تعریف فاصله هاسدورف داریم:

$$d(y(t), \tilde{\circ}) \geq d(N, \tilde{\circ})$$

□

یعنی به ازای ورودی فازی کراندار فوق، خروجی حاصل، کراندار نخواهد بود.

مراجع

- [۱] اللهویرانلو، توفیق، طاهری، نرگس، مجموعه‌های فازی و خواص آن، انتشارات دانشگاه آزاد اسلامی، تهران، ۱۳۸۷.
- [2] S. Salahshour, T. Allahviranloo, *Applications of fuzzy Laplace transforms*, Soft Computing 17, no. 1, (2013), pp. 221-244.
- [3] B. Bede, S.G. Gal, *Generalizations of the differentiability of fuzzy-number-valued functions with applications to fuzzy differential equations*, Fuzzy Sets and Systems 151, no. 3, (2005), pp. 581-599.
- [4] H.C. Wu, *The improper fuzzy Riemann integral and its numerical integration*, Information Sciences 111, no. 1, (1998), pp. 109-137.

پست الکترونیکی: m_ayatollahi@pnu.ac.ir

پست الکترونیکی: arghi_1382@yahoo.com

پست الکترونیکی: e_vasseghi@yahoo.com



تعمیم مسأله‌ی هزینه کمینه جریان در شبکه و بررسی کارایی آن

محسن کولانی*
دانشگاه تبریز

امید قیصر قراملکی
دانشگاه تبریز

مسلم ولیزاده
دانشگاه آزاد اسلامی تبریز

چکیده

مسأله‌ی هزینه‌ی کمینه‌ی جریان در شبکه با کران‌های بالا و پایین ثابت روی جریان‌های یال برای قالب‌بندی مسائل منطقی زیادی به‌کار می‌رود. اما در بعضی موارد این قالب‌بندی نمی‌تواند در عمل پاسخگوی نیازها باشد؛ در این مقاله، به بررسی تعمیمی از آن می‌پردازیم که در عمل نیز کارا بوده و برخی ضعف‌های مسأله قبلی را جبران می‌نماید. این مسأله به‌صورت یک برنامه‌ریزی خطی صحیح آمیخته قالب‌بندی می‌شود و با حل یک مثال عددی کارا بودن آن در عمل نشان داده می‌شود.

واژه‌های کلیدی: بهینه‌سازی شبکه، کران پایین نامنظم، کمترین هزینه‌ی جریان در شبکه

۱ مقدمه

حجم عظیمی از داده‌های دیجیتالی، جریان برق و نیز محصولات تولیدشده در کارخانه‌ها توسط شبکه‌های کامپیوتری، الکتریکی، مخابراتی و حمل و نقل از نقطه‌ای به نقطه‌ی دیگر منتقل می‌شوند. این انتقال‌ها از راه‌های مختلفی می‌توانند انجام شوند: یک کارخانه می‌تواند محصولات خود را از راه‌های مختلفی به دست مصرف‌کننده برساند، یک پیغام صوتی یا داده‌ی دیجیتالی می‌تواند از طریق سرورهای مختلفی به سمت مقصد هدایت شود. هر کدام از این راه‌ها هزینه‌ی مربوط به خود را دارند اما تصمیم‌گیری در مورد انتخاب بهترین راه برای این انتقال جریان به‌طوری‌که کمترین هزینه‌ی ممکن را در بر داشته باشد، کار ساده‌ای نیست و در برخی موارد بسیار دشوار است. نمود روزافزون شبکه‌ها در زندگی روزمره باعث شده است تا محققان چنین مسائل مربوط به شبکه‌ها را به‌صورت مسائل ریاضی قالب‌بندی نمایند و به بررسی روش‌های گوناگون برای حل قالب‌های حاصل بپردازند. مسأله‌ی هزینه‌ی کمینه‌ی جریان در شبکه، MCNF^۱، از این دسته مسائل می‌باشد.

الگوریتم‌های شبه‌چندجمله‌ای و چندجمله‌ای مختلفی برای حل مسائل MCNF استاندارد ارائه شده است. الگوریتم‌های شبه‌چندجمله‌ای معمولاً برای حالت داده‌های صحیح بهتر عمل می‌کنند، اما رفتار آنها در بدترین حالت می‌تواند ضعیف باشد. الگوریتم‌های حذف دور، کوتاهترین مسیر متوالی و اولیه-ثانویه از این دسته هستند [۱]. برای جلوگیری از رفتار ضعیف الگوریتم‌های شبه‌چندجمله‌ای در بدترین حالت، الگوریتم‌های چندجمله‌ای زیادی ارائه شده‌اند. الگوریتم‌های مقیاس‌کردن ظرفیت و هزینه نیز از این نوع می‌باشند [۲]. در این مقاله مسأله‌ی MCNF و دلیل ضعف آن در عمل را بیان می‌کنیم و جهت بر طرف کردن این ضعف، به بررسی تعمیمی از آن پرداخته و کارا بودن آن در عمل را با مثالی نشان می‌دهیم.

* سخنران

^۱ Minimal cost network flow



۲ تعریف مسأله

یک شبکه با یک گره عرضه و یک گره تقاضا را در نظر بگیرید که هزینه‌ی جریان هر یال آن ثابت است. در مسأله‌ی MCNF، هدف، تعیین مقدار جریان روی هر یال است به گونه‌ای که، کل هزینه جهت تامین تقاضا حداقل گردد به شرطی که: (۱) میزان تقاضا بیشتر از منابع موجود نباشد؛ (۲) جریان‌های ورودی و خروجی گره‌های میانی برابر باشند؛ (۳) جریان‌های روی هر یال در کران پایین و بالای خود صدق کنند.

در شبکه عادی یال‌ها جریان‌ها را حفظ می‌کنند اما در شبکه‌ی تعمیم‌یافته، جریان در امتداد یال‌ها ممکن است کم یا زیاد شود. در شبکه تعمیم‌یافته برای هر یال (i, j) یک عامل مثبت l_{ij} اختصاص داده شده است. اگر x_{ij} واحد جریان وارد یال (i, j) شود آنگاه $l_{ij}x_{ij}$ واحد جریان به گره j می‌رسد. عامل مثبت کمتر از ۱ ($0 < l_{ij} < 1$) بیانگر کاهش می‌باشد، همانند نشان دادن کاهش در انتقال نفت از طریق خطوط لوله؛ عامل مثبت بزرگتر از ۱ ($1 < l_{ij} < \infty$) بیانگر افزایش می‌باشد، همانند نشان دادن ارزش افزوده از طریق کانال توزیع؛ و نیز زمانی که تمامی عامل‌ها برابر ۱ باشند، شبکه‌ی تعمیم‌یافته به شکل یک شبکه‌ی عادی در می‌آید. قالب برنامه‌ریزی خطی مسأله‌ی MCNF در شبکه‌ی تعمیم‌یافته به صورت

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{(i,j) \in A} c_{ij}x_{ij} \\ \text{s.t.} \quad & \sum_{\{j:(i,j) \in A\}} x_{ij} - \sum_{\{j:(j,i) \in A\}} l_{ji}x_{ji} = b(i), \quad i \in N \\ & L_{ij} \leq x_{ij} \leq U_{ij}, \quad (i, j) \in A \end{aligned}$$

است [۳]. توجه داشته باشید که U_{ij} کران بالای جریانی است که از گره i فرستاده می‌شود نه جریانی که به گره j می‌رسد. به‌طور مشابه، c_{ij} نیز هزینه‌ی واحد جریانی است که از گره i ارسال می‌شود نه هزینه‌ی واحد جریانی که به گره j می‌رسد. قالب مسأله‌ی MCNF برای قالب‌بندی مسائل منطقی زیادی به‌کار می‌رود، اما در برخی موارد جواب بهینه حاصل از این قالب‌بندی نمی‌تواند در عمل نیز کاراترین جواب ممکن باشد؛ مثلاً این قالب‌بندی برای تعیین میزان نفت یا گاز طبیعی توزیعی از طریق خطوط لوله نیز قابل استفاده است به این گونه که حجم جریان بایستی بین کران پایین و بالای هر لوله قرار گیرد. کران بالا می‌تواند همان ظرفیت لوله در نظر گرفته شود؛ کران پایین نیز معمولاً برابر صفر قرار داده می‌شود تا هر جریانی که کمتر از ظرفیت باشد بتواند از آن عبور کند. با این حال، در عمل انتقال حجم خیلی کوچک آنها یا از نظر فیزیکی غیرممکن است و یا از نظر اقتصادی نشدنی است. برای مقابله با این محدودیت، برای هر یال قالب MCNF می‌توان یک کران پایین مشروط تعریف کرد به این صورت که جریان‌های بسیار کم اجازه‌ی عبور از یال را نداشته باشند. به‌ویژه این‌که، یک یال با کران پایین مشروط می‌تواند بسته بوده و جریان در آن صفر باشد و یا اینکه باز بوده و جریان در آن ناکمتر از کران پایین مثبت مشروط مشخص باشد. در این مقاله، این نوع کران پایین تحت عنوان کران پایین نامنظم، VLB^۲، مورد توجه قرار می‌گیرد.

۳ دست‌آوردهای پژوهش

یک شبکه‌ی تعمیم‌یافته‌ی $G = (N, A)$ مفروض است که در آن N مجموعه‌ای از گره‌ها و A مجموعه‌ای از یال‌ها است. فرض کنید $s \in N$ نشان‌دهنده‌ی یک گره عرضه و $d \in N$ نشان‌دهنده‌ی یک گره تقاضا باشد و نیز دو مقدار مثبت S و D به ترتیب نشان‌گر بیشترین میزان عرضه موجود در گره عرضه و حداقل تقاضای مورد نیاز در گره تقاضا باشند. به‌علاوه، فرض کنید A_1 یک مجموعه از یال‌هایی با کران‌های پایین ثابت و A_2 یک مجموعه از یال‌هایی با کران‌های پایین نامنظم باشند.

^۲Variable lower bounds



برای هر یال $(i, j) \in A$ ، اعداد نامنفی c_{ij} ، l_{ij} و U_{ij} به ترتیب بیانگر هزینه‌ی واحد جریان، عامل افزایش/کاهش، کران پایین جریان و کران بالای جریان هستند. توجه داشته باشید که تعبیر L_{ij} برای یال‌های موجود در A_1 و یال‌های موجود در A_2 متفاوت است. برای یک یال دلخواه $(i, j) \in A_2$ که یک یال VLB است، جریان x_{ij} می‌تواند صفر یا ناکمتر از L_{ij} باشد که $L_{ij} > 0$. به علاوه اینکه متغیر تصمیم x_{ij} ، جریان روی یال $(i, j) \in A$ را نشان می‌دهد و متغیر تصمیم

$$y_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{اگر } (i, j) \in A_2 \text{ باز باشد} \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

وضعیت یال $(i, j) \in A_2$ را بیان می‌کند. با استفاده از نماد y_{ij} در قالب MCNF، قالب MCNF-VLB زیر را داریم:

$$\min \sum_{(i,j) \in A} c_{ij} x_{ij} \quad (1)$$

$$\text{s.t.} \quad \sum_{(i,j) \in A} x_{ij} - \sum_{(j,i) \in A} l_{ji} x_{ji} \leq S, \quad i = s \quad (2)$$

$$\sum_{(i,j) \in A} x_{ij} - \sum_{(j,i) \in A} l_{ji} x_{ji} = 0, \quad i \neq s, d \quad (3)$$

$$\sum_{(i,j) \in A} x_{ij} - \sum_{(j,i) \in A} l_{ji} x_{ji} \leq -D, \quad i = d \quad (4)$$

$$L_{ij} \leq x_{ij} \leq U_{ij}, \quad (i, j) \in A_1 \quad (5)$$

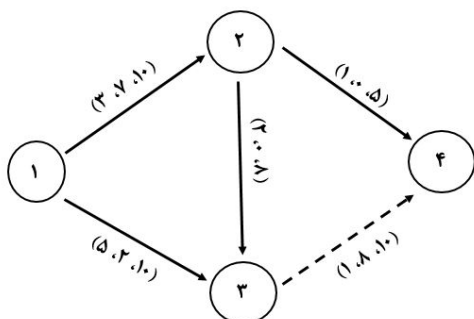
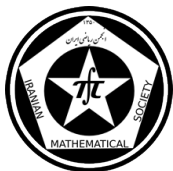
$$L_{ij} y_{ij} \leq x_{ij} \leq U_{ij} y_{ij}, \quad (i, j) \in A_2 \quad (6)$$

$$y_{ij} \in \{0, 1\}, \quad (i, j) \in A_2. \quad (7)$$

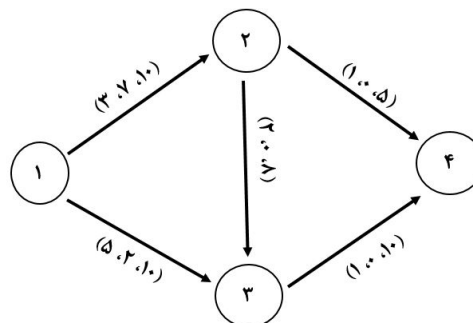
این قالب، یک قالب برنامه‌ریزی خطی صحیح آمیخته بوده و هدف آن، این است که هزینه‌ی کل جریان عبوری از شبکه را همانند تابع هدف (۱) به حداقل برساند. قید (۲) مشخص می‌سازد که حداکثر S واحد می‌تواند از گره عرضه s خارج شود و قید (۴) نشان می‌دهد که حداقل D واحد می‌تواند به گره تقاضای d تحویل داده شود. قید (۳) مبین حفظ جریان در هر گره میانی می‌باشد. قید (۵) جریان روی یال‌های A_1 را محدود می‌کند تا بین کران‌های پایین و بالای خود قرار گیرند. قیود (۶)-(۷) ملزومات یال‌های VLB را نشان می‌دهند، که جریان روی یک یال VLB یا باید صفر باشد (زمانیکه $y_{ij} = 0$) و یا بین کران‌های پایین و بالای مثبت خودش قرار گیرد (زمانیکه $y_{ij} = 1$). توجه کنید که MCNF-VLB با گره‌های عرضه و تقاضای متعدد به آسانی می‌تواند به حالتی تبدیل شود که فقط یک گره عرضه و یک گره تقاضا وجود دارد [۴].

۱.۳ مثال عددی و بررسی کارایی قالب MCNF-VLB

شکل (آ) و شکل (ب) یک نمونه‌ی MCNF و MCNF-VLB متناظر را روی یک شبکه با ۴ گره و ۵ یال نشان می‌دهد. در این شبکه کل عرضه برابر کل تقاضا بوده و مساوی 10 واحد است. در شکل (ب) یال به شکل خطوط مقطع، یال VLB را نشان می‌دهد و در بردار سه‌تایی (a, b, c) ، a بیانگر هزینه، b بیانگر کران پایین و c بیانگر کران بالای مربوط به یال نظیر است. عامل افزایش/کاهش روی تمامی یال‌ها برابر 1 است. با استفاده از نرم‌افزار CPLEX، جواب بهینه‌ی این دو نمونه‌ی کوچک MCNF و MCNF-VLB را به دست آوردیم و مشخصات و جواب آنها را در جدول ۱ درج کرده‌ایم. طبق نتایج به دست آمده، با انتقال 10 واحد جریان هزینه‌ی کمینه برای نمونه‌ی MCNF-VLB برابر 56 بوده و برای نمونه‌ی MCNF برابر 50 می‌باشد. در واقع قالب MCNF جواب بهتری را از نظر تئوری ارائه داده است در صورتی‌که با اندکی دقت ملاحظه می‌کنیم که در جواب بهینه‌ی نمونه‌ی MCNF، 5 واحد جریان در امتداد یال (۳، ۴) وجود دارد. از طرفی، در نمونه‌ی



(ب) نمونه‌ی MCNF-VLB متناظر با (آ) با یک یال VLB



(آ) یک شبکه برای نمونه‌ی MCNF

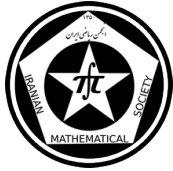
MCNF-VLB، یال (۳، ۴) یک یال VLB بوده و دارای کران پایین ۸ می‌باشد و به عبارت دیگر ارسال کمتر از ۸ واحد جریان از طریق این یال در عمل به صرفه نیست. لذا جواب بهینه‌ی MCNF برای نمونه‌ی MCNF-VLB نشدنی است. نتیجه‌گیری و پیشنهادات: ممکن است قالب MCNF در ظاهر جواب بهتری را نسبت به MCNF-VLB ارائه دهد ولی در عمل کارا نباشد. لذا می‌توان پژوهش‌های بیشتری را بر روی قالب MCNF-VLB و روش‌های حل آن انجام داد.

جدول ۱: نتایج محاسباتی نمونه‌های MCNF و MCNF-VLB.

گره آغازین	گره پایانی	یال هزینه‌ی یال		کران پایین کران بالا		جریان	جریان
		MCNF	MCNF-VLB	MCNF	MCNF-VLB		
۱	۲	۳	۲	۷	۱۰	۸	۸
۱	۳	۵	۳	۲	۱۰	۲	۲
۲	۳	۲	۳	۰	۸	۶	۳
۲	۴	۱	۴	۰	۵	۲	۵
۳	۴	۱	۴	۸	۱۰	۸	۵

مراجع

- [1] Ford LR, Fulkerson DR. *A primal-dual algorithm for the capacitated Hitchcock problem*. Naval Research Logistics Quarterly 1957;4:47-54.
- [2] Ahuja RK, Goldberg AV, Orlin JB, Tarjan RE. *Finding minimum-cost flows by double scaling*. Mathematical Programming 1992;53:243-66.
- [3] Ahuja RK, Magnanti TL, Orlin JB. *Network flows: theory, algorithms, and applications*. Englewood Cliffs, NJ:Prentice-Hall; 1993.
- [4] Xiaoyan Z, Qi Y, Alberto G, Liang D. *Minimal cost network flow problems with variable lower bounds on arc flows*. Computers and Operations Research 2011;38:1210-1218.



حل مسئله کوله پشتی محدود براساس محاسبات بیولوژیکی

مهرناز سارانی*

دانشکده سلامت، دانشگاه علوم پزشکی زاهدان

چکیده

امروزه محاسبات مولکولی به خاطر تواناییهای بالایی که در حل مسائل غیر چندجمله ای - زمانی دارد، بسیار مورد توجه قرار گرفته است. دسته خاصی از مسائل کوله پشتی، مسائل کوله پشتی محدود نامیده می شوند که یکی از مسائل محاسباتی سخت است و در این مقاله با استفاده از ویژگی های محاسبات DNA مانند قابلیت محاسبات موازی بالا و قدرت ذخیره سازی انبوه اطلاعات، به حل مسئله کوله پشتی محدود براساس محاسبات DNA می پردازیم.

واژه های کلیدی: محاسبات بیولوژیکی، مسئله کوله پشتی محدود، محاسبات DNA

۱ مقدمه

در انتهای دهه ۵۰ یک فیزیکدان به نام ریچارد فیمنن برای نخستین بار ایده استفاده از سلولهای زنده و مجموعه های پیچیده مولکولی را مطرح کرد. اولین مقاله در این موضوع در نوامبر ۱۹۹۴ توسط لئونارد آدلمان ارائه شد که در آن یک روش برای حل مسئله مسیر هامیلتونی ارائه و به طور آزمایشگاهی پیاده سازی شد و به دلیل ویژگی های مهم محاسباتی DNA ، حوزه تحقیقاتی جدیدی را پیش رو قرار داده است. در این محاسبات ابتدا با رشته های DNA کد می شود سپس الگوریتمی برای پیدا کردن جواب ارائه می شود. در این مقاله به حل مسئله کوله پشتی محدود با استفاده از الگوریتم های DNA می پردازیم.

۲ مبانی DNA و عملگرها

مولکول DNA تک رشته ای از چند نوکلئوتید و هر نوکلئوتید از سه بخش اصلی فسفات، قند و یکی از چهار باز آلی آدنین A ، تیمین T ، گوانین G و سیتوزین C تشکیل شده است. DNA دو رشته ای متشکل از دو تک رشته می باشد که مکمل یکدیگر هستند، بدین صورت که باز G از یک رشته با باز C از رشته دیگر و باز A با باز T از رشته دیگر بهم متصل می شوند. مکمل هر رشته را مکمل واتسون-کریک می نامند.

عملگرهای مورد نیاز برای اجرای الگوریتم به صورت زیر می باشد:

$merge(T_0, T_1, \dots, T_n)$: محتویات همه تیوب های T_1, \dots, T_n را داخل تیوب T_0 می ریزد.

$Amplify(T_0, T_1, \dots, T_n)$: این عملگر یک کپی از تمام رشته های موجود در تیوب T_0 را در داخل همه تیوب های T_1, \dots, T_n ایجاد می کند و سپس تیوب T_0 را خالی می کند.

$Extract(T_0, s, T_1, T_2)$: این عملگر همه رشته های تیوب T_0 که شامل s هستند را شناسایی و در تیوب T_1 و

مابقی رشته ها را در T_2 می ریزد.

$Append(T, s)$: این عملگر رشته s را به انتهای همه رشته های تیوب T اضافه می کند.

*مهرناز سارانی



$Set(T, p)$: در تمام رشته های موجود در تیوب T ، مقدار بیت p را یک می کند.
 $Clear(T, p)$: در تمام رشته های موجود در تیوب T ، مقدار بیت p را صفر می کند.
 $Wash(T)$: این عملگر محتویات تیوب T را بیرون می ریزد و در واقع آنرا می شوید.

۳ الگوریتم DNA برای حل مسئله کوله پشتی محدود

مسئله شماره (۱) مسئله کوله پشتی محدود می باشد برای حل آن به روش محاسبات بیولوژیکی ابتدا مسئله را به مدل برنامه ریزی صفر و یک تبدیل می کنیم و مسئله شماره (۲) تبدیل آن به مدل برنامه ریزی صفر و یک می باشد.

$$\begin{aligned} \max \quad & \sum_{j=1}^n p_j x_j & \max \quad & \sum_{j=1}^n p_j \sum_{i=0}^{k_j} 2^i y_{ji} \\ \text{s.t} \quad & \sum_{j=1}^n w_j x_j \leq W & \text{s.t} \quad & \sum_{j=1}^n w_j \sum_{i=0}^{k_j} 2^i y_{ji} \leq W \\ & 0 \leq x_j \leq u_j, i = 1, 2, \dots, m & & y_{ji} \in \{0, 1\} \\ & x_j \in Z, \forall j & & \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} & (1) & & (2) \end{aligned}$$

که در مسئله شماره یک W ، p_j و w_j صحیح مثبت هستند و w_j وزن کوله پشتی j و $B = \{w_j\}$ و مسئله شماره ۲ جاییکه k_j اولین عدد صحیحی است که در رابطه $u_j \geq 2^{k_j} - 1$ صدق می کند. مسئله شماره ۲ دارای یک قید و $N = \sum n.k_j$ متغیر می باشد. ابتدا یک رشته متناظر با یک قید در نظر می گیریم که طول هر کدام از این رشته ها NK بیت می باشد. N تعداد متغیرها و K حداکثر تعداد بیت های لازم برای کدگذاری w_j ها، W ، p_j می باشند. طول کل رشته هایی که در این الگوریتم استفاده می شوند به ۸ بخش تقسیم می کنیم. (مطابق جدول شماره ۱)

جدول ۱: جدول شماره یک

no Region	۱	۲	۳	۴
pos Bit	$\rightarrow NK$	$\rightarrow (N+1)k$	$\rightarrow (N+1)k + N$	$\rightarrow (2N+1)k + 2N$
mean Logical	W_j	W	Y_j	$W_j Y_j$
no Region	۵	۶	۷	۸
pos Bit	$\rightarrow (2N+2)k + 2N$	$\rightarrow (2N+3)k + 3N$	$\rightarrow (3N+3)k + 3N$	$\rightarrow (3N+4)k + 4N$
mean Logical	$\sum W_j Y_j$	area flage	P_j	PY

الگوریتم DNA زیر که از چندین فرآیند تشکیل شده است، را برای حل مسئله مورد نظر ارائه می کنیم. بیت i ام از رشته، با y_i نمایش داده می شود که اگر یک باشد با y_i^1 و اگر صفر باشد با y_i^0 نمایش داده می شود و همچنین w_i رشته ای به طول k بیت است که تماما صفر هستند.

ابتدا توسط فرآیند Init تمام جوابهای ممکن را تولید می کنیم. در واقع برای تمامی رشته ها، از بیت $(N+1)k$ تا $(N+1)k + N$ مقدار دهی اولیه شوند. توسط فرآیندهای Init-value، process-value و paralell-add مقدار WY را به ازای هر رشته از T ، به صورت دودویی تبدیل می کنیم، فرآیند اول، حاصلضرب مقدار هر متغیر و ضرب آنرا محاسبه، فرآیند دوم، نواحی ۶، ۷ را مقداردهی اولیه برابر با صفر می کند. سپس جوابهای نشدنی را توسط فرآیند comparator-It از فضای T تفکیک می کنیم و دور می ریزیم.



در این فرآیند نواحی ۳ و ۶ باهم مقایسه می شوند. توسط فرآیند $Append - c_i$ با توجه به مقدار هر متغیر در هر جواب شدنی ضرایب توابع هدف را به انتهای رشته های موجود در T_0 اضافه می کنیم و در نهایت به هر بیت از ناحیه ۹ به وسیله Init-value روی T_0 مقدار اولیه صفر داده می شود، سپس توسط $parallel-add$ ، CX را برای رشته های T_0 در مبنای ۲ محاسبه می گردد و در نهایت توسط comparator در صورت وجود رشته یا رشته هایی متناظر با جواب بهین به دست می آید.

Procedure process - value(T_0, m, k)

for $j = 1$ to N do

for $i = 1$ to k_j do

Extract($T_0, y_{\alpha+i}^1, T_y, T_{no}$)

Append($T_y, \forall^i * w_j$)

Append(T_{no}, w_0)

merge(T_0, T_y, T_{no})

next i

next j

$w_0 = 0, \alpha = (N + 1)k$

Procedure parallel - add($T_0, k, \alpha, \beta, f, m$)

for $i = 1$ to N do

for $j = 1$ to $k - 1$ do

Extract($T_0, y_{(\alpha+ki)-j}^1, T_p, T_q$)

Extract($T_p, y_{\beta-j}^1, T_a, T_b$)

set($T_b, y_{\beta-j}$)

clear($T_a, y_{\beta-j}$)

set($T_a, y_{f-(j+1)}$)

merge(T_0, T_a, T_b, T_q)

next j

for $j = 1$ to $(N + k)$ do

Extract($T_0, y_{f-j}^1, T_f, T_{f_0}$)

Extract($T_f, y_{\beta-j}^1, T_{A_1}, T_{A_0}$)

set($T_{A_0}, y_{\beta-j}$)

clear($T_{A_1}, y_{\beta-j}$)

clear(T_{A_0}, y_{f-j})

set($T_{A_1}, y_{f-(j+1)}$)

clear(T_{A_1}, y_{f-j})

merge($T_0, T_{A_1}, T_{A_0}, T_{f_0}$)

next j

next i

$(\alpha, \beta, f) = ((2N + 1)k + N,$

Procedure Init(T_0, N, k)

$T_1 = T_2 = \phi$

for $j = 1$ to N do

Append(T_0, k_j)

for $i = 1$ to k_j

Amplify(T_0, T_1, T_2)

Append($T_1, y_{\alpha+i}^1$)

Append($T_2, y_{\alpha+i}^0$)

merge(T_0, T_1, T_2)

next i

next j

$\alpha = (N + 1)k + N$

Procedure Init - value(T_0, l, p)

for $i = 1$ to l do

Append(T_0, y_{p+i}^0)

next i

$(l, p) = (2(N+k), (2N+1)k+N)$

Procedure comparatorr - lt(T_{it}, m, k)

for $i = 1$ to k do

Extract($T_{it}, x_{\alpha+i}^1, T_1, T_2$)

Extract($T_1, x_{Qk+i}^0, T_{drop}, T_{it}$)

Extract($T_2, x_{Qk+i}^1, T_{ok}, T_{it}$)

next i

merge(T_{it}, T_{ok}, T_{it})

$\alpha = (2Q + 1)k + Q$

Procedure parallel - comparator(T_0, Q, k)

$s = 0$

Do

$s++$

if number(T_{ans}) = 1 then exit



$(2N + 2)k + 2N, (2N + 1)k + N$ *if number*(T_{ans}) > 1 *then*
Procedure Append - $c_i(T_o, m, k)$ *for* $i = s + 1$ *to* Q *do*
for $i = 1$ *to* m *do* *Extract*($T_{ans}, x_{\alpha+i}^o, T_i, T_{ans}$)
for $j = 1$ *to* n_i *do* *if number*(T_i) = 1 *then exit*
Extract($T_o, x_{\alpha+j}^1, T_{p_i}, T_{p_i}$) *Amplify*(T_i, T_{ans})
Append(T_{p_i}, c_{ij}) *if number*(T_i) > 1 *then*
Append(T_{p_i}, c_o) *wash*(T_{ans})
merge(T_o, T_{p_i}, T_{p_i}) *Amplify*(T_i, T_{ans})
next i *next* i
 $\alpha = (Q + 1)k, \quad c_o = \circ$ *until number*(T_{ans}) $> \circ$
 $\alpha = (3Q + 2)k + 3Q$

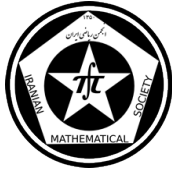
نتیجه گیری

در این مقاله براساس مدل stricker یک الگوریتم DNA برای حل مسئله کوله پشتی محدود، که یک مسئله محاسباتی سخت است، ارائه شد. به دلیل حجیم بودن محاسبات در سایز بزرگ مسئله با روشهای معمول به راحتی قابل حل نخواهد بود به همین دلیل از الگوریتم ابتکاری استفاده می کنیم که الگوریتم DNA از این دسته الگوریتم ها می باشد و همچنین روش self-assembly یکی از ایده های نو و جالب در محاسبات DNA است که هنوز بسیاری از مسائل NP به این شیوه حل نشده اند و علاقمندان می توانند اینگونه مسائل را مورد بررسی قرار دهند.

مراجع

- [۱] بروس آلبرتس وهمکاران، ترجمه حسین بهاروند، مبانی زیست شناسی سلولی، انتشارات تابش اندیشه، ۱۳۸۲.
- [۲] م.ت-داوسون، ترجمه علیرضا سمریاف زاده، مبانی مهندسی ژنتیک، چاپ اول، دانشگاه علوم پزشکی اهواز، ۱۳۷۹.
- [۳] حسن میش مست نهی، فوهاد حمیدی، کاربرد محاسبات DNA در حل مسائل بهینه سازی، دومین کنفرانس بین المللی تحقیق در عملیات ایران، خرداد ماه ۱۳۸۸.
- [۴] حسن میش مست نهی، مهرناز سارانی، حل مسئله تخصیص با استفاده از محاسبات بیولوژیکی، مجله علمی پژوهشی رایانش نرم و فناوری اطلاعات، جلد ۳ شماره ۳ سال ۱۳۹۳.
- [5] M.Sarani, The solution of multiple-choice knapsack problem by using DNA computing, International conference on Operations Research and Optimization, Iran, January(2013)19-22.
- [6] X.Yang, Q.Lu, Ch.Li, X.Liao, Biological computation of the solution to the quadratic assignment problem, Applied Mathematics and computation, 200(2008)369-377.
- [7] C.W.Yeh, C.P.Chu, K.R.Wu, Molecular solution of the binary integer programming problem based on DNA computation, Biosystems, 83(2006)56-66.
- [8] M.Daremiraki, H.Mishmastnehi, Molecular solution to the $\circ - 1$ Knapsack problem based on DNA computation, ScienceDirect, 187(2007)1033-1037.

پست الکترونیکی: mehr.sarani@gmail.com



حل مسئله برنامه‌ریزی خطی دوترازه‌ی کسری با ضرایب بازه‌ای در توابع هدف

حسن میش مست نهی
دانشگاه سیستان و بلوچستان

فرهاد حمیدی
دانشگاه سیستان و بلوچستان

ندا امیری*
دانشگاه سیستان و بلوچستان

چکیده

در این مقاله، هدف معرفی مسئله برنامه‌ریزی خطی دوترازه‌ی کسری بازه‌ای و ارائه‌ی روشی برای حل آن می‌باشد. برای شروع، ابتدا مروری بر مسئله برنامه‌ریزی خطی دوترازه‌ی کسری خواهیم داشت، سپس مسئله برنامه‌ریزی خطی دوترازه‌ی کسری بازه‌ای را معرفی خواهیم کرد. برای حل مسئله، چون ضرایب توابع هدف به صورت کسرهایی بازه‌ای هستند، حل مسئله به راحتی امکانپذیر نیست. از طرفی چون ضرایب صورت و مخرج در توابع هدف به صورت بازه‌ای است، پس، هدف تعیین بهترین و بدترین مقدار بهینه‌ی تابع هدف تراز بالایی می‌باشد. در این مقاله، ایده‌اصلی استفاده از مدل صفحه برش و در نظر گرفتن تغییر متغیر چارنز و کوپر برای حل مسئله می‌باشد. و نهایتاً، مدل پیشنهادیمان را روی یک مثال تشریح خواهیم کرد.

واژه‌های کلیدی: برنامه‌ریزی خطی دوترازه‌ی کسری، ضرایب بازه‌ای، مدل صفحه برش، برنامه‌ریزی خطی دوترازه‌ی کسری بازه‌ای

Mathematics Subject Classification [2010]: 13D45, 39B42

۱ مقدمه

حالت خاصی از یک مسئله برنامه‌ریزی خطی دوترازه زمانی است که، توابع هدف آن (تابع هدف تراز بالایی و تابع هدف تراز پائینی) به صورت کسری باشند. در این صورت یک مسئله برنامه‌ریزی خطی دوترازه‌ی کسری (BLFP) خواهیم داشت، که اولین بار توسط کالویت و گیل^۱ در سال ۱۹۹۹ مطرح شد [۲]. یک مسئله (BLFP) به صورت زیر قابل تعریف است:

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{x} \in X} & f_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \\ \min_{\mathbf{y} \in Y} & f_2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \\ \text{s.t.} & (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in S \end{aligned} \quad (1)$$

به طوری که، $f_i(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{c_{i1}x + c_{i2}y + \alpha_i}{d_{i1}x + d_{i2}y + \beta_i}$ ، به ازای $i = 1, 2$ ، $d_{i1}x + d_{i2}y + \beta_i > 0$. از جمله روش‌های حل مسئله برنامه‌ریزی خطی دوترازه‌ی کسری، روش وزن‌دهی است که در سال ۲۰۰۷ توسط میشرا^۲ ارائه شده است [۵]. در این روش، با تعیین وزن‌هایی مناسب، می‌توان مسئله برنامه‌ریزی خطی دوترازه را به یک مسئله بهینه‌سازی تک ترازه تبدیل کرد. در سال ۲۰۱۰، دوران تکسری^۳ روش سری تیلور پیشنهاد دادند. در این روش، جواب‌های بهینه‌ی هر تابع هدف کسری به دست

*سخنران

^۱Calvete and Gale

^۲Mishra

^۳Duran toksari



می‌آید. به گونه‌ای که برای هر تابع هدف کسری یک چند جمله‌ای تیلور در نظر گرفته می‌شود، سپس با وزن‌های مناسب، مسئله دوترازه‌ی کسری به مسئله دوترازه‌ی خطی تبدیل می‌شود. در سال ۲۰۰۴ کالویت و گیل^۴، روی حل مسئله برنامه‌ریزی دوترازه‌ی کسری کار کردند و نشان دادند که جواب بهین مسئله $BLFP$ در نقاط راسی مرزی از ناحیه شدنی اتفاق می‌افتد. سپس، با در نظر گرفتن الگوریتم بهترین k - ام، به حل مسئله $BLFP$ پرداختند. و مسئله را همچنین از نظری هندسی مورد بررسی قرار دادند [۳]. در سال ۲۰۱۲، پایان و کیخا^۵، با توسعه‌ی تغییر متغیر چارنز و کوپر توانستند مسئله برنامه‌ریزی خطی دوترازه‌ی کسری را به یک مسئله برنامه‌ریزی دوترازه‌ی خطی تبدیل کنند و با بیان یک قضیه، توانستند صحت مدل پیشنهادی خود را ثابت کنند. در اینجا هدف ما، معرفی مسئله برنامه‌ریزی دوترازه‌ی کسری بازه‌ای و حل آن به کمک مدل صفحه برش می‌باشد. در واقع، ایده اصلی ما در این مقاله، استفاده از شرایط KKT و همچنین در نظر گرفتن برش - توی^۶، برای حل مسئله $BLFPIC$ می‌باشد. برای حل مسئله برنامه‌ریزی خطی دوترازه‌ی کسری بازه‌ای، چون ضرایب صورت و مخرج توابع هدف به صورت بازه‌ای است، ابتدا مسئله را به یک جفت مسئله $BLFP$ بانام های مسئله بهترین و مسئله بدترین تبدیل می‌کنیم، سپس با کمک تغییر متغیر چارنز و کوپر دو مسئله برنامه‌ریزی خطی دوترازه‌ی کسری را به یک جفت مسئله BLP تبدیل می‌کنیم. نهایتاً، بهترین و بدترین جواب های بهینه‌ی مقدار تابع هدف تراز بالایی را تحت شرایط KKT و با استفاده از برش توی به دست می‌آوریم. و مدل پیشنهادی خود را روی یک مثال تشریح می‌کنیم

تعریف ۱.۱. نقطه‌ی راسی (x^*, y^*) ، جواب بهینه‌ی مسئله برنامه‌ریزی خطی دوترازه‌ی کسری است هرگاه:

$$1 - (x^*, y^*) \text{ شدنی باشد.}$$

$$2 - \text{ برای هر نقطه راسی شدنی } (x, y) \in S \text{ داشته باشیم: } f_i(x^*, y^*) \leq f_i(x, y), \forall i = 1, 2$$

قضیه ۲.۱. نقطه‌ی راسی (x^*, y^*) جواب بهینه‌ی مسئله برنامه‌ریزی خطی دوترازه‌ی کسری است، اگر و تنها اگر t^* ای وجود داشته باشد که (y_1^*, y_2^*) جواب بهین مسئله برنامه‌ریزی دوترازه‌ی خطی باشد.

اثبات. اثبات قضیه‌ی فوق با توجه به تعریف بهینگی و تغییر متغیر چارنز و کوپر به راحتی امکان پذیر است. □

۲ روش پیشنهادی برای حل مسئله برنامه‌ریزی خطی دوترازه‌ی بازه‌ای

در این قسمت، به معرفی مسئله برنامه‌ریزی خطی دوترازه‌ی کسری با ضرایب بازه‌ای در توابع هدف می‌پردازیم. سپس روشی برای حل این مدل مسائل پیشنهاد ارائه می‌دهیم. مسئله زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{aligned} \min_{x \in X} & \frac{[c_{11}, \bar{c}_{11}]x + [c_{12}, \bar{c}_{12}]y + [\alpha_1, \bar{\alpha}_1]}{[d_{11}, \bar{d}_{11}]x + [d_{12}, \bar{d}_{12}]y + [\beta_1, \bar{\beta}_1]} \\ \text{s.t. } & \min_{y \in Y} \frac{[c_{21}, \bar{c}_{21}]x + [c_{22}, \bar{c}_{22}]y + [\alpha_2, \bar{\alpha}_2]}{[d_{21}, \bar{d}_{21}]x + [d_{22}, \bar{d}_{22}]y + [\beta_2, \bar{\beta}_2]} \\ \text{s.t. } & Ax + By \leq b \\ & x, y \geq 0 \end{aligned} \quad (2)$$

^۴Calvete and Gale

^۵Payan and Keikha

^۶Tuy



در سال ۲۰۱۲ بززا، رامبلی و سراج^۷ به حل مسئله برنامه‌ریزی خطی دوترازه‌ی کسری با ضرایب بازه‌ای در توابع هدف پرداختند. آنها به کمک الگوریتم بهترین - k_i ام توانستند جواب بهینه‌ی مقدار تابع هدف تراز بالایی را تعیین کنند [۱]. چون در مسئله فوق ضرایب توابع هدف به صورت بازه‌ای است. پس هدف تعیین بهترین و بدترین جواب‌های بهینه‌ی مقدار تابع هدف تراز بالایی می‌باشد. بنابراین مسئله‌ی فوق را به دو زیر مسئله برنامه‌ریزی خطی دوترازه‌ی کسری، با در نظر گرفتن مطلوبترین و نامطلوبترین مقدار توابع هدف، تبدیل می‌کنیم. سپس با استفاده از تغییر متغیر توسعه یافته، به دو مسئله برنامه‌ریزی دوترازه‌ی خطی می‌رسیم. که با حل این دو مسئله برنامه‌ریزی دوترازه‌ی خطی، بهترین و بدترین مقادیر بهینه‌ی مسئله‌ی (۲) به دست می‌آید. روشی که در این مقاله پیشنهاد می‌شود، الگوریتم صفحه برشی است که در [۵] ارائه شده است. این الگوریتم بر اساس برش - توی^۸ طراحی شده است. با توجه به توضیحات بیان شده و همچنین با در نظر گرفتن شرایط ایجاد برش در [۵] الگوریتم زیر را ارائه می‌دهیم.

الگوریتم:

۱- $i = 1$ قرار دهید. مسئله بهترین برنامه‌ریزی دوترازه‌ی خطی را بدون در نظر گرفتن تابع هدف تراز پائینی برای به دست آوردن جواب بهینه‌ی (x^i, y^i) حل کنید. برو به گام ۲.

۲- شرط [۵] را برای نقطه‌ی راسی به دست آمده اعمال می‌کنیم. اگر شرط برقرار باشد، نقطه‌ی راسی (x^i, y^i) بهترین جواب بهین خواهد بود. در غیر این صورت برش معرفی شده در [۵] را اعمال می‌کنیم. به نحوی که هیچ نقطه‌ی راسی دیگری ایجاد نشود. برو به گام ۳.

۳- از مجموعه نقاط راسی مجاور به (x^i, y^i) ، نقطه‌ای راسی که بهترین جواب بهین برای تابع هدف تراز بالایی داشته باشد، انتخاب کنید. برو به گام ۱.

روند فوق، تا رسیدن به بهترین جواب بهینه برای تابع هدف تراز بالایی مسئله‌ی (۲) ادامه می‌یابد.

ملاحظه ۱.۲. بدترین جواب بهینه‌ی مسئله‌ی (۲)، با حل مسئله بدترین برنامه‌ریزی دوترازه‌ی خطی و با توجه به روند فوق به دست می‌آید.

^۷Borza, Rambely and saraj

^۸Tuy



مثال ۲.۲. مسئله برنامه‌ریزی خطی دوترزهی کسری با ضرایب بازه‌ای در توابع هدف زیر را در نظر بگیرید :

$$\min_{x \in X} \frac{[-4, -2]x + [3, 10]y + [-3, -1]}{[2, 5]x + [3, 6]y + [1, 6]} \quad (3)$$

$$\min_{y \in Y} f(x, y) = \frac{[8, 10]x + [-3, -2]y + [-2, -1]}{[1, 5]x + [1, 3]y + [1, 7]}$$

$$s.t. \quad -1x + 2y \leq 13$$

$$2x + 3y \leq 37$$

$$2x - y \leq 17$$

$$2x - 3y \leq 11$$

$$x + 4y \geq 11$$

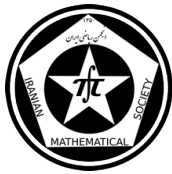
$$5x + 2y \geq 19$$

$$x, y \geq 0$$

حل. همان‌طورکه مشاهده می‌شود ضرایب توابع هدف، بازه‌ای هستند. با انجام روند فوق، و با شروع از نقطه‌ی راسی (۱، ۷) پس از چهار برش به بهترین جواب بهینه‌ی (۵، ۹) می‌رسیم. مشابه همان روند فوق به‌راحتی بدترین جواب بهینه برای مسئله‌ی (۲) به‌دست می‌آید.

مراجع

- [1] M . Borza , A . S . Rambely , M . Saraj , *A Stackelberg solution to a two-level linear fractional programming problem with interval coefficients in the objective functions* , Sains Malaysiana 41(21)(2012)1651-1656 .
- [2] H . I . Calvete , C . Gale , *The bilevel linear/linear fractional programming problem* , European Journal of Operational Research 114(1999)188-197.
- [3] H . I . Calvete , C . Gale , *A note on bilevel fractional programming problem* , European Journal of Operational Research 152(2004)296-299.
- [4] S . Mishra , *Weighting method for bilevel linear fractional programming* , European Journal of Operational Research 183(2007)296-302.
- [5] A.Ren and Y.Wang ,*A cutting plane method for bilevel linear programming with interval coefficients* , Ann Oper Res . DOI 10.1007/s10479-014-1624-4,(25)(2014).



حل برنامه ریزی خطی دو ترازه با استفاده از الگوریتم ژنتیک

نگار صلاحی*

دانشگاه آزاد اسلامی واحد ابهر

چکیده

حالت خاصی از برنامه‌ریزی چندترازه^۱، برنامه‌ریزی‌های دو ترازه^۲ است که بعلت سهولت در نشان دادن تاثیر روش، بیشتر دو ترازه در نظر گرفته می‌شود. همچنین یکی از انواع مهم و اساسی سیستم‌های دو ترازه مسائل برنامه‌ریزی خطی دو ترازه (Blpp) است. هرچند که توابع هدف و قیود سطوح بالا و پایین این نوع مسائل همگی خطی هستند اما از طرفی این نوع برنامه‌ریزی برای توابع هدف مسائل تراز بالا در همه‌جا پیوسته و محدب نیستند و مهم هستند. جوابی از مسائل پایین‌تر را بدست آورند که بطور کلی خطی و مشتق‌پذیر نباشند. در این مقاله قصد داریم طرحی از الگوریتم ژنتیک را برای حل (Blpp) با ساختن تابع برازندگی تراز بالای یک برنامه‌ریزی خطی بر پایه تعریف درجه شدنی بودن ارائه دهیم. الگوریتم ژنتیکی که در اینجا بکار گرفته می‌شود از روش تابع جریمه قیود استفاده نمی‌کند بلکه با تغییر تصادفی نسل آغازین جمعیت به جای یک نسل آغازین صادق در قیود به منظور بهبود بخشیدن توانایی الگوریتم، جواب بهینه را بدست می‌آورد و سرانجام با نتایج عددی به دست آمده و تعداد مثال حل شده با این روش، توانایی و کارا بودن آن را نشان می‌دهد.

واژه‌های کلیدی: برنامه‌ریزی خطی دو ترازه، تصمیم‌گیری نامتمرکز^۳، جواب بهینه^۴، الگوریتم ژنتیک^۵.

۱ مقدمه

یک سیستم تصمیم نامتمرکز و غیر مشارکتی را در یک وضعیت تعادلی که یک رهبر و چندین پیرو با هم در ارتباط هستند در نظر می‌گیریم، فرض کنیم که رهبر و پیروها هر کدام متغیرهای تصمیم مربوط به خودشان را داشته باشند؛ رهبر می‌تواند از طریق متغیرهای تصمیم خودش به عکس‌العمل پیروها تأثیر بگذارد، (امرکند) در مقابل، پیروها در این‌که کاربردهای عینی خود را در قبال تصمیمات رهبر و پیروهای دیگر بهبود بخشند و به حداکثر برسانند، اختیار تام دارند، لذا ابزار نیرومند سیستم‌های تعیین نامتمرکز «برنامه‌ریزی چند ترازه» است، لازم به ذکر است که فرمول‌های برنامه‌ریزی خطی ممکن است، به‌طور قابل ملاحظه‌ای از یک مقاله تا مقاله دیگر تغییر کند.

بیالاس و کاروان در سال (۱۹۸۴) نامحدب بودن مسائل تراز بالا را با مثال‌های عددی اثبات نمودند [۱]. همچنین باردوین-آید اثبات نمودند که هر (Blpp) یک مسأله NP-hard است. [۱] علاوه بر این در سالهای اخیر و بینست و ساوارد (۲۰۰۱) اذعان داشتند که هر مسأله NP-hard می‌تواند جواب بهینه کلی مسأله (Blpp) را پیدا کند

* سخنران

^۱Multi level

^۲Bi-level

^۳Decentralized Decision Making

^۴Optimized solution

^۵Geneic Algorithm



[۱].

در حال حاضر الگوریتم‌های منطقی برای حل برنامه‌ریزی خطی دو ترازه ارائه شده است که می‌توان آنها را بطور خلاصه بصورت زیر دسته‌بندی نمود:

- ۱- روش پیدا کردن نقطه رأسی: این روش اساساً برگرفته از الگوریتم K -ام بهترین است [۱].
- ۲- روش تبدیلات: این روش برگرفته از الگوریتم مکمل خطی و الگوریتم شاخه و کران و روش کاربردی تابع جریمه می‌باشد.
- ۳- روش تکاملی: این روش براساس حل ژنتیکی معادله تعادل Nash و الگوریتم ژنتیک است.

۲ مدل ریاضی برنامه‌ریزی خطی دو ترازه (Blpp)

انواع مختلفی از مدل‌های برنامه‌ریزی خطی و غیرخطی دو ترازه وجود دارد که در این مقاله مدل زیر را به عنوان مدل برنامه‌ریزی خطی معرفی می‌کنیم [۱]:

$$P_1 : \max F(x, y) = a^t x + b^t y$$

$$y \geq 0$$

$$P_2 : \max f(x, y) = c^t x + d^t y$$

$$s.to : Ax + By \leq r$$

$$x, y \geq 0$$

بطوریکه:

$$b, d, y \in \mathbb{R}^{n_2}$$

$$a, c, x \in \mathbb{R}^{n_1}, b \in \mathbb{R}^{m \times n_2}, A \in \mathbb{R}^{m \times n_1}, r \in \mathbb{R}^m$$

که اگر x ثابت فرض شود، جمله $c^t x$ در تابع هدف تراز پایین ثابت می‌شود. بنابراین تابع هدف مسأله تراز پایین بصورت زیر درمی‌آید:

$$\bar{f} = d^t y$$

حال فرض کنید ناحیه قیدی مسأله برنامه‌ریزی دو ترازه خطی بصورت

$$S = \{(x, y) | Ax + By \leq r\}$$

باشد که این ناحیه ناتهی و کراندار است سپس مجموعه ناتهی و کراندار

$$Q = \{y | By \leq r - Ax, \quad y \geq 0\}$$

را در نظر بگیرید و فرض کنید $Y(x)$ مجموعه جوابهای بهینه مسأله

$$\max \bar{f} = d^t y$$

$$y \in Q(x)$$



باشد. عضو منحصر بفردی از مجموعه $Y(x)$ موجود است بطوریکه:

$$\psi_f(s) = \{(x, y) \mid (x, y) \in S, y \in Y(x)\}$$

بنابراین مسأله P_1 می‌تواند به فرم زیر درآید:

$$(P_1) : \max F(x, y) = c^t x + d^t y$$

$$s.to : Ax + By \leq r$$

$$y = Y(x)$$

حال اگر نقطه (x, y) یک جواب مسأله زیر باشد:

$$\max F(x, y) = c^t x + d^t y$$

$$s.to : Ax + By \leq r \quad , \quad y = Y(x)$$

بنابراین (x, y) جواب مسأله (P_1) نیز هست.

تعریف ۱.۲. نقطه (x, y) را شدنی گوئیم: (feasibility point) اگر:

$$(x, y) \in \psi_f(s)$$

تعریف ۲.۲. نقطه شدنی $(x^*, y^*) \in \psi_f(s)$ را جواب بهینه مسأله (Blpp) می‌دانیم اگر فقط اگر برای هر نقطه $(x, y) \in \psi_f(s)$ داشته باشیم:

$$F(x^*, y^*) \geq f(x, y)$$

این مقاله روش عددی (Blpp) را براساس این تعاریف بحث می‌کند.

۳ طرح الگوریتم ژنتیک برای (Blpp)

شناخت تابع هدف تراز بالا در برنامه‌ریزی خطی دوترازه کار آسانی نیست و نمی‌توان فرمول آشکار و واضحی برای آن بدست آورد چون حل اینگونه توابع از حل توابع تراز پایینی ناشی می‌شود که خود نیز فرمول‌بندی مشخصی ندارد، بنابراین به کار بردن تعریف مشتق کار آسانی نبوده و لذا بحث روی وجود جوابهای بهینه با توجه به شرایط ذکر شده در الگوریتم‌های مذکور و همچنین الگوریتم ژنتیک در مسائل بهینه‌سازی با روشهای عددی کار بسیار مشکلی است. لذا در این نوشتار سعی داریم برنامه‌ریزی خطی دوترازه را با استفاده از الگوریتم ژنتیک که روشی کارا در بدست آوردن جواب بهینه است بکار ببریم.

۴ ایده اصلی الگوریتم (GA) ارائه شده برای حل (Blpp)

ابتدا یک جمعیت آغازین صادق در قیود انتخاب می‌کنیم، سپس متغیر تصمیم تراز پایین را متناظر با واکنش بهینه تراز بالا می‌سازیم و افراد را با محاسبه تابع برازندگی‌شان بر مبنای درجه شدنی بودن، تا زمانی که جواب بهینه توسط عملگر ژنتیک بیشتر و بیشتر و بهتر جستجو شود ارزیابی می‌کنیم.



۵ کدگذاری قیود

اغلب کدگذاریهای حاضر بدو صورت:

الف- کدگذاری بردار دودویی

ب- کدگذاری بردار شناور (حقیقی) تقسیم می‌شود.

تجربه نشان داده است روش دوم به فضای مسأله نزدیکتر بوده و با همگرایی زودتر و بدست آوردن جوابهای بهینه دقیق‌تری همراه است. در این نوشتار نیز از کدگذاری حقیقی استفاده می‌شود. بنابراین هر فرد بصورت یک بردار تصادفی تولید شده و تمایل به تولید فرزندان را دارند که در ناحیه قیدی نباشند. در اینجا به طریق زیر با قیود سروکار داریم: ابتدا یک نسل از افراد، بطور تصادفی تولید و سپس افرادی که در قیود $Ax + By \leq r$ صادق هستند را بعنوان یک جمعیت آغازین نگه داشته و بقیه را بیرون می‌اندازیم، بنابراین همه‌ی افراد تولید شده به این طریق در قیود صدق می‌کنند و فرزندان نیز بوسیله عملگرهای ژنتیکی انتخاب شده صادق در قیود خواهند شد.

۶ محاسبه تابع برازندگی

برای حل مسأله (P_3) توسط الگوریتم GA با استفاده از تعریف درجه شدنی، ابتدا تابع برازندگی را بصورت زیر تعریف نموده و فرض می‌کنیم d یک جریمه بزرگ بازه‌ای از ناحیه شدنی برای هر $(x, y) \in S$ باشد.

تعریف ۱.۶. فرض کنیم $\theta \in [0, 1]$ درجه صدق ناحیه شدنی باشد که بصورت تابع زیر تعریف می‌شود:

$$\begin{cases} 1 & \text{اگر } \|y - Y(x)\| = 0 \\ 1 - \left\| \frac{y - Y(x)}{d} \right\| & \text{اگر } \alpha \|y - Y(x)\| \leq d \\ 0 & \text{اگر } \|y - Y(x)\| \geq d \end{cases}$$

بطوریکه $\| \cdot \|$ یک نرم باشد بنابراین طبق تعریف فوق تابع برازندگی بصورت زیر محاسبه می‌گردد:

$$eval(v_k) = (F(x, y) - F_{\min}) * \theta \quad (*)$$

در صورتیکه F_{\min} کمترین مقدار تابع $F(x, y)$ روی S باشد.

۷ عملگرهای ژنتیک

در مسائل بهینه‌سازی با متغیرهای پیوسته از عملگرهای پیوند بسیاری استفاده شده است، که از مهمترین آنها پیوند ساده-ضربدری-حسابی می‌باشد. ولی در اغلب جمعیت‌ها پیوند حسابی کاربرد بیشتری دارد. این مقاله نیز نوعی از پیوند حسابی را بکار می‌برد که (فرزندان) هنوز در ناحیه قیدی هستند و این امر سبب می‌شود تا سیستم پایدارتر شده و انحراف از بهترین جواب کمتر باشد. عملگر پیوند حسابی می‌تواند دو فرزند را بگونه‌ای تولید کند که بطور کلی ترکیب خطی از والدین باشند، اگر v_1, v_2 دو رشته‌ای باشند که تحت عملگر پیوند حسابی تولید فرزند کنند بنابراین فرزندان آنها بصورت زیر خواهد بود.

$$v'_1 = \alpha * v_1 + (1 - \alpha)v_2$$

$$v'_2 = \alpha * v_2 + (1 - \alpha)v_1$$



در صورتیکه $\alpha \in [0, 1]$ عددی تصادفی است و لازم به تذکر است که این نوع عملگر حسابی بستار $v_1, v_2 \in S$ نیز هست.

یکی دیگر از عملگرهای مهم بکار برده در الگوریتم ژنتیک جهش است که در این نوشتار نیز مورد استفاده قرار گرفته است. جهش انواع مختلفی دارد: جهش یکنواخت- غیریکنواخت و مرزی. که در اینجا با جهش مرزی برای حل مسائلی که جواب بهینه آنها در، یا نزدیکی ناحیه جستجوی قیود است سروکار داریم.

اگر فرد V_k جهش کند بنابراین: $V'_k = (V'_{k_1}, V'_{k_2}, \dots, V'_{k_m})$ بدست می‌آید که هر کدام از V'_{k_i} ها می‌توانند جهت چپ یا جهش راست V_k با احتمال یکسان باشند.

و اما انتخاب برپایه این اصل صورت می‌گیرد که فرزندان کارا انتخاب شده و فرزندان غیرکارا حذف می‌شوند و سپس جستجو برای بهترین جواب در جمعیت صورت می‌گیرد و نتیجتاً تعدادی از بزرگترین (بالاترین) افراد با محاسبه تابع برازندگی‌شان بتدریج افزایش می‌یابند و دوره تکامل نیز در طول بیشتر بهینه سازی انجام می‌شود. گرچه عملگرهای انتخاب زیادی در الگوریتم GA وجود دارد اما در اینجا با انتخاب چرخ رولت را بکار می‌بریم که انتخاب ساده و منطقی است.

۸ معیارهای خاتمه

نتیجه‌گیری آخر در صورتی انجام می‌گیرد که نتیجه مطلوب حاصل شود و محاسبات متوقف گردد. تعداد بیشترین تکرار بعنوان شرط خاتمه در نظر گرفته می‌شود لذا الگوریتم ژنتیک بکار گرفته شده در مقاله حاضر را بصورت مراحل زیر بیان می‌نماییم.

گام (۱): (آغازسازی) انتخاب مبنای جمعیت (M) ، احتمال پیوند (P_c) ، احتمال جهش (P_m) و بیشترین تکرار نسل MAXGEN و فرض اینکه نسل از صفر شروع می‌شود ($t = 0$)

گام (۲): (آغازسازی نسل اولیه) افراد تصادفی شده در S (ناحیه قیدی) را M و ساخته شده از نسل آغازین تولید می‌کنیم.

گام (۳): محاسبه تابع برازندگی و برآورد مقدار برازندگی هر نسل مطابق با فرمول (*)

گام (۴): تولید نسل بعدی توسط عملگرهای GA و انتخاب فرد بوسیله جرخ دولت و برای تولید نسل بعدی نیز از عملگرهای پیوند و جهش ذکر شده استفاده می‌شود.

گام (۵): (شرط خاتمه) هنگامی که $(t > M)$ باشد الگوریتم متوقف می‌شود و جواب بهینه بدست می‌آید. به عبارت دیگر $t = t + 1$ سپس به گام (۳) می‌رویم.

۹ نتایج عددی

در مثال‌های زیر کارایی روش حل این نوع الگوریتم ژنتیک برای برنامه‌ریزی خطی دو ترازه نشان داده شده است:

مثال ۱.۹.۱ [۶]

$$\max_{x \geq 0} F(x, y) = x + 3y$$

برای y حل شده

$$\max_{y \geq 0} f(x, y) = x - 3y$$

s.t.

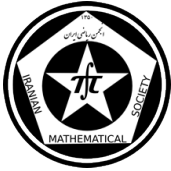
$$-x - 2y \leq -10$$

$$x - 2y \leq 6$$

$$2x - y \leq 21$$

$$x + 2y \leq 38$$

$$-x + 2y \leq 18$$



مثال ۲.۹

$$\max_{x \geq 0} F(x, y) = -8x_1 - 4x_2 - 4y_1 - 4y_2 - 4y_3$$

برای y حل شده

$$\max_{y \geq 0} f(x, y) = x_1 + 2x_2 + y_1 + y_2 + 2y_3$$

s.t.

$$-y_1 + y_2 + y_3 \leq -1$$

$$2x_1 - y_1 + 2y_2 + 0.5y_3 \leq 1$$

$$2x_2 + 2y_1 - y_2 - 0.5y_3 \leq 1$$

مثال ۳.۹ [۷]

$$\max_{x \geq 0} F(x, y) = 8x_1 + 4x_2 - 4y_1 + 4y_2 + 4y_3$$

s.t.

$$x_1 + 2x_2 - y_3 \leq \frac{1}{4}$$

$$\max_{y \geq 0} f(x, y) = -2y_1 - y_2 - 2y_3$$

s.t.

$$-y_1 + y_2 + y_3 \leq 1$$

$$4x_1 - 2y_1 + 4y_2 + y_3 \leq 2$$

$$4x_2 + 4y_1 - 2y_2 - y_3 \leq 2$$

مقایسه نتایج به دست آمده از میان 500 نسل به وسیله الگوریتم ژنتیک به کار برده شده و الگوریتم‌ها ژنتیک موجود در منابع ذکر شده در جدول زیر نشان داده شده است:

جدول ۱

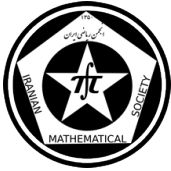
نتایج به دست آمده از الگوریتم‌های قبلی			نتایج به دست آمده از الگوریتم ارائه شده			پارامترها			
f	F	(x, y)	f	F	(x, y)	p_m	p_c	M	
-۱۷	۴۹	(۱۶, ۱۱)	-۱۶/۹۵۷	۴۸/۸۷۵	(۱۵/۹۵۹, ۱۰/۹۷۲)	۰/۱۵	۰/۷	۵۰	۱
-۳/۲	۲۹/۲	(۰, ۰/۹, ۰, ۰/۶, ۰/۴)	-۳/۱۸۶	۲۹/۱۷۲	(۰, ۰/۸۹۹, ۰, ۰/۶, ۰/۳۹۴)	۰/۲	۰/۶	۱۰۰	۲
-۱/۸	۱۸/۴	(۰/۲, ۰/۸, ۰, ۰/۲, ۰/۸)	-۱/۷۹۷	۱۸/۵۴۴	(۰/۵۳۳, ۰/۸, ۰, ۰/۱۹۷, ۰/۸)	۰/۳	۰/۶	۱۰۰	۳

توجه *: M میزان جمعیت، P_c احتمال پیوند، P_m احتمال جهش، F و f به ترتیب مقادیر توابع هدف تراز بالا و تراز پائین مسأله برنامه ریزی می باشند.

از نتایج عددی به دست آمده توسط الگوریتم ژنتیک ارائه شده و الگوریتم ژنتیک موجود در منابع ذکر شده چنین استنباط می شود که روش ارائه شده بسیار کاراتر از روش‌های قبلی است و از طرفی تجربه نیز نشان می دهد که میزان جمعیت و سرعت جهش، بر کارایی و سرعت همگرایی الگوریتم تأثیر دارد، اما عمل پیوند تأثیر کمتری بر این دو پارامتر دارد، لذا هر چه اندازه جمعیت بزرگتر شود، برای آن که سرعت همگرایی افزایش یابد باید از سرعت جهش بیشتری استفاده کنیم.

۱۰ نتیجه گیری

این مقاله، روشی از الگوریتم ژنتیک را برای حل برنامه ریزی خطی دو ترازه‌ای که جواب بهینه مسأله تراز پائین وابسته با مسأله تراز بالا است را پیشنهاد می کند، همچنین نتایج عددی نشان در جدول ۱ نیز نشان می دهد که این روش در مقایسه با روش‌های قدیمی دارای خصوصیات ریز است:



۱. روش مذکور نیاز خاصی به همه متغیرهای تابع نداشته و بحث مشکل قیود و به دست آوردن جواب بهینه در همه الگوریتم‌ها با وجود تعریف مشتق‌پذیری توابع آنها را بر طرف می‌سازد.
۲. روش الگوریتم ژنتیک ارائه شده از به کار بردن روش تابعه جریمه قیود دوری نموده و با تغییر تصادفی نسل آغازین صادق در قیود برای بهبود توانائی الگوریتم تلاش می‌کند.

سپاس‌گزاری

این مقاله برگرفته از طرح پژوهشی به‌عنوان «بهینه‌سازی سطوح تصمیم‌گیری» در دانشکده فنی و مهندسی دانشگاه آزاد واحد ابهر به‌عنوان یک مدل برنامه‌ریزی خطی دو ترازه توسط الگوریتم ژنتیک می‌باشد.

مراجع

- [۱] سید رضا حجازی طاقانکی، روشی برای حل برنامه‌ریزی چند سطحه، دانشگاه تربیت مدرس، رساله دکتری (۱۳۷۹).
- [۲] نرگس مولایی‌نژاد، ارائه مدلی تحت عنوان *GDEA* و کاربرد آن در بهینه‌سازی چند هدفی با استفاده از الگوریتم *GA*، دانشگاه آزاد اسلامی، واحد زاهدان (۱۳۸۳).
- [3] Jenkins, W.M. (1991), *Toward structural optimization via the genetic algorithm (Technical note)*, Computers & Structures, 40 (5).
- [4] Y. H. Liu and T. H. Spencer, *Solving a bi-level linear program when the inner decision maker controls few variables*, European Journal of Operation Research, 81 (2003), 644-651.
- [5] U. P. Wen and S. T. Hsu, *A note on a linear bi-level programming algorithm based on bi criteria programming*, Computer & Operation Research, 16 (2010), 79-83.
- [6] J.B Cruz, *Leader-follow strategies for multi-level systems*, IEEE, Iran actions on Automatic control 23(2), 244-255, (1978).
- [7] W. Candler and R. Townsly, *A Linear two-level programming problem*, Computers & Operations research 9 (1999), 59-76.

پست الکترونیکی: n_salahi57@yahoo.com



یک مدل جدید برای مساله مکان‌یابی پایانه اتوبوس‌رانی و یک الگوریتم جستجوی محلی برای حل آن

رضا قنبری

دانشگاه فردوسی مشهد

سحر راهدار*

دانشگاه فردوسی مشهد

چکیده

طراحی شبکه اتوبوس، یک مساله مهم در حمل‌ونقل عمومی است. هدف در این مساله، تعیین مکان پایانه‌های مورد نیاز و تخصیص ایستگاه‌های متقاضی به آن‌ها است. در این پژوهش، برای هر پایانه سه همسایگی تعریف شده و متناظر با هر همسایگی، یک میزان سرویس‌دهی پایانه به ایستگاه‌ها در نظر گرفته شده است، که این مدل به نوعی تصحیح مدل ارائه شده توسط قنبری و مهدوی امیری است. سپس برای حل آن، از الگوریتم ابتکاری جستجوی محلی استفاده شده است. برای کاهش زمان محاسباتی الگوریتم جستجوی محلی، یک فرمول برای محاسبه تغییرات تابع هدف ارائه شده است. سپس با آزمون الگوریتم روی مسائل بزرگ که به صورت تصادفی ساخته شده‌اند، کارایی آن نشان داده شده است.

واژه‌های کلیدی: تابع سرویس، الگوریتم ابتکاری، مساله مکان‌یابی پایانه اتوبوس‌رانی.

Mathematics Subject Classification [2010]: 90C10, 90C27

۱ مقدمه

تا آن‌جا که می‌دانیم مساله مکان‌یابی پایانه اتوبوس‌رانی ($BTLP$)، نخستین بار توسط آشتیانی و حجازی [۱] مطرح گردید. سپس قنبری و مهدوی امیری [۳] و بابایی، قنبری و مهدوی امیری [۲] آن را روی حالت‌های مختلف گسترش دادند. قنبری و مهدوی امیری [۳]، $BTLP$ را به صورت زیر تعریف می‌کنند: یک شبکه با n گره به عنوان ایستگاه اتوبوس (نقاط تقاضا) با تعدادی مشخص مسافر و m گره به عنوان مراکز کاندید برای پایانه اتوبوس (مراکز سرویس) در نظر گرفته می‌شود. هدف، انتخاب تعدادی مشخص پایانه از میان m مرکز کاندید است به طوری که تابع سرویس ماکزیمم شود. واضح است که $BTLP$ یک حالت خاص از مساله مکان‌یابی تسهیلات است. برای حل $BTLP$ الگوریتم‌های فراابتکاری ارائه شده است [۱، ۳]. در [۲]، تعداد مسافران هر ایستگاه یک عدد فازی در نظر گرفته شده است و سپس برای حل آن یک الگوریتم فراابتکاری ارائه شده است. قنبری و مهدوی امیری در [۳]، برای هر پایانه یک همسایگی تعریف کرده‌اند به نحوی که در صورت تاسیس، به تمام ایستگاه‌های موجود در همسایگی خود سرویس‌دهی کند و میزان سرویس‌دهی یک تابع کاهشی بر حسب فاصله ایستگاه از پایانه مورد نظر در نظر گرفته شده است. در واقع، در مدل ارائه شده توسط قنبری و مهدوی امیری میزان سرویس‌دهی تحت تاثیر فاصله است، هر چند تفاوت فاصله ایستگاه‌ها از پایانه ناچیز باشد. قابل توجه است که ما در این پژوهش، با بررسی‌های انجام شده به این نتیجه رسیده‌ایم که اگر اختلاف فاصله ایستگاه‌ها از پایانه ناچیز باشد، آن‌گاه میزان رضایت ایستگاه‌ها از پایانه یکسان است. به این معنی که اگر فاصله ایستگاه‌ها از پایانه از یک مقدار ثابتی کمتر باشد، میزان سرویس‌دهی پایانه به ایستگاه‌ها با هم برابر است. پس، برای هر پایانه یک همسایگی تعریف می‌کنیم به طوری که

* سخنران



میزان سرویس‌دهی پایانه به ایستگاه‌های موجود در همسایگی خود عددی ثابت فرض می‌شود. به عبارت دیگر، ثابت گرفتن این میزان سرویس‌دهی به این معنی است که اگر فاصله یک ایستگاه از تعدادی پایانه، از عدد ثابتی کمتر باشد تفاوتی در این که ایستگاه از کدام پایانه سرویس دریافت کند وجود نخواهد داشت. با توجه به این مورد، بر خلاف مدل ارائه شده توسط قنبری و مهدوی امیری [۳]، برای هر پایانه سه نوع همسایگی تعریف می‌شود.

۲ مدل پیشنهادی مساله

در نظر بگیرید $I = \{1, \dots, m\}$ مجموعه مراکز سرویس‌دهنده و $J = \{1, \dots, n\}$ مجموعه گره‌های تقاضا باشند و فرض کنید d_j تعداد مسافران هر گره (پتانسیل گره) $j \in J$ مشخص و c_{ij} فاصله گره $i \in I$ از $j \in J$ باشد. هدف انتخاب p پایانه است به طوری که تابع سرویس که در تعریف ۳.۲ بیان شده است ماکزیمم شود.

تعریف ۱.۰۲. برای هر $i \in I$ سه نوع همسایگی تعریف می‌شود:

$$J_{1i}^* = \{j \in J; c_{ij} < r_1\}, J_{2i}^* = \{j \in J; r_1 \leq c_{ij} < r_2\}, J_{3i}^* = \{j \in J; c_{ij} \geq r_2\},$$

که در آن $r_1, r_2 \in \mathbb{R}^+$ ثابت هستند.

تعریف ۲.۰۲. برای هر $j \in J$ تعریف می‌شود:

$$I_{1j}^* = \{i \in I; j \in J_{1i}^*\}, I_{2j}^* = \{i \in I; j \in J_{2i}^*\}, I_{3j}^* = \{i \in I; j \in J_{3i}^*\}.$$

برای ایستگاه‌هایی که در همسایگی نوع ۱ (J_{1i}^*) هستند میزان سرویس‌دهی، عدد ثابت C_1 فرض می‌شود. همسایگی نوع ۲ (J_{2i}^*) نیز مانند همسایگی نوع ۱ است. با این تفاوت که چون ایستگاه‌ها در فاصله دورتر از ایستگاه‌های همسایگی نوع ۱ هستند، میزان سرویس‌دهی پایانه به ایستگاه‌ها عدد ثابت C_2 فرض می‌شود. در همسایگی نوع ۳ (J_{3i}^*)، فرض شده است که اگر فاصله ایستگاه‌ها تا پایانه از مقدار ثابت (r_2) بیشتر باشد، میزان سرویس‌دهی یک تابع کاهشی برحسب فاصله ایستگاه از پایانه است. به عبارت دیگر، اگر فاصله از یک مقدار ثابت (r_2) بیشتر باشد میزان سرویس‌دهی تحت تاثیر فاصله است.

تعریف ۳.۰۲. اگر f_{ij} میزان سرویس‌دهی پایانه i به ایستگاه j و d_j پتانسیل گره j باشد، برای $S \subset I$ ، تابع سرویس به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$F(S) = \sum_{j=1}^n d_j \times (\max_{i \in S} f_{ij}).$$

ملاحظه ۴.۰۲. با توجه به توضیحات بیان شده، f_{ij} تنها یکی از سه مقدار C_1 ، C_2 و $\frac{1}{c_{ij}}$ را به خود اختصاص می‌دهد.

برای بیان ریاضی $BTLP$ متغیرهای دودویی به صورت زیر تعریف می‌گردد:

x_{ij} متغیر دودویی برابر با ۱ است اگر گره j از پایانه i سرویس بگیرد و در غیر این صورت، صفر است. y_i متغیر دودویی برابر با ۱ است اگر مرکز کاندید i به عنوان پایانه انتخاب شود و در غیر این صورت، صفر است.



تابع هدف و محدودیت‌های مدل پیشنهادی $BTLP$ به صورت زیر در چارچوب یک مساله ۰-۱ تعریف می‌شوند:

$$\begin{aligned} \max \sum_{i \in I} & \left(\sum_{j \in J_i^*} C_1 d_j x_{ij} + \sum_{j \in J_i^*} C_2 d_j x_{ij} + \sum_{j \in J_i^*} \frac{1}{c_{ij}} d_j x_{ij} \right) \\ \text{s.t.} & \\ \sum_{j \in J_i^*} x_{ij} + \sum_{j \in J_i^*} x_{ij} + \sum_{j \in J_i^*} x_{ij} & \leq |J| y_i \quad \forall i \in I \quad (1) \\ \sum_{i \in I_j^*} x_{ij} + \sum_{i \in I_j^*} x_{ij} + \sum_{i \in I_j^*} x_{ij} & = 1 \quad \forall j \in J \quad (2) \\ \sum_{i=1}^m y_i & = p \quad (3) \\ x_{ij} \in \{0, 1\}, \quad y_i \in \{0, 1\} & \quad \forall i \in I, j \in J \quad (4) \end{aligned}$$

تابع هدف فوق میزان سرویس‌دهی گره‌های کاندید به تمام گره‌ها را مشخص می‌کند. محدودیت (۱) نشان می‌دهد تنها در صورتی که مرکز سرویس i به عنوان پایانه انتخاب شود به گره‌های اطراف خود می‌تواند سرویس دهد. محدودیت (۲) نشان می‌دهد که هر گره j تنها از یک پایانه اتوبوس باید سرویس بگیرد. این قید در مدل ارائه شده توسط قنبری و مهدوی امیری وجود ندارد زیرا در مدل آن‌ها ممکن است نقاط خارج از شعاع سرویس باشد و از هیچ مرکزی سرویس نگیرند. محدودیت (۳) تعداد پایانه‌های مورد نیاز را تضمین می‌کند و محدودیت‌های (۴) و (۵) صفر یا یک بودن متغیرهای x_{ij} و y_i را نشان می‌دهد.

۳ الگوریتم جستجوی محلی

الگوریتم جستجوی محلی برای مسائل مکان‌یابی تسهیلات اولین بار توسط کوهن و همبرگر معرفی شده است [۵]. برای حل مساله مکان‌یابی تسهیلات، الگوریتم‌های جستجوی محلی بسیاری گزارش شده است. لذا در این مقاله به دلیل برتری‌های ذکر شده توسط گواش [۴]، حالت $2 - swap$ انتخاب شده است که در این حالت، همسایگی به صورت زیر بیان می‌شود.

تعریف ۱.۳. یک جواب شدنی $S \subset I$ که $|S| = p$ را در نظر بگیرید. مجموعه همسایگی‌های S به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$N(S) = \{T | T \subset I, |T| = p, |T - S| = 1\}.$$

الگوریتمی که بر پایه همسایگی در تعریف ۱.۳ کار کند، الگوریتم $2 - swap$ نام دارد. قنبری و مهدوی امیری [۳] برای هر پایانه یک ویژگی به نام پتانسیل تابع هدف (POF) در نظر گرفتند. جواب اولیه الگوریتم در اینجا بر مبنای POF به دست می‌آید، بدین مفهوم که در ابتدا p پایانه که POF بیشتری دارا می‌باشند تاسیس می‌شوند. برای پیاده‌سازی الگوریتم جستجوی محلی دو استراتژی اولین بهبود و بهترین بهبود وجود دارد. نتایج عددی نشان می‌دهد که استراتژی بهترین بهبود الزاما نسبت به اولین بهبود، جواب بهتری تولید نمی‌کند، اما زمان محاسباتی بیشتری نیاز دارد [۳]. لذا در این پژوهش، از استراتژی اولین بهبود استفاده می‌شود. قابل توجه هست که به دلیل مشکل بودن محاسبه تابع هدف و زمان بر بودن محاسبات، برای محاسبه تغییرات تابع هدف قضیه ۳.۳ ارائه شده است.



تعریف ۲.۳. برای هر $i \in I$ پتانسیل تابع هدف به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$POF(i) = \sum_{j \in J_{i_1}^*} d_j C_1 + \sum_{j \in J_{i_2}^*} d_j C_2 + \sum_{j \in J_{i_3}^*} d_j \frac{1}{c_{ij}}$$

قضیه ۳.۳. فرض می‌کنیم $S, T \subset I$ ، $|S| = |T| = p$ ، $|S - T| = 1$ ، وجود دارد $s \in S$ و $t \in T$ به طوری که $t \notin S$ و $s \notin T$ و t و s یکتا هستند. برای $j \in J$ ، $f_{i \setminus j} = \max\{f_{ij}; i \in S \cup \{t\}\}$ را تعریف می‌کنیم. وقتی $s \in S$ بسته و $t \in T$ باز می‌شوند گره‌ها به ۳ گروه به صورت زیر تقسیم می‌شوند: $N_s = \{j \in J; f_{i \setminus j} = f_{sj}\}$ ، $N_t = \{j \in J; f_{i \setminus j} = f_{tj}\}$ و $K = \{j \in J; f_{i \setminus j} = \max_{i \in T \cap S} f_{ij}\}$ در این صورت مقدار تغییر تابع هدف برابر است با:

$$\Delta f = F(T) - F(S) = \sum_{j \in N_t} d_j (f_{tj} - \max_{i \in S} f_{ij}) + \sum_{j \in N_s} d_j (\max_{i \in S \setminus \{s\}} f_{ij} - f_{sj})$$

۴ نتایج عددی

در این پژوهش، C_1 و C_2 به ترتیب اولین و دومین، بزرگترین $\frac{1}{c_{ij}}$ در نظر گرفته شده است و در تمام پیاده‌سازی‌ها $r_1 = 0.5$ و $r_2 = 2$ فرض می‌شود.

برای آزمون کارایی الگوریتم جستجوی محلی، نتایج حاصل از حل مدل $BTLP$ ، توسط $CPLEX$ و الگوریتم جستجوی محلی روی چند مساله تصادفی با ابعاد بزرگ در جدول زیر خلاصه شده است.

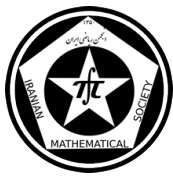
(n)	(m)	(p)	زمان اجرا الگوریتم (ثانیه)	زمان اجرا $CPLEX$ (ثانیه)	خطای نسبی $(\frac{F(S) - F(S^*)}{F(S^*)})$
۲۰۰	۵۰	۵	۱/۷۵	۲۴۰	۰/۰۰۰۱۹
۵۰۰	۲۰۰	۲۰	۲۳/۹۲	۶۲۰	۰/۰۲۵
۱۰۰۰	۲۰۰	۲۰	۵/۲۹	۶۵۰	۰/۰۰۵۲

قابل توجه است که به طور میانگین زمان اجرای $CPLEX$ ، ۹۵ برابر زمان اجرای الگوریتم جستجوی محلی و میانگین خطای نسبی جواب به دست آمده توسط $CPLEX$ و الگوریتم جستجوی محلی ۰/۰۰۳۵ است.

مراجع

- [۱] آشتیانی، هدایت ذکایی و حجازی، بهرنگ، کاربرد روش گرم و سرد کردن شبیه سازی شده در حل مسئله مکان‌یابی پایانه‌های شبکه اتوبوس‌رانی، مجله علمی پژوهشی مواد پیشرفته در مهندسی (استقلال)، اصفهان، ۱۳۸۰.
- [2] S.Babaie-Kafaki, R.Ghanbari, N.Mahdavi-Amiri, *an efficient and practically robust hybrid metaheuristic algorithm for solving fuzzy bus terminal location problems*, Asia-Pacific Journal of Operational Research, 29 (2012), pp. 1-25.
- [3] R.Ghanbari, N.Mahdavi-Amiri, *Solving bus terminal location problems using evolutionary algorithms*, Applied Soft Computing, 11 (2011), pp. 991-999.
- [4] D. Ghosh, *Neighborhood search heuristics for uncapacitated facility location problem*, European Journal of Operational Research, 150 (2003), pp. 150-162.
- [5] A.A. Kuhen, M.J. Hamburger, *A heuristic program for locating warehouses*, Management Science, 9 (1963), pp. 643-666.

آمار و احتمال



تحلیل بیزی مدل رگرسیون چندکی تعمیم یافته

افشین فلاح*

دانشگاه بین‌المللی امام خمینی (ره)

منیر میرزایی

دانشگاه بین‌المللی امام خمینی (ره)

چکیده

در این مقاله برای تحلیل رگرسیون چندکی تعمیم یافته یک مدل بیزی پیشنهاد شده است. در این نوع تحلیل رگرسیونی به جای میانگین، مجموعه‌ای از چندک‌ها برای تبیین توزیع متغیر پاسخ به‌کار گرفته می‌شوند. کارایی مدل پیشنهادی در قالب یک مطالعه شبیه‌سازی مورد ارزیابی قرار گرفته است.

واژه‌های کلیدی: چندک، رگرسیون چندکی، بیز، براوردگرهایی از نوع ماکسیمم درست‌نمایی

Mathematics Subject Classification [2010]: 62F15, 62G08

۱ مقدمه

در روش‌های معمول تحلیل رگرسیونی میانگین متغیر پاسخ یا تابعی از آن به‌صورت شرطی بر مجموعه‌ای از متغیرهای تبیینی مدل‌بندی می‌شود. چون میانگین یکی از معیارهای تمرکز است، به تنهایی نمی‌تواند توزیع متغیر پاسخ را در فرایند مدل‌سازی تبیین نماید. چندک‌ها معیارهایی هستند که در کنار هم می‌توانند شکل توزیع را به‌صورت جامع‌تری به تصویر بکشند. از طرفی، هنگامی که داده‌های دورافتاده‌ای وجود داشته باشد، علاوه بر میانگین شرطی متغیر پاسخ رفتار مقادیر کرانگین این متغیر نیز از اهمیت برخوردار است. یک راه برای کاهش اثر این‌گونه داده‌ها استفاده از معیار قدرمطلق خطا است [۴]. [۲] و [۵] تحلیل رگرسیون میانه را که در آن براورد پارامترهای مدل رگرسیونی با هدف مینیمم ساختن قدرمطلق خطا صورت می‌پذیرد، برای مدل‌سازی داده‌هایی که دارای نقاط دور افتاده هستند، پیشنهاد نمودند. رگرسیون چندکی را می‌توان تعمیمی از رگرسیون میانه دانست که در آن به جای مدل‌بندی میانگین متغیر پاسخ، چندک‌های این متغیر به‌صورت شرطی بر مجموعه‌ای از متغیرهای تبیینی مدل‌بندی می‌شوند. چون الگوریتم‌های مورد استفاده برای برازش مدل‌های رگرسیون چندکی لزوماً همگرایی و جواب یکتا را تضمین نمی‌کنند، [۱] ایده‌ی رگرسیون چندکی تعمیم یافته را مطرح ساختند که مبتنی بر براوردگرهایی از نوع ماکسیمم درست‌نمایی هستند و بر اساس یک تابع تاثیر تعریف می‌شوند. در این مقاله، رویکرد بیزی تحلیل رگرسیون چندکی تعمیم یافته مورد توجه قرار گرفته است. برای این منظور، با در نظر گرفتن توزیع‌های پیشین مناسب برای پارامترها، توزیع پسین پارامترهای مدل محاسبه شده است. نشان داده شده است که به‌دلیل شکل پیچیده تابع درست‌نمایی مبتنی بر مدل رگرسیون چندکی تعمیم یافته، توزیع پسین فاقد فرم بسته بوده و شکل پیچیده‌ای دارد. از این‌رو توزیع‌های پسین شرطی کامل پارامترها محاسبه و الگوریتم گیبز مناسب برای نمونه‌گیری از توزیع پسین توسعه داده شده است. هم‌چنین کارایی مدل بیز پیشنهادی در براورد پارامترهای مدل در مقایسه با مدل فراوانی‌گرایانه بر اساس یک مطالعه شبیه‌سازی، مورد ارزیابی قرار گرفته است. در بخش ۲ تحلیل رگرسیون چندکی تعمیم یافته از دیدگاه بیزی مورد بحث قرار گرفته و نحوه تعیین توزیع پیشین، محاسبه توزیع پسین، نمونه‌گیری از توزیع پسین و غیره، شرح داده شده است. در بخش ۳ برای ارزیابی و مقایسه مدل‌های رگرسیون چندکی و رگرسیون چندکی تعمیم یافته در رهیافت فراوانی‌گرایانه و بیزی مطالعه‌ای شبیه‌سازی صورت پذیرفته است.

* سخنران



۲ رویکرد بیزی مدل رگرسیون چندکی تعمیم یافته

هنگامی که در مجموعه داده‌ها یک یا چند داده پرت وجود داشته باشد، روش‌های رگرسیونی مبتنی بر مدل‌بندی میانگین پاسخ کارایی لازم را نخواهند داشت. یک راه برای کاهش اثر این‌گونه داده‌ها استفاده از رگرسیون میانه است. برآورد بردار پارامترهای مدل رگرسیون چندکی $\beta'_q = (\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_p)$ ، با استفاده از روش کمترین قدرمطلق خطا از طریق کمینه ساختن تابع زیان قدرمطلق خطای وزنی به صورت

$$\sum_{i=1}^n |y_i - \mathbf{x}'_i \beta_q| \{ (1-q)I(y_i - \mathbf{x}'_i \beta_q \leq 0) + qI(y_i - \mathbf{x}'_i \beta_q > 0) \},$$

نسبت به β صورت می‌پذیرد. چون الگوریتم‌های مورد استفاده برای برازش مدل‌های رگرسیون چندکی لزوماً همگرایی و جواب یکتا را تضمین نمی‌کنند، [۱] ایده‌ی رگرسیون چندکی تعمیم یافته را مطرح ساختند. این نوع تحلیل رگرسیونی مبتنی بر برآوردگرهایی از نوع ماکسیمم درست‌نمایی است و بر پایه یک تابع تاثیر تعریف می‌شود. در اینجا از ذکر جزئیات بیشتر درباره این نوع برآوردگرها خودداری کرده و خواننده را به [۴] ارجاع می‌دهیم.

رگرسیون چندکی تعمیم یافته، تعمیمی از رگرسیون چندکی است که بر پایه یک تابع تاثیر تعریف می‌شود. یک مدل رگرسیون چندکی شرطی تعمیم یافته در حالت کلی به صورت $MQ_q = \mathbf{x}'_i \beta_\psi(q)$ می‌باشد. فرض کنید یک مدل رگرسیون چندکی تعمیم یافته با تابع زیان

$$\rho_q(u) = 2\rho\left(\frac{u}{s}\right)(qI(u > 0) + (1-q)I(u \leq 0))$$

مدنظر باشد، که در آن

$$\rho(u) = \begin{cases} \frac{u^2}{4} & |u| \leq c \\ c|u| - \frac{c^2}{4} & |u| > c. \end{cases}$$

در این صورت، اگر توزیع جمله‌ی خطا لاپلاس نامتقارن به صورت

$$f(\varepsilon) = K(q) \exp(-\rho_q(y_i - \mathbf{x}'_i \beta)), \quad (1)$$

در نظر گرفته شود، می‌توان نشان داد که ثابت چگالی‌ساز در رابطه (۱) به صورت

$$K^{-1}(q) = \frac{s}{2\sqrt{q}}(\gamma\left(\frac{1}{2}, 2c\sqrt{q}\right) - \gamma\left(\frac{1}{2}, c\sqrt{q}\right)) + \frac{s}{2\sqrt{1-q}}(\gamma\left(\frac{1}{2}, 2c\sqrt{1-q}\right) - \gamma\left(\frac{1}{2}, c\sqrt{1-q}\right)) \\ + \frac{s}{2cq} \exp(-2qc^2) + \frac{s}{2c(1-q)} \exp(-2(1-q)c^2),$$

خواهد بود، که در آن $c, s = \frac{1}{\sigma \sqrt{2q(1-q)}} \text{median}\{|y_i - \mathbf{x}'_i \beta|\}$ کمیته ثابت و مثبت و $\gamma\left(\frac{1}{2}, a\right) = \int_0^a t^{-\frac{1}{2}} e^{-t} dt$ تابع گامای ناقص است. بر این اساس، تابع درست‌نمایی متناظر با مدل رگرسیون چندکی تعمیم یافته به شکل زیر است:

$$f_{y|(x_1, x_2, \dots, x_n), \beta, q} = \prod_{i=1}^n \{K(q) \exp(-\rho_q(y_i - \mathbf{x}'_i \beta))\} = K^n(q) \exp\left(-\sum_{i=1}^n \rho_q(y_i - \mathbf{x}'_i \beta)\right). \quad (2)$$

لازمه تحلیل بیزی مدل رگرسیون چندکی تعمیم یافته آن است که پارامترهای این مدل متغیرهایی تصادفی تلقی و برای آن‌ها توزیع‌های پیشین مناسب در نظر گرفته شود. با توجه به این‌که دامنه تغییرات پارامتر q و بردار پارامترهای β به ترتیب $(0, 1)$ و \mathbb{R}^p هستند، در مقاله حاضر، برای این پارامترها به ترتیب توزیع‌های پیشین بتا و نرمال چندمتغیره در نظر گرفته شده است. بر این اساس، توزیع‌های پیشین پارامترهای مدل به صورت

$$\beta | \sigma^2 \sim N_p(\beta_0, \sigma^2 I_p), \quad \beta_0 \in \mathbb{R}^p, \sigma^2 \in \mathbb{R}^t,$$



$$\begin{aligned} 1/\sigma^2 &\sim \text{Gamma}(a_0, b_0), \quad a_0, b_0 \in \mathbb{R}, \\ q &\sim \text{beta}(\eta_0, \xi_0), \quad \eta_0, \xi_0 \in \mathbb{R}^t, \end{aligned} \quad (3)$$

در نظر گرفته شده است، که در آن‌ها $\beta_0, a_0, b_0, \eta_0$ و ξ_0 ابر پارامترهای توزیع پیشین هستند و توسط تحلیل‌گر تعیین یا برآورد می‌شوند. اکنون با در نظر گرفتن تابع درستنمایی (۲) و توزیع‌های پیشین رابطه‌ی (۳) توزیع پسین را می‌توان به صورت

$$\pi(\beta, \sigma^2, q | D) \propto K^n(q) \exp\left(-\sum_{i=1}^n \rho_q(y_i - \mathbf{x}'_i \beta)\right) \times \Phi_p(\beta; \mu, \sigma^2 I) \times dIG(\sigma^2; a_0, b_0) \times dbeta(q; \eta_0, \xi_0), \quad (4)$$

بازنویسی نمود، که در آن $dIGamma(\sigma^2; a_0, b_0)$ و $dbeta(q; \eta_0, \xi_0)$ به ترتیب نشان دهنده توابع چگالی توزیع‌های گامای وارون و بتا هستند. ملاحظه می‌شود که به دلیل شکل پیچیده تابع درستنمایی مبتنی بر مدل رگرسیون چندکی تعمیم یافته، توزیع پسین فاقد فرم بسته بوده و شکل پیچیده‌ای دارد. از این رو، در ادامه از الگوریتم‌های مونت کارلویی زنجیر مارکف برای نمونه‌گیری از توزیع پسین و سپس استنباط‌های پسینی درباره پارامترها استفاده می‌شود. لازمه استفاده از الگوریتم گیبز شناخت توزیع‌های پسین شرطی کامل پارامترها است. این توزیع‌ها با اندکی محاسبات به صورت

$$\begin{aligned} \pi(\beta | \sigma^2, q, D) &\propto \exp\left(-\sum \rho_q(y_i - \mathbf{x}'_i \beta)\right) \Phi_p(\beta, \mu, \sigma^2 I), \\ \pi(\sigma^2 | \beta, q, D) &\propto \Phi_p(\beta, \mu, \sigma^2 I) dIG(\sigma^2; a_0, b_0), \\ \pi(q | \beta \sigma^2, D) &\propto K^n(q) \exp\left(-\sum \rho_q(y_i - \mathbf{x}'_i \beta)\right) dbeta(q; \eta_0, \xi_0), \end{aligned}$$

به دست می‌آیند. اکنون با در دست داشتن توزیع‌های پسین شرطی کامل می‌توان از توزیع پسین توام پارامترها به کمک الگوریتم گیبز نمونه‌گیری نمود. همان‌طور که مشاهده می‌شود توزیع پسین شرطی کامل هیچ یک از پارامترهای β, σ^2 و q صورت بسته و شناخته شده‌ای ندارد، بنابراین از الگوریتم متروپولیس-هستینگز برای نمونه‌گیری از این توزیع‌های پسین شرطی کامل استفاده می‌شود. بر این اساس، برای نمونه‌گیری از توزیع پسین (۴) به تلفیقی از الگوریتم‌های گیبز و متروپولیس-هاستینگز نیاز است.

۳ مطالعه شبیه‌سازی

در این بخش مدل بیزی پیشنهادی در چارچوب یک مطالعه‌ی شبیه‌سازی مورد ارزیابی قرار گرفته و کارایی آن با مدل‌های فراوانی‌گرایانه رگرسیون چندکی و رگرسیون چندکی تعمیم یافته مقایسه می‌شود. برای این منظور یک مدل رگرسیون چندکی تعمیم یافته به شکل

$$MQ = \mathbf{x}'\beta = \beta_{0\psi} + \beta_{1\psi}(q)x_1 + \beta_{2\psi}(q)x_2$$

در نظر گرفته شده است مقادیر متغیرهای تبیینی از توزیع نرمال شبیه‌سازی شده‌اند با فرض $\beta_0 = -1$ و $\beta_1 = 2/5$ و $\beta_2 = 4$ بردار مشاهدات پاسخ از توزیع نرمال متناظر با آن تولید شده است. به منظور لحاظ نمودن عدم قطعیت حاکم بر فرایند تولید نمونه‌های تصادفی، فرایند تولید نمونه‌های تصادفی و برآورد پارامترها 1000 بار تکرار و بر اساس آن‌ها مقادیر ریشه توان‌های دوم خطای برآوردگرهای حاصل از مدل‌های رقیب به ازای مقادیر مختلف q و اندازه‌های نمونه‌ای متفاوت محاسبه و در جدول ۱ ارائه شده است. نتایج نشان می‌دهد که مدل رگرسیون چندکی تعمیم یافته بیزی نسبت به مدل‌های رقیب از $RMSE$ کمتری برخوردار است.



جدول ۱: مقادیر ریشه میانگین توان دوم خطا ($RMSE$) براوردگرهای حاصل از روش‌های رگرسیون چندکی، چندکی تعمیم یافته و چندکی تعمیم یافته بیزی برای اندازه نمونه 1° ، 25° و 50° به ازای چندک $q = 0.5$ در عدم حضور داده‌های دور افتاده.

مدل رگرسیونی		چندکی	پارامتر	اندازه نمونه
چندکی تعمیم یافته	فراوانی‌گرایانه			
0.2036	1.0646	1.0719	β_0	1°
0.0898	2.5178	2.5323	β_1	
0.1289	4.0361	4.0364	β_2	
0.2927	1.7439	1.7063	β_0	25°
0.2900	2.4959	2.4911	β_1	
0.3221	3.9986	3.9961	β_2	
0.9487	1.7353	1.6895	β_0	50°
0.2813	2.5004	2.5018	β_1	
0.6443	3.9942	3.9915	β_2	

۴ بحث و نتیجه‌گیری

میانگین به‌عنوان یکی از معیارهای تمرکز به تنهایی نمی‌تواند توزیع جامعه را تبیین نماید. از این‌رو، روش‌های مرسوم تحلیل رگرسیونی که میانگین متغیر پاسخ را مدل‌بندی می‌کنند، در بسیاری از کاربردها دارای کارایی لازم نیستند. تحلیل رگرسیونی چندکی تعمیم‌یافته، که در آن مجموعه‌ای از چندک‌ها برای تبیین توزیع متغیر پاسخ مورد استفاده قرار می‌گیرند، به مدل به مراتب کاراتری منجر می‌شود.

مراجع

- [1] Breckling, J and Chambers, R, *M-Quantiles*, Biometrika, (1988), 75 pp. 761-771.
- [2] Hogg, R. V, *Estimates of Percentile Regression Lines Using Salary Data*, Journal of the American Statistical Association, (1975), pp. 515-533.
- [3] Hoff, P. D, *A First Course in Bayesian Statistical Models*, Springer Texts in Statistics, NewYork, (2009).
- [4] Huber, P. J, *Robust Statistics*, Wiley, NewYork, (2009).
- [5] Koenker, R., and Bassett, G, *Regression Quantiles*, Econometrica, (1978), pp. 33-50.
- [6] Koenker, R., and Dorey, V, *Computing Regression Quantiles*, Journal of Applied Statistical Sciences 36, 383-393.

پست الکترونیکی: a.fallah@SCI.ikiu.ac.ir
پست الکترونیکی: mirzai.monir@yahoo.com

سایر زمینہا



بررسی نمونه‌هایی از جمع‌های روی جزءکسری

زهرا حسنلو*

دانشگاه زنجان

چکیده

در این مقاله به نمونه‌هایی از جمع‌های روی جزءکسری روی اعداد حقیقی، اعداد صحیح و همچنین اعداد اول می‌پردازیم. ابتدا روش هذلولی دیریشله را بیان و شرح می‌دهیم و به کمک این روش قضایا و نتایج مربوط به جمع روی جزءکسری را اثبات می‌کنیم.

واژه‌های کلیدی: جمع جزءکسری، ضرب پیچشی، روش هذلولی دیریشله، تابع زتای ریمان

Mathematics Subject Classification [2010]: 11J70, 11A41, 11P82

۱ مقدمه

برای هر $x \in \mathbb{N}$ جزءکسری x به صورت زیر تعریف می‌شود

$$\{x\} = x - [x].$$

تعریف ۱.۱ (ضرب پیچشی). اگر f و g دو تابع حسابی باشند، آنگاه ضرب پیچشی (یا ضرب دیریشله) f و g را با نماد $f * g$ نشان داده و به صورت $(f * g)(n) = \sum_{d|n} f(d)g(\frac{n}{d})$ به ازای هر $n \in \mathbb{N}$ تعریف می‌شود.

در این مقاله به نمونه‌هایی از جمع‌های روی جزءکسری می‌پردازیم و با استفاده از مقدماتی که به آنها اشاره خواهیم کرد، احکام زیر را بیان و برخی از آنها را اثبات خواهیم کرد.

قضیه ۲.۱. برای عدد حقیقی $x \geq 1$ و اعداد صحیح $a, b \neq 0$ داریم

$$\sum_{\substack{d \leq x \\ d \equiv b \pmod{a}}} \left\{ \frac{x}{d} \right\} = \frac{x}{a} (1 - \gamma) + O(\sqrt{x}).$$

که در اینجا γ ثابت اویلر با مقدار تقریبی 0.5772156649 است.

قضیه ۳.۱. برای $x \geq 1$ داریم

$$\sum_{n \leq x} \left\{ \frac{x}{n} \right\} = (1 - \gamma)x + O(\sqrt{x}).$$

* سخنران



قضیه ۴.۱. برای عدد صحیح $a \geq 1$ و عدد حقیقی $x \geq 1$ ، داریم

$$\sum_{k \leq \sqrt[a]{x}} \left\{ \frac{x}{k^a} \right\} = \sqrt[a]{x} (1 - \gamma_{1/a}) + O(x^{1/(a+1)}).$$

قضیه ۵.۱. برای $p \in \mathbb{P}$ داریم

$$\sum_{p \leq x} \left\{ \frac{x}{p} \right\} = \frac{x}{\log x} (1 - \gamma) + o\left(\frac{x}{\log x}\right).$$

برای اثبات قضایای فوق ابتدا مقدمات و لم‌های زیر را بیان می‌کنیم که برای شرح و اثبات لم‌های زیر می‌توان به [۲] و [۳] و همچنین [۴] رجوع کرد.

لم ۶.۱. برای $x \geq 1$ و $s > 0$ و $s \neq 1$ ، داریم

$$\sum_{n \leq x} \frac{1}{n^s} = \frac{x^{1-s}}{(1-s)} + \zeta(s) + O(x^{-s}).$$

لم ۷.۱. برای $x \geq 1$ و $v \geq 0$ داریم:

$$\sum_{n \leq x} \frac{1}{(n+v)} = \log(x+v) + C(v) + O\left(\frac{1}{x}\right),$$

در اینجا $C(v)$ تنها وابسته به v است. (برای $v = 0$ داریم $C(0) = \gamma$)

لم ۸.۱. (روش هذلولی دیریشله) فرض کنید f, g دو تابع حسابی باشد و

$$F(x) = \sum_{n \leq x} f(n), \quad G(x) = \sum_{n \leq x} g(n).$$

در اینصورت برای هر $y \in [1, x]$ داریم

$$\sum_{n \leq x} f * g(n) = \sum_{n \leq x} g(n) F\left(\frac{x}{n}\right) + \sum_{m \leq \frac{x}{y}} f(m) G\left(\frac{x}{m}\right) - F\left(\frac{x}{y}\right) G(y).$$

لم ۹.۱. برای هر دو تابع حسابی f, g و عدد حقیقی $x \geq 1$ داریم

$$\sum_{d \leq x} f(d) \left\{ \frac{x}{d} \right\} = x \sum_{d \leq x} \frac{f(d)}{d} - \sum_{n \leq x} f * 1(n).$$

۲ نتایج اصلی

در این قسمت قضیه‌های ۲.۱ و ۳.۱ را به عنوان نمونه و با کمک روش هذلولی دیریشله اثبات می‌کنیم.



اثبات قضیه ۲.۱. فرض می‌کنیم $0 < b < a$ ، اگر $f(d) = 1$ با استفاده از لم ۹.۱ داریم

$$\sum_{\substack{d \leq x \\ d \equiv b \pmod{a}}} \left\{ \frac{x}{d} \right\} = x \sum_{\substack{d \leq x \\ d \equiv b \pmod{a}}} \frac{1}{d} - \sum_{n \leq x} f * 1(n), \quad (1)$$

با استفاده از لم ۷.۱، قرار می‌دهیم $t_b := \frac{1}{b}$ اگر $b \neq 0$ و $t_0 := 0$ داریم

$$\sum_{\substack{d \leq x \\ d \equiv b \pmod{a}}} \frac{1}{d} = t_b + \frac{1}{a} \sum_{k \leq \frac{x-b}{a}} \frac{1}{k + \frac{b}{a}} = \frac{1}{a} \log \left(\frac{x}{a} \right) + t_b + \frac{C\left(\frac{b}{a}\right)}{a} + O\left(\frac{1}{x}\right), \quad (2)$$

برای بدست آوردن ۱ از لم ۸.۱ استفاده می‌کنیم. بدین ترتیب که در روش هذلولی دیریشله قرار می‌دهیم $y = \sqrt{x}$ ، بنابراین داریم

$$\begin{aligned} \sum_{n \leq x} f * 1(n) &= \sum_{n \leq \sqrt{x}} \sum_{m \leq x/n} f(m) + \sum_{m \leq \sqrt{x}} f(m) \left[\frac{x}{m} \right] - \left(\sum_{n \leq \sqrt{x}} f(n) \right) \left(\sum_{n \leq \sqrt{x}} 1 \right) \\ &= \sum_{n \leq \sqrt{x}} \sum_{\substack{m \leq x/n \\ m \equiv b \pmod{a}}} 1 + \sum_{\substack{m \leq \sqrt{x} \\ m \equiv b \pmod{a}}} \left[\frac{x}{m} \right] - [\sqrt{x}] \sum_{\substack{n \leq \sqrt{x} \\ n \equiv b \pmod{a}}} 1 \\ &= \sum_{n \leq \sqrt{x}} \left(\frac{x}{an} + O(1) \right) + \sum_{\substack{m \leq \sqrt{x} \\ m \equiv b \pmod{a}}} \left(\frac{x}{m} + O(\sqrt{x}) \right) - (\sqrt{x} + O(1)) \left(\frac{\sqrt{x}}{a} + O(1) \right) \\ &= \frac{x}{a} (\log \sqrt{x} + \gamma) + x \left(\frac{1}{a} \log \left(\frac{\sqrt{x}}{a} \right) + t_b + \frac{C\left(\frac{b}{a}\right)}{a} \right) - \frac{x}{a} + O(\sqrt{x}), \quad (3) \end{aligned}$$

با جایگذاری ۲ و ۳ داریم

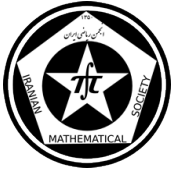
$$\begin{aligned} \sum_{\substack{d \leq x \\ d \equiv b \pmod{a}}} \left\{ \frac{x}{d} \right\} &= x \sum_{\substack{d \leq x \\ d \equiv b \pmod{a}}} \frac{1}{d} - \sum_{n \leq x} f * 1(n) \\ &= x \left(\frac{1}{a} \log \frac{x}{a} + \frac{1}{b} + \frac{C\left(\frac{b}{a}\right)}{a} + O\left(\frac{1}{x}\right) \right) - \left(\frac{x}{a} \log \sqrt{x} + \gamma \right) \\ &= x \left(\left(\frac{1}{a} \log \frac{\sqrt{x}}{a} \right) + \frac{1}{b} + \frac{C\left(\frac{b}{a}\right)}{a} \right) - \frac{x}{a} + O(\sqrt{x}) \\ &= \frac{x}{a} - \frac{x}{a} \gamma + O(\sqrt{x}) \\ &= \frac{x}{a} (1 - \gamma) + O(\sqrt{x}), \end{aligned}$$

□

لذا نتیجه مطلوب حاصل می‌شود.

اثبات قضیه ۳.۱. $d(n)$ را جمع روی مقسوم‌علیه‌های عدد طبیعی n در نظر گرفته و طبق تعریف جزءکسری داریم

$$\sum_{n \leq x} d(n) = \sum_{n \leq x} \left[\frac{x}{n} \right] = x \sum_{n \leq x} \frac{1}{n} - \sum_{n \leq x} \left\{ \frac{x}{n} \right\}, \quad (4)$$



ص: ۴-۴

چهل و ششمین کنفرانس ریاضی ایران

۳-۶ شهریور ۱۳۹۴

دانشگاه یزد

بررسی جمع‌های روی جزءکسری



دانشگاه یزد

سخنرانی

در نتیجه داریم

$$\sum_{n \leq x} d(n) = x \log x + (2\gamma - 1)x + O(\sqrt{x}), \quad (5)$$

برای اثبات این فرمول به مرجع [۳] رجوع شود. در نتیجه طبق لم ۸.۱ داریم

$$\sum_{n \leq x} \left\{ \frac{x}{n} \right\} = x \sum_{n \leq x} \frac{1}{n} - \sum_{n \leq x} d(n),$$

در نتیجه

$$\begin{aligned} \sum_{n \leq x} \left\{ \frac{x}{n} \right\} &= x \left(\log x + \gamma + O\left(\frac{1}{x}\right) - x \log x - (2\gamma - 1)x + O(\sqrt{x}) \right) \\ &= (1 - \gamma)x + O(\sqrt{x}), \end{aligned}$$

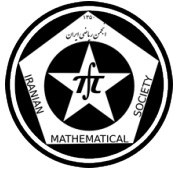
□

بدین ترتیب اثبات تمام می‌شود.

مراجع

- [1] C. de la Vallee Poussin, *Sur les valeurs moyennes de certaines fonction airthmetiques*, Annales de la societe de Bruxlles 22 (1898) 84-90.
- [2] F. Pillichshammer, *Euler's constant and averages of fractional parts*, Amer. Math. Monthly 117 (2010), no. 1, 78—83.
- [3] G. Tenenbaum, *Introduction to analytic and probabilistic number theory*, Translated from the second French edition (1995) by C. B. Thomas. Cambridge Studies in Advanced Mathematics, 46. Cambridge University Press, Cambridge, 1995. xvi+448 pp.
- [4] T. M. Apostol, *Introduction to analytic number theory*, Undergraduate Texts in Mathematics. Springer-Verlag, New York-Heidelberg, 1976. xii+338 pp.

پست الکترونیکی: hasanloo@znu.ac.ir



بررسی نیمه تحلیلی دینامیک جریان سیال در یک لوله‌ی مدور با مکش و دمش و در حضور میدان مغناطیسی

وحیده عبدالمهی، کارشناسی ارشد ریاضی کاربردی*

دانشگاه سیستان و بلوچستان

محمدحسین شفیعی میم، استادیار دانشکده‌ی مهندسی مکانیک

دانشگاه سیستان و بلوچستان

چکیده

در کار حاضر، تأثیر میدان مغناطیسی بر جریان یک سیال در لوله‌ای با مقطع دایره‌ای شکل که مکش و دمش در آن صورت می‌گیرد، مورد بررسی قرار گرفته است. در این بررسی، سیال هادی جریان الکتریسیته در یک میدان مغناطیسی در نظر گرفته شده است و نیروهای وارد بر سیال تحت تأثیر میدان مغناطیسی و معادلات حاکم بر جریان سیال، مورد مطالعه قرار گرفته‌اند. جهت حل این دسته از معادلات، ابتدا معادلات غیرخطی با مشتقات جزئی در مختصات استوانه‌ای، با استفاده از تابع جریان مناسب، به یک دسته معادله‌ی دیفرانسیل معمولی غیرخطی تبدیل شده است. در نهایت این دسته از معادلات به کمک روش عددی تفاضل متناهی حل شده است. نتایج حاصل از این محاسبات نشان می‌دهد که مقدار ضریب مغناطیس در میزان نیروی تنش برشی و افت فشار در سیال، بسیار مؤثر می‌باشد.

واژه‌های کلیدی: میدان مغناطیسی- مکش- دمش- تابع جریان- تفاضل متناهی

۱ مقدمه

مطالعه‌ی یک سیال هادی الکتریسیته تحت تأثیر میدان مغناطیسی، پایه و اساس بسیاری از برنامه‌های کاربردی در زمینه‌های مهندسی و علمی است. به علت کاربردهای گسترده‌ی جریان مگنتوهیدرودینامیک (MHD) و سیال هادی الکتریسیته در صنعت و پزشکی، این شاخه از علم با توجه روز افزونی رو به رو است که به عنوان نمونه می‌توان به کاربردهایی نظیر تولید کننده‌ی برق MHD ، پمپ‌های MHD ، پلاسماها با درجه‌ی حرارت بالا و نظیر این‌ها، اشاره کرد [۱]. موضوع مگنتوهیدرودینامیک، بعد از سال ۱۹۳۰ مطرح شد. هانس آلفوون اولین کسی بود که اصطلاح مگنتوهیدرودینامیک را در سال ۱۹۴۲ معرفی کرد. وی این پدیده را در فیزیک نجوم (اختر فیزیک) به عنوان یک رشته‌ی مستقل علمی معرفی کرد. هانس آلفوون به علت تحقیقات گسترده‌ی علمی در زمینه‌ی MHD در سال ۱۹۷۰ برنده‌ی جایزه‌ی نوبل شد. کارهای اولیه‌ی صورت گرفته به منظور توسعه‌ی دانش هیدرودینامیک مغناطیسی در علوم مهندسی، توسط هارتمن انجام شد. او بمب الکترومغناطیسی را در سال ۱۹۱۸ اختراع کرد. وی در سال ۱۹۷۳ مطالعاتی را روی جریان فلز مذاب که از یک مجرا عبور کرده و بر آن میدان مغناطیسی اعمال می‌شود، انجام داد. از دیگر کارهای انجام شده توسط هارتمن، بررسی تحلیلی و تجربی جریان جیوه در یک میدان مغناطیسی می‌باشد. با توجه به کارهای انجام شده توسط هارتمن در زمینه‌ی MHD می‌توان او را پدر علم هیدرودینامیک فلزات مذاب به حساب آورد. اصطلاح جریان هارتمن، برای توصیف جریان‌هایی که در کانال، تحت تأثیر میدان مغناطیسی باشند، استفاده می‌شود. در سال ۱۹۵۰ فیزیک پلاسما به عنوان موضوعی در فرآیندهای

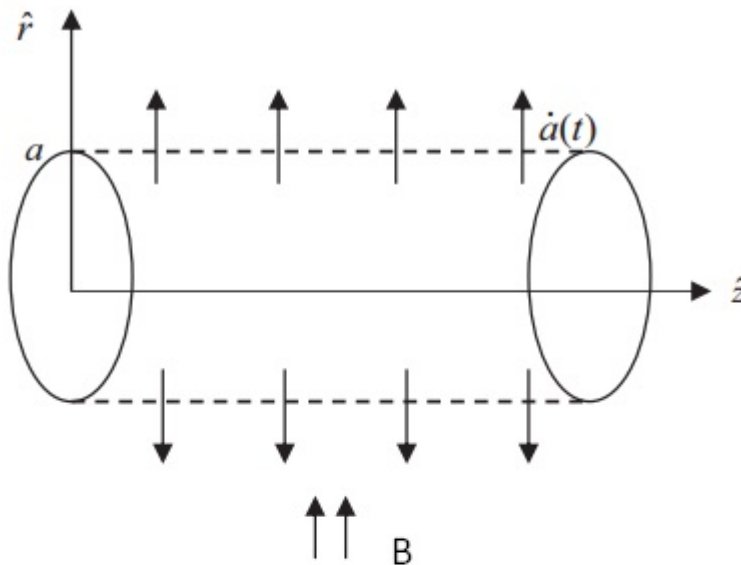
* سخنران



گداخت گرما هسته‌ای کنترل شده در رآکتورهای هسته‌ای، در مباحث مربوط به هیدرودینامیک مغناطیسی مطرح گردید. در همین سال‌ها آلفوون نظریه‌ی مربوط به امواج آلفوون را ارائه داد که ارتباط بین مگنتوهیدرودینامیک و علوم نجوم را مطرح می‌کند. سرانجام در اوایل دهه‌ی ۱۹۶۰ با مطالعات انجام شده توسط هارتمن، استفاده از دانش مگنتوهیدرودینامیک در مهندسی آغاز شد. هارتمن و لازاروس مطالعات نظری و آزمایشگاهی را روی جریان MHD در لوله‌ها انجام دادند. حیات و همکاران [۲] یک حل تحلیلی صریح برای جریان MHD درون لوله به دست آوردند. سای و همکاران [۳] در زمینه‌ی جریان ناپایدار در یک لوله‌ی متخلخل با انبساط یا انقباض دیواره در حضور یک میدان مغناطیسی و با استفاده از روش آشفتگی، مطالعه کردند. شامکا جریان آرام و ناپایدار یک سیال هیدرومغناطیس و انتقال حرارت یک ذره‌ی معلّق در سیال هادی الکتریسیته را که درون یک کانال یا لوله‌ی مدور و در حضور میدان مغناطیسی یکنواخت می‌باشد، به طور عددی بررسی کرد. اسکار و همکاران [۴] جریان سیال پایدار، لزج و تراکم‌ناپذیر را که به میزان کم، هادی جریان الکتریسیته نیز است، حول یک سیلندر مدور با میدان مغناطیسی هم تراز، با عدد رینولدز با دامنه‌ی صد تا پانصد، مورد مطالعه و بررسی قرار دادند. مجموعه معادلاتی که MHD را توصیف می‌کنند، ترکیبی از معادلات ناویر - استوکس از دینامیک سیالات و معادلات ماکسول در الکترومغناطیس است. این معادلات دیفرانسیل، به طور همزمان به صورت تحلیلی یا عددی حل می‌شوند.

۲ فرمول‌بندی مسئله و حل معادلات حاکم

جریان آرام، ناپایدار و تراکم‌ناپذیر یک سیال در لوله‌ای با دیواره‌ی متخلخل با شعاع $a(t)$ و نفوذپذیری ν_m در نظر گرفته شده است، به طوری که دیواره‌ی لوله با مکش یا دمش همراه است و انبساط‌ها یا انقباض‌ها، به طور یکنواخت صورت می‌گیرد. همان طور که در شکل نشان داده شده است، سیستم مختصات استوانه‌ای $r - z$ با مبدأ مرکز مختصات در مرکز لوله مطابق شکل (۱) در نظر گرفته می‌شود. z در راستای محور لوله و r در راستای شعاع است. u و v به ترتیب مؤلفه‌های سرعت در راستای z و r می‌باشند و B میدان مغناطیسی عمود بر دیواره‌ی لوله است.



شکل ۱: لوله‌ی متخلخل با انبساط یا انقباض دیواره و در حضور میدان مغناطیسی



معادله‌ی پیوستگی و معادلات اندازه حرکت (معادلات ناویر- استوکس) در مقیاس دیفرانسیلی و در دستگاه مختصات استوانه‌ای و تحت تأثیر میدان مغناطیسی، به ترتیب به صورت زیر بیان می‌شوند:

$$\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{v}{r} = 0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial z} + v \frac{\partial u}{\partial r} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} \right) - \frac{1}{\rho} \sigma u B^2, \quad (2)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial z} + v \frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} + \nu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r^2} \right), \quad (3)$$

که در آن ρ ، p و ν به ترتیب چگالی، فشار و لزجت سینماتیکی سیال و B بردار میدان مغناطیسی می‌باشند. شرایط مرزی به صورت زیر تعریف شده است:

$$\begin{cases} r = a(t) : u = 0, v = -v_m = -Aa \\ r = 0 : \frac{\partial u}{\partial r} = 0, v = 0 \\ z = 0 : u = 0, v = 0 \end{cases} \quad (4)$$

که $A = \frac{v_m}{a}$ اندازه‌ی نفوذپذیری دیواره می‌باشد. تابع جریان به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\psi = \nu z F(\xi, t), \quad (5)$$

و در آن $\xi = \frac{r}{a}$ است. مؤلفه‌های بردار سرعت در راستای \vec{i} و \vec{j} که به ترتیب با u و v نشان داده می‌شوند، به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$u = \frac{\nu z F_\xi(\xi, t)}{a^2 \xi}, \quad (6)$$

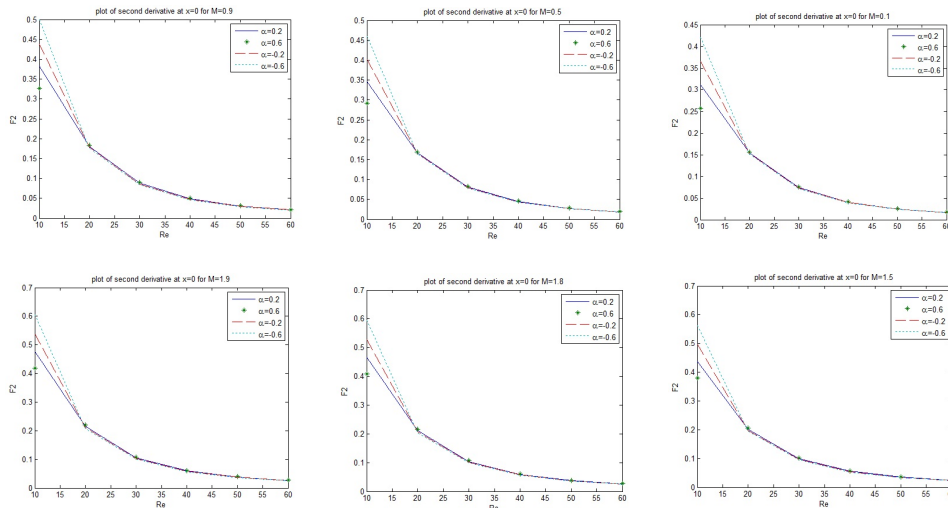
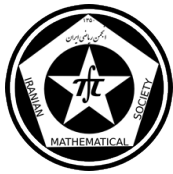
$$v = -\frac{\nu F(\xi, t)}{a \xi}, \quad (7)$$

با حل تشابهی مسأله و قرار دادن تابع جریان در معادلات حاصل و صرف نظر کردن از واحد زمان و با اعمال تغییر متغیر جدید $\eta = \xi^2$ یک معادله‌ی دیفرانسیل معمولی غیرخطی با شرایط مرزی معلوم به دست می‌آید:

$$\eta f'''' + f'' + \frac{\alpha}{4}(\eta f'' + f') + \frac{Re}{4}(ff'' - f'^2) - \frac{M}{4}(\eta^3 f' - 2\eta^2 f + 4 \int_0^1 \eta f(\eta) d\eta) = k, \quad (8)$$

$$f'(1) = 0, \quad f(1) = 1, \quad f(0) = 0. \quad (9)$$

که در آن Re عدد بدون بعد رینولدز و k ثابت انتگرال‌گیری است. بخشی از نتایج حل این معادله به روش عددی تفاضل متناهی در محیط متلب، به صورت نمودار آورده شده است:



شکل ۲: نمودار تغییرات مشتق دوم تابع $f''(0)$ به ازای مقادیر مختلف M و α

۳ نتیجه‌گیری

تغییرات تابع f'' در واقع نشان دهنده‌ی میزان تغییرات نیروی تنش برشی می‌باشد که این نیرو میزان افت فشار در جریان سیال درون لوله را مشخص می‌کند. در نتیجه، سطح تغییرات تابع و افزایش و کاهش آن تحت تأثیر تغییرات عدد رینولدز و تغییر ضریب مغناطیس و همچنین تحت تأثیر ضریب α ، که باعث تغییر مقدار تنش برشی نیز خواهد شد، در کاربردهای صنعتی و پزشکی، صنایع تأسیساتی و کاربردهای روزمره، تأثیر بسزایی خواهد داشت. طبق آن چه که در این بررسی صورت گرفت و بر اساس نتایج حاصل از این تحقیق، از آن جایی که مگنتوهیدرودینامیک، در آزمایشگاه‌ها، لوله‌های حرارتی و به طور کلی در طبیعت و جهان پیرامون، کاربرد گسترده‌ای دارد، می‌توان با محاسبات دقیق و کنترل مناسب میزان افت فشار در جریان سیال درون لوله‌ها و کانال‌ها، با کاهش مصرف مواد و انرژی، به بهینه‌تر شدن هر چه بیشتر کیفیت خدمات کمک کرد.

مراجع

- [1] S. Srinivas, A. Subramanyam Reddy, T.R. Ramamohan, Anant Kant Shukla, Influence of heat transfer on MHD flow in a pipe with expanding or contracting permeable wall, Ain Shams Engineering Journal (2014).
- [2] Hayat T, Sajid M, Ayub M. On explicit analytic solution for MHD pipe flow of fourth grade fluid. Commun Nonlinear Sci Numer Simulat 2008;13:745-51.
- [3] Si X, Zheng L, Zhang X, Chao Y. Perturbation solution to unsteady flow in a porous channel with expanding or contracting walls of a transverse magnetic field. Appl Math Mech-Engl Ed 2010;31:151-8.
- [4] T.V.S. Sekhar, R. Sivakumar, H. Kumar, T.V.R. Kumar, Effect of aligned magnetic field on the steady viscous flow past a circular cylinder, App. Math. Model. 31(2007)130-139.



تعامد و تخصیص مقادیر ویژه جزئی برای مداد درجه دوم معین متقارن

معصومه شایقی*

دانشگاه یزد

سید مهدی کرباسی

دانشگاه یزد

چکیده

مساله تخصیص جزئی مقادیر ویژه مرتبه دوم (PQEVAP)^۱ در رابطه با تعیین تعداد کمی از مقادیر ویژه نامطلوب از یک مداد ماتریسی می‌باشد، در حالی که تعداد زیادی از مقادیر ویژه و بردارهای ویژه متناظر بدون تغییر می‌مانند. مساله ناشی از کنترل نامطلوب تشدید در ساختارهای ارتعاشی و سیستم های ثبات کنترل است. جواب این مساله مستلزم یک جفت ماتریس های پس خورد می‌باشد.

واژه‌های کلیدی: مساله مقدار ویژه درجه دوم، ساختار ویژه تخصیص داده شده، سیستم ارتعاش، ماتریس پس خورد

۱ مقدمات و پیش نیازها

به خوبی شناخته شده است که ساختارهای ارتعاشی نظیر پل ها، ساختمان های بلند، هواپیماها، فضاپیماها و ... یک دستگاه معادلات دیفرانسیل ماتریسی مرتبه دوم به شکل $M\ddot{v} + C\dot{v} + Kv = f(t)$ به وجود می آورند که در آن $v(t) = xe^{\lambda t}$ جواب های چنین مسائلی هستند که به مسائل مقدار ویژه درجه دوم (QEP)^۲ به صورت زیر منجر می شوند:

$$P(\lambda) := M\lambda^2 + C\lambda + K \quad (1)$$

در اینجا M ماتریس جرمی، C ماتریس میرائی و K ماتریس سختی نامیده می شوند. مساله، پیدا کردن مقادیر ویژه و بردارهای ویژه مداد مرتبه دوم $P(\lambda)$ می باشد.

تعریف ۱.۱. اگر C یک ماتریس صفر باشد، مساله به مساله ی مقدار ویژه ی تعمیم یافته تبدیل می شود که P یک مداد خطی به صورت $P(\mu) = K - \mu M$ و $\mu = -\lambda^2$ می باشد.

معادله دیفرانسیل ماتریسی مرتبه دوم $M\ddot{v} + C\dot{v} + Kv = 0$ می تواند با کاربردهایی از تابع انرژی $bu(t)$ کنترل شود که در آن $b \in R^n$ یک بردار ثابت و $u(t)$ یک اسکالر است:

$$M\ddot{v} + C\dot{v} + Kv = bu(t) \quad (2)$$

$$M\ddot{v} + (C - bf^t)\dot{v} + (K - bg^t)v = 0 \quad (3)$$

*سخنران

^۱The Partial Quadratic Eigenvalue Assignment Problem^۲Quadratic Eigenvalue Problem



$$u(t) = f^t \ddot{v} + g^t v \quad (۴)$$

دینامیک این ساختار به وسیله مداد حلقه بسته $P_c(\lambda) = M\lambda^2 + (C - bf^t)\lambda + (K - bg^t)$ توصیف شده است. مساله تخصیص مقادیر ویژه جزئی، برای مداد مرتبه دوم، نیاز به پیدا کردن بردارهای پس خورد f و g دارد به طوری که طیف مداد حلقه بسته $P_c(\lambda)$ دارای تعدادی مقادیر ویژه معین است و بقیه در طیف مداد حلقه باز $P(\lambda)$ است. دستگاه $M\ddot{v} + C\dot{v} + Kv = bu(t)$ برای هر مقدار ویژه λ از مداد حلقه باز $P(\lambda)$ کاملاً کنترل پذیر است اگر و فقط اگر:

$$\text{rank}\{\lambda^2 M + \lambda C + K, b\} = n \quad (۵)$$

کاملاً کنترل پذیر بودن یک شرط لازم و کافی برای وجود f و g است به طوری که مداد حلقه بسته دارای یک طیف است که می‌تواند به طور دلخواه تخصیص داده شود.

۲ تخصیص مقادیر ویژه جزئی

در حال حاضر یک جواب مساله تخصیص مقادیر ویژه جزئی برای مداد $P(\lambda)$ ارائه می‌دهیم: M عدد مختلط $m \leq n$ و $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_m$ و یک بردار $b \in R^m$ داده شده است، باید توابع f و g را بیابیم که مداد حلقه بسته $P_c(\lambda) = M\lambda^2 + (C - bf^t)\lambda + (K - bg^t)$ دارای طیف $\{\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_m, \lambda_{m+1}, \dots, \lambda_n\}$ باشد. این یک مساله تخصیص مقدار ویژه جزئی است که از بردارهای f و g استفاده کردیم تا مقادیر ویژه $\{\lambda_j\}_{j=1}^m$ از مداد $P(\lambda)$ را با $\{\mu_j\}_{j=1}^m$ عوض کنیم و دیگر مقادیر ویژه بدون تغییر می‌مانند. برای این منظور قضیه‌ی زیر را بیان می‌کنیم: فرض کنید ماتریس بردار ویژه $2n \times 2n$ و ماتریس مقدار ویژه $2n \times 2n$ را به صورت زیر افزایش کردیم:

$$X = \begin{bmatrix} X_1 & X_2 \end{bmatrix},$$

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \Lambda_1 & \Lambda_2 \end{bmatrix}$$

قضیه ۱.۰۲. فرض کنید

$$f = MX_1 \Lambda_1 \beta, \quad (۶)$$

$$g = -KX_1 \beta, \quad (۷)$$

β یک عدد مختلط است، پس به ازای هر انتخاب β داریم:

$$MX_2 \Lambda_2^t + (C - bf^t)X_2 \Lambda_2 + (K - bg^t)X_2 = 0 \quad (۸)$$

قضیه ۲.۰۲. فرض کنید مداد حلقه باز $P(\lambda) = M\lambda^2 + C\lambda + K$ دارای تجزیه‌ی ویژه‌ی $MX\Lambda^t + CX\lambda + KX = 0$ و f و g به صورت قضیه قبل و مولفه‌های β_j از β به صورت زیر انتخاب می‌شوند:

$$\beta_j = \frac{1}{b^t x_j} \frac{\mu_j - \lambda_j}{\lambda_j} \prod_{i=1, i \neq j}^m \frac{\mu_j - \lambda_j}{\lambda_i - \lambda_j} \quad (۹)$$

بنابراین مداد حلقه بسته $P_c(\lambda)$ دارای طیف $\{\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_m, \dots, \lambda_{m+1}, \dots, \lambda_n\}$ می‌باشد و m بردار ویژه‌ی اول آن می‌تواند تراز شود تا در معادله‌ی $(\mu_j^t M + \mu_j C + K)y_j = b$ و $j = 1, 2, \dots, m$ صدق کند.



مثال ۳.۲. با تعریف $S = [\delta_{i+1,j}]$ به عنوان ماتریس انتقال، δ_{ij} دلتای کرونگر، و فرض کنید $F = I - S$. ماتریس های M ، C و K برای این مدل سه قطری و معین هستند با:

$$M = 2(I + SS^T) + S + S^T,$$

$$C = FLF^T,$$

$$\Gamma = \text{diag}\{\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n\},$$

$$\gamma_i = \frac{1}{100} \sin\left(\frac{\sqrt{\pi}i}{n}\right),$$

$$K = 1000 FF^T.$$

بنابراین برای $n = 4$ ماتریس ها به صورت زیر هستند:

$$M = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix},$$

$$C = \frac{1}{100} \begin{bmatrix} 10898 & -7071 & 0 & 0 \\ -7071 & 16310 & -9239 & 0 \\ 0 & -9239 & 19239 & -10000 \\ 0 & 0 & -10000 & 10000 \end{bmatrix},$$

$$K = 1000 \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

مداد $P(\lambda) = M\lambda^2 + C\lambda + K$ برای این انتخاب از M ، C و K دارای مقادیر ویژه ای است که در جدول زیر نمایش داده شده است.

جدول ۱: مقادیر ویژه مداد حلقه باز برای $n = 4$

i	λ_i
۱	$-7,6813 \times 10^{-5} - 5,102i$
۲	$-7,6813 \times 10^{-5} + 5,102i$
۳	$-9,6435 \times 10^{-4} - 16,096i$
۴	$-9,6435 \times 10^{-4} + 16,096i$
۵	$-3,2590 \times 10^{-3} - 29,239i$
۶	$-3,2590 \times 10^{-3} + 29,239i$
۷	$-8,1947 \times 10^{-3} - 42,282i$
۸	$-8,1947 \times 10^{-3} + 42,282i$

حل. در حال حاضر، بردارهای پس خورد f و g را با بردار یکه‌ی $(1, 1, 1, 1)^t = b$ محاسبه می‌کنیم و مقادیر ویژه‌ی λ_1 و λ_2 را به $\mu_{1,2} = -(1 \pm i)$ تخصیص می‌دهیم. با استفاده از قضیه اول داریم:

$$\beta = \begin{bmatrix} -1,2888 + 0,4586i \\ -1,2888 - 0,4586i \end{bmatrix},$$

همچنین با استفاده از قضیه دوم برای f و g داریم:



$$f = \begin{bmatrix} -1,4850 \\ -2,7439 \\ -3,5852 \\ -1,9403 \end{bmatrix}, \quad g = \begin{bmatrix} 17,8477 \\ 32,9769 \\ 43,0857 \\ 23,3177 \end{bmatrix}$$

۳ نتایج اصلی

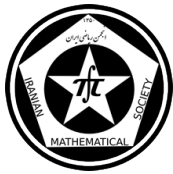
از عبارت β_j واضح است که شرایط کافی برای وجود β و در نتیجه برای اینکه یک مساله تخصیص جزئی دارای جواب باشد این است که:

هیچ $j = 1, 2, \dots, m$ و λ_j صفر نیست،
 $\{\lambda_j\}_{j=1}^m$ ها متمایزند، و
 b نباید نسبت به $j = 1, 2, \dots, m$ و x_j متعامد باشد.

مراجع

- [۱] pp. ۲۳۵-۲۸۶. (۲۰۰۱). ۴۳ *Jornal. SIAM, problem eigenvalue quadratic The Meerbergen. K. Tisseur. F.* [۱]
- [2] B. N. Datta, S. Elhay, Y. Ram *Orthogonality and partial pole assignment for the symmetric definite quadratic pencil*, *Linear Algebra and its Applications*, 257 (1997), pp. 29-48.
- [3] T. K. Caughey, M. E. J. Okelly, *classical normal modes in damed linear dynamic systems*, 32 (1995), pp. 583-588.
- [4] B. N. Datta, *Linear and numerical linear algebra in control theory research problems*, 197, 198 (1994), pp. 775-790.

پست الکترونیکی: smkarbassi@yazd.ac.ir
پست الکترونیکی: masoomeshayeghi@gmail.com



تعیین جهت انتشار میدان موج با استفاده از بردارهای پوئین تینگ

فرزاد مرادپوری*
دانشگاه شاهرود

علی مرادزاده
دانشگاه تهران، همکار دانشگاه شاهرود

ری نام کروز پستانا
دانشگاه فدرال باهیا

مهرداد سلیمانی منفرد
دانشگاه شاهرود

چکیده

تعیین جهت انتشار و در نتیجه جداسازی میدان های موج برای تصویر نمودن مناطق زمین شناسی پیچیده که تداخل امواج و تولید نوفه^۱ را به همراه دارد بسیار ضروری می باشد. بردارهای پوئین تینگ ابزارهای ریاضیاتی را در اختیار قرار می دهد تا بتوان رخداد های هم جهت و هم فاز در یک نقطه پراکنش را از رخداد هایی که در جهت مخالف انتشار می یابند، اما در امتداد بخش طولانی از مسیر هم فاز هستند را از هم تمیز داد. بردار پوئین تینگ ارائه شده در این مقاله اساس ریاضیاتی برای محاسبه جهت انتشار میدان موج را فراهم می آورد. جهت نیل به هدف ابتدا فرمول بندی حل مسئله ارائه و پس از جداسازی میدان های موج نتایج با توسعه یک شرط تصویر سازی برای یک مدل دولایه ای ارائه گردیده است.

واژه های کلیدی: تصویر سازی لرزه ای، میدان موج، بردار پوئین تینگ، جهت انتشار

۱ مقدمه

در اکتشافات لرزه ای، امواج از طریق یک چشمه لرزه ای به درون زمین فرستاده می شود. تولید میدان موج از چشمه (منبع تولید موج) به صورت پایین رونده انتشار می یابد، و با $P_d = (\mathbf{x}, t)$ نشان داده می شود، بطوریکه $\mathbf{x} = (x, y, z)$ است. اولین میدان موج بازتابی ثبت شده نیز به صورت پسرو و برگشتی انتشار می یابد و با $P_u = (\mathbf{x}, t)$ نشان داده می شود. کلربوت (۱۹۷۱)، تصویر سازی لرزه ای با استفاده از میدان موج بالارونده و پایین رونده را معرفی کرد [۱]. در یک نقطه عمقی خاص، بازتابنده واقعی زمانی وجود خواهد داشت که اولین ورودی موج پایین رونده با موج بالارونده از نظر زمانی منطبق باشد [۲]. در صورت وجود بازتابنده واقعی، تصویر زیر سطحی با استفاده از شرط تصویر سازی سنتی همبستگی عرضی تاخیر زمانی صفر با رابطه زیر بدست خواهد آمد [۳].

$$I(\mathbf{x}) = \int_{t=0}^{t_{\max}} S(\mathbf{x}, t) R(\mathbf{x}, t) dt \quad (1)$$

بطوریکه $S(\mathbf{x}, t)$ میدان موج منتشر شده از چشمه انتشار موج و $R(\mathbf{x}, t)$ میدان موج انتشار یافته پسرو از گیرنده میدان موج در موقعیت \mathbf{x} و زمان t و t_{\max} حداکثر زمان ثبت می باشد.

۲ بردار پوئین تینگ

آهنگ انتقال انرژی از یکای سطح در واحد زمان که گاهی نیز به عنوان شدت تعبیر می شود، با برداری توصیف می شود که این بردار به یاد جان هنری پوئین تینگ^۲ که برای نخستین بار خواص آن را مورد بحث قرار داد، بردار پوئین تینگ نامیده می شود و

* سخنران

^۱Noise^۲ John Henry Poynting



آنها با S نشان می‌دهند. از بردار پوئین تینگ می‌توان برای ردیابی جهت شارش انرژی از یک مولد تولید انرژی استفاده نمود. برخی محققین از اصطلاحاتی مثل بردار جهت^۳ نیز برای آن استفاده کرده‌اند.

۱.۲ بردارهای پوئین تینگ و تعیین جهت انتشار میدان‌های موج و جداسازی آنها

با استفاده از جهت انتشار میدان‌های موج، می‌توان اطلاعات بردار پوئین تینگ را برای بهبود کیفیت تصویر در اکتشافات لرزه‌ای محاسبه کرد. یون و مافرت (۲۰۰۴)، بردارهای پوئین تینگ را به عنوان حاصلضرب مشتق میدان موج نسبت به زمان در گرادیان آن محاسبه کردند [۴]. این روش به مشتقات عددی دقیق برای تولید زوایای صحیح و دسترسی به گام‌های زمانی در طول برونمایی میدان موج نیاز دارد. برای معادله موج صوتی، بردار پوئین تینگ S ، بصورت زیر مشخص می‌گردد [۵].

$$S(x, t) = -\frac{\partial P(x, t)}{\partial t} \nabla P(x, t) \quad (2)$$

که در آن $S(x, t)$ بردار پوئین تینگ و $P(x, t)$ میدان موج می‌باشند که برای محاسبه بردار پوئین تینگ، مشتق زمانی دامنه میدان موج و گرادیان آن باید محاسبه شوند. پس از محاسبه گرادیان میدان موج و مشتق آن نسبت به زمان، بردار پوئین تینگ را می‌توان توسط معادله (۲) بدست آورد. بردار پوئین تینگ یک پایه ریاضیاتی را برای محاسبه جهت انتشار موج بدست می‌دهد.

همچنین می‌توان با استفاده از محاسبه مولفه‌های بردار پوئین تینگ میدان موج را جدا نمود. برای این منظور می‌توان زاویه جهت انتشار میدان موج را از طریق بردار پوئین تینگ محاسبه کرد [۶].

$$\theta = \arctan\left(\frac{S_z}{S_x}\right) \quad (3)$$

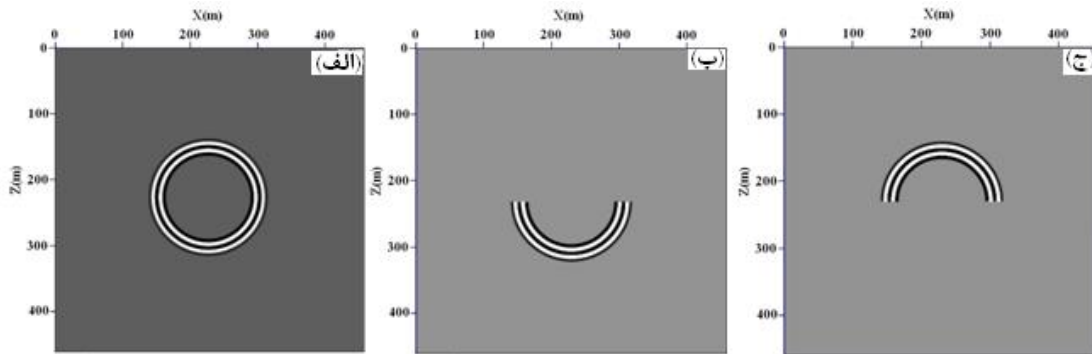
بخش بالارونده میدان موج، جاییکه $\theta \in [0, \pi]$ و بخش پایین‌رونده میدان موج جاییکه $\theta \in [-\pi, 0]$ است، مورد توجه قرار می‌گیرد (شکل ۱؛ الف، ب، ج). با این تعریف، می‌توان بخش دلخواه میدان موج را انتخاب نمود. وقتی که بردارهای پوئین تینگ برای میدان‌های موج گیرنده و چشمه محاسبه شدند، می‌توان زاویه بازتاب را محاسبه کرد. در اینجا از بردار پوئین تینگ برای تعیین جهات انتشار میدان موج چشمه و گیرنده استفاده می‌گردد، بطوریکه جهت انتشار موج بوسیله مثبت یا منفی بودن بردار پوئین تینگ تشخیص داده می‌شود. بترتیب برای چشمه و گیرنده، بردارهای پوئین تینگ یک مدل دو بعدی بصورت $S = (S_x, S_z)$ و $R = (R_x, R_z)$ می‌باشند، این بردارهای پوئین تینگ تابعی از مکان x و t هستند. زاویه بازتاب بصورت زیر محاسبه می‌شود [۶].

$$\alpha = \frac{1}{2} \cos^{-1}\left(\frac{S \cdot R}{|S| |R|}\right) \quad (4)$$

استفاده از بردار پوئین تینگ در مناطق با پیچیدگی بالای میدان موج (در مناطق با ساختارهای زمین‌شناسی پیچیده) که مولفه‌های گوناگون میدان موج تداخل کنند (برای مثال در سه جهت)، برای تعیین جهت انتشار و جداسازی میدان‌های موج و در نتیجه تصویر دقیق‌تر ساختارهای زیرسطحی بسیار کارآمد می‌باشد.

انجام برونمایی میدان موج و سپس استفاده از شرط تصویرسازی سنتی معادله ۱، منجر به تولید نوفه‌های فرکانس پایین در تصویر زیر سطحی می‌گردد. این مسئله برای مدل دو لایه‌ای شکل ۲-الف در شکل ۲-ب نشان داده شده است. برای

^۳ direction vector



شکل ۱: تصویر لحظه ای: (الف) میدان موج اصلی (ب) مولفه پایین رونده (ج) مولفه بالارونده

جلوگیری از همبسته شدن میدان‌های موج هم جهت که در نقاط غیربازتابی (عدم وجود سطح یا سطوح بازتاب) رخ می‌دهند، نیاز به شرط تصویرسازی است که همبستگی بین امواج دارای جهت انتشار کاملاً مخالف هم را میسر نماید. در این راستا، در مطالعه حاضر از بردار پوئینتینگ جهت تعیین جهت انتشار امواج استفاده شده و در ادامه با توسعه شرط تصویرسازی ارائه شده توسط کرولی و همکاران (۲۰۱۲)، و ارائه آن بصورت معادله (۵) برای نیل به هدف مورد نظر استفاده شده است. این شرط تصویرسازی بر مبنای نتیجه حاصل از مشتق زمانی و گرادیان میدان موج چشمه و گیرنده عمل می‌کند [۷].

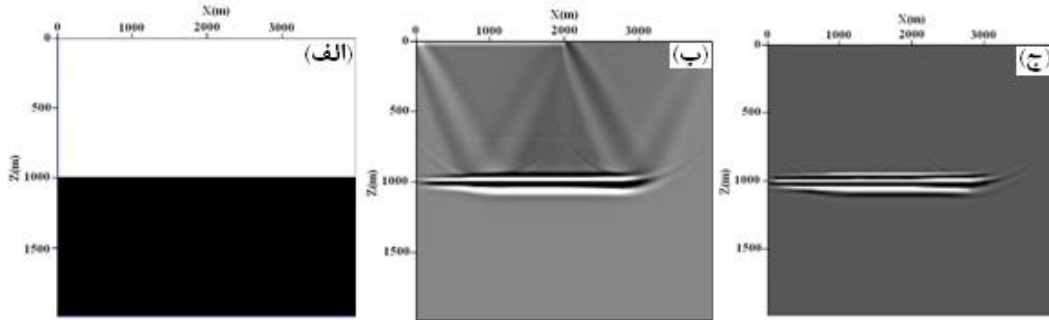
$$I(\mathbf{x}) = \frac{1}{c^2} \int_{t=0}^{t_{\max}} \frac{\partial}{\partial t} S(\mathbf{x} - h, t - \tau) \frac{\partial}{\partial t} R(\mathbf{x} + h, t + \tau) dt + \int_{t=0}^{t_{\max}} \nabla S(\mathbf{x} - h, t - \tau) \cdot \nabla R(\mathbf{x} + h, t + \tau) dt. \quad (5)$$

بطوریکه c سرعت موج صوتی و ∇ عملگر لاپلاسیس و h و t ، بترتیب تاخیر زمانی^۴ و مکانی نزدیک نقطه در حال تصویر شدن می‌باشد. دو عبارت معادله ۵، برای رخدادهای مرتبط با زوایای بازتاب بزرگ ($\xi > 60^\circ$) دارای علامت مخالف بوده و هنگام جمع دو عبارت، نوفه‌های موجود بطور قابل توجهی حذف و رخدادهای مطلوب با توجه به هم علامت بودن دو عبارت، حفظ خواهند شد. نتایج حاصل در شکل ۲-ج نشان داده شده است.

۳ نتیجه‌گیری

جداسازی میدان‌های موج برای تصویر نمودن مناطق زمین‌شناسی پیچیده که تداخل امواج و در نتیجه تولید نوفه را به همراه دارد بسیار ضروری می‌باشد. روش بردار پوئینتینگ، زاویه هر نقطه شبکه را در هنگام پیشروی انتشار میدان موج در محیط محاسبه می‌کند. اگر چه بردارهای پوئینتینگ محلی در همه موقعیت‌های مکانی و زمانی محاسبه و ذخیره می‌شوند، اما در هر صورت روش بردار پوئینتینگ حلقه‌های محاسباتی کمتری نیاز دارد. بنابراین در برابر هزینه محاسباتی آن، برای جداسازی میدان‌های موج روشی بسیار کارآمد می‌باشد. در این مطالعه همچنین با توسعه یک شرط تصویرسازی مناسب و اعمال آن، بهبود کیفیت تصویر نهایی به نحو قابل ملاحظه‌ای افزایش یافته است.

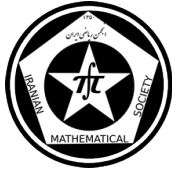
^۴time lag



شکل ۲: (الف) مدل دو لایه‌ای (ب) تصویرسازی با استفاده از معادله ۱، (ج) جداسازی میدان موج و تصویرسازی با استفاده از شرط تصویرسازی معادله ۵.

مراجع

- [1] J. F. Claerbout, *Toward a unified theory of reflector mapping*. Geophysics 36, 467-481, 1971.
- [2] F. Vivas, R. C. Pestana, and B. Ursin, *A new stabilized least-squares imaging condition*. Journal of Geophysics and Engineering 6(2009), 264-268.
- [3] F. Liu, G. Zhang, A. Morton and J. Leveille, *Reverse-time migration using one-way wave-field imaging condition*. 77th Annual International Meeting, SEG, Expanded Abstracts, pp. 21702175, San Antonio/EUA, SEG, 2007.
- [4] K. Yoon and K. J. Marfurt, *Challenges in reverse time migration*. SEG Technical Program Expanded Abstracts, 1057-1060, 2004.
- [5] K. Yoon and K. J. Marfurt, *Reverse-time migration using the Poynting vector*. Exploration Geophysics 37, 102-107, 2006.
- [6] E. S. Araujo, R. C. Pestana, and A. W. G. Santos, *Symplectic schmes and poyting vector in the reverse time migration*. 83rd Annual International Meeting, SEG, Expanded Abstracts, (2013).
- [7] S. Crawley, N. D. Whitmore, A. Sosa and M. Jones, *Improving RTM images with angle gathers*. Annual Meeting, Las Vegas/EUA, SEG, (2012).



فاصله توقف ماتریس کنترل تساوی کدهای آرایه‌ای و کاربردهای آن

مجید فرهادی
دانشگاه دامغان

بهزاد صالحیان متی کلائی
دانشگاه دامغان

فرزانه نجفی پورگنجه*
دانشگاه دامغان

چکیده

فاصله‌ی توقف^۱، پارامتری برای تجزیه و تحلیل عملکرد کدهای خطی تحت کدگشایی تکراری است. نقش این پارامتر همانند نقش فاصله همینگ در کدها می‌باشد. اگرچه حداقل فاصله همینگ یک پارامتر ثابت است، اما فاصله توقف به انتخاب گراف تنر^۲ متناظر با کد C یا به طور معادل به انتخاب ماتریس کنترل تساوی^۳ کد C بستگی دارد. در این مقاله به توصیف مجموعه‌های توقف، فاصله توقف و کاربرد آن در مسائل روز می‌پردازیم.

واژه‌های کلیدی: ماتریس کنترل تساوی، مجموعه توقف، مینیموم فاصله، فاصله توقف، توزیع‌های مجموعه توقف

Mathematics Subject Classification [2010]: 11B96

۱ مقدمه

در سرتاسر این مقاله q عدد فرد اول و m عدد صحیحی است، به طوری که $1 \leq m \leq q$ مگر آن که غیر آن به طور صریح بیان شود. و H یک ماتریس کنترل تساوی $qm \times q$ است. هم چنین نوشته‌ها برحسب موضوع و تشابهشان دسته بندی شده‌اند. ماتریس کنترل تساوی H با تعداد سطرهای وابسته ممکن برای یک $[n, k, d]$ -کد خطی باینری C را در نظر بگیرید، که در آن n طول کد، k بعد و d مینیموم فاصله همینگ است. بنابراین، مینیموم تعداد سطرهای H ، $n - k$ است.

تعریف ۱.۱. یک گراف تنر از یک کد C با ماتریس کنترل تساوی H ، یک گراف دو بخشی $G(V_1, V_2)$ است، که برای هر سطر H یک رأس در V_1 و برای هر ستون H یک رأس در V_2 وجود دارد. بین دو رأس i و j یالی وجود دارد، اگر $h_{ij} \neq 0$.

تعریف ۲.۱. یک مجموعه توقف S از اندازه $l \leq n$ برای H یک مجموعه l -عنصری از ستون‌های شاخص H است، به طوری که زیرماتریس l -ستونی متناظر آن از H سطری با وزن یک ندارد. هم‌چنین از دیدگاه گراف تنر، مجموعه توقف S زیرمجموعه‌ای از گره‌های متغیر در $TG(H)$ است، به طوری که هر همسایگی S در S مینیموم ۲-همبند است. اندازه کوچک‌ترین مجموعه توقف ناتهی از H را فاصله توقف می‌نامیم و با $s(H)$ نمایش می‌دهیم و برای عملکرد بهتر باید بیشینه باشد. داریم $s(H) \leq d(C)$.

*سخنران

^۱Stopping Distance

^۲Tanner Graph

^۳Parity-check Matrix



۲ کاربردها

دکتر مرتضی اسماعیلی در سال ۲۰۰۹ و ۲۰۱۱ با استفاده از مفهوم ماتریس‌های کنترل تساوی برای کدهای سره و ناسره که به ترتیب با $HP(m, q)$ و $HI(m, q)$ نشان داده می‌شوند، و کدهای متناظر آن‌ها $CP(m, q)$ و $CI(m, q)$ می‌باشند، مقادیر و کران‌هایی برای فاصله توقف ارائه داده است، که به صورت زیر داریم: $s(HP(m, q)) = s(HI(m, q)) = d(CP(m, q)) = d(CI(m, q))$ برای $m = 2, 3$ و ثابت کردند این تساوی برای مقادیر $m > 3$ برقرار نمی‌باشد و فاصله توقف کدهای ناسره بیشتر از کدهای سره است. از این رو کدهای ناسره عملکرد بهتری روی هر دو کانال $AWGN$ ^۴ و BEC ^۵ دارند [۱]. هم‌چنین کران کمتری بر مینیموم فاصله توقف برای $(m \geq 4, q \geq 7)$ ارائه شد، که در سال ۲۰۱۲ برای $m \geq 4$ و $q \geq 11$ ارتقا داده شد. و در سال ۲۰۱۴ مینیموم فاصله و فاصله توقف برای $m \leq 7, q \leq 79$ به دست آمد. و کران فاصله همینگ را از $d(6, q) \leq 32$ به $d(6, q) \leq 20$ تغییر دادند، هم‌چنین کران بالای $d(7, q) \leq 24$ را با استفاده از مفهوم ماتریس نگهدارنده‌ی الگوی 6 یک کدواژه به دست آوردند، که با این کران‌ها قادر نیستیم کد واژه‌های با وزن خیلی کم برای چندین مقدار q با استفاده از یک الگوریتم مینیموم فاصله پیدا کنیم. و هم‌چنین مجموعه‌های توقف کدهای هندسه جبری در ۲۰۱۴ به دست آمد [۲]. در سال ۲۰۱۰ تعداد مینیموم مجموعه‌های توقف و مینیموم کدواژه‌های $C(m, q)$ برای مقادیر $m = 2, 3$ و برای $(m, q) = (4, 5), (4, 7)$ به دست آمد [۳]. و هم‌چنین در سال ۲۰۱۴ کران بالایی برای مینیموم فاصله کدهای $LDPC$ ^۷ آرایه‌ای $d(m, q)$ ارائه شد و برای $m \leq 5$ به طور کامل به دست آمد. تعداد کد واژه‌های با مینیموم وزن را برای تمام $q > 19$ در سال ۲۰۱۴ اعلام کردند. هم‌چنین خواصی را بر نگهدارنده‌ی مولد کد واژه‌های با مینیموم وزن کد $C(4, q)$ ($q > 19$) را به دست آوردند.

توزیع‌های مجموعه توقف با $\{T_i(H)\}_{i=0}^n$ نشان داده می‌شود. این توزیع در واقع تعداد مجموعه‌های توقف از اندازه i را می‌شمارد. در سال ۲۰۱۰ برای برخی کدهای خطی [۴] و در سال ۲۰۱۱ برای برخی کدهای رد-مولر و در سال ۲۰۱۲ برای کدهای هندسه جبری با استفاده از گروه نقاط گویای منحنی‌های بیضوی به دست آمد. فرض کنیم H^* یک ماتریس کنترل تساوی از C باشد که با تمام کدواژه‌های غیر صفر کد دوگان C تشکیل شده است. پس ماتریس کنترل تساوی H را بهینه BEC می‌نامیم، اگر برای هر $i = 0, \dots, n$ ، $T_i(H) = T_i(H^*)$ ، H کمترین سطرها را داشته باشد. با استفاده از هندسه متناهی و ترکیبیات، ماتریس‌های بهینه را به دست می‌آورند. در BEC ، کدگشای تکراری از C با ماتریس کنترل تساوی بهینه یک کدگشایی بهینه BEC با پیچیدگی کدگشایی بسیار کمتر از یک کدگشای جامع است. در BEC ، کدگشای تکراری با ماتریس کنترل تساوی H^* به بهترین عملکرد ممکن دست می‌یابد، اما دارای بالاترین پیچیدگی کدگشایی است. ولی با ماتریس کنترل تساوی H ، به بهترین عملکرد ممکن دست می‌یابد و ممکن است پیچیدگی کدگشایی کمتری از H^* داشته باشد. از آنجا که H یک زیر ماتریس تشکیل شده توسط برخی سطرهای H^* است، هر مجموعه توقف H^* یک مجموعه توقف H است و این معنی می‌دهد که $T_i(H) \geq T_i(H^*)$ برای هر $i = 0, 1, \dots, n$ [۵].

در سال ۲۰۱۳ توزیع‌های مجموعه اصلاح‌نا پذیر IDS ^۸ برخی کدها تعیین شد و احتمال کدگشایی ناموفق تحت کدگشایی بهینه روی BEC برای هر کد خطی در بازه $[0, 1]$ به طور یکنواخت غیرنزولی است.

یک خانواده از کدهای $LDPC$ آرایه‌ای کوتاه شده و سوراخ شده برای کانال‌های حک جوششی^۹ در سال ۲۰۱۵ معرفی شده است. که این ساختار بر اساس شناسایی و تحلیل دوره‌های متناظر با ستون‌های متوالی در ماتریس کنترل تساوی است. ظرفیت

^۴Additive White Gaussian Noise^۵Binary Erasure Channel^۶Template Support Matrix^۷Low-Density Parity-check Code^۸Incorrigible Set^۹Burst Erasure Channels



حک جوشی L_{max} را می‌توان با چنین دوره‌هایی مشخص کرد. تمام بردارهای برش برای مقادیر کوچک q و $3, 4, 5$ $m =$ به دست آمده است. با انتخاب صحیح بردار برش، مینیموم فاصله (هنگامی که q بسیار بزرگ نیست) به طور قابل توجهی افزایش می‌یابد.

در سال ۲۰۱۳ ساختار جدیدی برای کدهای MDS ^{۱۰} طراحی شد، به طوری که ماتریس کنترل تساوی آن با استفاده از یک ماتریس فوق منظم ^{۱۱} توسط بلوک‌هایی ترکیب شده از ماتریس همراه ^{۱۲}، از یک چند جمله‌ای اولیه ساخته شده است. هم چنین یک الگوریتم کدگشایی معرفی شد که می‌تواند $\lfloor \frac{n-k}{p} \rfloor$ خطا در نماد کدواژه را برای موارد $n-k=2$ و $n-k=4$ اصلاح کند.

نسخه وصل شده به طور مکانی ^{۱۳} کدهای $LDPC$ در سال ۲۰۱۵ بیان شد و مجموعه‌های توقف و فاصله توقف را برای $m=3, 4, 5$ و طول جفت‌ساز $L \geq 2$ را که برای هر $q \geq q_0$ (و وابسته به m است) معتبر است، به دست آمد، که این نسخه عملکرد کدگشا را در اصلاح خطا به طور قابل توجهی افزایش می‌دهد.

دو نمایش شبه دوری ^{۱۴} (QC) و برداری از کدهای $RS-LDPC$ ^{۱۵} بر اساس کدواژه‌های RS کدهای RS در سال ۲۰۱۵ ارائه شد. که تحت نمایش اول بیشترین بخش ماتریس کنترل تساوی شامل ماتریس‌های جایگشت دوری و ماتریس‌های صفر است، و این نمایش کدگشایی و اجرای کدگشایی و تجزیه تحلیل رتبه‌ی کدهای $RS-LDPC$ را آسان‌تر می‌کند. تحت نمایش دوم، ماتریس جایگشت در ماتریس کنترل تساوی کد $RS-LDPC$ می‌تواند توسط یک بردار غیر باینری تعریف شده، که درایه‌های آن یک جایگشت از اجزای میدانی می‌باشد که RS را ساخته است. و با این نمایش، خاصیت تغییرناپذیری تکراری برای کدهای تمام طول $RS-LDPC$ بیان می‌شود، که می‌تواند تجزیه و تحلیل ساختار این کدها را آسان‌تر کند. [۶]

یک طراحی جدید برای گروه‌بندی بر چسب‌های شناسایی فرکانس $(RFID)$ ^{۱۶} بر اساس قضیه باقی‌مانده چینی بیان شده است. این طراحی در سال ۲۰۱۳ با نگاهی به مفهوم فاصله توقف به دست آمده است و با انگیزه افزونگی نمایش باقی‌مانده چینی ارائه شد. این طرح نه تنها ضمانت تعیین کدگشایی را میسر می‌سازد، بلکه انعطاف‌پذیری در ساخت گروه ماتریس‌های مولد ^{۱۷} را بالا می‌برد. اشیا کلیدی این طرح فاصله توقف و مینیموم فاصله از یک کد خطی هستند، هم چنین اشیا مورد نیاز برای مطالعه ضمانت‌های کدگشایی از گروه‌بندی و نقطه‌ی مقابلشان که به ترتیب کمبود رتبه و مجموعه‌های بن بست ^{۱۸} نامیده می‌شوند، می‌باشند، که تجزیه تحلیل نظری نرخ خطا را امکان‌پذیر می‌کند. [۷]

ماتریس‌های کنترل تساوی از کد $LDPC$ می‌توانند به عنوان ماتریس‌های اندازه‌گیری برای دریافت فشرده (CS) ^{۱۹} تحت BS ^{۲۰} استفاده شوند. اگر ماتریس کنترل تساوی $H(m, q)$ از کدهای آرایه‌ای را در نظر بگیریم، جرقه ^{۲۱} کم‌ترین تعداد ستون‌های وابسته خطی در یک ماتریس است، که در سال ۲۰۱۳ برای $m=2, 3$ محاسبه شد. هم چنین دو کران پایین از جرقه‌ها از ماتریس H یا زیرماتریس‌هایشان برای $m \geq 4$ به دست آمده است. ماتریس‌های اندازه‌گیری ساختار شبه دوری دارند و می‌توانند سخت‌افزار تحقیق مناسب و ساده‌ای ارائه دهند. نتایج نظری در مورد جرقه‌ی این ماتریس‌ها و زیر

^{۱۰} Maximum Distance Separable

^{۱۱} Superregular Matrix

^{۱۲} Companion Matrix

^{۱۳} Spatially-Coupled Version Of LDPC Codes

^{۱۴} Quasi-Cyclic Representation

^{۱۵} Reed-Solomon LDPC

^{۱۶} Radio-Ferquency Identification

^{۱۷} Generator Matrices

^{۱۸} Deed-End Sets

^{۱۹} Compressed Sensing

^{۲۰} Based Pursuit

^{۲۱} Spark



ماتریس‌هایشان، عملکرد خوب آن‌ها را تضمین می‌کند.

یک روش ساده برای طراحی ماتریس کنترل تساوی کدهای LDPC در سال ۲۰۱۱ بیان شد. این روش با استفاده از یک دنباله حسابی ایده آل برای کد نرخ بالا که دور طول ۴ ندارد، برای کد آرایه‌ای، اصلاح کد آرایه‌ای و کد شبه دوری قابل اجرا می‌باشد. این ساختار اساساً گسترش کار دکتر اسماعیلی است، و استفاده از این روش ساخت بر $QC - LDPC$ با طول بلوک و نرخ کد مشابه، قابل مقایسه با نتایج به دست آمده توسط دکتر اسماعیلی است، و در نهایت باعث بهبود عملکرد این کدها می‌باشد.

در نظریه‌ی کد، ماتریس‌های مولد به عنوان ساختار مهمی از کدهای خطی در نظر گرفته می‌شوند. با استفاده از این ماتریس‌ها می‌توان مینیوم فاصله‌ی بهینه‌ای برای کدهای خطی بیان کرد. در سال ۲۰۱۲ با استفاده از مفهوم مجموعه‌ی توقف و فاصله توقف ماتریس‌های مولد بهینه‌ای برای کدهای LDPC ساخته شد. [۸]

۳ نتایج اصلی

ماتریس‌های کنترل تساوی کدها می‌تواند بخش مهمی از ساختار یک کد را بیان کند. پارامتر فاصله توقف و توزیع‌های مجموعه توقف مربوط به ماتریس‌های کنترل تساوی است، دستیابی به مقدار بهینه این پارامترها و پارامتر مینیوم فاصله می‌تواند راهی برای رسیدن به عملکرد ایده‌آل در کانال‌های معرفی شده در متن باشد. هم‌چنین ما می‌خواهیم فاصله توقف را برای برخی از خانواده‌های کدهای خطی مورد محاسبه و بهینه سازی قرار دهیم.

مراجع

- [1] M. Esmaeili, M. H. Tadayon, and T. A. Gulliver, *More on the stopping and minimum distance of array code*, IEEE Trans, common, Vol. 59, NO. 3, March 2011.
- [2] J. Zhang, F-W. Fu and D. Wan, *Stopping sets of algebraic geometry codes*, IEEE Trans, Inf, Theory, Vol. 60, No. 3, March 2013
- [3] H. Liu, L. Ma and J. Chen, *On the number of minimum stoping sets and minimum codewords of array LDPC coeds*, IEEE Trans Common, Lett. Vol, 14, No, 7, pp. 670-672, Jul. 2010.
- [4] S.-T. Xia and F. W. Fu, *Stoping set distributions of some linear codes*, In Proc. IEEE inf. Theory workshop, chendu, china. pp. 47-51, Oct. 2006.
- [5] Y. jiang, S.-T. Xia, and F. w. Fu, *Stopping set distributions of some Reed-Muller coeds*, IEEE Trans, Inf. Teory, Volm 55, No, pp. 6078-6088, Sep, 2011
- [6] H. Liu, Q. Huang, G. Deny and J. Chen, *Quasi-cyclic representation and vector representation of RS-LDPC coeds*, IEEE Tran-common, Vol, 63, No, 4, April, 2015.
- [7] Y. Sheng Su and O. K. Tonguz, *Using chinese remainder theorem for the grouping of RFID tags*, IEEE Trans, Common, Vol. 61, No. 11, November, 2013 .
- [8] M. Baldi, M. Bianchi, F. chiaraluce and T. klove, *on the generator Matrix of array codes*, <http://www.vedchgate.net/publication/236592142>, January 2012.

پست الکترونیکی: farzane_najafiganje@yahoo.com

پست الکترونیکی: bsalehian@du.ac.ir

پست الکترونیکی: farhadi@du.ac.ir



مثلث رولو و کاربرد آن در ساخت دستگاه های حفاری جهت ایجاد تونل هایی با مقطع مربعی شکل

مهدی اشرفی بافقی*
دانشگاه آزاد اسلامی واحد بافق

علی نخعی امرودی
دانشگاه صنعتی مالک اشتر

حسینعلی لازمی
دانشگاه آزاد اسلامی واحد بافق

چکیده

در چند دهه اخیر با توجه به افزایش نیاز به استفاده از فضاهاى زیر زمینی و توسعه تکنولوژی حفر، حفاری های مکانیزه گسترش یافته است و ماشین آلات پیشرفته ای در این خصوص طراحی و ساخته شده است. از جمله این ماشین آلات TBM ها هستند که بصورت کاملا مکانیزه و با سرعت مناسب، تونل هایی با سطح مقطع دایره ای را حفر می کنند. در این مقاله ابتدا منحنی های با عرض ثابت و بویژه مثلث رولو معرفی و به کمک آن یک مدل ریاضی جدید برای ساخت دستگاه TBM ارائه می شود که ماشین جدید می تواند تونل هایی با سطح مقطع مربعی شکل حفر کند. در پایان نیز با مقایسه روش فعلی (مقطع دایره ای شکل) با روش جدید (مقطع مربعی شکل) نشان می دهیم که این امر در برخی از موارد می تواند (تا ۳۰ درصد) هزینه های حفاری را کاهش و در نتیجه بهره وری را افزایش دهد.

واژه های کلیدی: مثلث رولو، تکنولوژی حفر، ایجاد تونل، دستگاه TBM

Mathematics Subject Classification [2010]: 32B25, 53A04

۱ مقدمه

ایجاد سوراخ های مربعی شکل در صنعت کاربردهای فراوانی دارد (از جمله می توان به ایجاد سوراخ های مربعی شکل در شفت و کوپل کردن آن با میله اشاره کرد، زیرا مربعی بودن سوراخ شفت و میله، باعث درگیری کامل کوپلینگ می شود و از هرز چرخیدن آن جلوگیری می کند. تاکنون روشهای متعددی برای ایجاد سوراخ های مربعی شکل (در ابعاد کوچک) ارائه شده است از جمله استفاده از دستگاه CNC [۳]، روش تخلیه الکتریکی [۵] و روش خانکشی [۹]. استفاده از روش CNC علی رغم دقت بسیار بالا هزینه زیادی در پی دارد و عملا در ابعاد بزرگ (بویژه حفاری تونل) قابل استفاده و مقرون به صرفه نیست. روش تخلیه الکتریکی نیز صرفا برای مواد رسانا قابل استفاده است [۲]. روش دیگر برای ایجاد سوراخ های مربعی شکل استفاده از سرمت هایی به شکل مثلث رولو است که می تواند داخل یک مربع حرکت چرخشی داشته باشد. در این مقاله ابتدا منحنی های با عرض ثابت و بویژه مثلث رولو را معرفی و نحوه استفاده از آن در ایجاد سوراخ های مربعی شکل را به طور کامل مورد بررسی قرار می دهیم و با توجه به آن ساختار جدیدی برای ساخت دستگاه های حفاری (TBM)^۱ ارائه می دهیم. ویژگی خاص این روش در مقایسه با روش های دیگر این است که می تواند در ساخت دستگاه های حفاری مورد استفاده قرار گیرد و می توان با لحاظ کردن برخی تغییرات در صفحات برش و نحوه چرخیدن این صفحات دستگاه هایی ساخت که تونل هایی با سطح مقطع مربع شکل تولید کنند. در پایان نیز مزیت تونل های با مقطع مربعی شکل بر تونل های با مقطع دایره ای شکل را بیان می کنیم.

* سخنران

^۱Tunnel Boring Machine



۲ معرفی منحنی های با عرض ثابت و مثلث رولو

۱.۲ منحنی های با عرض ثابت

تعریف ۱.۲. برای اشکال مسطح محدب بسته که مرز آن یک منحنی هموار است در هر مسیر دقیقاً دو خط مماس موازی بر منحنی مرزی وجود دارد. فاصله عمودی بین خطوط مماس موازی عمود بر مسیر را عرض منحنی گویند.

تعریف ۲.۲. اگر عرض شکل در تمام مسیر ها یکسان باشد آنگاه آن شکل را با عرض ثابت و مرز آن را منحنی با عرض ثابت^۲ گوئیم [۴].

ساده ترین منحنی با عرض ثابت دایره است.

۲.۲ مثلث رولو (Reuleaux Triangle)

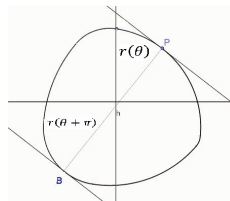
یکی از شاخص ترین منحنی های با عرض ثابت، مثلث رولو است که به پاس خدمات فرانس رولوکس^۳ مهندس طراح ماشین آلمانی به این نام نامگذاری شده است [۶]. برای رسم یک مثلث رولو از یک مثلث متساوی الاضلاع به طول ضلع a استفاده می کنیم بدینصورت که با شعاع a و مرکز یکی از رئوس یک کمان رسم می کنیم که دو راس دیگر را به هم وصل کند. به طور مشابه این کار را برای دو راس دیگر نیز انجام می دهیم این سه قوس مثلث رولو را تشکیل می دهند. به طور خاص چند ضلعی های رتولوکس، مجموعه ویژه ای از منحنی های با عرض ثابت هستند [۶]. با توجه به تعاریف فوق واضح است که مثلث رولو می تواند براحتی و بصورت کاملاً هموار بین دو خط موازی چرخش داشته باشد.

۳ ایجاد سوراخ های مربعی شکل به کمک مثلث رولو

به دلیل ثابت بودن عرض منحنی مثلث رولو در تمام جهات، این منحنی می تواند بین دو خط موازی دوران داشته باشد و در نتیجه قابلیت چرخش درون یک مربع را دارد. بنابراین اگر سرمته یا صفحات برش به شکل مثلث رولو طراحی شوند و در یک قاب مربعی به اندازه 36° درجه چرخش کند تمام سطح داخلی مربع را پوشش می دهد و عملیات براده برداری یا حفاری را به شکل مقطع مربعی انجام دهد.

۱.۳ تحلیل ریاضی مکانیزم ایجاد سوراخ مربعی

برای بدست آوردن معادله منحنی سرمته (صفحه برش) از مهمترین خاصیت منحنی های با عرض ثابت، یعنی ثابت بودن عرض منحنی در همه جهات استفاده می کنیم. عرض منحنی بصورت $l(\theta) = r(\theta) + r(\theta + \pi)$ محاسبه می شود که در



شکل ۱: عرض منحنی در حالت قطبی

^۲curves of constant width

^۳Franz Reuleaux



آن نشان دهنده فاصله خط عمود بر مماس رسم شده بر منحنی در زاویه θ تا مبدا و θ زاویه خط مذکور با محور افقی است. در منحنی های با عرض ثابت داریم:

$$r(\theta) + r(\theta + \pi) = k \quad (1)$$

که در آن k یک عدد ثابت است. مجموعه مماس های رسم شده بر منحنی از معادله زیر بدست می آیند:

$$F(x, y, \theta) = x \cos(\theta) + y \sin(\theta) - r(\theta) \quad (2)$$

در نقطه مماسی (محل تماس خط مماس با منحنی) داریم: $F = 0, \frac{\partial F}{\partial \theta} = 0$. بنابراین با حل این دستگاه نسبت به θ ، متغیر های x و y برحسب θ بصورت زیر بدست می آیند:

$$x(\theta) = r(\theta) \cos(\theta) - r'(\theta) \sin(\theta), \quad (3)$$

$$y(\theta) = r(\theta) \sin(\theta) + r'(\theta) \cos(\theta) \quad (4)$$

با انتخاب توابع مختلف $r(\theta)$ ، معادلات منحنی های مختلفی بدست می آید که همگی با عرض ثابت هستند البته نکته حایز اهمیت این است که معادله $r(\theta)$ می بایست در معادله (۱) صدق کند.

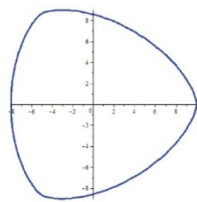
مثال ۱.۳. تابع $r(\theta) = \cos(3\theta) + a$ نیز در معادله (۱) صدق می کند زیرا

$$r(\theta) + r(\theta + \pi) = \cos(3\theta) + a + \cos(3\theta + 3\pi) + a = 2a, y(\theta) = \sin(\theta)$$

و این نشان می دهد معادله فوق، یک منحنی با عرض ثابت $k = 2a$ می باشد. همچنین با قراردادن آن در معادله (۳) داریم:

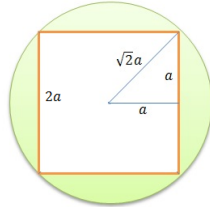
$$x(\theta) = (\cos(3\theta) + a) \cos(\theta) + 3 \sin(3\theta) \sin(\theta), y(\theta) = (\cos(3\theta) + a) \sin(\theta) - 3 \sin(3\theta) \cos(\theta)$$

نمودار این معادله در حالت خاص $a = 9$ در شکل زیر نشان داده شده است و این معادله، در واقع معادله مثلث رولو است و عرض آن برابر با $k = 2a = 18$ است. و با توجه به اینکه در معادلات صدق می کند واضح است که عرض منحنی ثابت بوده و براحتی می تواند در یک مربع دوران داشته باشد.



شکل ۲: مثلث رولو با عرض $k = 18$

در اینجا نکته قابل توجه این است که با چرخش مثلث رولو مرکز هندسی (مرکز ثقل) آن در نقطه ثابتی قرار نمی گیرد و در نتیجه برای انتقال گشتاور از منبع تولید گشتاور (دریل یا موتور) به سرمه یا صفحات برش بایستی از یک کوپلینگ غیر هم محور استفاده کرد. این کوپلینگ وظیفه انتقال گشتاور بین دو محور غیر هم راستا را دارد که از جمله می توان به کوپلینگ الدهام [۲]، کوپلینگ یونیورسال، کوپلینگ هوک یا کوپلینگ ریچارد اسمیت [۷] اشاره کرد. البته در خصوص کوپلینگ ثابت بودن سرعت دوران ورودی و خروجی بسیار مهم است چرا که در غیر اینصورت چرخش سرمه یا صفحات برش (به شکل مثلث رولو) هموار نخواهد بود و نتیجه مطلوب حاصل نمی شود. حسینی چالشری و همکاران در [۷] ثابت بودن سرعت ورودی در کوپلینگ یونیورسال را بررسی کرده اند. همچنین در مقاله ای دیگر [۲] امکان استفاده از کوپلینگ غیر هم محور الدهام را مورد بررسی و تأیید قرار داده اند.

شکل ۳: تونل مربعی به ضلع $2a$

۴ نتیجه گیری

یکی از شاخص های مهم در انتخاب شکل و ابعاد حفاری تونل نوع کاربری آن می باشد که با توجه به آن مقاطع دایره ای، نعل اسبی، بیضوی، مربع یا مستطیل مورد استفاده قرار می گیرند [۱]. دستگاه های مکانیزه فعلی (TBM) فقط قادرند مقاطع دایره ای را حفر کنند [۱] در حالیکه در بسیاری از موارد ایجاد تونل با سطح مقطع مربع شکل می تواند مناسب تر باشد به عنوان نمونه فرض کنید بخواهیم برای تردد قطار به عرض $2a$ و ارتفاع $2a$ یک تونل حفاری کنیم در مقطع دایره ای شکل (دستگاه های فعلی) نیاز به احداث تونل با شعاع $\sqrt{2}a$ می باشد و میزان حفاری به ازای هر متر طول تونل برابر با $2\pi a^2$ می باشد. در حالیکه در مقطع مربعی شکل (دستگاه پیشنهادی این مقاله) کافی است تونل مربعی به ضلع $2a$ حفر گردد که میزان حفاری در این حالت به ازای هر متر طول تونل معادل $4a^2$ می باشد که کمتر از $\frac{1}{\pi}$ حالت دایره ای شکل است و این امر (حداقل ۳۰ درصد) میزان حفاری (و هزینه های آن) را کاهش داده و سرعت اجرای حفر تونل را افزایش می دهد.

مراجع

- [۱] مدنی، حسن، تونل سازی، جلد اول، انتشارات دانشگاه صنعتی امیرکبیر، تهران، ۱۳۹۰.
- [۲] حسینی چالشری شهرام، زمانی احسان، مرتضوی سید متین، بررسی و تحلیل ایجاد سوراخ مربعی توسط دریل با استفاده از کویلینگ غیر هم محور الدهام، اولین کنفرانس سراسری توسعه مهندسی عمران، معماری، برق و مکانیک ایران، گرگان، ایران، ۱۳۹۳.
- [3] A. Overby, *Cnc machining handbook*, McGraw-hill, 1986.
- [4] A. D. Irving, *Curves Of Constant Width and Center Symmetry*, Springer, 2006.
- [5] B. Fleming, *The EDM How to Book*, Fleming publications, 2005.
- [6] P. Fumich, C. Quinn, D. Freelan, P. Sharaba, J. Orzel, *Curves Of Constant Width and Reuleaux Polygons*, Mathematics magazine, 60(3) (1987), pp. 131-140.
- [7] S. Hosseiny Chaleshtori, E. Zamani, A. Ashrafi, *Square Hole Created by drilling down by using Universal non-coaxial couplings*, Indian J.sci.res. 1(2) (2014) pp. 583-586.
- [8] R. Smart James, *Problem Solving in Geometry – a Sequence of Reuleaux Triangles*, Mathematics Teacher 79 (1986), pp. 11-14.
- [9] U. Kokturk, E. Budak, *Optimization of Broaching Tool Design*, Proc. of the Intelligent Computation in Manufacturing Engineering - 4 Conference, CIRP ICME'04, Sorrento, June-July 2004.

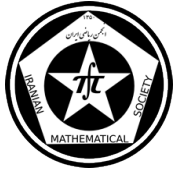
پست الکترونیکی: ashrafibafghi@bafgh-iau.ac.ir

پست الکترونیکی: amroodi8@yahoo.com

پست الکترونیکی: h.lazemi@bafgh-iau.ac.ir

پوسترها

جبر



ابر ارزیاب‌ها و ابرحلقه‌های ابر ارزیابی

سید محمد انوریه

دانشگاه یزد

خدیجه میردار هریجانی*

دانشگاه یزد

چکیده

در این مقاله نظریه ارزیاب را به ابر ساختارهای جبری توسعه می‌دهیم. برای این منظور با در نظر گرفتن یک گروه آبدلی تماماً مرتب ابر ارزیاب را از یک ابر میدان به توی یک گروه آبدلی تماماً مرتب تعریف می‌کنیم و سپس ویژگی‌های آن را بررسی می‌نماییم و نشان می‌دهیم برای هر گروه آبدلی تماماً مرتب یک ابر ارزیاب وجود دارد.

واژه‌های کلیدی: ابر ارزیاب، ابرحلقه، ابرمیدان، گروه آبدلی تماماً مرتب

Mathematics Subject Classification [2010]: 13D45, 39B42

۱ مقدمه

نظریه ارزیاب اولین بار توسط ریاضیدان مجارستانی جوزف کورشاک در سال ۱۹۱۲ مطرح شد [۷]. استروسکی [۹]، هاس [۴]، اشمیت [۱۰] و دیگران نظریه ارزیاب را توسعه دادند. در سال ۱۹۳۱ کرول به تعمیم نظریه ارزیاب روی یک میدان دلخواه پرداخت و اولین بار مفهوم ارزیاب روی یک میدان و حوزه ارزیاب را معرفی نمود [۶]. در این مقاله ما سعی داریم نظریه ارزیاب را به ابر ساختارهای جبری توسعه دهیم. ابر ساختارهای جبری تعمیمی از ساختارهای جبری مانند نیم گروه‌ها، گروه‌ها، حلقه‌ها، میدان‌ها و غیره است. در یک ساختار جبری کلاسیک ترکیب دو عضو یک عضو است؛ در حالی که در یک ابر ساختار جبری ترکیب دو عضو یک مجموعه ناتهی است. مارتی، ریاضیدان فرانسوی در هشتمین کنگره ریاضیدانان اسکاندیناوی تعمیمی از مفهوم گروه‌ها ارائه کرد و آن را ابر گروه نامید [۸]. فرض کنیم H یک مجموعه ناتهی و $\wp^*(H)$ مجموعه تمام زیرمجموعه‌های ناتهی H باشد، آنگاه نگاشت $H \times H \rightarrow \wp^*(H)$: $+$ یک ابر عمل روی H نامیده می‌شود. ساختار $(H, +)$ را یک ابر گروه گوئیم هرگاه: خاصیت شرکت پذیری برقرار باشد یعنی به ازای هر $x, y, z \in H$ داشته باشیم $(x + y) + z = x + (y + z)$ ؛ و در خاصیت تکثیر صدق کند یعنی به ازای هر $x \in H$ داشته باشیم $x + H = H + x = H$. کراسنر مفهوم ابر حلقه‌ها و ابر میدان‌ها را معرفی نمود که در واقع توسیعی از حلقه‌ها و میدان‌ها می‌باشند [۵]. ابرگروه $(H, +)$ را ابر گروه کانونی نامیم هرگاه: جابجایی باشد؛ عضو $\circ \in H$ وجود داشته باشد به طوری که برای هر $x \in H$ داشته باشیم $\circ + x = x + \circ = x$ ؛ برای هر $x \in H$ یک $x' \in R$ وجود داشته باشد به طوری که $\circ \in x + x'$ ؛ عضو x' را وارون x می‌نامیم.

ساختار جبری $(R, +, \cdot)$ که در شرایط زیر صدق می‌کند را ابر حلقه می‌نامیم: $(R, +)$ ابر گروه کانونی است؛ (R, \cdot) یک نیم گروه و دارای عضو همانی باشد؛ عمل \cdot نسبت به ابر عمل $+$ توزیع پذیر باشد. ابر حلقه $(R, +, \cdot)$ را جابجایی گوئیم هرگاه (R, \cdot) نیم گروه جابجایی باشد. ابر حلقه جابجایی و یکدار R و فاقد مقسوم علیه‌های صفر را یک ابر حوزه می‌نامیم.

* سخنران



زیرمجموعه ناتهی A از ابر حلقه R را یک زیر ابر حلقه R نامیم اگر $(A, +, \cdot)$ یک ابرحلقه باشد. زیرمجموعه ناتهی I از ابر حلقه R را یک ابر ایده‌آل نامیم؛ اگر برای هر $x, y \in R$ و هر $r \in R$ داشته باشیم $x - y \subseteq I$ و $rx, xr \in I$. ابر ایده‌آل سره M از ابر حلقه R را یک ابر ایده‌آل ماکسیمال نامیم؛ اگر تنها ابر ایده‌آل‌های شامل M ، خود M و R باشند. ابر حلقه $(R, +, \cdot)$ را ابر میدان نامیم اگر $(R^* = R \setminus \{0\}, \cdot)$ گروه باشد.

مثال ۱.۱. میدان اعداد گویای \mathbb{Q} و مجموعه اعداد طبیعی \mathbb{N} را در نظر می‌گیریم. مجموعه $\mathbb{Q}/\mathbb{N} = \{x\mathbb{N} | x \in \mathbb{Q}\}$ با ابر عمل و ضرب تعریف شده در زیر یک ابر میدان است:

$$x\mathbb{N} \oplus y\mathbb{N} = \{z\mathbb{N} | z \in x\mathbb{N} + y\mathbb{N}\}, \quad x\mathbb{N} \cdot y\mathbb{N} = xy\mathbb{N}$$

برای مطالعه بیشتر در زمینه ابر ساختارهای جبری می‌توان به [۱] و [۲] مراجعه نمود. در سال ۲۰۰۶ دواز و ثلاثی ابر ارزیاب را از یک ابر حلقه به یک گروه آبدلی تماماً مرتب تعریف کردند [۳]. در این مقاله ابر ارزیاب را از یک ابر میدان به توی گروه آبدلی تماماً مرتب تعریف می‌نماییم و سپس ویژگی‌های آن را بیان می‌کنیم.

۲ نتایج اصلی

در این بخش $(F, +, \cdot)$ را یک ابر میدان و $(G, +, \leq)$ یک گروه آبدلی تماماً مرتب در نظر می‌گیریم و به بیان تعاریف و قضایا می‌پردازیم.

تعریف ۱.۲. نگاشت پوشای $\nu: F \rightarrow G \cup \{\infty\}$ را یک ابر ارزیاب روی F نامیم اگر در ویژگی‌های زیر صدق کند:

$$1. \quad \nu(x) = \infty \Leftrightarrow x = 0.$$

$$2. \quad \nu(xy) = \nu(x) + \nu(y), \quad x, y \in R \text{ برای هر}$$

$$3. \quad \nu(z) \geq \min\{\nu(x), \nu(y)\}, \quad z \in x + y \text{ و هر } x, y \in R \text{ برای هر}$$

ملاحظه ۲.۲. فرض کنیم p یک عدد اول ثابت است. هر عدد گویای ناصفر x را می‌توان به صورت زیر نوشت $x = p^{\alpha} \frac{a}{b}$ که $\alpha \in \mathbb{Z}$ و $p \nmid a, p \nmid b, a, b \in \mathbb{Z}$.

مثال ۳.۲. ابر میدان \mathbb{Q}/\mathbb{N} در مثال ۱.۱ را در نظر می‌گیریم. نگاشت $\nu_p: \mathbb{Q}/\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z} \cup \{\infty\}$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم. فرض کنیم برای هر $x \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ $\nu_p(x\mathbb{N}) = \alpha$ و $\nu_p(0) = \infty$ یک ابر ارزیاب روی ابر میدان \mathbb{Q}/\mathbb{N} است.

لم ۴.۲. فرض کنیم $\nu: F \rightarrow G \cup \{\infty\}$ یک ابر ارزیاب است. در این صورت داریم:

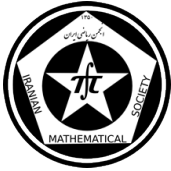
$$\text{الف) } \nu(1) = 0.$$

$$\text{ب) } \nu(x^{-1}) = -\nu(x)$$

$$\text{ج) } \nu(x) \neq \nu(y) \implies (\forall z \in x + y) \nu(z) = \min\{\nu(x), \nu(y)\}$$

قضیه ۵.۲. اگر $\nu: F \rightarrow G \cup \{\infty\}$ یک ابر ارزیاب روی ابر میدان F باشد؛ آنگاه F جابجایی است.

قضیه ۶.۲. فرض کنیم $\nu: F \rightarrow G \cup \{\infty\}$ یک ابر ارزیاب باشد. آنگاه:



الف) مجموعه $R_\nu = \{x \in F \mid \nu(x) \geq 0\}$ زیر ابر حلقه F است و آن را ابر حلقه ابر ارزیاب می‌نامیم.

ب) مجموعه $M_\nu = \{x \in F \mid \nu(x) > 0\}$ تنها ابر ایده‌آل ماکسیمال R_ν است.

ج) مجموعه $U_\nu = \{x \in F \mid \nu(x) = 0\}$ یک گروه شامل همه عناصر یک R_ν است.

مجموعه همه ابر ارزیاب‌ها روی ابر میدان F را با V_F نشان می‌دهیم و عناصر آن را با $[\nu]$ نشان می‌دهیم.

قضیه ۷.۲. ابر میدان F را در نظر می‌گیریم و فرض می‌کنیم R_F مجموعه همه زیر ابر حلقه‌های R از F باشد به طوری که برای هر $x \in F^* \Rightarrow x^{-1} \in R, x \notin R \Rightarrow x^{-1} \in R$. آنگاه تناظر دو سویی $\psi: V_F \rightarrow R_F$ وجود دارد به طوری که $\psi([\nu]) = R_\nu = \{x \in F \mid \nu(x) \geq 0\}$.

قضیه ۸.۲. دو گروه آبلی تماماً مرتب G_1 و G_2 را در نظر می‌گیریم و فرض می‌کنیم $f: G_1 \cup \{\infty\} \rightarrow G_2 \cup \{\infty\}$ که $f(\infty) = \infty$ یک هم‌ریختی حافظ ترتیب باشد. بعلاوه فرض کنیم $\nu: F \rightarrow G_1 \cup \{\infty\}$ یک ابر ارزیاب باشد. آنگاه $\nu \circ f = \nu f$ یک ابر ارزیاب است.

تعریف ۹.۲. ابر ارزیاب‌های ν_1, ν_2 روی ابر میدان F را معادل گوئیم اگر و تنها اگر شرایط زیر برقرار باشد:

$$(R_{\nu_1}, M_{\nu_1}) = (R_{\nu_2}, M_{\nu_2}).$$

قضیه ۱۰.۲. ابر میدان F و ابر ارزیاب‌های ν_1, ν_2 را روی آن در نظر می‌گیریم. ν_1, ν_2 معادلند اگر و تنها اگر نگاشت حافظ ترتیب $f: G_{\nu_1} \cup \{\infty\} \rightarrow G_{\nu_2} \cup \{\infty\}$ وجود داشته باشد به طوری که $f(\infty) = \infty, \nu_2 = \nu_1 \circ f$.

در قضیه زیر نشان داده می‌شود که یک ابر ارزیاب به توی هر گروه آبلی تماماً مرتب وجود دارد.

قضیه ۱۱.۲. فرض کنیم $(G, +, \leq)$ یک گروه آبلی تماماً مرتب است در این صورت ابر میدان F و ابر ارزیاب ν وجود دارند به طوری که $\nu(F^*) = G$.

اثبات. ابر میدان مرتب دلخواه K را در نظر می‌گیریم و فرض می‌کنیم R مجموعه همه نگاشت‌های حافظ ترتیب $f: G \rightarrow F$ باشد به طوری که مجموعه $\sigma(f) = \{\gamma \in G \mid f(\gamma) \neq 0\}$ متناهی است. ابر عمل \oplus و عمل \odot را روی R به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

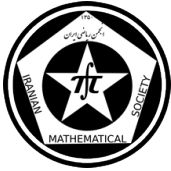
$$(f \oplus g)(\gamma) = f(\gamma) + g(\gamma),$$

$$(f \odot g)(\gamma) = \sum_{\gamma_1 \odot \gamma_2 = \gamma} f(\gamma_1)g(\gamma_2).$$

آنگاه (R, \oplus, \odot) یک ابرحوزه است.

نگاشت $\nu: R \rightarrow G$ را با ضابطه‌ی، کوچکترین عنصر مجموعه $\sigma(f)$ اگر $\nu(f) = \sigma(f)$ و $\nu(0) = \infty$ تعریف می‌کنیم. فرض می‌کنیم F ابر میدان کسرهای R باشد؛ ν را به F توسیع می‌دهیم؛ می‌توان نشان داد ν یک ابر ارزیاب روی F است.

□



ص: ۴-۴

چهل و ششمین کنفرانس ریاضی ایران

۳-۶ شهریور ۱۳۹۴

دانشگاه یزد

ابراززیابها و ابرحلقه‌های ابرارزیابی

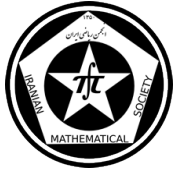


پوستر

مراجع

- [1] P. Corsini, *Prolegomena Of Hypergroup Theory*, Second edition, Aviani editor, (1993).
- [2] B. Davvaz, V. Leoreanu-Fotea, *Hyperring Theory and Applications*, International Academic Press, 115, Palm Harber, USA, (2007).
- [3] B. Davvaz, A. Salasi *A realization of hyperrings*, Comm. Algebra, 12 (2006), pp. 4389-4400.
- [4] H. Hasse, *zwei existenztheoreme über algebraische zahlkörper*, Math, 95 (1925), pp. 229-238.
- [5] M. Krasner, *Approximation des corps valués complets de caractéristique p , $p > 0$, par ceux de caractéristique zero*, Colloque d' Algèbre Supérieure , Bruxelles, 1957.
- [6] W. Krull, *Allgemeine Bewertungstheorie*, J. reine angew. Math., 167 (1932), pp. 160-196.
- [7] J. Kürschák, *Über Limesbildung und allgemeine Körpertheorie*, Proceedings of the 5th International Congress of Mathematicians Cambridge 1912, 1 (1913), pp. 285-289.
- [8] F. Marty, *Sur une generalization de la notion de group*, 8th congress Math. Scandinaves, Stockholm, (1934), pp. 45-49.
- [9] A. Ostrowski, *Untersuchungen zur arithmetischen theorie der körper*, Math, Z., 39 (1934), pp. 269-404.
- [10] F. K. Schmidt, *Mehrfach perfekte Körper*, Math, Annalen, 108 (1933), pp. 1-25.

پست الکترونیکی: kh_mirdar@stu.yazd.ac.ir
پست الکترونیکی: anvariye@yazd.ac.ir

تعداد کلاس‌های تزویج زیرگروه‌های غیرنرمال و نرمال‌سازهای گروه G

فرزانه مومبنی گرمسیری*
دانشگاه علم و صنعت ایران

زهره مستقیم
دانشگاه علم و صنعت ایران

چکیده

فرض کنید G یک گروه متناهی باشد. تعداد کلاس‌های تزویج زیرگروه‌های غیرنرمال G با $v(G)$ و تعداد کلاس‌های تزویج نرمال‌سازهای زیرگروه‌های G با $w(G)$ نشان داده می‌شود. در این مقاله برای گروه متناهی دلخواه G ، ارتباط بین $v(G)$ و $w(G)$ را بررسی می‌کنیم.

واژه‌های کلیدی: کلاس تزویج، نرمال‌ساز، کلاس پوچ توانی، p -گروه

Mathematics Subject Classification [2010]: 20E45, 20D25

۱ مقدمه

فرض کنید G یک گروه متناهی باشد. سال ۱۹۹۱، رحمت‌الله^۱ و لاهایه^۲ ثابت کردند که اگر G یک p -گروه باشد، آن گاه $۱ \leq v(G) \leq p$ یا $v(G) \geq p$. هم‌چنین در سال ۲۰۱۲، برندل^۳، سیکا^۴ و توتا^۵ ثابت کردند که اگر G یک p -گروه متناهی باشد که $w(G) \leq p + ۱$ ، آن گاه $c(G) \leq ۳$ و اگر $p \neq ۲$ ، آن گاه $c(G) \leq ۲$. واضح است که هرگاه G یک گروه ددکیند باشد، $v(G) = ۰$ و $w(G) = ۱$. هم‌چنین اگر U یک نرمال‌ساز در G باشد، آن گاه همه مزدوج‌های U در G نرمال‌سازند.

تعریف ۱.۱. فرض کنید G یک گروه متناهی باشد. تعداد کلاس‌های تزویج زیرگروه‌های غیرنرمال G را با $v(G)$ نشان می‌دهیم.

تعریف ۲.۱. فرض کنید G یک گروه متناهی باشد. تعداد کلاس‌های تزویج نرمال‌سازهای زیرگروه‌های G را با $w(G)$ نشان می‌دهیم.

قضیه ۳.۱. (قضیه از مرجع [۳] را ببینید). فرض کنید G یک p -گروه متناهی با شرط $w(G) \leq p + ۱$ باشد. در این صورت $c(G) \leq ۳$. اگر $p \neq ۲$ ، آن گاه $c(G) \leq ۲$.

لم ۴.۱. (تمرین ۱۸ از مرجع [۱] را ببینید). فرض کنید G یک p -گروه از کلاس پوچ توانی ۲ باشد. در این صورت برای هر $x, y \in G$ و هر عدد صحیح n :

$$[x, y^n] = [x^n, y] = [x, y]^n \text{ (الف)}$$

$$(xy)^n = x^n y^n [y, x]^{\binom{n}{2}} \text{ (ب)}$$

* سخنران

^۱Rhemtulla

^۲La Haye

^۳Brandl

^۴Sica

^۵Tota



۲ نتایج اصلی

قضیه ۱.۲. فرض کنید G یک گروه متناهی باشد. در این صورت $w(G) \leq v(G) + 1$.

اثبات. فرض کنید $H, K \leq G$. هرگاه H و K مزدوج باشند، آن‌گاه $g \in G$ وجود دارد به طوری که $H = gKg^{-1}$. لذا $N_G(H) = N_G(gKg^{-1}) = gN_G(K)g^{-1}$. چون نرمال‌سازهای G نیز مزدوج اند. حال فرض کنید مجموعه‌های C_1, C_2, \dots, C_n کلاس‌های تزویج زیرگروه‌های غیرنرمال G باشند. چون نرمال‌سازهای زیرگروه‌های مزدوج در G ، مزدوج هستند لذا نرمال‌سازهای زیرگروه‌های غیرنرمال G ، حداکثر n کلاس تزویج تشکیل می‌دهند.

هم‌چنین برای هر زیرگروه نرمال H در G داریم $N_G(H) = G$. لذا $w(G) \leq n + 1 = v(G) + 1$. □

مثال ۲.۲. فرض کنید p یک عدد اول و $n \geq 3$ برای $p > 2$ و $n \geq 4$ برای $p = 2$. اگر $G = M(p^n) = \langle a, b | a^{p^{n-1}} = b^p = 1, a^b = a^{1+p^{n-2}} \rangle$

آن‌گاه $w(G) = 2$.

اثبات. فرض کنید H_1, \dots, H_t زیرگروه‌های غیرنرمال G باشند. بنا به مثال ۲.۱ از مرجع [۲]، $v(G) = 1$ ، لذا H_1, \dots, H_t مزدوج اند. بنابراین $N_G(H_1), \dots, N_G(H_t)$ مزدوج‌اند. اما H_i ها در G غیر نرمال اند، لذا $N_G(H_i) \neq G$ به ازای هر i . هم‌چنین برای هر زیرگروه K نرمال در G (از جمله خود G) $N_G(K) = G$. لذا نرمال‌سازهای زیرگروه‌های G تشکیل دو کلاس تزویج می‌دهند. بنابراین $w(G) = 2$. □

مثال ۳.۲. فرض کنید p یک عدد اول فرد و $n \geq 4$ یک عدد صحیح باشد. اگر $G = L(p^n) = \langle a, b | a^{p^{n-2}} = b^{p^2} = 1, a^b = a^{1+p^{n-3}} \rangle$

آن‌گاه $c(L(p^n)) = 2$.

اثبات. بنا به قضیه ۱.۲، $w(G) \leq v(G) + 1$. هم‌چنین بنا به مثال ۲.۲ از مرجع [۲]، $v(G) = p$. لذا $w(G) \leq p + 1$.

چون $p > 2$ پس بنا به قضیه ۳.۱، $c(G) \leq 2$.

حال اگر $c(G) = 1$ ، آن‌گاه G آبلی است که تناقض است. بنابراین $c(L(p^n)) = 2$. □

قضیه ۴.۲. فرض کنید G یک p -گروه از مرتبه p^n ($p > 2$) با $v(G) \leq p$ باشد. در این صورت به ازای هر $x, y \in G$ و هر عدد صحیح n :

$$\begin{aligned} \text{الف)} \quad [x, y^n] &= [x^n, y] = [x, y]^n \\ \text{ب)} \quad (xy)^n &= x^n y^n [y, x]^{\binom{n}{2}} \end{aligned}$$

اثبات. چون $w(G) \leq v(G) + 1$ ، لذا $w(G) \leq p + 1$. اما $p > 2$ ، لذا بنا به قضیه ۳.۱، $c(G) \leq 2$. اگر $c(G) = 1$ آن‌گاه G آبلی است و بنابراین $[x, y^n] = [x^n, y] = [x, y]^n = 1$. هم‌چنین چون G آبلی است داریم $(xy)^n = x^n y^n$. چون $[y, x] \in G' = 1$ ، لذا $[y, x] = 1$. پس $(xy)^n = x^n y^n [y, x]^{\binom{n}{2}}$. اگر $c(G) = 2$ ، آن‌گاه بنا به ل ۴.۱، حکم برقرار است. □

ل ۵.۲. فرض کنید p یک عدد اول فرد و $n \geq 4$ یک عدد صحیح باشد.

اگر $G = L(p^n) = \langle a, b | a^{p^{n-2}} = b^{p^2} = 1, a^b = a^{1+p^{n-3}} \rangle$ آن‌گاه $w(G) = p + 1$.



چهل و ششمین کنفرانس ریاضی ایران

۳-۶ شهریور ۱۳۹۴

دانشگاه یزد



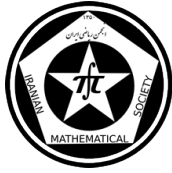
ص: ۳-۳

تعداد کلاس‌های تزویج زیرگروه‌های غیرنرمال و نرمال‌سازهای گروه G

پوستر

مراجع

- [1] Y. Berkovich, *Groups of prime power order*, Vol. 1. De Gruyter Expositions in Mathematics, 46, Walter de Gruyter, Berlin, 2008.
- [2] R. Brandl, *Conjugacy classes of subgroups of finite p -groups: the first gap*, Proc. Ischia Group Theory 2010 (2012), 39-44.
- [3] R. Brandl, C. Sica, M. Tota, *p -groups with few conjugacy classes of normalizers*, Monatsh. Math, 172 (2013), 151-159.



حلقه های شبه دیووی راست

صادق صادقی وفا

دانشگاه یاسوج

چکیده

حلقه های شبه دیووی راست، ددکیند متناهی و هم چنین دارای خاصیت IBN هستند. روی هر حلقه ی اولیه ی راست، حلقه های شبه دیووی راست، حلقه های بخشی را نتیجه می دهند. نتیجه مهم در این مقاله این است که روی هر حلقه ی منظم، حلقه های دیووی راست، شبه دیووی راست، کاهش یافته، آبله، نیمه تعویض پذیر و منظم قوی معادل هستند.

واژه های کلیدی: حلقه ی شبه دیووی راست، حلقه ی منظم، ایدآل راست ماکسیمال

Mathematics Subject Classification [2015]: 53C31

۱ مقدمه

در این مقاله حلقه ها یکدار در نظر گرفته می شوند. حلقه ی R دیووی راست نامیده می شود در صورتی که هر ایدآل راست از آن یک ایدآل دو طرفه باشد. حلقه ی R شبه دیووی راست نامیده می شود. هرگاه هر ایدآل راست ماکسیمال از آن یک ایدآل دو طرفه باشد. واضح است که هر حلقه دیووی راست، شبه دیووی راست است اما عکس آن لزوماً برقرار نیست. حلقه های شبه دیووی در ابتدا توسط یو [۲] در سال ۱۹۹۵ مورد بررسی قرار گرفت که مربوط به حدس بس در سال ۱۹۶۰ می باشد. سپس جبردانان دیگری مانند لم [۳] و لی [۱] به مطالعه ی این حلقه ها و ارتباط آنها با حلقه های دیگر پرداختند.

تعریف ۱.۱. حلقه ی R شبه دیووی راست نامیده می شود هرگاه هر ایدآل راست ماکسیمال از آن یک ایدآل دو طرفه باشد. حلقه ی R کاهش یافته نامیده می شود در صورتی که برای هر $a \in R$ ، $a^2 = 0$ ، نتیجه دهد $a = 0$. حلقه ی R نیمه تعویض پذیر نامیده می شود در صورتی که برای هر $a, b \in R$ اگر $ab = 0$ آنگاه $aRb = 0$. حلقه ی R منظم (فون نویمن) نامیده می شود هرگاه برای هر $x \in R$ ، $a \in R$ وجود داشته باشد به طوری که $axa = a$ و حلقه ی R را منظم قوی می نامند هرگاه برای هر $x \in R$ ، $a \in R$ وجود داشته باشد به طوری که $a = ax$. حلقه ی R آبله نامیده می شود در صورتی که هر عضو خودتوان آن مرکزی باشد. حلقه ی R اولیه ی راست نامیده می شود در صورتی که R -مدول راست ساده و باوفا وجود داشته باشد. حلقه ی R ددکیند متناهی نامیده می شود هرگاه برای هر $a, b \in R$ ، $ab = 1$ نتیجه دهد $ba = 1$.

مثال ۲.۱. هر حلقه بخشی و هر حلقه موضعی شبه دیووی راست است.

گزاره ۳.۱. حلقه ی R شبه دیووی راست است اگر و تنها اگر $\frac{R}{rad(R)}$ شبه دیووی راست باشد.

قضیه ۴.۱. حلقه ی R شبه دیووی راست است اگر و تنها اگر برای هر $x, y \in R$ ، $xR + (yx - 1)R = R$.

اثبات. فرض کنیم $xR + (yx - 1)R \neq R$. در این صورت ایدآل راست ماکسیمال M از R وجود دارد به طوری که $xR + (yx - 1)R \subseteq M$. بنابراین $x, yx - 1 \in M$. لذا $yx \in M$ و در نتیجه $1 \in M$ ، که با ماکسیمال بودن



M تناقض دارد. برعکس فرض کنیم R شبه دیووی راست نباشد. در این صورت ایدآل راست ماکسیمال M از R وجود دارد که دوطرفه نیست. عضو $y \in M$ را طوری در نظر می گیریم که $yM \not\subseteq M$ نباشد. چون yM ایدآل راست است پس $M + yM = R$. لذا $m, x \in M$ وجود دارند که $1 = m + yx$. بنابراین

$$xR + (yx - 1)R = xR + mR \subseteq M \neq R.$$

این تناقض است. \square

لم ۵.۱. اگر R یک حلقه ی شبه دیووی راست باشد آن گاه R دکیند متناهی است.

اثبات. با استفاده از قضیه ی قبل، برای هر $a, b \in R$ ، $bR + (ab - 1)R = R$. در این صورت اگر $ab = 1$ ، $bR + (ab - 1)R = R$. لذا $c \in R$ وجود دارد به طوری که $bc = 1$. بنابراین

$$a = a.1 = a.(bc) = (ab)c = c.$$

در نتیجه $1 = ba$.

\square

قضیه ۶.۱. فرض کنیم حلقه ی R اولیه ی راست باشد. در این صورت، R شبه دیووی راست است اگر و تنها اگر حلقه ی بخشی باشد.

اثبات. فرض کنید حلقه ی R اولیه ی راست باشد. در این صورت R -مدول راست ساده و با وفا مانند S وجود دارد. بنابراین $S \cong R/m$ که در آن m ایدآل راست ماکسیمال از R است. اکنون چون R شبه دیووی راست است پس m یک ایدآل دوطرفه از R و در نتیجه $S.m = 0$. از طرفی S با وفا است، لذا $m = 0$ و در نتیجه R حلقه بخشی است، زیرا دارای ایدآل دوطرفه ی غیر بدیهی نیست. برعکس واضح است، چون هر حلقه بخشی شبه دیووی راست است. \square

نتیجه ۷.۱. هر حلقه ی شبه دیووی راست ساده، حلقه ی بخشی است.

گزاره ۸.۱. اگر حلقه ی R شبه دیووی راست باشد آن گاه $\overline{R} = \frac{R}{rad(R)}$ کاهش یافته است.

اثبات. فرض کنیم $\bar{x} = 0$ جایی که برای هر $x \in R$ ، $\bar{x} = x + rad(R)$ ، به ازای هر $\bar{y} \in \overline{R}$ ، داریم

$$(\bar{y} \bar{x} - \bar{1})\bar{x} = \bar{y}x^2 - \bar{x} = -\bar{x}.$$

پس $\bar{x} \in (\bar{y} \bar{x} - \bar{1})\overline{R}$. بنابراین

$$\overline{R} = \bar{x}\overline{R} + (\bar{y} \bar{x} - \bar{1})\overline{R} = (\bar{y} \bar{x} - \bar{1})\overline{R}.$$

چون R شبه دیووی راست است بنابراین R و در نتیجه \overline{R} دکیند متناهی است. لذا برای هر $\bar{y} \in \overline{R}$ ، $\bar{y} \bar{x} - \bar{1}$ وارون پذیر و در نتیجه $\bar{x} \in \overline{R}$. بنابراین $\bar{x} = 0$. \square

\square

نتیجه ۹.۱. فرض کنیم حلقه ی R منظم (فون نویمن) باشد. در این صورت شرایط زیر معادل هستند.

(۱) حلقه ی R دیووی راست است.

(۲) حلقه ی R شبه دیووی راست است.

(۳) حلقه ی R کاهش یافته است.



(۴) حلقه ی R نیمه تعویض پذیر است.

(۵) حلقه ی R آبلی است.

(۶) حلقه ی R منظم قوی است.

اثبات. ۱ \Leftarrow ۲ واضح است. ۲ \Leftarrow ۳ چون R منظم است، پس $rad(R) = 0$. لذا با استفاده از گزاره ی قبل R کاهش یافته است. ۳ \Leftarrow ۴ فرض کنیم برای هر $a, b \in R$ ، $ab = 0$. در این صورت $baba = (ba)^2 = 0$. چون R کاهش یافته است پس $ba = 0$. بنابراین $(aRb)^2 = aRbaRb = 0$. مجدداً از کاهش یافته بودن R داریم $aRb = 0$. ۴ \Leftarrow ۵ فرض کنیم $e^2 \in R$ ، $e \neq 0$. در این صورت $e(1-e) = 0 = (1-e)e$. چون R نیمه تعویض پذیر است پس $eR(1-e) = (1-e)Re$. بنابراین برای هر $r \in R$ داریم $er = re$. ۵ \Leftarrow ۶ فرض کنیم $x \in R$. در این صورت $y \in R$ وجود دارد به طوری $x = xyx$. چون R آبلی است بنابراین $x = x^2y$. این نشان می دهد R منظم قوی است. ۶ \Leftarrow ۱ کفایت نشان دهیم برای هر aR ، $a \in R$ ایدال دوطرفه است. چون R منظم است پس هر ایدال اصلی از R با عنصر خودتوان تولید می شود. لذا $aR = eR$ که در آن $e = e^2 \in R$. چون R آبلی است پس aR ایدال دوطرفه از R است. \square

تعریف ۱۰.۱. فرض کنیم R یک حلقه و $n \geq 1$ ، یک عدد صحیح مثبت باشد. R پایای متناهی نامیده می شود هرگاه $M_n(R)$ دککیند متناهی باشد که این معادل است با این که برای هر R -مدول M ، اگر $R^n \cong R^n \oplus M$ ، آن گاه $M = 0$.

قضیه ۱۱.۱. اگر حلقه ی R شبه دیووی راست است آن گاه R پایای متناهی است.

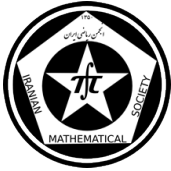
اثبات. فرض کنیم $\{m_i : i \in I\}$ مجموعه ی ایدال های راست ماکسیمال حلقه ی R باشد. در این صورت داریم $rad(R) = \bigcap_{i \in I} m_i$. چون برای هر $i \in I$ ، R/m_i شبه دیووی راست و ساده است، پس به ازای هر $i \in I$ ، R/m_i حلقه ی بخشی است. بنابراین برای هر $n < \infty$ ، $M_n(R)/M_n(m_i) \cong M_n(R/m_i)$ ، $M_n(R)/M_n(m_i)$ حلقه ی ساده است. هم ریختی $f : M_n(R) \rightarrow \prod_i M_n(R/m_i)$ را در نظر می گیریم. هسته ی f برابر $M_n(rad(R)) = M_n(\bigcap_{i \in I} m_i)$ است. بنابراین $rad(M_n(R)) = M_n(rad(R))$. لذا $M_n(R)$ دککیند متناهی است. \square

تعریف ۱۲.۱. گوئیم حلقه ی R دارای خاصیت IBN است هرگاه برای هر دو عدد طبیعی m و n ، اگر $R^n \cong R^m$ ، آن گاه $m = n$.

قضیه ۱۳.۱. اگر حلقه ی R شبه دیووی راست باشد آن گاه R دارای خاصیت IBN است.

اثبات. فرض کنیم m و n دو عدد طبیعی باشند به طوری که $R^n \cong R^m$. نشان می دهیم $m = n$. فرض کنیم چنین نباشد. اگر $n > m$ آن گاه $R^n = R^m \oplus R^{n-m}$. حال با استفاده از قضیه ی قبل $R^{n-m} = 0$ و در نتیجه $R = 0$. برای حالت $m > n$ باز هم به تناقض می رسیم. \square

تعریف ۱۴.۱. حلقه ی R کش راست نامیده می شود در صورتی که هر ایدال راست ماکسیمال از R به صورت $ann_r(a)$ به ازای $a \in R$ باشد.



قضیه ۱۵.۱. فرض کنید حلقه R کُش راست باشد. در این صورت، اگر حلقه R نیمه تعویض پذیر باشد، آن گاه R شبه دیووی راست است.

اثبات. فرض کنیم m یک ایدآل راست ماکسیمال از R باشد. پس $m = \text{ann}_r(a)$ که در آن $a \in R$. برای هر $s \in m$ داریم $as = 0$. چون R نیمه تعویض پذیر است پس $aRs = 0$. بنابراین برای هر $s \in m$ ، $Rs \subseteq \text{ann}_r(a) = m$. این نشان می دهد که m یک ایدآل چپ از R و در نتیجه R شبه دیووی راست است. \square

مراجع

- [1] C.O. Kim, H. K. Kim and S. H. Jang: *A study of quasi-duo rings*, Bull. Korean Math. Soc. 36(1999), 579-588.
- [2] H.-P. Yu: *On quasi-duo rings*, Glasgow Math. J. 37(1995), 21-31.
- [3] [5] T.Y. Lam, A.S. Dugas, *Quasi-duo rings and stable range descent*, J. Pure and Appl. Alg. 195 (2005) 243-259.
- [4] C. Huh, S.H. Jang, C.O. Kim, Y. Lee, *Rings whose maximal one-sided ideals are two-sided*, Bull. Korean Math. Soc. 39(3) (2002) 411-422.

پست الکترونیکی: ir.sadegh@ymail.com



دسته بندی ایثار تکواره ها بر اساس شرط (E') در سیستم های راست (خارج قسمتی ریس)

ایثار گچی پوربنه*
دانشگاه سیستان و بلوچستان

حسین محمدزاده ثانی
دانشگاه سیستان و بلوچستان

در این مقاله هدف است که این شرط از سیستم ها را در حالت های کلی، دوری و خارج قسمتی ریس مورد بررسی قرار دهیم و دسته بندی هایی از تکواره ها وقتی که شرط (E') از سیستم ها با خانواده همواری ها و برخی خواص موجود از سیستم ها مورد مقایسه قرار می گیرد ارائه دهیم. همچنین حالت هایی را مورد بررسی قرار می دهیم که بر اساس آن شرط (E') خانواده همواری ها و برخی از خواص موجود بر سیستم ها را در حالت کلی نتیجه می دهد.

واژه های کلیدی: همواری، تکواره، شرط (E')

Mathematics Subject Classification [2010]: 20M30

۱ مقدمه

ابتدا به تعریف شرط هایی می پردازیم که در ادامه به کار برده می شوند و سپس قضایایی را بیان و از آن قضایا نتایجی که بدست می آید را مطرح می کنیم همچنین برای مفاهیم و تعاریف مورد نیاز که در این مقاله استفاده شده است می توان به [۲] و [۵] رجوع نمود.

تعریف ۱.۱. گوئیم S -سیستم راست A_S در شرط (P) صدق می کند، هرگاه داشته باشیم:

$$(\forall a, a' \in A_S) (\forall s, s' \in S)$$

$$(as = a's' \Rightarrow (\exists a'' \in A_S)(\exists u, v \in S) (a = a''u \wedge a' = a''v \wedge us = vs'))$$

(۲) گوئیم S -سیستم راست A_S در شرط (E) صدق می کند، هرگاه داشته باشیم:

$$(\forall a \in A_S) (\forall s, s' \in S) (as = as' \Rightarrow (\exists a' \in A_S)(\exists u \in S) (a = a'u \wedge us = us'))$$

تعریف ۲.۱. گوئیم S -سیستم راست A_S در شرط (E') صدق می کند، هرگاه داشته باشیم:

$$(\forall a \in A_S) (\forall s, s', z \in S) ((as = as', sz = s'z) \Rightarrow (\exists a' \in A_S)(\exists u \in S) (a = a'u \wedge us = us'))$$

واضح است که شرط (E) همواره شرط (E') را نتیجه می دهد. اما عکس این موضوع در حالت کلی برقرار نیست.

□

اثبات. به [۱] رجوع شود.

*سخنران



در زیر مخفف هایی را می آوریم که در ادامه مورد استفاده قرار می گیرند:

عقب بر ضعیف همواری $WPF =$

هموار هسته ای ضعیف $WKF =$

بطور اساسی هموار هسته ای ضعیف $PWKF =$

هموار هسته ای انتقالی $TKF =$

هموار ضعیف $WF =$

بطور اساسی هموار ضعیف $PWF =$

قضیه ۳.۱. برای هر تکواره S احکام زیر معادلند:

- (۱) هر S - سیستم راست که در شرط (E') صدق کند، WPF است.
- (۲) هر S - سیستم راست که در شرط (E') صدق کند، در شرط (P) نیز صدق می کند.
- (۳) هر S - سیستم راست که در شرط (E') صدق کند، WKF است.
- (۴) هر S - سیستم راست که در شرط (E') صدق کند، $PWKF$ است.
- (۵) هر S - سیستم راست که در شرط (E') صدق کند، TKF است.
- (۶) هر S - سیستم راست که در شرط (E') صدق کند، در شرط WP نیز صدق می کند.
- (۷) هر S - سیستم راست که در شرط (E') صدق کند، در شرط PWP نیز صدق می کند.
- (۸) S گروه است.

□

اثبات. به [۱] و [۴] رجوع شود.

قضیه ۴.۱. برای هر تکواره S احکام زیر معادلند:

- (۱) هر S - سیستم راست بخش پذیر، در شرط (E') صدق می کند.
- (۲) هر S - سیستم راست، در شرط (E') صدق می کند.
- (۳) هر S - سیستم راست متناهیاً تولید شده، در شرط (E') صدق می کند.
- (۴) هر S - سیستم راست دوری، در شرط (E') صدق می کند.
- (۵) هر S - سیستم راست تک دوری، در شرط (E') صدق می کند.
- (۶) $(\forall s, t, z \in S)((sz = tz) \Rightarrow (\exists u \in S, us = ut, \wedge \rho_{(s,t)}u))$
- (۷) $(\forall s, t, z \in S)((sz = tz) \Rightarrow (\exists e \in E(s), es = et, \wedge \rho_{(s,t)}e))$
- (۸) $(\forall s, t, z \in S)((sz = tz) \Rightarrow (\exists e \in E(s), \rho_{(s,t)} = \ker \lambda_e))$

□

اثبات. به [۱] و [۲] و [۳] رجوع شود.

لم ۵.۱. فرض کنید S یک تکواره باشد، هرگاه هر S - سیستم راست خارج قسمتی ریس در شرط (E') صدق کند، در این صورت،

$$(\forall e, f \in E(S) \setminus \{1\}) ef = e$$

□

اثبات. به [۱] و [۳] رجوع شود.

قضیه ۶.۱. هرگاه تکواره S خود توان باشد، در این صورت احکام زیر معادلند:

- (۱) هر S - سیستم راست، در شرط (E') صدق می کند.



- (۲) هر S - سیستم راست متناهیاً تولید شده، در شرط (E') صدق می کند.
- (۳) هر S - سیستم راست دوری، در شرط (E') صدق می کند.
- (۴) هر S - سیستم راست تک دوری، در شرط (E') صدق می کند.
- (۵) هر S - سیستم راست خارج قسمتی ریس، در شرط (E') صدق می کند.
- (۶) هر S - سیستم راست بخش پذیر، در شرط (E') صدق می کند.
- (۷) هر S - سیستم راست بطور اساسی انژکتیو ضعیف، در شرط (E') صدق می کند.
- (۸) هر S - سیستم راست fg - انژکتیو ضعیف، در شرط (E') صدق می کند.
- (۹) هر S - سیستم راست انژکتیو ضعیف، در شرط (E') صدق می کند.
- (۱۰) هر S - سیستم راست انژکتیو، در شرط (E') صدق می کند.
- (۱۱) هر S - سیستم راست هم آزاد، در شرط (E') صدق می کند.
- (۱۲) $(\forall e, f \in S \setminus \{1\})ef = e$

اثبات. به [۱] رجوع شود.

□

در زیر از قضایای گفته شده نتایج را خواهیم آورد

نتیجه ۷.۱. برای هر تکواره S احکام زیر معادلند:

- (۱) هر S - سیستم راست که در شرط (E') صدق کند، آزاد است.
- (۲) هر S - سیستم راست که در شرط (E') صدق کند، مولد تصویری است.
- (۳) هر S - سیستم راست که در شرط (E') صدق کند، تصویری است.
- (۲) هر S - سیستم راست که در شرط (E') صدق کند، بطور قوی هموار است.
- (۵) $S = \{1\}$

□

اثبات. به [۱] و [۲] رجوع شود.

نتیجه ۸.۱. برای هر تکواره S احکام زیر معادلند:

- (۱) هر S - سیستم راست تک دوری، عقب بر ضعیف هموار است.
- (۲) $S = G$ یا $S = \{0, 1\}$ (در اینجا G گروه است)

□

اثبات. به [۱] و [۲] و [۴] رجوع شود.

مراجع

- [1] A. golchin, and H. mohammadzadeh, *On Homological Classification of Monoids by Condition (E') of Right Acts*, Yokohama Mathematical, 54 (2007), pp. 79-88.
- [2] M. Kilp, U. Knauer and A. Mikhalev *Monoids, Acts and Categories: With Applications to Wreath Products and Graph: A Handbook for Students and Researchers*, Walter de Gruyter, Berlin., 2000.



چهل و ششمین کنفرانس ریاضی ایران

۳-۶ شهریور ۱۳۹۴

دانشگاه یزد



پوستر دسته بندی ایتار تکواره ها بر اساس شرط (E') در سیستم های راست (خارج قسمتی ریس) ص: ۴-۴

- [3] M. Kilp, and V. Laan, *On Flatness Properties of Cyclic Acts*, Comm. Algebra., 28 (6) (2000), 2919-2926.
- [4] S. Bulman-Fleming, M. Kilp, and V. Laan, *Pullbacks and Flatness Properties of Acts II*, Comm. Algebra., 29 (2) (2001), 851-878.
- [5] V. Laan, *Pullbacks and Flatness Properties of Acts I*, Comm. Algebra., 29 (2) (2001), 829-850.

پست الکترونیکی: hmsdm@math.usb.ac.ir
پست الکترونیکی: isargachipour@gmail.com



مدول های دیووی راست

محمد اندرزگو

صادق صادقی وفا

دانشگاه یاسوج

دانشگاه یاسوج

چکیده

اگر M_R یک R -مدول راست تک پایایی و آرتینی باشد، آن گاه M دیووی راست است. یک مدول دوری روی هر حلقه R تعویض پذیر، دیوو است. هر مدول دیووی راست، دککیند متناهی، هاپفی تعمیم یافته و هم هاپفی ضعیف است. هم چنین نشان خواهیم داد که هر مدول ضربی، دیووی راست است.

واژه‌های کلیدی: مدول های دیووی راست، حلقه R منظم، ایدال راست ماکسیمال.

Mathematics Subject Classification [2010]: 13D45, 39B42

۱ مقدمه

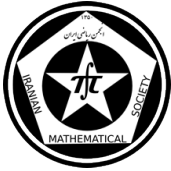
در این مقاله حلقه ها یکدار و مدول ها یکانی در نظر گرفته می شوند. زیر مدول N از R -مدول راست M را پایایی کامل گوئیم هرگاه برای هر $f \in \text{End}_R(M)$ داشته باشیم $f(N) \subseteq N$. R -مدول راست M را دیوو گوئیم در صورتی که هر زیر مدول از M پایایی کامل باشد. جبردانانی مانند اسمیت و آقاییف در سال ۲۰۰۶ مدول های دیوو را مورد بررسی قرار دادند.

تعریف ۱.۱. زیر مدول N از R -مدول راست M را پایایی کامل گوئیم هرگاه برای هر $f \in \text{End}_R(M)$ داشته باشیم $f(N) \subseteq N$. R -مدول راست M را دیوو گوئیم در صورتی که هر زیر مدول از M پایایی کامل باشد. R -مدول راست M دیووی ضعیف نامیده می شود هرگاه هر جمعونند مستقیم از M پایایی کامل باشد. مدول M تک پایایی نامیده می شود در صورتی که برای هر دو زیر مدول L و N از M ، $L \subseteq N$ یا $N \subseteq L$. مدول M هاپفی تعمیم یافته نامیده می شود هرگاه هر درون ریختی پوشا از M هسته R کوچک داشته باشد. مدول M هم هاپفی ضعیف نامیده می شود در صورتی که هر درون ریختی یک به یک از M دارای نقش اساسی باشد. حلقه R دککیند متناهی نامیده می شود هرگاه برای هر $a, b \in R$ ، $ab = 1$ نتیجه دهد $ba = 1$.

مثال ۲.۱. اگر M یک مدول راست ساده باشد، آن گاه (0) و M زیر مدول های پایایی کامل از M هستند. در نتیجه M دیووی راست است.

قضیه ۳.۱. فرض کنیم R یک حلقه باشد. در این صورت R -مدول M دیوو است اگر و تنها اگر برای هر درون ریختی f از M و هر عضو m از M ، r متعلق به R وجود داشته باشد به طوری که $f(m) = mr$.

اثبات. فرض کنیم f متعلق به حلقه R درون ریختی M باشد. چون برای هر عضو m از M مانند mR ، mR یک زیر مدول از M و M دیووی راست است، پس $f(mR) \subseteq mR$. بنابراین $r \in R$ وجود دارد به طوری که $f(m) = mr$. برعکس فرض کنیم N یک زیرمدول از M باشد. چون برای هر عضو n از N مانند nR وجود دارد به طوری که $f(n) = nr \in N$. در نتیجه $f(N) \subseteq N$. \square



نتیجه ۴.۱. فرض کنیم M یک مدول دوری روی حلقه ی تعویض پذیر R باشد، در این صورت M دیووست.

نتیجه ۵.۱. فرض کنیم M یک مدول دیووی روی حلقه ی تعویض پذیر R باشد، در این صورت حلقه ی $\text{End}_R(M)$ تعویض پذیر است.

مثال ۶.۱. \mathbb{Q} به عنوان \mathbb{Z} -مدول دیووی نیست.

قضیه ۷.۱. فرض کنیم R -مدول راست M دیوو و $M = M_1 \oplus M_2$ یک جمع مستقیم زیر مدول های M_1 و M_2 باشد. در این صورت

$$\text{Hom}_R(M_1, M_2) = 0, \text{Hom}_R(M_2, M_1) = 0.$$

اثبات. فرض کنیم $f \in \text{Hom}_R(M_1, M_2)$ ، دنباله ی زیر را در نظر می گیریم.

$$M \xrightarrow{\pi_1} M_1 \xrightarrow{f} M_2 \xrightarrow{\iota_2} M.$$

$\iota_2 \circ f \circ \pi_1$ یک درون ریختی از M و بنابر دیووی راست بودن M داریم

$$\iota_2 \circ f \circ \pi_1(M_1) \subseteq M_1.$$

لذا $f(M_1) = \iota_2 \circ f \circ \pi_1(M_1) \subseteq M_1$ از طرفی $f(M_1) \subseteq M_2$ بنابراین $f(M_1) \subseteq M_1 \cap M_2 = 0$. در نتیجه $\text{Hom}_R(M_1, M_2) = 0$. به طور مشابه می توان نشان داد که $\text{Hom}_R(M_2, M_1) = 0$.

قضیه ۸.۱. اگر M یک R -مدول راست تک پیایی و آرتینی باشد آن گاه M دیووی راست است.

اثبات. از فرض کنیم M_R دیوو نباشد. در این صورت زیر مدول غیر صفر L از M و یک درون ریختی g از M وجود دارد به طوری که $L \not\subseteq g(L)$. چون M تک پیایی است پس $L \subseteq g(L)$. در این صورت داریم

$$L \subseteq g(L) \subseteq g^2(L) \subseteq \dots$$

زنجیر کاهشی زیر را در نظر می گیریم.

$$M \supseteq g(M) \supseteq g^2(M) \supseteq \dots$$

چون M آرتینی است، عدد صحیح مثبت n وجود دارد که $g^n(M) = g^{n+1}(M)$. لذا

$$M = g(M) + \text{ker} g^n.$$

اگر $g(M) \subseteq \text{ker} g^n$ ، آن گاه $g^{n+1}(M) = 0$. بنابراین $L \subseteq g^{n+1}(L) = 0$ ، که تناقض است. پس بنابر تک پیایی بودن M ، $\text{ker} g^n \subseteq g(M)$. در نتیجه $M = g(M)$ و این نشان می دهد که g برور ریختی است. اگر $L \subseteq g^{-1}(L)$ ، آن گاه $L \subseteq g(g^{-1}(L)) \subseteq L$ که تناقض است. مجدداً از تک پیایی بودن M نتیجه می گیریم $g^{-1}(L) \subseteq L$. بنابراین $L \supseteq g^{-1}(L) \supseteq g^{-2}(L) \dots$

صیح مثبت k وجود دارد که $g^{-k}(L) = g^{-(k+1)}(L)$. چون g^{k+1} برور ریختی است، داریم

$$g(L) = g^{k+1}(g^{-k}(L)) = g^{k+1}g^{-(k+1)}(L) \subseteq L.$$

□

این یک تناقض است.

قضیه ۹.۱. اگر M یک R -مدول دیووی راست باشد آن گاه M هاپفی تعمیم یافته است.



اثبات. فرض کنیم f یک درون ریختی پوشا از M و L یک زیرمدول از M باشد، به طوری که

$$M = \ker f + L.$$

بنابراین

$$M = f(M) = f(\ker f + L) = L.$$

از طرفی چون M دیووی راست است، پس داریم $M = f(L) \subseteq L$. در نتیجه $M = L$.

□

قضیه ۱۰.۱. اگر M یک R -مدول دیووی راست باشد آن گاه M هم هابنی است.

اثبات. فرض کنیم g یک درون ریختی یک به یک از M و N یک زیرمدول از M باشد، به طوری که $N \cap (M) = 0$. در این صورت بنابر دیووی راست بودن M ، داریم

$$g(N) = g(N) \cap g(M) \subseteq N \cap g(M) = 0.$$

لذا $g(N) = 0$. چون g یک به یک است، پس $N = 0$.

□

تعریف ۱۱.۱. فرض کنیم R یک حلقه ی تعویض پذیر باشد. R -مدول M ضربی نامیده می شود هرگاه برای هر زیرمدول N از M ایدال I از R وجود داشته باشد به طوری که $N = IM$.

قضیه ۱۲.۱. اگر M یک مدول ضربی روی حلقه ی تعویض پذیر R باشد، آن گاه M دیووی است.

اثبات. فرض کنیم N یک زیرمدول از M و f متعلق به حلقه ی درون ریختی M باشد. چون M یک مدول ضربی است، پس ایدال I از R وجود دارد به طوری که $N = IM$. بنابراین

$$f(N) = f(IM) = f(M)I \subseteq MI = N.$$

□

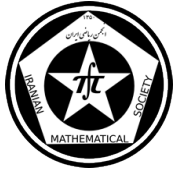
تعریف ۱۳.۱. فرض کنیم M یک R -مدول راست باشد. M دکیند متناهی نامیده می شود در صورتی که برای هر $f, g \in \text{End}_R(M)$ نتیجه دهد $fg = \lambda_M$ و $gf = \lambda_M$.

قضیه ۱۴.۱. اگر M یک R -مدول دیووی راست باشد آن گاه M دکیند متناهی است.

اثبات. فرض کنیم f و g عضو حلقه ی درون ریختی M باشند و $fg = \lambda_M$. در این صورت g پوشا، f یک به یک و $M = \ker f + \text{Im} g$. چون M دیووی راست است پس $g(\ker f) \subseteq \ker f$. بنابراین به ازای هر $x \in \ker(f)$ داریم $g(x) \in \ker(f)$. لذا $x = fg(x) = 0$. این نشان می دهد f یک به یک است. پس $\ker f = 0$ و در نتیجه

□

$M = \text{Im} g$. بنابراین f و g وارون پذیرند و داریم $gf = \lambda_M$.



ص: ۴-۴

چهل و ششمین کنفرانس ریاضی ایران

۳-۶ شهریور ۱۳۹۴

دانشگاه یزد

مدول های دیووی راست



دانشگاه یزد

پوستر

مراجع

- [1] Ožcan, A.C., Harmanci, A. and Smith, P. F., *Duo modules*, Glasg. Math. J., 48(3), PP. 533-545, (2006).
- [2] W. W. Smith, *Projective ideals of finite type*, Canad. J. Math. 21 (1969), 1057-1061.
- [3] A. Ghorbani and A. Haghany, *Generalized Hopfian modules*, J. Algebra 255 (2002), 324-341.
- [4] A. Haghany and M. R. Vedadi, *Modules whose injective endomorphisms are essential*, J. Algebra 243 (2001), 765-779.
- [5] H. Ansari-Toroghy and F. Farshadifar, *On endomorphisms of multiplication and comultiplication modules*, Archivum Math. 44 (2008), 9-15.

پست الکترونیکی: ir.sadegh@ymail.com
پست الکترونیکی: m.andarzgoo@yahoo.com



مطالعه ویژگی های زیرمدولهای پوچساز-ناچیز

طیبه آموزگار

دانشگاه مهندسی فناوری های نوین قوچان

چکیده

زیرمدولهای پوچساز-ناچیز تعمیم محضی از زیرمدولهای ناچیز می باشند. در این مقاله به بررسی مدولهای پوچساز-ناچیز می پردازیم. از جمله نشان خواهیم داد که اگر M_R یک مدول شبه تصویری باشد، آنگاه $\nabla(M) = \{ \phi \in S \mid \text{Im} \phi \ll M \}$ ، که $K_S(M) = J(S) = \nabla(M)$.

واژه‌های کلیدی: پوچساز، زیرمدولهای پوچساز-ناچیز، زیرمدولهای ناچیز

Mathematics Subject Classification [2010]: 16D10, 16D80

۱ مقدمه

در سرتاسر این مقاله تمام حلقه ها شرکت پذیر با همانی و مدولها مدولهای راست یکانی هستند. فرض کنید M یک مدول باشد. ما نماد $M \ll N$ را استفاده می کنیم تا نشان دهیم که N ناچیز در M است (یعنی $(\forall L \subseteq M, L + N \neq M)$). حلقه درون ریختی $\text{End}(M)$ از مدول M با S نشان داده می شود. نماد $N \subseteq^{ess} M$ نشان می دهد که N اساسی در M است. پوچساز چپ از زیرمدول X از M بوسیله $\ell_S(X)$ و پوچساز راست هر درون ریختی f از M یعنی هسته f بوسیله $r_M(f)$ نشان داده می شود.

در [۳] نیکلسون^۱ و ژو^۲ ایده الهای راست (چپ) پوچساز - ناچیز را تعریف کردند. در این مقاله ما زیرمدولهای پوچساز-ناچیز از مدول دلخواه M را بررسی می کنیم. زیرمدول K از M را پوچساز - ناچیز^۳ گوییم هرگاه برای هر زیر مدول X از M ، که رابطه $K + X = M$ برقرار باشد نتیجه بگیریم $\ell_S(X) = 0$. بوضوح هر زیر مدول ناچیز، پوچساز - ناچیز است. در گزاره ۲.۲ نشان می دهیم که اگر M هم جمع شدنی^۴ باشد، هر مدول پوچساز-ناچیز، ناچیز است. همچنین قضیه زیر را اثبات می کنیم که [Lemma ۴، ۳] را تعمیم می دهد: زیرمدول $k(M)$ پوچساز-ناچیز در M است اگر و تنها اگر $b(M) \subsetneq bk(M)$ برای هر $b \in S$ اگر و تنها اگر $\ell_S(1_S - ks) = 0$ برای هر $s \in S$ اگر و تنها اگر $\ell_S(1_S - sk) = 0$ برای هر $s \in S$ اگر و تنها اگر $\ell_S(k - ksk) = \ell_S(k)$ برای هر $s \in S$. در این مقاله هدف اصلی ما تعمیم نتایج دیگر از [۳] از حالت حلقه به مدول است.

۲ نتایج اصلی

تعریف ۱.۲. زیرمدول K از M را پوچساز - ناچیز گوییم هرگاه برای هر زیر مدول X از M ، که رابطه $K + X = M$ برقرار باشد نتیجه بگیریم $\ell_S(X) = 0$. در این حالت می نویسیم $K \ll_a M$.

^۱Nicholson

^۲Zhou

^۳Annihilator-small

^۴Coretractable



بوضوح هر زیر مدول ناچیز، پوچساز - ناچیز است اما در حالت کلی عکس آن درست نیست (برای مثال زیرمدول $n\mathbb{Z}$ از \mathbb{Z} -مدول \mathbb{Z} را در نظر بگیرید). مدول M را هم جمع شدنی گویند هرگاه برای هر زیرمدول K از M یک همریختی غیرصفر $f: M \rightarrow M$ وجود داشته باشد بطوریکه $f(K) = 0$ ، یعنی، $\text{Hom}(M/K, M) \neq 0$.

گزاره ۲.۲. فرض کنید M یک مدول هم جمع شدنی باشد. اگر $M \ll_a K$ آنگاه $K \ll M$.

لم ۳.۲. فرض کنید M یک مدول باشد، اگر $M \ll_a K \subseteq N$ ، که N یک زیر مدول M است، آنگاه $M \ll_a N$.

فرض کنید M یک مدول باشد. قرار می دهیم $Z_S(M) = \{m \in M \mid \ell_S(m) = \ell_S(mR) \subseteq {}^{ess} S\}$.

گزاره ۴.۲. اگر K یک زیر مدول پوچساز - ناچیز از یک مدول متناهی تولید شده باشد، آنگاه $K + \text{Rad}(M) + Z_S(M)$ نیز چنین است.

یک مدول M نیمه انزکتیو نامیده می شود هرگاه برای هر $f \in S$ ،

$$Sf = \ell_S(\ker(f)) = \ell_S(r_M(f))$$

(به طور معادل برای هر تکریختی $f: N \rightarrow M$ ، که N خارج قسمتی از M است، و برای هر همریختی $g: N \rightarrow M$ وجود داشته باشد $h: M \rightarrow M$ بطوریکه $hf = g$).

گزاره ۵.۲. فرض کنید M یک مدول نیمه انزکتیو هم جمع شدنی و T یک زیر مدول از M باشد. آنگاه اگر $T \ll_a M$ داریم $\ell_S(T) \subseteq {}^{ess} S$.

یک زیرمدول M نیمه تصویری نامیده می شود هرگاه برای هر بروریختی $f: M \rightarrow N$ ، که N یک زیرمدول M است و برای هر همریختی $g: M \rightarrow N$ وجود داشته باشد $h: M \rightarrow M$ بطوریکه $fh = g$.

قضیه ۶.۲. شرایط زیر را برای مدول M و $k \in S$ در نظر بگیرید:

$$(۱) \quad k(M) \ll_a M_R$$

$$(۲) \quad bk(M) \not\subseteq b(M) \quad \forall b \in S, b \neq 0$$

$$(۳) \quad \ell_S(1_S - ks) = 0 \quad \forall s \in S$$

$$(۴) \quad \ell_S(1_S - sk) = 0 \quad \forall s \in S$$

$$(۵) \quad \ell_S(k - ksk) = \ell_S(k) \quad \forall s \in S$$

آنگاه $(۵) \Rightarrow (۴) \Rightarrow (۳) \Rightarrow (۲) \Rightarrow (۱)$. اگر M نیمه تصویری باشد، آنگاه $(۱) \Rightarrow (۵)$.

اثبات. $(۱) \Rightarrow (۲)$. فرض کنید $b \in S$ و $b(M) = bk(M)$. فرض کنید $m \in M$. آنگاه $b(m) = bk(m')$ برای

بعضی $m' \in M$. بنابراین $m - k(m') \in r_M(b) + k(M)$. در نتیجه $m \in r_M(b) + k(M)$ ، یعنی، $M = r_M(b) + k(M)$.

زیرا $k(M) \ll_a M_R$ ، $k(M) = 0$. از آنجا که $\ell_S r_M(b) = 0$ ، $Sb \subseteq \ell_S r_M(b)$ ، $b = 0$.

$(۲) \Rightarrow (۳)$. فرض کنید $s \in S$ و $b \in \ell_S(1_S - ks)$. آنگاه $b = bks$ نتیجه می دهد $b(M) = bks(M) \subseteq$

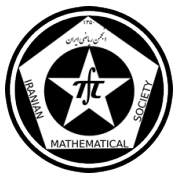
$$b(M) = bk(M) \quad \forall b \in S, b \neq 0$$

$(۳) \Rightarrow (۴)$. فرض کنید $s \in S$ و $b \in \ell_S(1_S - sk)$. آنگاه $b(1_S - sk) = 0$ نتیجه می دهد که $bs(1_S - ks) = 0$

$$b(s - sks) = b(1_S - sk)s = 0 \quad \forall s \in S$$

$(۴) \Rightarrow (۵)$. فرض کنید $s \in S$ و $b \in \ell_S(k - ksk)$. بنابراین $b = 0$ ، بنا بر این $bk = 0$. بنابراین $b \in \ell_S(k)$ رابطه های

دیگر همواره برقرارند.



(۱) \Rightarrow (۵) فرض کنید که M_R نیمه تصویری است. فرض کنید که $M = k(M) + X$ برای یک زیرمدول X از M_R . فرض کنید که $b \in \ell_S(X)$. فرض کنید که $m \in M$ ، سپس وجود دارد $m' \in M$ بطوریکه $m = k(m') + x$. آنگاه $b(m) = bk(m')$ و بنابراین $b(M) = bk(M)$. از آنجا که M_R نیمه تصویری است، وجود دارد همبستگی $s \in S$ بطوریکه $bks = b$. توجه کنید که $b(k - ksk) = 0$. بنابراین $b \in \ell_S(k - ksk) = \ell_S(k)$. در نتیجه $bk = 0$ و بنابراین $b = 0$. \square

نتیجه ۷.۲. (ببینید، [Lemma ۴، ۳]) اگر R یک حلقه باشد، آنگاه عبارات زیر برای $k \in R$ معادلند:

$$(۱) \quad kR \ll_a R_R, \text{ یعنی اگر } R = kR + X, \text{ } X \text{ یک ایده آل راست از } R, \text{ باشد آنگاه}$$

$$\ell_R(X) = 0$$

$$(۲) \quad bR \not\supseteq bkR \text{ برای هر } b \in R, b \neq 0$$

$$(۳) \quad \ell_R(1 - kr) = 0 \text{ برای هر } r \in R$$

$$(۴) \quad \ell_R(1 - rk) = 0 \text{ برای هر } r \in R$$

$$(۵) \quad \ell_R(k - krk) = \ell(k) \text{ برای هر } r \in R$$

تعریف می کنیم $K_S(M) = \{s \in S \mid s(M) \ll_a M_R\}$ برای هر مدول M_R .

نتیجه ۸.۲. فرض کنید M_R یک مدول باشد و $k \in K_S(M)$. سپس $kS \subseteq K_S(M)$. اگر M_R نیمه تصویری باشد، آنگاه $Sk \subseteq K_S(M)$.

نتیجه ۹.۲. داریم $K_S(M) \subseteq r_S(\text{Soc}(S_S))$. به علاوه، $J(S) \subseteq K_S(M)$ اگر M_R تصویری باشد.

نتیجه ۱۰.۲. فرض کنید M_R یک مدول باشد. برای یک ایده آل چپ ماکسیمال I از $S = \text{End}(M)$ عبارات زیر معادلند:

$$(۱) \quad r_M(I) \ll_a M_R$$

$$(۲) \quad I \subseteq^{ess} S_S$$

نتیجه ۱۱.۲. فرض کنید M_R یک مدول شبه تصویری باشد. آنگاه $K_S(M) = J(S) = \nabla(M)$ ، که $\nabla(M) = \{\phi \in S \mid \text{Im}\phi \ll M\}$.

مراجع

- [1] B. Amini, M. Ershad and H. Sharif, *Coretractable modules*, J. Aust. Math. Soc. ۸۶، (۲۰۰۹). ۲۸۹-۳۰۴
- [2] J. Clark, C. Lomp, N. Vanaja, R. Wisbauer, *Lifting Modules*, Frontiers in Mathematics, Birkhäuser Verlag, ۲۰۰۶
- [3] W. K. Nicholson, Y. Zhou, *Annihilator-small right ideals*, Algebra Colloq. ۱۸، (۲۰۱۱). ۷۸۵-۸۰۰
- [4] R. Wisbauer, *Foundations of module and ring theory*, Gordon and Breach, Reading, ۱۹۹۱

پست الکترونیکی: t.amouzgar@qiet.ac.ir



ملقمه‌های تصویری ضعیف

زهره خاکی*
دانشگاه سیستان و بلوچستان

اکبر گلچین
دانشگاه سیستان و بلوچستان

چکیده

در سال ۱۹۹۲ شرایط لازم و کافی برای آن که یک ملقمه دوکپی از یک تکواره توسط یک ایدآل راست اصلی هموار یا هموار ضعیف باشد، توسط بولمن-فلمینگ ارایه گردید. در این مقاله نوع خاصی از S - سیستم‌های راست تحت عنوان ملقمه‌ها و نوع تصویری و تصویری ضعیف آن‌ها را معرفی و به بررسی شرایطی می‌پردازیم که تحت آن شرایط ملقمه‌ها تصویری ضعیف هستند.

واژه‌های کلیدی: ملقمه، ملقمه‌های تصویری، ملقمه‌های تصویری ضعیف.

۱ مقدمه

در طی چند دهه اخیر تحقیقات وسیعی در خصوص دسته‌بندی تکواره‌ها براساس خواص سیستم‌های روی آن‌ها به عمل آمده است. شناسایی تکواره‌ها بر اساس خاصیت تصویری سیستم‌ها، توسط ریاضیدانانی چون کیلپ، کناور و اولتمانس مورد بررسی قرار گرفته است. در سال ۱۹۹۹ کناور و اولتمانس خاصیت تصویری ضعیف سیستم‌ها را معرفی کردند. در این مقاله به معرفی و بررسی نوع خاصی از S - سیستم‌های راست تصویری ضعیف تحت عنوان ملقمه‌های تصویری ضعیف می‌پردازیم.

۲ ملقمه‌های تصویری ضعیف

تعریف ۱.۲. مجموعه ناتهی F همراه با یک عمل دوتایی شرکت‌پذیر را نیم‌گروه و در صورت داشتن عضو همانی، تکواره می‌نامیم.

تعریف ۲.۲. فرض کنید S یک نیم‌گروه باشد. عنصر $z \in S$ صفر راست S نامیده می‌شود اگر برای هر $s \in S$ ، $sz = z$. نیم‌گروه صفرچپ و نیم‌گروه صفر به طور مشابه تعریف می‌شوند.

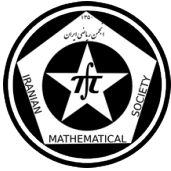
تعریف ۳.۲. گر S یک نیم‌گروه باشد و $A \subseteq S$ آن‌گاه

(۱) A ایدآل چپ S است هرگاه $SA \subseteq A$ ؛

(۲) A ایدآل راست S است هرگاه $AS \subseteq A$ ؛

(۳) A ایدآل S است هرگاه ایدآل چپ و راست باشد.

* سخنران



تعریف ۴.۲. فرض کنید S یک نیم‌گروه باشد. $aS^1 = aS \cup \{a\}$ کوچکترین ایدال راست S شامل $a \in S$ است، که آن را ایدال راست اصلی تولید شده توسط a گوئیم. به طور مشابه $S^1a = Sa \cup \{a\}$ ایدال چپ اصلی تولید شده توسط a است و $S^1aS^1 = Sa \cup aS \cup SaS \cup \{a\}$ ایدال اصلی تولید شده توسط a است.

تعریف ۵.۲. مجموعه ناتهی A را یک $-S$ سیستم راست روی تکواره S می‌نامیم و با AS نشان می‌دهیم، در صورتی که نگاشت

$$\begin{aligned} \mu : A \times S &\rightarrow A \\ (a, s) &\mapsto as \end{aligned}$$

وجود داشته باشد به طوری که به ازای هر $a \in A$ و هر $s, t \in S$ شرایط زیر برقرار باشند:

$$a1 = a \quad (1)$$

$$a(st) = (as)t \quad (2)$$

$-S$ سیستم چپ sA نیز به طور مشابه تعریف می‌شود.

تعریف ۶.۲. فرض کنید S یک تکواره و X و Y رده‌هایی از $-S$ سیستم‌های راست باشند. $-S$ سیستم راست AS را (X, Y) -تصویری نامیم، اگر برای هر $X_S \in X$ و $Y_S \in Y$ و هر بروریختی $g : X_S \rightarrow Y_S$ و هر همریختی $f : AS \rightarrow Y_S$ همریختی $\bar{f} : AS \rightarrow X_S$ موجود باشد به طوری که $f = g\bar{f}$. به عبارت دیگر نمودار زیر تعویض پذیر باشد:

$$\begin{array}{ccc} X_S & \xrightarrow{g} & Y_S \\ \bar{f} \uparrow & & \nearrow f \\ AS & & \end{array}$$

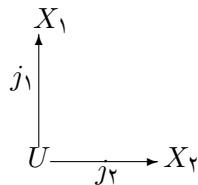
تعریف ۷.۲. $-S$ سیستم راست WS در $\mathbf{Act-S}$ را تصویری ضعیف گوئیم، اگر برای هر $-S$ همریختی $f : WS \rightarrow S/\rho$ ، هر همنهشتی راست دلخواه ρ روی تکواره S و هر بروریختی $\pi_\rho : S_S \rightarrow S/\rho$ ، $-S$ همریختی $f' : WS \rightarrow S_S$ موجود باشد به طوری که $f = \pi_\rho f'$. به عبارت دیگر نمودار زیر جابه‌جایی باشد:

$$\begin{array}{ccc} S_S & \xrightarrow{\pi_\rho} & S/\rho \\ f' \uparrow & & \nearrow f \\ WS & & \end{array}$$

تعریف ۸.۲. یک ملقمه از $-S$ سیستم‌های راست روی یک تکواره به وضوح ممکن است به عنوان یک خانواده $\{A_i \in \mathbf{ACT-S} : i \in I\}$ از $-S$ سیستم‌های راست که هر دو عضو این خانواده دارای اشتراکی به صورت زیرسیستم U_S می‌باشند، در نظر گرفته شود. یعنی $A_i \cap A_j = U_S$ برای $i, j \in I, i \neq j$. در این صورت $A = \cup_{i \in I} A_i$ یک $-S$ سیستم راست است.



تعریف ۹.۲. نمودار زیر را در رسته دلخواه C در نظر بگیرید، که j_1 و j_2 تکریختی هستند.



جلوبر $(Q, (q_1, q_2))$ از جفت (j_1, j_2) را هم حاصل ضرب ملقمه‌ای یا فقط ملقمه‌ای از X_1 و X_2 توسط زیرشیء مشترک U می‌نامیم که هسته ملقمه‌ای نیز نامیده می‌شود و با $X_1 \amalg^U X_2$ نمایش می‌دهیم. به طور مشابه ملقمه‌های چندتایی تعریف می‌شوند و برای $i \in I, U, X_i \in C$ توسط $\amalg_{i \in I}^U X_i$ نمایش داده می‌شود.

تعریف ۱۰.۲. اگر I یک ایدئال راست از تکواره S باشد و x, y عناصر متمایزی باشند که به S تعلق ندارند، آنگاه

$$S \amalg^I S = \{(x, s) : s \notin I\} \cup I \cup \{(y, s) : s \notin I\}$$

با ضابطه

$$(z, s)t = \begin{cases} (z, st) & st \notin I \\ st & st \in I. \end{cases}$$

یک S - سیستم راست است که یک ملقمه دو کپی از تکواره S نامیده می‌شود.

تعریف ۱۱.۲. فرض کنید S یک تکواره باشد، $e \in S$ را عضو خودتوان S می‌نامیم هرگاه $e^2 = e$.

تعریف ۱۲.۲. مجموعه همه عناصر خودتوان نیم‌گروه S را با $E(S)$ نمایش می‌دهیم و خودتوانی را که با هر عضو نیم‌گروه جابه‌جا شود مرکزی گوییم.

تعریف ۱۳.۲. فرض کنید S یک نیم‌گروه باشد. رابطه ρ روی S سازگار راست (چپ) نامیده می‌شود، اگر

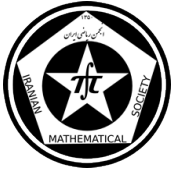
$$(\forall s, t, u \in S) : s \rho t \Rightarrow (su) \rho (tu) \text{ و } ((us) \rho (ut)).$$

همچنین ρ را سازگار می‌نامیم، اگر سازگار راست و چپ باشد. یک رابطه هم‌ارزی و سازگار را هم‌نهشتی می‌نامیم.

لم ۱۴.۲. فرض کنید I یک ایدئال راست حقیقی از تکواره S باشد. ملقمه $S \amalg^I S$ تصویری ضعیف است اگر و تنها اگر برای هر هم‌نهشتی راست ρ در S و برای هر $u, v \in S$ و هر $i \in I$ از $(ui) \rho (vi)$ نتیجه شود $u', v' \in S$ وجود دارند به طوری که $u' \rho u$ و $v' \rho v$ و $u'i = v'i$.

نتیجه ۱۵.۲. فرض کنید S یک تکواره صفر راست و دارای ایدئال راست حقیقی I باشد. در این صورت ملقمه $S \amalg^I S$ تصویری ضعیف است.

گزاره ۱۶.۲. فرض کنید S یک تکواره و $I = eS$ یک ایدئال دو طرفه حقیقی از S باشد، که e یک خودتوان مرکزی است. اگر برای هر $u \in S \setminus I$ و $ue = e$ ، آنگاه ملقمه $S \amalg^I S$ تصویری ضعیف است.



ص: ۴-۴

چهل و ششمین کنفرانس ریاضی ایران

۳-۶ شهریور ۱۳۹۴

دانشگاه یزد

ملقمه‌های تصویری ضعیف



دانشگاه یزد

پوستر

مراجع

- [1] Kilp, M., Knauer, U., Mikhalev, A., Monoids, Acts and Categories. Walter de Gruyter, Berlin (2000).
- [2] Knauer U., Projectivity of acts and Morita equivalence of monoids. semigroup Forum., 3, (1972) 359-370.
- [3] Knauer, U., Oltmanns, H., Weak projectivities for S-acts. In proceedings of the Conference on General Algebra and Discrete Mathematics. Potsdam, 1998. Denecke, K., Vogel, H.-J., eds. Aachen: Shaker (1999) , PP. 143-159.
- [4] Knauer, U., Oltmanns, H. On rees weakly projective right acts. Journal of Mathematical Sciences, 139, No. 4, (2006).

پست الکترونیکی: zkhaki@yahoo.com
پست الکترونیکی: agdm@math.usb.ac.ir



یک محدودیت در تعمیم EI- ابر ساختارها

سید محمد انوریه
دانشگاه یزد

سید حسین قاضوی*
دانشگاه یزد

چکیده

در این مقاله به یک محدودیت اساسی در تعمیم EI- ابرساختارها می پردازیم.

واژه‌های کلیدی: لم پایانی، رابطه های دوتایی و سه تایی، (نیم)ابرو، EI- ابر ساختار،

Mathematics Subject Classification [2010]: 13D45, 39B42

۱ مقدمه

کاربردهای ریاضی نقش بسیار مهم و حیاتی را در سایر شاخه های علوم بازی کرده و همین امر باعث پیدایش و توسعه نظریه ابرساختارهای جبری در دهه های اخیر شده است. این نظریه که اولین بار توسط مارتی [۵]، ریاضیدان فرانسوی مطرح شد، تعمیمی از ساختارهای جبری مانند نیم گروه ها، گروه ها، حلقه ها، میدان ها و غیره است. بدین ترتیب که در یک ساختار جبری کلاسیک ترکیب دو عضو یک عضو است؛ در حالیکه در یک ابر ساختار جبری ترکیب دو عضو یک مجموعه ناتهی است. اگر H یک مجموعه ناتهی باشد هر نگاشت مثل $\varphi^*(H) : H \times H \rightarrow \varphi^*(H)$ که در آن $\varphi^*(H)$ مجموعه زیرمجموعه های ناتهی H است یک ابر عمل روی H نامیده می شود. ساختار (H, \circ) را یک ابر گروه گوئیم هرگاه خاصیت شرکت پذیری برقرار باشد یعنی به ازای هر $a, b, c \in H$ داشته باشیم $a \circ (b \circ c) = (a \circ b) \circ c$ ؛ و در خاصیت تکثیر صدق کند یعنی به ازای هر $x \in H$ داشته باشیم $x \circ H = H \circ x = H$. رابطه بین ابرساختارهای جبری و مجموعه های مرتب اولین بار توسط ووچوکلیس در سال ۱۹۸۷ مطرح شد [۱۰]. پس از او افرادی چون کورسینی [۲]، هوسکوا [۴]، نوک [۶، ۷، ۸]، راجکوا [۹] و دیگران ابرساختارهای مرتبط با مجموعه های مرتب را از جنبه های مختلف مورد بحث و بررسی قرار دادند. یک خانواده از این دسته ابرساختارها که تحت عنوان EI- ابرساختارها شناخته میشوند اولین بار توسط چاولینا [۱] معرفی شدند. EI- ابرساختارها، ابرساختارهای جبری هستند که بر روی مجموعه های شبه مرتب یا جزئا مرتب با یک روش خاص تحت عنوان لم پایانی ساخته میشوند. به طور خاص چاولینا نشان داد:

لم ۱.۱. فرض کنید (S, \cdot, R) یک نیم گروه مرتب جزئی باشد. در این صورت ابر عمل $\varphi^*(S) : S \times S \rightarrow \varphi^*(S)$ با ضابطه $a \circ b = [a \cdot b]_R = \{x \in S, (a \cdot b, x) \in R\}$ شرکت پذیر است. نیم ابر گروه (S, \circ) جابجایی است اگر و تنها اگر نیم گروه (S, \cdot) جابجایی باشد.

در این لم، که به لم پایانی شهرت یافته است، منظور از یک (نیم)گروه جزئا (شبه)مرتب سه تایی (S, \cdot, R) است که در آن (S, \cdot) یک (نیم)گروه و R یک رابطه دوتایی جزئا (شبه) مرتب است به طوری که برای هر $a, b, c \in S$ با خاصیت $(a, b) \in R$ داریم $(ac, bc) \in R$ و $(ca, cb) \in R$.

* سخنران



بعد از آن نواک تحقیقات گسترده و وسیعی را بر روی این خانواده انجام داد. از جمله او خواص اصلی، زیر ابرساختارها، عناصر مهم و نیز قابلیت توسعه EI- ابرساختارها به ساختارهای شبه حلقه ای را بررسی کرد. همچنین راجکوا در پایان نامه دکتری خود ثابت کرد EI- ابرساختارها فضای الحاقی نیز هستند. با این کشف متخصصین این رشته بر آن شدند که آیا این خانواده می تواند ساختارهای پیشرفته تری نظیر ابرگروههای کانونی، پلی گروهی و یا حتی شبه حلقه ای داشته باشد؟ در پاسخ به این سوالات و انجام تحقیقات مربوط به آن ها محققین به این پرسش برخورد کردند که آیا لم پایانی، که در حقیقت روشی برای تولید ابرساختارها است، برگشت پذیر است؟ به عبارت دیگر آیا می توان گفت که اگر یک ابرعمل، بر مبنای ساختار لم پایانی، شرکت پذیر باشد آن گاه عمل تک مقداری پایه ای آن نیز شرکت پذیر است؟ پاسخ این سوال مثبت است. نواک در [۸] ثابت کرد:

قضیه ۲.۱. فرض کنید (H, \cdot) یک گروهوار غیربدیهی و R رابطه دوتایی روی H باشد به قسمی که برای هر جفت عناصر $a, b \in H$ با شرط aRb و هر عنصر دلخواه $c \in H$ داشته باشیم $acRcb$ و $caRcb$. همچنین ابرعمل $*$: $H \times H \rightarrow H$ را با ضابطه $\varphi^*(H)$ $a * b = [a \cdot b]_R = \{x \in H, (a \cdot b, x) \in R\}$ برای هر $a, b \in H$ در نظر بگیرید. در این صورت اگر ابرعمل $*$ شرکت پذیر باشد آن گاه عمل تک مقداری \cdot نیز شرکت پذیر است. علاوه بر این اگر عنصر $e \in H$ موجود باشد به قسمی که برای هر $a \in H$ داشته باشیم $a * e = e * a = [a]_R = \{x \in H | aRx\}$ آن گاه e عضو همانی نیم گروه (H, \cdot) است.

با این که EI- ابرساختارها تاکنون به صورت گسترده مطالعه و بررسی شده اند اما متأسفانه در توسعه و تعمیم مفاهیم اصلی و پایه ای این خانواده محدودیتهای ذاتی وجود دارد. در این مقاله نشان می دهیم که اگر در تعاریف اولیه از روابط سه تایی به جای روابط دوتایی استفاده کنیم به چالشهای بسیاری برخورد خواهیم کرد.

۲ نتایج اصلی

در این بخش نشان می دهیم قضیه ۲.۱ در حالت روابط سه تایی برقرار نیست. برای این منظور می بایست مفاهیم و تعاریف استفاده شده در این قضیه را تعمیم دهیم.

تعریف ۱.۲. فرض کنیم $H \neq \emptyset$ یک مجموعه و $\rho \subseteq H^3$ یک رابطه سه تایی روی H باشد. در این صورت ρ الف) انعکاسی است اگر $(x, x, x) \in H$ برای هر $x \in H$.
ب) تراگذری است اگر در سه شرط زیر صدق کند
(I) اگر $(x, y, z) \in \rho$ و $(y, u, v) \in \rho$ ، آنگاه $(x, u, v) \in \rho$.
(II) اگر $(x, y, z) \in \rho$ و $(z, u, v) \in \rho$ ، آنگاه $(x, y, u) \in \rho$ ، $(x, y, v) \in \rho$ ، $(x, u, v) \in \rho$ و $(y, u, v) \in \rho$.
(III) اگر $(x, y, z) \in \rho$ و $(u, z, v) \in \rho$ ، آنگاه $(x, y, v) \in \rho$.
ج) متقارن قوی است اگر بتوان از رابطه $(x_1, x_2, x_3) \in \rho$ نتیجه گرفت $(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, x_{\sigma(3)}) \in \rho$ برای هر $\sigma \in S_3$.
د) یک پیش ترتیب سه تایی روی H نامیده میشود هرگاه انعکاسی و تراگذری باشد.
ه) یک هم ارزی سه تایی روی H نامیده میشود هرگاه انعکاسی، متقارن قوی و تراگذری باشد.

تعریف ۲.۲. ساختار جبری (H, \cdot, ρ) را یک گروهوار پیش مرتب سه تایی (گروهوار T -مرتب) نامیم اگر (H, \cdot) یک گروهوار ρ یک پیش ترتیب سه تایی روی H باشد به قسمی که برای هر $(a, b, c, d) \in H^4$ با خاصیت $(a, b, c) \in \rho$ داشته باشیم $(ad, bd, cd) \in \rho$ و $(da, db, dc) \in \rho$.



مثال ۳.۲. فرض کنید $S = \{a, b, c\}$ یک نیم گروه با جدول ضربی زیر باشد.

\cdot	a	b	c
a	a	a	a
b	a	b	a
c	a	a	c

همچنین فرض کنید $\rho = \{(a, a, c), (a, c, c), (a, a, a), (b, b, b), (c, c, c)\}$ یک محاسبه ساده نشان می دهد سه تایی (S, \cdot, ρ) یک نیم گروه T -مرتب است.

در تعریف زیر ابرعمل لم پایانی را برای روابط سه تایی تعمیم می دهیم.

تعریف ۴.۲. فرض کنید (H, \cdot, ρ) یک نیم گروه T -مرتب باشد. برای هر $a, b \in H$ ابرعمل $\varphi^*(H) : H \times H \rightarrow$ را به شکل زیر تعریف می کنیم:

$$a * b = [ab]_\rho = \{t \in H \mid (ab, t, t) \in \rho\}$$

همچنین زوج $(H, *)$ را El -نیم ابرگروه وابسته به (H, \cdot, ρ) می نامیم.

مثال ۵.۲. گروه $H = \mathbb{C} - \{0\}$ را همراه با ضرب معمولی اعداد مختلط در نظر بگیرید. رابطه ρ را به شکل زیر تعریف می کنیم:

$$(x, y, z) \in \rho \Leftrightarrow |x| = |y| = |z|$$

در این صورت (H, \cdot, ρ) یک گروه T -مرتب است. به علاوه، El -ابر ساختار وابسته به آن یعنی $(H, *)$ یک ابرگروه است. زیرا برای هر $x, y, z \in H$ داریم $\{t \in H, |t| = |xyz|\}$ $x * (y * z) = (x * y) * z = \{t \in H, |t| = |xyz|\}$ (ابرعمل $*$ شرکت پذیر است) و خاصیت تکثیر نیز برقرار است.

در مثال زیر نشان می دهیم در حالت سه تایی، لم پایانی برگشت پذیر نیست. به عبارت دیگر قضیه ۲.۱ در این حالت برقرار نیست.

مثال ۶.۲. گروهواره $S = \{a, b, c\}$ را با جدول ضربی زیر در نظر بگیرید:

\cdot	a	b	c
a	a	a	a
b	a	c	a
c	a	a	b

به علاوه قرار دهید $\rho = S^3$. در این صورت به سادگی دیده می شود ρ یک پیش ترتیب سه تایی و (S, \cdot, ρ) یک گروهواره T -مرتب است. اکنون اگر ساختار لم پایانی را به کار بریم، El -ابر ساختار $(S, *)$ با جدول زیر بدست می آید:

$*$	a	b	c
a	S	S	S
b	S	S	S
c	S	S	S



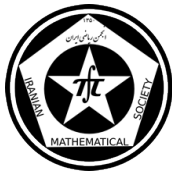
بوضوح ابرعمل $*$ شرکت پذیر است در حالیکه عمل تک مقداری پایه ای آن یعنی \cdot شرکت پذیر نیست زیرا $(b \cdot b) \cdot c \neq b \cdot (b \cdot c)$. علاوه بر این برای عنصر $a \in S$ و تمامی عناصر $x \in S$ داریم $a * x = x * a = S = [x]_\rho$ اما بر خلاف قضیه ۲.۱ شامل عضو همانی نیست.

با توجه به مطلب فوق می توان گفت تمامی نتایج به دست آمده از قضیه ۲.۱ در حالت سه تایی لزوما برقرار نیست. از جمله این نتایج می توان به ارتباط بین زیرگروههای (H, \cdot, R) و زیرابریگروههای El - ابرگروه وابسته به آن نام برد که نواک در [۸] به آن پرداخته است.

مراجع

- [1] J. Chvalina, *Functional graphs, quasi-ordered sets and commutative hypergroups*, Masaryk University, Brno, (1995) (in Czech).
- [2] P. Corsini, *Hyperstructures associated with ordered sets*, Bull. Greek Math. Soc. 48 (2003), 7-18.
- [3] B. Davvaz, *Polygroup Theory and Related System*, World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., 2012.
- [4] S. Hoskova, *Binary hyperstructures determined by relational and transformation systems*, Habilitation Thesis, Faculty of Science, University of Ostrava, 2008.
- [5] F. Marty, *Sur une generalization de la notion de groupe*, In: 8 Congress Math. Scandinaves, Stockholm, 1934.
- [6] M. Novak, *El-hyperstructures: an overview*, Ratio Mathematica, 23 (2012), 65-80.
- [7] M. Novak, *Some basic properties of El-hyperstructure*, European J. Combin., 34 (2013), 446-459.
- [8] M. Novak, *The notion of subhyperstructure of "Ends lemma"-based hyperstructures*, Aplimat-J. Appl. Math. 3 (II) (2010), 237-247.
- [9] P. Rackova, *Hypergroups of symmetric matrices*, 10th International Congress of Algebraic Hyperstructures and Applications, Proceeding of AHA (2008).
- [10] T. Vougiouklis, *Generalization of P-hypergroups*, Rned. Circ. Mat. Palermo 36 (II) (1987), 114-121.

آنالیز ریاضی



اعداد اول رامانوجان و حدس برتراند

مصطفی نجفی*

دانشگاه زنجان

چکیده

در این مقاله ابتدا اعداد اول رامانوجان^۱ را تعریف کرده و سپس با استفاده از این اعداد حدس برتراند^۲ را اثبات می‌کنیم، و در نهایت یک کران بهینه برای این اعداد بدست خواهیم آورد.

واژه‌های کلیدی: اعداد اول رامانوجان، حدس برتراند، رابطه‌ی مجانبی، کران

Mathematics Subject Classification [2010]: 11AXX, 11A41, 34E05

۱ مقدمه

سرینواسا رامانوجان^۳ یکی از نابغه‌ترین ریاضی‌دانان هم‌زمان‌ها که کشفیاتش امروزه هم پژوهشگران ریاضی‌دان را شگفت‌زده کرده است، یک سال قبل از مرگ زود هنگامش در سال ۱۹۱۹ تعمیمی از حدس برتراند را با کمک توابع چبیشف^۴ و خواص تابع گاما^۵ بیان و ثابت کرد. در این مقاله با استفاده از این تعمیم، اعداد اول رامانوجان را تعریف خواهیم کرد.

۲ نتایج اصلی

قضیه ۱.۲. فرض کنید $\pi(x)$ تابع شمارنده‌ی اعداد اول باشد، بدین معنا که نشان دهنده‌ی تعداد اعداد اول نابیشتر از x است. نشان دهید نامساوی زیر برای $x > 300$ برقرار است

$$\pi(x) - \pi\left(\frac{x}{2}\right) > \frac{1}{\log x} \left(\frac{1}{6}x - 3\sqrt{x}\right). \quad (1)$$

□

اثبات. به [۱] رجوع شود.

رامانوجان با استفاده از رابطه‌ی (۱) نوشت که نامساوی

$$\pi(x) - \pi\left(\frac{x}{2}\right) \geq 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, \dots, \quad (2)$$

به ترتیب برای $x \geq 2, 11, 17, 29, 41, 47, 59, \dots$ برقرار است. نامساوی رابطه‌ی (۲) بیان می‌کند که برای $x \geq 2$ در بازه‌ی $\left(\frac{1}{2}x, x\right]$ حداقل یک عدد اول وجود دارد، که این همان حدس برتراند است.

*سخنران

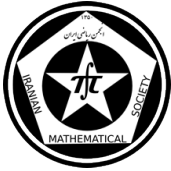
^۱Ramanujan numbers

^۲Bertrand's Postulate

^۳Srinivasa Ramanujan

^۴Chebyshev functions

^۵Gamma function



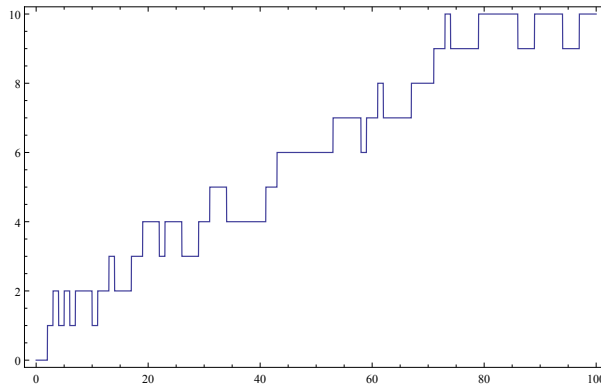
تعریف ۲.۲. رامنوجان نه تنها حدس برتراند را ثابت کرد، بلکه ثابت کرد کوچکترین اعداد صحیح مثبت $\{\mathcal{R}_n\}$ وجود دارند که اگر $x \geq \mathcal{R}_n$ باشد آنگاه در بازه $(\frac{x}{2}, x]$ حداقل n عدد اول وجود دارد. به عبارت دیگر به ازای هر $x \geq \mathcal{R}_n$ داریم

$$\pi(x) - \pi\left(\frac{x}{2}\right) \geq n.$$

مجموعه اعداد $\{\mathcal{R}_n\}$ همگی اعداد اول هستند و به افتخار این ریاضیدان هندی، اعداد اول رامنوجان نامیده می‌شوند. در اینجا n شماری اعداد اول رامنوجان است.

ملاحظه ۳.۲. اگر $x = \mathcal{R}_n$ قرار دهیم، آنگاه خواهیم داشت

$$\pi(\mathcal{R}_n) - \pi\left(\frac{\mathcal{R}_n}{2}\right) = n. \quad (3)$$



شکل ۱: نمودار تابع $\pi(x) - \pi\left(\frac{x}{2}\right)$ در بازه $[0, 100]$

با توجه به نمودار این استدال را می‌توان انجام داد که نامساوی رابطه‌ی (۲) به ترتیب برای $x \geq 2, 11, 17, 29, \dots$ برقرار است.

جدول ۱: اعداد اول رامنوجان

n	\mathcal{R}_n	n	\mathcal{R}_n	n	\mathcal{R}_n	n	\mathcal{R}_n	n	\mathcal{R}_n	n	\mathcal{R}_n	n	\mathcal{R}_n	n	\mathcal{R}_n
۱	۲	۵	۴۱	۹	۷۱	۱۳	۱۲۷	۱۷	۱۷۹	۲۱	۲۳۳	۲۵	۲۶۹	۲۹	۳۴۷
۲	۱۱	۶	۴۷	۱۰	۹۷	۱۴	۱۴۹	۱۸	۱۸۱	۲۲	۲۳۹	۲۶	۲۸۱	۳۰	۳۴۹
۳	۱۷	۷	۵۹	۱۱	۱۰۱	۱۵	۱۵۱	۱۹	۲۲۷	۲۳	۲۴۱	۲۷	۳۰۷	۳۱	۳۶۷
۴	۲۹	۸	۶۷	۱۲	۱۰۷	۱۶	۱۶۷	۲۰	۲۲۹	۲۴	۲۶۳	۲۸	۳۱۱	۳۲	۳۷۳

ساندو^۶ ریاضیدان آمریکایی ثابت کرد که اگر $p \in \mathbb{P}$ آنگاه $p_{2n} < \mathcal{R}_n < p_{4n}$ و نیز حدس زد که $\mathcal{R}_n < p_{3n}$ ، این حدس بعدها توسط لیاشرام^۷ ریاضیدان هندی ثابت شد، در ادامه این قضایا را می‌آوریم.

قضیه ۴.۲. فرض کنید $p \in \mathbb{P}$ و $n \geq 1$ باشد، اگر \mathcal{R}_n ، n امین عدد اول رامنوجان باشد. نشان دهید

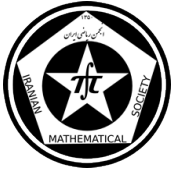
$$2n \log 2n < \mathcal{R}_n < 4n \log 4n.$$

به عبارت دیگر اگر p_n ، n امین عدد اول باشد، چون $p_n > n \log n$ است. بنابراین داریم

$$p_{2n} < \mathcal{R}_n < p_{4n}. \quad (4)$$

^۶Jonathan Sondow

^۷Shanta Laishram



□

اثبات. به [۲] رجوع شود.

مثال ۵.۲. با استفاده از نامساوی (۱) بهترین کران بالا برای \mathcal{R}_2 ، $\mathcal{R}_2 \leq 392$ است، اما با استفاده از کران بالای نامساوی (۴) قضیه‌ی بالا، می‌توانیم این کران را تا $16,635 \approx 8 \log 8$ بهبود دهیم.

قضیه ۶.۲. برای هر $\varepsilon > 0$ وجود دارد $n_0 = n_0(\varepsilon)$ (یعنی n_0 به ε وابسته است) بطوریکه

$$\mathcal{R}_n < (2 + \varepsilon)n \log n, \quad (5)$$

همچنین وقتی $n \rightarrow \infty$ آنگاه

$$\mathcal{R}_n \sim p_{2n}, \quad (6)$$

به عبارت دیگر

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\mathcal{R}_n}{p_{2n}} = 1. \quad (7)$$

اثبات. قضیه‌ی اعداد اول بیان می‌کند که $\pi(x) \sim \frac{x}{\log x}$ است. به عبارت دیگر

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\pi(x)}{\frac{x}{\log x}} = 1$$

است. بنابراین طبق تعریف حد، به ازای هر $\varepsilon_1 > 0$ عددی مانند $N_1 > 0$ وجود دارد، بطوریکه برای $x > N_1$ داریم

$$\left| \frac{\pi(x)}{\frac{x}{\log x}} - 1 \right| < \varepsilon_1.$$

بنابراین خواهیم داشت

$$(1 - \varepsilon_1) \frac{x}{\log x} < \pi(x) < (1 + \varepsilon_1) \frac{x}{\log x}. \quad (8)$$

از طرفی دیگر بوضوح وقتی $n \rightarrow \infty$ داریم $\log \frac{x}{2} = \log x - \log 2 \sim \log x$. بنابراین در قضیه‌ی اعداد اول اگر به جای x ، $\frac{x}{2}$ را قرار دهیم آنگاه خواهیم داشت، $\pi\left(\frac{x}{2}\right) \sim \frac{\frac{x}{2}}{\log \frac{x}{2}} \sim \frac{1}{2} \frac{x}{\log x}$ ، به عبارت دیگر

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\pi\left(\frac{x}{2}\right)}{\frac{x}{\log x}} = \frac{1}{2}.$$

است. بنابراین طبق تعریف حد، به ازای هر $\varepsilon_2 > 0$ عددی مانند $N_2 > 0$ وجود دارد، بطوریکه برای $x > N_2$ داریم

$$\left| \frac{\pi\left(\frac{x}{2}\right)}{\frac{x}{\log x}} - \frac{1}{2} \right| < \varepsilon_2,$$

در نتیجه خواهیم داشت

$$\left(\frac{1}{2} - \varepsilon_2\right) \frac{x}{\log x} < \pi\left(\frac{x}{2}\right) < \left(\frac{1}{2} + \varepsilon_2\right) \frac{x}{\log x},$$

اگر طرفین این نامساوی را در عدد -1 ضرب کنیم، جهت نامساوی عوض می‌شود. بنابراین خواهیم داشت

$$\left(-\frac{1}{2} - \varepsilon_2\right) \frac{x}{\log x} < -\pi\left(\frac{x}{2}\right) < \left(-\frac{1}{2} + \varepsilon_2\right) \frac{x}{\log x}. \quad (9)$$

حالا اگر طرفین نامساوی رابطه‌ی (۸) و (۹) را با هم جمع کنیم، خواهیم داشت

$$\left(1 - \frac{1}{2} - \varepsilon_2 - \varepsilon_1\right) \frac{x}{\log x} < \pi(x) - \pi\left(\frac{x}{2}\right) < \left(-\frac{1}{2} + \varepsilon_2 + \varepsilon_1\right) \frac{x}{\log x}.$$



قرار می‌دهیم $\varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 > 0$ ، و همچنین $N = N_1 \cup N_2$. بنابراین خواهیم داشت

$$\left(\frac{1}{2} - \varepsilon\right) \frac{x}{\log x} < \pi(x) - \pi\left(\frac{x}{2}\right) < \left(\frac{1}{2} + \varepsilon\right) \frac{x}{\log x}.$$

بنابراین با استفاده از این نامساوی اگر $x = \mathcal{R}_n$ قرار دهیم، با استفاده از رابطه (۳) خواهیم داشت

$$\left(\frac{1}{2} - \varepsilon\right) \frac{\mathcal{R}_n}{\log \mathcal{R}_n} < n < \left(\frac{1}{2} + \varepsilon\right) \frac{\mathcal{R}_n}{\log \mathcal{R}_n}.$$

در تابع $f(x) = \frac{1}{a}x \log x - bx$ اگر a عدد حقیقی مثبت و b عدد حقیقی نامنفی باشند. برای $x \geq e^{ab-1}$ وقتی $x \rightarrow \infty$ به کمک تابع لامبرت داریم

$$f^{-1}(x) \sim \frac{ax}{\log x}, \quad (10)$$

اگر در رابطه (۱۰) قرار دهیم $a = \frac{1}{2} + \varepsilon$ ، $b = 0$ ، $x = \mathcal{R}_n$ و $f^{-1}(x) = n$ ، آنگاه خواهیم داشت

$$(2 - \varepsilon)n \log n < \mathcal{R}_n < (2 + \varepsilon)n \log n,$$

در نتیجه رابطه (۵) برای $\varepsilon = 0$ ، $n_0 = n$ برقرار است. با استفاده از کران پایین \mathcal{R}_n در قضیه ۴.۲ و کران بالا \mathcal{R}_n در این قضیه داریم، $p_{2n} < \mathcal{R}_n < (2 + \varepsilon)n \log n$. طرفین این رابطه را در عدد مثبت $\frac{1}{p_{2n}}$ ضرب می‌کنیم، در نتیجه داریم

$$\frac{p_{2n}}{p_{2n}} < \frac{\mathcal{R}_n}{p_{2n}} < (2 + \varepsilon) \frac{n \log n}{p_{2n}}. \quad (11)$$

از طرفین این رابطه وقتی که $n \rightarrow \infty$ حد می‌گیریم، در سمت راست نامساوی چون $2 + \varepsilon$ عددی ثابت است از حد بیرون می‌آید. بنابراین خواهیم داشت

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{p_{2n}}{p_{2n}} < \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\mathcal{R}_n}{p_{2n}} < (2 + \varepsilon) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \log n}{p_{2n}}.$$

بنا به قضیه اعداد اول چون $p_n \sim n \log n$ ، در نتیجه اگر به جای n عبارت $2n$ قرار دهیم، آنگاه خواهیم داشت

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \log n}{p_{2n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \log n}{2n \log 2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \log n}{2n (\log 2 + \log n)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \log n}{2n \log n} = \frac{1}{2}.$$

بنابراین خواهیم داشت

$$1 \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\mathcal{R}_n}{p_{2n}} \leq (2 + \varepsilon) \frac{1}{2}.$$

در نتیجه به ازای هر $\varepsilon > 0$ طبق تعریف حد داریم

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\mathcal{R}_n}{p_{2n}} = 1,$$

و این حد نیز معادل رابطه‌ی مجانبی $\mathcal{R}_n \sim p_{2n}$ است، و به این ترتیب اثبات به پایان می‌رسد. \square

مراجع

- [1] Ramanujan, Srinivasa, *A proof of Bertrand's postulate*, [J. Indian Math. Soc. 11 (1919), 181-182]. Collected papers of Srinivasa Ramanujan, 208-209, AMS Chelsea Publ, Providence, RI, 2000.
- [2] Sondow, Jonathan, *Ramanujan primes and Bertrand's postulate*, Amer. Math. Monthly 116 (2009), no. 7, 630-635.

انعکاس پذیری عملگر ضربی M_{z^k} روی فضای باناخ سری های لورانعلی ایلمون کشکولی
دانشگاه یاسوجسید امیدرضا عابدی
دانشگاه یاسوج

چکیده

در این مقاله به بررسی و استخراج شرایط کافی برای انعکاس پذیری عملگر ضربی M_{z^k} روی فضاهای باناخ سری های لوران به ازای هر توان صحیح k پرداخته شده است.

واژه‌های کلیدی: عملگر ضربی، عملگر انعکاسی، فضای باناخ سری های لوران وابسته به دنباله β

Mathematics Subject Classification [2010]: 13D45, 39B42

۱ مقدمه

فرض کنید $\{\beta(n)\}_{n=-\infty}^{\infty}$ دنباله ای از اعداد مثبت با شرط $\beta(0) = 1$ باشد. به ازای $1 < p < \infty$ ، فضای $L^p(\beta)$ را به صورت:

$$L^p(\beta) = \left\{ f \mid f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}(n)z^n : \|f\|^p = \|f\|_{\beta}^p = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |\hat{f}(n)|^p \beta(n)^p < \infty \right\},$$

تعریف می کنیم. $L^p(\beta)$ فضای باناخ انعکاسی با نرم $\|\cdot\|_{\beta}$ است. فرض کنید $\hat{f}_k(n) = \delta_k(n)$. آنگاه $f_k(z) = z^k$ و $\{f_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ یک پایه برای $L^p(\beta)$ است به طوری که $\|f_k\| = \beta(k)$. ما مجموعه عملگرهای خطی - ضربی روی $L^p(\beta)$ را با M_{φ} و مجموعه ضرایب $\{\varphi \in L^p(\beta) : \varphi L^p(\beta) \subseteq L^p(\beta)\}$ را با نماد $L^p_{\infty}(\beta)$ نشان می دهیم. همچنین مجموعه توابع تحلیلی روی Ω (که Ω یک دامنه کاراتئودوری است) را با نماد $H(\Omega)$ و مجموعه توابع تحلیلی کران دار روی Ω را با نماد $H^{\infty}(\Omega)$ نشان می دهیم.

نتیجه ۱.۱. فضای $L^p_{\infty}(\beta)$ با نرم $\|\varphi\|_{\infty} = \|M_{\varphi}\|$ یک جبر باناخ جابجایی است [۴].

تعریف ۲.۱. عدد مختلط λ را، یک محاسبه گر نقطه ای کراندار روی $L^p(\beta)$ گوئیم، هرگاه تابع $e(\lambda) : L^p(\beta) \rightarrow \mathbb{C}$ با ضابطه $e(\lambda)(f) = f(\lambda)$; $f \in L^p(\beta)$ کراندار باشد.

با فرض $1 = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$ ، به روش مشابه در [۳] می توان نشان داد $(L^p(\beta))^* = L^q(\beta^{\frac{p}{q}})$. بنابراین اگر

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}(n)z^n \in L^p(\beta), \quad g(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{g}(n)z^n \in L^q(\beta^{\frac{p}{q}}),$$

$$g(f) = \langle f, g \rangle = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}(n)\overline{\hat{g}(n)}(\beta(n))^p$$



می دانیم اگر E فضای باناخ جدایی پذیر باشد و $A \in B(E)$ ، آنگاه $Lat(A)$ عبارت از مشبکه تمام زیرفضاهای پایای A و $Alglat(A)$ عبارت از جبر تمام عملگرهای B در $B(E)$ است به طوری که $Lat(A) \subset Lat(B)$. برای جبر $B(E)$ ، توپولوژی عملگر ضعیف (WOT) توسط گردایه ای از نیم نرم های زیر القاء می شود:

$$P_{x, x^*}(A) = | \langle Ax, x^* \rangle |, \quad x \in E, x^* \in E^*, A \in B(E)$$

به طوری که :

$$A_\alpha \xrightarrow{(WOT)} A \iff A_\alpha x \xrightarrow{(W)} Ax,$$

و به طور مشابه:

$$A_\alpha \xrightarrow{(SOT)} A \iff A_\alpha x \xrightarrow{\|\cdot\|} Ax.$$

کوچکترین زیرجبر $B(E)$ که شامل A و همانی I بوده و با WOT بسته است، را با نماد $W(A)$ نمایش می دهیم.

تعریف ۳.۱. یک عملگر $A \in B(E)$ را انعکاسی گوئیم، هرگاه $Alglat(A) = W(A)$.

ملاحظه ۴.۱. چنانچه دیسک واحد را با نماد U نشان دهیم، برای $h \in L^p(\beta)$ و $w \in \partial U$ ، h_w را به صورت $h_w(z) = h(wz)$ تعریف می کنیم. آنگاه به ازای هر $n: \hat{h}_w(n) = w^n \hat{h}(n)$. زیرا با توجه به تعریف $h_w(z) = h(wz)$ خواهیم داشت:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} [\hat{h}_w(n)] z^n = h_w(z) = h(wz) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{h}(n) (wz)^n = \sum_{n=-\infty}^{\infty} [w^n \hat{h}(n)] z^n.$$

نتیجه ۵.۱. به ازای $w \in \partial U$ خواهیم داشت: $\|h_w\|_\beta = \|h\|_\beta$. زیرا از آنجا که $|w| = 1$ بنابراین:

$$\|h_w\|_\beta^p = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |\hat{h}_w(n)|^p (\beta(n))^p = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |\hat{h}(n)|^p (\beta(n))^p = \|h\|_\beta^p.$$

عملگر ضربی M_z روی $L^p(\beta)$ را به صورت $(M_z f)(z) = z f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}(n) z^{n+1}$ تعریف می کنیم.

نتیجه ۶.۱. عملگر M_z پایه $\{f_k\}_k$ را انتقال می دهد، زیرا:

$$(M_z f_k)(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}_k(n) z^{n+1} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta_{nk} z^{n+1} = z^{k+1} = f_{k+1}(z).$$

ما در اثبات برخی قضایا، از نمادهای زیر استفاده خواهیم نمود:

$$r_{\circ 1} = \overline{\lim} \beta(-n)^{\frac{1}{n}}, \quad \Omega_{\circ 1} = \{z \in \mathbb{C} : |z| > r_{\circ 1}\},$$

$$r_{11} = \underline{\lim} \beta(n)^{\frac{1}{n}}, \quad \Omega_{11} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < r_{11}\},$$

$$\Omega_1 = \Omega_{\circ 1} \cap \Omega_{11} = \{z \in \mathbb{C} : r_{\circ 1} < |z| < r_{11}\}.$$

ملاحظه ۷.۱. در این مقاله، همواره فرض بر آن است که $r_{\circ 1} < r_{11}$ و M_z روی $L^p(\beta)$ کران دار باشد.



۲ نتایج اصلی

لم ۱.۲. اگر $\varphi \in H(\Omega_{11}) \cap L^\infty(\beta)$ ، آنگاه دنباله ای از چندجمله ای های $\{r_n\}$ وجود دارند به طوری که:

$$M_{r_n} \xrightarrow{(WOT)} M_\varphi.$$

نتیجه ۲.۲. اگر $\varphi \in H(\Omega_{11}) \cap L^\infty(\beta)$ ، آنگاه: $M_\varphi \in W(M_z)$.

اثبات. فرض کنید $\varphi \in H(\Omega_{11}) \cap L^\infty(\beta)$. در این صورت بنا بر لم (۱.۲):

$$M_{r_n} \xrightarrow{(WOT)} M_\varphi,$$

چون r_n یک چندجمله ای است و $M_{r_n} = r_n(M_z)$ نتیجه می گیریم که $M_\varphi \in W(M_z)$. □

قضیه ۳.۲. برای هر $k \geq 1$ ، عملگر M_{z^k} روی $L^p(\beta)$ انعکاسی است.

اثبات. اولاً می دانیم که Ω_1 ناتمامی است، چون $r_{11} < r_{01}$. مقادیر ثابت و مثبت ϵ_0, ϵ_1 را چنان انتخاب می کنیم که دایره های:

$$T_0 = \{z \in \mathbf{C} : |z| = r_{01} + \epsilon_0\}, \quad T_1 = \{z \in \mathbf{C} : |z| = r_{11} - \epsilon_1\},$$

درون Ω_1 واقع شده و هیچ نقطه مشترکی نداشته باشند. اکنون

$$L_1 = \left\{ f \in L^p(\beta) : \int_{T_1} z^n f(z) dz = 0, n = 1, 2, \dots \right\},$$

در نظر گرفته، بدیهی است L_1 زیرفضایی بسته در $L^p(\beta)$ بوده که تحت M_z پایا و شامل ثابت ها نیز هست.

به ازای $k \in \mathbb{N}$ ، می دانیم که $W(M_{z^k}) \subset \text{AlgLat}(M_{z^k})$. حال فرض کنید $A \in \text{AlgLat}(M_{z^k})$. چون $\text{Lat}(M_z) \subset \text{AlgLat}(M_{z^k})$ ، پس $\text{Lat}(M_z) \subset \text{AlgLat}(M_{z^k})$ ، و در نتیجه $A \in \text{AlgLat}(M_z)$. با توجه به آنکه به ازای هر $\lambda \in \Omega_1$ ، $M_z^* e(\lambda) = \bar{\lambda} e(\lambda)$ ، بنابراین به ازای $f \in L^p(\beta)$ داریم: $\langle f, M_\varphi^* e_\lambda \rangle = \langle f, \bar{\varphi}(\lambda) e_\lambda \rangle$ ، پس $M_\varphi^* e_\lambda = \bar{\varphi}(\lambda) e_\lambda$. در این صورت پیمای یک بعدی $e(\lambda)$ تحت M_z^* و در نتیجه تحت A^* پایا بوده و برای هر $\lambda \in \Omega_1$ می توان نوشت $A^* e(\lambda) = \bar{\varphi}(\lambda) e(\lambda)$ ، لذا به ازای هر $\lambda \in \Omega_1$ و $f \in L^p(\beta)$:

$$\langle Af, e(\lambda) \rangle = \langle f, A^* e(\lambda) \rangle = \varphi(\lambda) e(\lambda),$$

و این نتیجه می دهد که $\varphi \in L^\infty(\beta)$ ، $A = M_\varphi$ ، بنابراین $\varphi \in H^\infty(\Omega_1)$. چون $L_1 \in \text{Lat}(M_z)$ ، داریم $AL_1 \subset L_1$ ، لذا $A1 = \varphi \in L_1$. با بکارگیری فرمول انتگرال کوشی می توان نوشت:

$$\varphi = \varphi_0 + \varphi_1, \quad \text{s.t.} \quad \varphi_0 \in H_0(\Omega_{01}), \varphi_1 \in H(\Omega_{11}),$$

و منظور از $H_0(\Omega_{01})$ فضای تمام توابعی در $H(\Omega_{01})$ است، که در ∞ به صفر می گراید.

اکنون دایره T_2 را چنان مناسب (بسته) انتخاب می کنیم تا دایره T_1 با کوچکترین شعاع در ناحیه $\text{ext}(T_2)$ قرار گیرد. بنابراین φ_0 در $\text{ext}(T_2)$ تحلیلی است. حال به ازای $z \in \text{ext}(T_2)$ می توانیم بنویسیم:

$$\varphi_0(z) = \sum_{n=-\infty}^{-1} \hat{\varphi}_0(n) z^n, \quad \text{s.t.} \quad \hat{\varphi}_0(n) = \frac{1}{2\pi i} \int_{T_1} \frac{\varphi_0(z)}{z^{n+1}} dz, n < 0,$$



چون $\varphi_1 \in H(\Omega_{11})$ ، داریم، $\int_{T_1} z^n \varphi_1(z) dz = 0$ ، $n = 0, 1, 2, \dots$ اما از آنجا که $\varphi \in L_1$ ، برای آنکه تساوی $\varphi = \varphi_0 + \varphi_1$ برقرار باشد باید داشته باشیم $\int_{T_1} z^n \varphi_0(z) dz = 0$ ، $n = 0, 1, 2, \dots$ از این نتیجه می شود که به ازای هر عدد صحیح منفی n ، $\hat{\varphi}_0(n) = 0$ ، بنابراین $\hat{\varphi}_0(z) = 0$ ، $z \in \text{ext}(T_1)$ ، از اینکه $\varphi_0 \equiv 0$ نتیجه می شود $\varphi = \varphi_1 \in H(\Omega_{11}) \cap L^\infty(\beta)$ ، بنابراین $\varphi \in H(\Omega_{11}) \cap L^\infty(\beta)$ ، لذا با توجه به لم (۱.۲)، دنباله ای از چندجمله ای های $\{r_n\}$ وجود دارند که:

$$M_{r_n} \xrightarrow{(WOT)} M_\varphi.$$

فرض کنید M_k ، پیمای خطی بسته ای از مجموعه $\{f_{nk} : n \geq 0\}$ باشد. (می دانیم به ازای هر i : $f_i(z) = z^i$). در این صورت به ازای هر $n \geq 0$ ، $M_{z^k} f_{nk} = f_{(n+1)k} \in M_k$ ، بنابراین $M_{z^k} \in \text{Lat}(M_{z^k})$ ، در نتیجه $M_k \in \text{Lat}(M_\varphi)$ ، اکنون فرض کنید $\hat{\varphi}(n) z^n = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{\varphi}(n) z^n$ ، چون $\varphi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{\varphi}(n) z^n$ ، بنابراین $\varphi \in M_k$ ، پس به ازای $n \geq 0$ و هر $i \neq nk$ داریم $\hat{\varphi}(i) = 0$ ، حال با توجه به نتیجه ای از ساختار ویژه r_n در لم (۱.۲)، هر r_n باید چندجمله ای به صورت z^k باشد، به عبارت دیگر: $r_n(z) = q_n(z^k)$ ، به ازای هر چندجمله ای q_n ، بنابراین:

$$M_{r_n} = r_n(M_z) = q_n(M_{z^k}) \xrightarrow{(WOT)} A.$$

در نتیجه بنا بر (۲.۲)، $A \in W(M_{z^k})$ ، پس M_{z^k} انعکاسی است. \square

نتیجه ۴.۲. اگر عملگر M_z روی $L^p(\beta)$ معکوس پذیر باشد، آنگاه M_{z^k} به ازای هر عدد صحیح k ، انعکاسی است.

اثبات. چون به ازای هر m ، $M_z f_m = f_{m+1}$ ، بنابراین با فرض معکوس پذیری عملگر M_z روی $L^p(\beta)$ داریم: $M_z^{-1} f_m = f_{m-1}$ ، اگر قرار دهیم $f'_m = f_{-m}$ آنگاه به ازای هر m : $M_z^{-1} f'_m = M_z^{-1} f_{-m} = f_{-(m+1)} = f'_{m+1}$ ،

بنابراین f'_m توسط M_z^{-1} (به جلو) انتقال می یابد. لذا با توجه به (۳.۲)، M_z^{-k} به ازای هر $k \geq 1$ انعکاسی است. از طرفی بنا بر آنکه عملگر همانی نیز انعکاسی است. پس M_z^k به ازای هر عدد صحیح k انعکاسی است. \square

مراجع

- [1] B. Yousefi, Sh. Khoshdel, *Reflexivity of powers of the multiplication operator on special function spaces*, Acta Mathematica Scientia, 32B (6) (2012), pp. 2279–2284.
- [2] B. Yousefi, *Multiplication operators on Hilbert spaces of analytic functions*, Archiv der Mathematik 83 (6) (2004), pp. 536–539.
- [3] B. Yousefi, *On the space $l^p(\beta)$* , Rendiconti Del Circolo Di Palermo 49 (2000), pp. 115–120.
- [4] B. Yousefi, Y. N. Dehghan, *Reflexivity on Weighted Hardy Spaces*, Southeast Asian Bulletin of Mathematics 28 (2004) 587 – 593.

پست الکترونیکی: omid.abedi@std.yu.ac.ir
پست الکترونیکی: kashkooly@yu.ac.ir



دوگانگی قوی در بهینه سازی محدب پارامتری

مرضیه کلانتری

دانشجوی کارشناسی ارشد کامپیوتر-دانشگاه آزاد آمل

اعظم آغیل

دانشجوی کارشناسی ارشد ریاضی، دانشگاه مازندران - بهشهر

رقیه صنعتی*

فارغ التحصیل کارشناسی ارشد از دانشگاه آزاد ساری

مجید پورقاسم

دانشجوی کارشناسی ارشد کامپیوتر- دانشگاه آزاد ساری

چکیده

مدلسازی بهینه سازی محدب در مواجهه با داده‌های نامعلوم اغلب منجر به خانواده‌هایی از مسائل بهینه‌سازی محدب پارامتری می‌شود. همین موضوع موجب می‌شود که یک چارچوب دوگانگی برای خانواده‌ای از مسائل بهینه‌سازی پارامتری را در این مقاله ارائه دهیم. دوگانگی قوی را برای خانواده‌ی مسائل پارامتری با استفاده از آنالیز مزدوج و با بدست آوردن دوگانگی قوی بین زوج دوگان مربوطه ارائه می‌کنیم. ابتدا نشان می‌دهیم که دوگانگی قوی برقرار است هرگاه شرایط مقید برقرار باشد، سپس نشان می‌دهیم که شرایط مقید نیز برای دوگانگی قوی ضروری است، به شرطی که شرایط مقید برقرار باشد اگر و تنها اگر دوگانگی قوی برای هر آشفتگی خطی تابع هدف برقرار باشد.

واژه‌های کلیدی: بهینه‌سازی محدب پارامتری؛ دوگان مزدوج؛ دوگانگی قوی؛ مسائل محدب مخروط نامعلوم؛ بهترین تقریب

۱ مقدمه

خانواده‌ی مسائل بهینه سازی محدب مخروطی(اولیه)

$$\{(P_u)\}_{u \in U} : \quad \left\{ \min_{x \in X} \{f(x) : x \in S, g_u(x) \in -C\} \right\}_{u \in U},$$

را در نظر می‌گیریم که در آن X و Y فضاهای محدب موضعاً هاسدورف، $S \subseteq X$ یک مجموعه‌ی محدب ناتهی، U یک مجموعه معلوم، $C \subseteq Y$ یک مخروط محدب ناتهی، $f : X \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ یک تابع محدب سره و برای هر $u \in U$ یک تابع $g_u : X \rightarrow Y$ یک تابع $-C$ محدب باشند. خانواده پارامتری از مسائل بهینه‌سازی در $\{(P_u)\}_{u \in U}$ اغلب در مدل‌سازی علمی مسائل تصمیم جهانی حقیقی ناشی شده است [۲] و پوشش مسائل بهینه‌سازی در واقع عدم قطعیت داده‌هاست [۴، ۵]. هدف این مقاله بررسی ویژگی‌های دوگانگی قوی با استفاده از نظریه دوگانگی مزدوج می‌باشد. ابتدا دوگانگی قوی را با استفاده از یک شرط زیردیفرانسیل قوی جدید ثابت می‌کنیم [۴] و سپس ثابت می‌کنیم که شرط زیردیفرانسیل ضعیف‌ترین شرط برای خانواده‌ی $\{(P_u)\}_{u \in U}$ می‌باشد که دوگانگی قوی را تضمین میکند.

۲ آنالیز مزدوج

با در نظر گرفتن دو فضای برداری موضعاً هاسدورف X و Y ، و همچنین فضاهای دوگان توپولوژی X^* و Y^* ، با توپولوژی ضعیف ستاره، برای هر $x \in X$ مجموعه متشکل از همه تابعکهای خطی پیوسته روی X را با X^* نشان داده و همچنین قرارداد می

*سخنران



کنیم $\langle x^*, x \rangle = x^*(x)$. همچنین قرارداد می‌کنیم: $\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\} := \overline{\mathbb{R}}$

تعریف ۱.۲. فرض کنیم $f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ یک تابع باشد. دامنه f را به صورت $\text{dom}(f) := \{x \in X : f(x) < \infty\}$ تعریف می‌کنیم. f را سره گوئیم هرگاه $\text{dom}(f) \neq \emptyset$ و به ازای هر $x \in X$, $f(x) \neq -\infty$. ابرنمودار f را صورت $\text{epi}(f) := \{(x, r) \in X \times \mathbb{R} : f(x) \leq r\}$ تعریف می‌کنیم. و تابع مزدوج فنچل $f^* : X^* \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ را بصورت $f^*(x^*) := \sup_{x \in X} \{\langle x^*, x \rangle - f(x)\}$ تعریف می‌کنیم.

تعریف ۲.۲. برای هر تابع $f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ ، نامساوی یانگ-فنچل برای هر $x \in X$ و هر $x^* \in X^*$ برقرار است. یعنی $f^*(x^*) + f(x) \geq \langle x^*, x \rangle$. همچنین $f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ محدب است اگر و فقط اگر $\text{epi}(f) \subset X \times \mathbb{R}$ مجموعه محدب باشد و اگر $\text{epi}(F)$ بسته باشد در آن صورت تابع F نیم پیوسته پایینی است. برای تابع سره $f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ و $x \in \text{dom}(f)$ مجموعه

$$\partial f(x) := \{x^* \in X^* : \langle x^*, y - x \rangle \leq f(y) - f(x), \forall y \in X\}$$

زیردیفرانسیل f در نقطه x نامیده می‌شود و به هر $x^* \in \partial f(x)$ زیرگرادیان f در نقطه x می‌گوییم. f را در نقطه $x \in X$ زیردیفرانسیل پذیر گوئیم هرگاه $\partial f(x) \neq \emptyset$ باشد. اگر $f(x) \in \mathbb{R}$ ، در آن صورت $\partial f(x)$ بصورت بالا تعریف می‌شود، ولی اگر $f(x) = +\infty$ ، قرارداد می‌کنیم که $\partial f(x) := \emptyset$

۳ شرط مقید برای دوگانگی قوی

در این مبحث ابتدا یک خصوصیت محدودیت دوگانگی قوی را با ذکر جزئیات بیشتر شرط زیردیفرانسیل عمومی معرفی می‌کنیم. همچنین نشان می‌دهیم که خصوصیت محدودیت یک خصوصیت بخشیدن دوگانگی قوی است، در جهت اینکه خصوصیت محدودیت برقرار است اگر و تنها اگر دوگانگی قوی برای هر آشفتگی خطی تابع هدف (RP) برقرار باشد.

گزاره ۱.۳. خانواده توابع $\Phi_u : X \times Y \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ برای هر $u \in \mathcal{U}$ را در نظر بگیرید، آنگاه برای هر $x^* \in X^*$ رابطه زیر برقرار است.

$$\inf_{x \in X} \left\{ \sup_{u \in \mathcal{U}} \{\Phi_u(x, \circ) + \langle x^*, x \rangle\} \right\} \geq \sup_{(u, y^*) \in \mathcal{U} \times Y^*} \{-\Phi_u^*(-x^*, y^*)\} \quad (1)$$

اثبات. برای اثبات کامل آن به [۱] مراجعه شود. □

ملاحظه ۲.۳. فرض کنیم $\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\} := \overline{\mathbb{R}}$ $f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ یک تابع سره باشد و $\text{dom} f \cap A \neq \emptyset$ که در آن $A := \{x \in X : \exists y^* \in Y^* \text{ such that } \langle y^*, x \rangle \in C\}$ مخروط دوگان C را با C^* نشان داده و به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$C^* = \{y^* \in Y^* : \langle y^*, y \rangle \geq \circ, \forall y \in C\} \quad (2)$$

و برای هر $y^* \in Y^*$ قرارداد می‌کنیم: $(y^* g_u)(\cdot) := \langle y^*, g_u(\cdot) \rangle$ باتوجه به تعریف مجموعه A شمول زیر همواره برقرار است

$$\partial(f + \delta_A)(x) \supseteq \bigcup_{\substack{u \in \mathcal{U}, y^* \in C^* \\ (y^* g_u)(x) = \circ}} \partial(f + (y^* g_u) + \delta_S)(x), \quad \forall x \in \text{dom} f \cap A. \quad (3)$$

تعریف ۳.۳. شرط زیر دیفرانسیل اساسی قوی (RBSC) را در زیر معرفی می‌کنیم:

$$\partial(f + \delta_A)(x) = \bigcup_{\substack{u \in \mathcal{U}, y^* \in C^* \\ (y^* g_u)(x) = \circ}} \partial(f + (y^* g_u) + \delta_S)(x), \quad \forall x \in \text{dom} f \cap A. \quad (4)$$



در ابتدا نشان می‌دهیم که شرط زیر دیفرانسیل اساسی قوی (RBSC) برای دوگانگی قوی شرط کافی است.

قضیه ۴.۳. فرض کنید که تابع f سره، $dom f \cap A \neq \emptyset$ و شرط زیر دیفرانسیل اساسی قوی (RBSC) صادق باشد. در این صورت هر وقت نگاشت f به مینیم خود روی A برسد خواهیم داشت:

$$\min_{x \in A} f(x) = \max_{(u, y^*) \in \mathcal{U} \times C^*} \inf_{x \in S} \{f(x) + \langle y^*, g_u(x) \rangle\}. \quad (5)$$

در ادامه ما نشان می‌دهیم که (RBSC) در بعضی جهات ضعیف‌ترین شرط برای دوگانگی قوی است.

قضیه ۵.۳. فرض کنید $dom f \cap A \neq \emptyset$. آنگاه گزاره‌های زیر با هم معادلند:

(الف) شرط (RBSC) صادق است.

(ب) برای هر $x^* \in X^*$ بطوریکه $f + \langle x^*, \cdot \rangle$ مینیم روی A را بدست می‌آورد در شرط زیر صادق است:

$$\min_{x \in A} \{f(x) + \langle x^*, x \rangle\} = \max_{(u, y^*) \in \mathcal{U} \times C^*} \inf_{x \in S} \{f(x) + \langle x^*, x \rangle + \langle y^*, g_u(x) \rangle\}.$$

اثبات. برای اثبات کامل آن به [۱] مراجعه شود.

□

در حالت خاص وقتی \mathcal{U} یک مجموعه تک عضوی باشد، نتیجه بدست آمده برای دوگانگی لاگرانژ در [۲، ۳] اثبات شده است.

قضیه ۶.۳. فرض کنید $dom f \cap A \neq \emptyset$. آنگاه گزاره‌های زیر با هم معادلند:

(الف): برای هر $x^* \in X^*$ داریم:

$$\min_{x \in A} (f + \langle x^*, \cdot \rangle)(x) = \max_{y^* \in C^*} \inf_{x \in S} \{f(x) + \langle x^*, x \rangle + \langle y^*, g(x) \rangle\}.$$

(ب): برای هر $x \in dom f \cap A$ ، شرط زیر صادق است:

$$\partial(f + \delta_A)(x) = \bigcup_{y^* \in C^*, (y^*g)(x) = \circ} \partial(f + (y^*g) + \delta_S)(x), \quad \forall x \in dom f \cap A.$$

اثبات. در قضیه ۵.۳ اگر فرض کنیم $\mathcal{U} = \{u\}$ ، حکم بدست خواهد آمد.

□

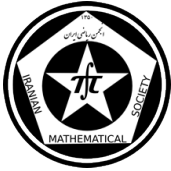
تعریف ۷.۳. زمانی که در شرط (RBSC) تابع $f = \circ$ در نظر بگیریم، خواهیم داشت

$$\partial(\delta_A)(x) = \bigcup_{\substack{u \in \mathcal{U}, y^* \in C^* \\ (y^*g_u)(x) = \circ}} \partial((y^*g_u) + \delta_S)(x), \quad \forall x \in A.$$

حال با توجه به تعریف مخروط نرمال، شرط کیفی دوگانگی قوی (RBCQ) را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$(RBCQ) \quad N_A(x) = \bigcup_{\substack{u \in \mathcal{U}, y^* \in C^* \\ (y^*g_u)(x) = \circ}} \partial((y^*g_u) + \delta_S)(x), \quad \forall x \in A. \quad (6)$$

قضیه بعدی وجود دوگانگی قوی را با شرط (RBCQ) به طور کامل تشریح می‌کند.



قضیه ۸.۳. فرض کنید $dom f \cap A \neq \emptyset$. آنگاه گزاره‌های زیر با هم معادلند:

(الف) شرط $(RBCQ)$ صادق است.

(ب) برای هر $x^* \in X^*$ مینیمم خود را روی A بدست می‌آورد در شرط زیر صادق است:

$$\min_{x \in A} \langle x^*, x \rangle = \max_{(u, y^*) \in U \times C^*} \inf_{x \in S} \{ \langle x^*, x \rangle + \langle y^*, g_u(x) \rangle \}.$$

(ج) برای هر تابع سره $f: X \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ که مینیمم خودش را روی A بدست می‌آورد،

به طوریکه $(f + \delta_A)^*(\circ) = (f^* \square \sigma_A)(\circ)$ و پیچش تلفیقی در صفر دقیق است، در شرط زیر صادق است:

$$\min_{x \in A} f(x) = \max_{(u, y^*) \in U \times C^*} \inf_{x \in S} \{ f(x) + \langle y^*, g_u(x) \rangle \}.$$

نتیجه ۹.۳. اگر S مجموعه‌ی محدب و بسته باشد و برای هر $u \in U$ ، تابع c, g_u ، محدب و $c - epi$ بسته باشد به طوریکه $A \neq \emptyset$ ، آنگاه شرط محدب و بسته بودن؛

$$" \bigcup_{u \in U, y^* \in C^*} epi((y^* g_u) + \delta_S)^*(x^*) "$$

شرط کافی برای $(RBCQ)$ است.

شرط فوق کافی است زیرا در روند اثبات ϕ را حالت خاص در نظر گرفتیم.

سپاس‌گزاری

در اینجا بر خود لازم می‌دانم تا از زحمات استاد بزرگوارم جناب آقای دکتر وحید داداشی که در تمام مراحل تدوین پایان‌نامه دوره کارشناسی ارشد صبورانه راهنما و پشتیبان من بوده‌اند نهایت قدردانی را داشته باشم.

مراجع

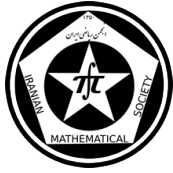
- [۱] صنعتی، رقیه، دوگانگی قوی در بهینه سازی محدب پارامتری، دانشگاه آزاد ساری، ساری، تابستان ۱۳۹۳.
- [2] B. Bank, J. Guddat, D. Klatte, B. Kummer, K. Tammer, *Nonlinear Parametric Optimization*. Birkhäuser Verlag, Basel-Boston (1983).
- [3] .I. Bot, V. Jeyakumar, G.Y. Li, *Robust Duality in Parametric Convex Optimization*. Set-Valued Variational Analysis, 21(2), 177-189 (2013).
- [4] V. Jeyakumar, G. Li, *Strong duality in robust convex programming*. complete characterizations. SIAM J. Optim. 20, 3384-3407 (2010).
- [5] V. Jeyakumar, G. Li, *Characterizing robust set containments and solutions of uncertain linear programs without qualifications*. Oper. Res. Lett. 38, 188-194 (2010).

پست الکترونیکی: RoghayehSanati@yahoo.com

پست الکترونیکی: Kalantari3943@gmail.com

پست الکترونیکی: a.aghil12@yahoo.com

پست الکترونیکی: Majid.p@chmail.ir



روشی برای حل بعضی از مسائل درونیابی لاگرانژ با استفاده از دایره یکه

احمد حیدری*

دانشگاه آزاد اسلامی واحد کرمانشاه

چکیده

با توجه به اینکه برای حل مسائل درونیاب چندجمله‌ای با استفاده از چندجمله‌ای درونیاب لاگرانژ مستلزم حجم عملیات زیاد و نیاز به زمان بیشتری برای محاسبه می باشد و این موارد از معایب درونیابی مذکور است، در این مقاله برای حل بعضی از مسائل با استفاده از دایره یکه در صفحه مختلط که گره‌های با فاصله‌های یکسان روی دایره یکه باشد، روشی با حجم عملیات کمتر و محاسبه آسانتر و سریعتر ارائه شده است. و در پایان مثالی برای مقایسه روش سنتی و این روش ارائه شده است.

واژه‌های کلیدی: درونیابی، لاگرانژ، دایره یکه، گره‌های با فاصله یکسان

Mathematics Subject Classification [2010]: 13D45, 39B42

۱ مقدمه

در سال‌های گذشته لاگرانژ برای حل مسائل درونیاب چندجمله‌ایها، روش زیر را ارائه کرد. (مراجعه به [۱])

$$l_i(x) = \frac{w(x)}{(x-x_i)w'(x_i)} = \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq i}}^n \frac{x-x_k}{x_i-x_k} \quad s.t. \quad w(x) := \prod_{i=0}^n (x-x_i) \quad (1)$$

و چند جمله‌ای درونیاب لاگرانژ به صورت زیر می باشد.

$$p(x) = \sum_{i=0}^n f_i l_i(x) = \sum_{i=0}^n f_i \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq i}}^n \frac{x-x_k}{x_i-x_k} \quad (2)$$

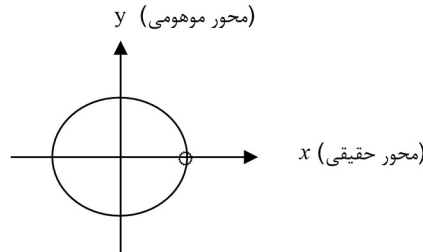
در قسمت ۲ این مقاله دایره یکه و گره‌های با فاصله یکسان (مراجعه به [۳]) و در قسمت ۳ روش محاسبه چندجمله‌ای با درونیاب لاگرانژ با استفاده از گره‌های با فاصله یکسان روی دایره یکه و در قسمت ۴ مثالی برای مقایسه روش‌ها و در قسمت ۵ نتیجه‌گیری نهایی ارائه می شود.

۲ دایره یکه

دایره یکه در صفحه مختلط بصورت زیر می باشد: (مراجعه به [۲])

$$T = \{z \mid |z| = 1\} \quad (3)$$

* عضو انجمن ریاضی ایلام و کارشناس اداره کل آموزش و پرورش استان ایلام



در اینجا نمونه‌ای از گره‌های با فاصله‌های یکسان مورد مطالعه قرار می‌دهیم: برای سادگی و بدون از دست دادن کلیت فرض می‌کنیم گره‌ها همان n ریشه واحد $\{z_j\}_{j=0}^{n-1}$ هستند. (مراجعه شود به [۴])
 $(z^n = 1)$ پس واضح است:

$$\sum_{i=0}^{n-1} z_i^j = \begin{cases} n & \text{if } n/j \\ 0 & \text{o.w} \end{cases}$$

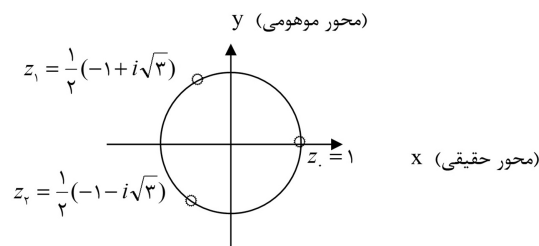
$$z_j = e^{i\frac{2\pi j}{n}}, \quad j = 0, \dots, n-1, \quad e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta \quad (۴)$$

مثال ۱.۲. ریشه‌های $z^3 = 1$ را مشخص کنید و روی نمودار مشخص کنید.

حل.

$$z_0 = 1, \quad z_1 = e^{i\frac{2\pi}{3}} = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

$$z_2 = e^{i\frac{4\pi}{3}} = \cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{4\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$$



۳ روش محاسبه بعضی از مسائل درونیابی چندجمله‌ای لاگرانژ

با استفاده از گره‌های با فاصله یکسان روی دایره یکه، اگر یک بردار $\{u_j\}_{j=0}^{n-1}$ را ثابت در نظر بگیریم مسئله عمومی درونیابی با گره‌های با فاصله یکسان $\{z_j\}_{j=0}^{n-1}$ به محاسبه یک چند جمله‌ای $p_{n-1}(z)$ با درجه کمتر یا مساوی $n-1$ تبدیل می‌شود. به گونه‌ای که:

$$p_{n-1}(z) \in P_{n-1}[z], \quad p_{n-1}(z_j) = u_j, \quad j = 0, \dots, n-1 \quad (۵)$$

واضح است که این چند جمله‌ای وجود دارد و منحصر به فرد است. (مراجعه به [۵]) توجه: هاز z هم مؤلفه اول چندجمله‌ای درونیابی هستند و هم گره‌های با فاصله یکسان روی دایره یکه می‌باشند. با توجه به اینکه بحث کلی روی دایره یکه می‌باشد،



در موضوع بحث ما از عبارت استفاده می‌شود، لذا این عبارت دارای n ریشه می‌باشد که عبارتند از: z_0, z_1, \dots, z_{n-1} پس داریم:

$$z^n = 1 \Rightarrow z^n - 1 = 0$$

$$\Rightarrow z^n - 1 = (z - z_0)(z - z_1) \dots (z - z_{n-1}) = \prod_{k=0}^{n-1} (z - z_k) = w_n(z)$$

لذا در درونیابی لاگرانژ داریم

$$l_k(z) = \frac{w_n(z)}{w'_n(z_k)(z - z_k)}, \quad k = 0, \dots, n-1$$

$$\Rightarrow l_k(z) = \frac{w_n(z)}{w'_n(z_k)(z - z_k)} = \frac{1}{\frac{n}{z_k}} \times \frac{z^n - 1}{(z - z_k)} = \frac{z_k}{n} \times \frac{z^n - 1}{(z - z_k)} \quad (6)$$

۴ مثالی برای مقایسه روش سنتی و روش استفاده از دایره یکه برای درونیابی لاگرانژ

مثال ۱۰۴. چند جمله‌ای درونیاب تابع جدولی زیر را هم با روش سنتی و هم با روش استفاده از دایره یکه بدست آورید.

z_k	۱	i	-۱	$-i$
f_k	۳	۱۰	۴	۲

$$n = 4, \quad k = 0, 1, 2, 3$$

حل. الف) روش سنتی

$$l_0(z) = \frac{(z-i)(z+1)(z+i)}{(1-i)(1+1)(1+i)} = \frac{1}{4}(z^3 + z^2 + z + 1)$$

$$l_1(z) = \frac{(z-1)(z+1)(z+i)}{(i-1)(i+1)(i+i)} = \frac{1}{-4i}(z^3 + iz^2 - z - i) = \frac{i}{4}(z^3 + iz^2 - z - i)$$

$$l_2(z) = \frac{(z-1)(z-i)(z+i)}{(-1-1)(-1-i)(-1+i)} = -\frac{1}{4}(z^3 - z^2 + z - 1)$$

$$l_3(z) = \frac{(z-1)(z-i)(z+1)}{(-i-1)(-i-i)(-i+1)} = \frac{1}{4i}(z^3 - iz^2 - z + i) = \frac{-i}{4}(z^3 - iz^2 - z + i)$$

$$p(x) = \sum_{k=0}^3 f_k l_k(z) = 3l_0(z) + 10l_1(z) + 4l_2(z) + 2l_3(z)$$



(ب) روش استفاده از دایره یکه

$$\begin{aligned}
 l_0(z) &= \frac{1}{4} \left(\frac{z^4 - 1}{z - 1} \right) = \frac{1}{4} (z^3 + z^2 + z + 1) \\
 l_1(z) &= \frac{i}{4} \left(\frac{z^4 - 1}{z - i} \right) = \frac{i}{4} (z^3 + iz^2 - z - i) \\
 l_2(z) &= \frac{-1}{4} \left(\frac{z^4 - 1}{z + 1} \right) = -\frac{1}{4} (z^3 - z^2 + z - 1) \\
 l_3(z) &= \frac{-i}{4} \left(\frac{z^4 - 1}{z + i} \right) = \frac{-i}{4} (z^3 - iz^2 - z + i) \\
 p(x) &= \sum_{k=0}^3 f_k l_k(z) = 3l_0(z) + 1l_1(z) + 4l_2(z) + 2l_3(z)
 \end{aligned}$$

۵ نتیجه‌گیری نهایی

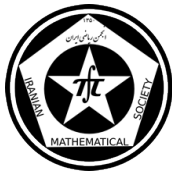
در این مقاله برای حل مسائل درونیاب لاگرانژ روی دایره یکه T که N گره (n ریشه واحد) مورد بحث باشد باید z_j ها را مانند مثال (۱.۲) ابتدا با رابطه $z_j = e^{i\frac{2\pi j}{n}}$, $j = 0, \dots, n-1$ و بعد با رابطه $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$ محاسبه می‌کنیم. لذا مسائلی که z_j های آنها ریشه‌های 1 باشد با این روش قابل حل می‌باشد و سپس مانند مثال (۱.۴) عمل می‌شود. که بویژه در مرحله محاسبه $l_k(z)$ ها کاربرد هدف موضوع مقاله یعنی رابطه (۶) نمایان می‌شود و واضح است که z_j ها باید در فاصله $[-1, 1]$ باشند.

سپاسگذاری

برخود لازم می‌دانم که از راهنمایی‌های استادان ارجمند دکتر رضا جلیلیان و دکتر نورالدین پرندین کمال تقدیر و تشکر و ارادت خود را به محضر این عزیزان ابراز نمایم. همچنین مراتب سپاس و قدردانی خود را از اداره کل آموزش و پرورش استان ایلام جهت همکاری‌های ارزنده ابراز می‌دارم.

مراجع

- [۱] الهویرنلو، توفیق. بابلیان، اسماعیل. آفتاب کیانی، نارسیس. آنالیز عددی پیشرفته، تهران، دانشگاه آزاد اسلامی، واحد علوم و تحقیقات، مرکز انتشارات علمی، ۱۳۸۷.
- [۲] ایروین کریزیگ، ترجمه دکتر علی‌اکبر عالم‌زاده، ریاضیات مهندسی پیشرفته، جلد دوم، ویرایش ششم، تهران، ارگ، ۱۳۷۶-۱۳۷۵.
- [3] D. Kincaid, W. Cheney, Numerical Analysis: Mathematics of Scientific Computation, Brooks/Cole Publishing Company, 1991.
- [4] J. Stoer, R. Bulirsch, Introduction to Numerical Analysis, 2nd ed., Springer, New York, 1996.
- [5] E. Berriochoa, A. Cachafeiro, Algorithms for solving Hermite interpolation problems using the Fast Fourier Transform, Journal of Computational and Applied Mathematics 235 (2010) 882-894



ضرب تانسوری روی سیستم های تحت انتقال پایا

سمیه افشار جهانشاهی*
دانشگاه هرمزگان

ثمینه ذاکری
دانشگاه هرمزگان

احمد احمدی
دانشگاه هرمزگان

چکیده

سیستم های تحت انتقال پایا و ضرب تانسوری نقش مهمی در نظریه نمونه برداری^۱، نظریه ی تقریب، اسپلین های چند متغیره، موجک ها، ... بازی می کنند در این مقاله نشان خواهیم داد که ضرب تانسوری تعداد متناهی سیستم های تحت انتقال پایا در فضاها ی هیلبرت، یک سیستم تحت انتقال پایا برای ضرب تانسوری همان فضاها ی هیلبرت تشکیل می دهد.

واژه های کلیدی: قاب، سیستم تحت انتقال پایا، ضرب تانسوری

Mathematics Subject Classification [2010]: 41A38, 42C15 and 43A70

۱ مقدمه

انتقال، خاصیت هندسی مشترک سیستم های موجکی و گابور است. در سال ۱۹۹۶، بندیتو^۲ و لی^۳ قاب هایی را که با انتقال یک تابع به وجود می آمدند را معرفی کردند. کاسازا در سال ۲۰۰۱ کار آنها را گسترش داده و انتقال های یک دنباله از توابع را بررسی کرد و سیستم های تحت انتقال پایا را معرفی کرد. سیستم های تحت انتقال پایا نقش مهمی در نظریه نمونه برداری، اسپلین های چند متغیره، موجک ها و ... بازی می کنند.

به دلیل کاربرد زیاد ضرب تانسوری در نظریه ی تقریب و... در این مقاله ضرب تانسوری سیستم های تحت انتقال پایا را مورد بررسی قرار خواهیم داد. فولند [۴]، کادیسون [۵] و خسروی [۶] ضرب تانسوری فضاها ی هیلبرت را معرفی کردند. ابتدا چند تعریف اساسی را بیان می کنیم.

در تمام بخش ها، H_i یک فضای هیلبرت و J مجموعه ی اندیس گذار شمارا خواهند بود.

فرض کنید $\{g_m\}_{m \in J}$ خانواده ی شمارایی از توابع در $L^2(R)$ باشد و پارامتر $a > 0$ داده شده باشد. سیستم تحت انتقال پایا تولید شده توسط $\{g_m\}_{m \in J}$ و a ، گردایه توابع $\{g_m(\cdot - na)\}_{m \in J, n \in \mathbb{Z}}$ است که اگر آن را برحسب عملگر انتقال بنویسیم داریم: $\{g_{nm}\} = \{T_{na}g_m\}_{m, n \in \mathbb{Z}}$.

این سیستم تحت انتقال پایا یک تابع ماتریس-مقدار به صورت زیر تعریف می کند [۳]:

$$H(\gamma) = (\hat{g}_m(\gamma - \frac{k}{a}))_{k, m \in \mathbb{Z}}, a.e., \gamma \in R \quad (1)$$

* سخنران

^۱Sampling theory

^۲J. Benedetto

^۳S. Li



همچنین ضرب تانسوری H_1 و H_2 که با $H_1 \otimes H_2$ نشان داده می شود یک فضای ضرب داخلی با ضرب

$$\langle x \otimes y, x' \otimes y' \rangle = \langle x, x' \rangle \langle y, y' \rangle$$

برای هر $x_1, y_1 \in H_1$ و $x_2, y_2 \in H_2$ است.

نرم روی $H_1 \otimes H_2$ به شکل زیر تعریف می شود:

$$\|x \otimes y\| = \|x\|_1 \|y\|_2, \forall x \in H_1, \forall y \in H_2$$

که فضای $H_1 \otimes H_2$ یک فضای هیلبرت است [۴].

ضرب تانسوری دو عملگر S و T به شکل زیر تعریف می شود:

$$(S \otimes T)(v \otimes w) = S(v) \otimes T(w) \quad (2)$$

اگر $S, S' \in L(H)$ و $T, T' \in L(K)$ و $S \otimes T, S' \otimes T' \in L(H \otimes K)$ باشند آنگاه:

$$(S \otimes T)(S' \otimes T') = SS' \otimes TT'$$

$$(S \otimes T)^* = S^* \otimes T^*.$$

به عنوان مثال، فرض کنید (X, μ) و (Y, ν) دو فضای اندازه دار σ -متناهی باشند. اگر $f \in L^2(\mu)$ و $g, h \in L^2(\nu)$ باشند داریم:

$$(f \otimes g)(h) = \langle g, h \rangle f = \int f(\cdot)g(y)d\nu(y)$$

بنابراین $f \otimes g$ یک عملگر انتگرال پادخطی با هسته

$$(f \otimes g)(x, y) = f(x)g(y) \quad (3)$$

روی $X \times Y$ خواهد بود [۴].

فرض کنید (X, μ) و (Y, ν) دو فضای اندازه دار σ -متناهی باشند. در اینصورت تابع (۳) را می توان به طور یکتا به یک یکرختی از $L^2(\mu) \otimes L^2(\nu)$ به $L^2(\mu \times \nu)$ توسعه داد [۱].
همچنین می توان یکرختی زیر را نشان داد:

$$L^2(\Omega_1 \times \Omega_2, \mu_1 \otimes \mu_2) \cong L^2(\Omega_1, \mu_1) \otimes L^2(\Omega_2, \mu_2). \quad (4)$$

۲ نتایج اصلی

فرض کنید H_1, H_2 دو فضای هیلبرت و $\{T_{n_1, a_1, g, m}\}_{n_1, m \in \mathbb{Z}}, \{T_{n_2, a_2, g, m'}\}_{n_2, m' \in \mathbb{Z}}$ دو سیستم تحت انتقال پایا باشند. در زیر نشان می دهیم که چگونه می توان یک سیستم تحت انتقال پایا برای $H_1 \otimes H_2$ ساخت و برخی نتایج [۴] را برای آن بررسی خواهیم کرد.



قضیه ۱.۲. اگر $\{g_m\}$ ، $\{g_{m'}\}$ گردایه هایی از توابع در $L^\vee(R)$ باشند و $\{T_{n_1 a_1} g_m\}_{n_1, m} \in \mathbb{Z}$ ، $\{T_{n_2 a_2} g_{m'}\}_{n_2, m'} \in \mathbb{Z}$ دو سیستم تحت انتقال پایا باشند. آنگاه $\{T_{n_1 a_1} g_m \otimes T_{n_2 a_2} g_{m'}\}_{n_1, n_2, m, m'} \in \mathbb{Z}$ نیز یک سیستم تحت انتقال پایا برای $H_1 \otimes H_2$ است.

اثبات. بنا به (۲) داریم:

$$(T_{n_1 a_1} \otimes T_{n_2 a_2})(g_m \otimes g_{m'})(x \otimes y) = (T_{n_1 a_1} g_m \otimes T_{n_2 a_2} g_{m'})(x \otimes y)$$

از به رابطه ی (۴) :

$$L^\vee(R^\vee) = L^\vee(\mathbf{R} \times \mathbf{R}) \cong L^\vee(\mathbf{R}) \otimes L^\vee(\mathbf{R})$$

پس نگاشتی مانند $h \in L^\vee(R^\vee)$ وجود دارد به طوری که

$$\phi(T_{n_1 a_1} g_m \otimes T_{n_2 a_2} g_{m'}) = h$$

جایی که $\phi: L^\vee(R) \otimes L^\vee(R) \rightarrow L^\vee(R^\vee)$ یک عملگر خطی یک به یک و پوشاست. بنا به (۲) داریم:

$$\begin{aligned} (T_{n_1 a_1} g_m \otimes T_{n_2 a_2} g_{m'})(x \otimes y) &= T_{n_1 a_1} g_m(x) \otimes T_{n_2 a_2} g_{m'}(y) \\ &= g_m(x - n_1 a_1) \otimes g_{m'}(y - n_2 a_2) \end{aligned}$$

بنابراین نشان دادیم که:

$$(T_{n_1 a_1} \otimes T_{n_2 a_2})(g_m \otimes g_{m'})(x \otimes y) = g_m(x - n_1 a_1) \otimes g_{m'}(y - n_2 a_2)$$

□

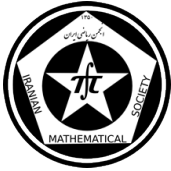
لم ۲.۲. اگر $\{g_m\}$ ، $\{g_{m'}\}$ گردایه هایی از توابع در $L^\vee(R)$ باشند، نشان می دهیم:

$$(\widehat{g_m \otimes g_{m'}})(\nu_1 - \frac{l}{a_1}, \nu_2 - \frac{l'}{a_2}) = (\widehat{g_m} \otimes \widehat{g_{m'}})(\nu_1 - \frac{l}{a_1}, \nu_2 - \frac{l'}{a_2})$$

اثبات. از رابطه ی (۳) داریم:

$$\begin{aligned} &(\widehat{g_m \otimes g_{m'}})(\nu_1 - \frac{l}{a_1}, \nu_2 - \frac{l'}{a_2}) \\ &= \int \int (g_m \otimes g_{m'})(\nu_1 - \frac{l}{a_1}, \nu_2 - \frac{l'}{a_2}) e^{i[n_1(\nu_1 - \frac{l}{a_1}) + n_2(\nu_2 - \frac{l'}{a_2})]} d\nu d\nu' \\ &= \int \int g_m(\nu_1 - \frac{l}{a_1}) g_{m'}(\nu_2 - \frac{l'}{a_2}) e^{i[n_1(\nu_1 - \frac{l}{a_1}) + n_2(\nu_2 - \frac{l'}{a_2})]} d\nu d\nu' \\ &= g_m(\nu_1 - \frac{l}{a_1}) g_{m'}(\nu_2 - \frac{l'}{a_2}) \\ &\cong \widehat{g_m} \otimes \widehat{g_{m'}}(\nu_1 - \frac{l}{a_1}, \nu_2 - \frac{l'}{a_2}) \end{aligned}$$

□



قضیه ۳.۲. اگر $\{g_{nm_i}\}_{nm \in Z}$ برای $i = \{1, \dots, k\}$ تعداد متناهی سیستم انتقال پایا باشند و $H_1(\nu), \dots, H_k(\nu)$ ماتریس های نظیر آنها تعریف شده در (۱) باشند آنگاه:

$$\bigotimes_{i=1}^k H_i(\nu) = \left(\bigotimes_{i=1}^k (g_m^i(\nu_i - \frac{l}{a_i})) \right)_{l, m \in Z}$$

اثبات. با استقرا برای $k = 2$ داریم:

$$\begin{aligned} H_1(\nu) \otimes H_2(\nu) &= (\widehat{g_{m_1}}(\nu_1 - \frac{l_1}{a_1}))_{m_1, l_1 \in Z} \otimes (\widehat{g_{m_2}}(\nu_2 - \frac{l_2}{a_2}))_{m_2, l_2 \in Z} \\ &= \{(\widehat{g_{m_1}}(\nu_1 - \frac{l_1}{a_1})) \cdot (\widehat{g_{m_2}}(\nu_2 - \frac{l_2}{a_2}))\}_{l_1, m_1 \in Z, l_2, m_2 \in Z} \\ &= \{(\widehat{g_{m_1}} \otimes \widehat{g_{m_2}})(\nu_1 - \frac{l_1}{a_1}, \nu_2 - \frac{l_2}{a_2})\}_{l_1, m_1, l_2, m_2 \in Z} \\ &= \{(\widehat{g_{m_1} \otimes g_{m_2}})(\nu_1 - \frac{l_1}{a_1}, \nu_2 - \frac{l_2}{a_2})\}_{l_1, m_1, l_2, m_2 \in Z} \end{aligned}$$

بنا به لم ۲.۲ داریم:

□

قضیه ۴.۲. دنباله های بسط $\{g_{nm_i}\}_{nm \in Z}$ یک قاب برای $L^{\infty}(R)$ با کران قاب پایین $\prod_{i=1}^k a_i A_i I$ است اگر و تنها اگر

$$\prod_{i=1}^k a_i A_i I \leq \bigotimes_{i=1}^k H_i(\nu) \bigotimes_{i=1}^k H_i^*(\nu)$$

□

اثبات. با استفاده از [۳] قضیه ۷.۱۰۱ و با استقرا، کفایت قضیه را برای $n = 2$ اثبات کنیم.

مراجع

- [1] A. Alexanderian, A brief note on tensor product of Hilbert spaces, July 12, 2013.
- [2] P. G. Casazza, O. Christensen, and N. J. Kalton, Frames of translates, collect. Math . 52, 1 (2001), 35-54
- [3] O. Christensen, Frames and Bases, Birkhauser, Boston, 2008.
- [4] G. B. Folland, A Course in abstract harmonic analysis, CRC Press BOCA Raton, Florida (1995).
- [5] R. V. Kadison and J. R. Ringrose, Fundamentals of the theory of operator algebras, Vol I, Academic Press, NewYork 1983.
- [6] A. Khosravi, Frames and bases in tensor product of hilbert space, Intern. Math. Journal, Vol. 4, 2003, no. 6, 527 - 537

پست الکترونیکی: ahmadi_a@hormozgan.ac.ir
پست الکترونیکی: afshar.phd@hormozgan.ac.ir
پست الکترونیکی: zakeri.phd@hormozgan.ac.ir

ماتریس گرام در مدول های نیم ضرب داخلی روی C^* -جبرها

زیبا میرمحمدولی*

فارغ التحصیل دانشگاه دامغان

چکیده

ابتدا تعاریف و خواصی از C^* -جبرها، C^* -مدول های نیم ضرب داخلی و ماتریس گرام را بیان می کنیم سپس با استفاده از مثبتی ماتریس گرام دنباله های تودرتو می سازیم. در انتها با بکارگیری بعضی نتایج نظریه عملگری الگوریتمی سودمند برای محاسبه وارون یک عنصر وارون پذیر ارائه می دهیم.

واژه های کلیدی: هیلبرت پیش مدول، ماتریس گرام، نامساوی کشی شوارتز

۱ مقدمه

ابتدا به بررسی تعاریف و خواص C^* -جبرها می پردازیم. پس از آن C^* -مدولهای هیلبرت را که در واقع تعمیمی از فضاهای هیلبرت هستند.

تعریف ۱.۱. یک برگشت روی جبر A یک نگاشت مزدوج خطی چون $\begin{cases} * : A \rightarrow A \\ a \mapsto a^* \end{cases}$ است که در شرایط زیر صدق کند.

$$(a^*)^* = a \quad (۱)$$

$$(ab)^* = b^*a^* \quad (۲)$$

$$(a + b)^* = a^* + b^* \quad (۳)$$

$$(\lambda a)^* = \bar{\lambda}a^* \quad (۴)$$

به ازای هر $a, b \in A$ و $\lambda \in \mathbb{C}$. در این صورت جفت $(A, *)$ یک $*$ -جبر نامیده می شود.

تعریف ۲.۱. یک C^* -جبر، $*$ -جبر باناخ چون A است به طوری که به ازای هر $a \in A$ داشته باشیم $\|a^*a\| = \|a\|^2$.

تعریف ۳.۱. فرض کنیم A یک C^* -جبر باشد. یک A -مدول راست نیم ضرب داخلی فضای خطی چون X است که یک A -مدول راست، همراه با ضرب سازگار

$$(\lambda(xa) = x(\lambda a) = (\lambda x)a \quad \forall x \in X, a \in A, \lambda \in \phi)$$

و دارای یک نیم ضرب داخلی A -مقدار، $\langle \cdot, \cdot \rangle : X \times X \rightarrow A$ باشد.

* سخنران



البته در شرایط زیر صدق می کند:

$$\langle x, x \rangle \geq 0 \quad (\text{i})$$

$$\langle x, \lambda y + z \rangle = \lambda \langle x, y \rangle + \langle x, z \rangle \quad (\text{ii})$$

$$\langle x, ya \rangle = \langle x, y \rangle a \quad (\text{iii})$$

$$\langle x, y \rangle^* = \langle y, x \rangle \quad (\text{iv})$$

مثالهایی از مدول های نیم ضرب داخلی

(۱) هر C^* -جبر A همراه با نیم ضرب

$$\langle a, b \rangle = a^* b \quad (a, b \in A)$$

یک A -مدول نیم ضرب داخلی است.

(۲) اگر H_1 و H_2 دو فضای هیلبرت باشند. فضای $B(H_1, H_2)$ از همه عملگرهای خطی کران دار از H_1 به H_2 یک هیلبرت $B(H_1)$ مدول با نیم ضرب $\langle T, S \rangle = T^* S$ است.

یکی از نامساوی های بنیادی در مدول نیم ضرب داخلی $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ روی C^* -جبر A نامساوی کشی-شوارتز است. نامساوی زیر تعمیم کلاسیک نامساوی کشی-شوارتز در A -مدول هیلبرت X است.

$$\langle x, y \rangle \langle y, x \rangle \leq \|y\|^2 \langle x, x \rangle \quad (x, y \in X).$$

تعریف ۴.۱. فرض کنیم $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ یک A -مدول نیم ضرب داخلی باشد و $n \in \mathbb{N}$. ماتریس گرام به صورت زیر تعریف می شود:

$$[\langle x_i, x_j \rangle] \in M_n(A) \quad x_1, \dots, x_n \in X.$$

• برای هر $x_1, \dots, x_n \in X$ ماتریس $[\langle x_i, x_j \rangle]$ یک ماتریس مثبت در $M_n(A)$ است.

• نامساوی کشی-شوارتز برای $x, y \in X$

$$\langle x, y \rangle \langle y, x \rangle \leq \|y\| \langle x, x \rangle$$

داریم:

$$\begin{bmatrix} \langle x, x \rangle & \langle x, y \rangle \\ \langle x, y \rangle^* & \|y\| \langle y, y \rangle e \end{bmatrix} \geq 0$$

برای هر $x, y \in X$ از مثبت بودن ماتریس گرام داریم

$$\begin{bmatrix} \langle x, x \rangle & \langle x, y \rangle \\ \langle x, y \rangle^* & \|y\| \langle y, y \rangle e \end{bmatrix} \geq 0$$

فرض کنیم $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ یک A -مدول نیم ضرب داخلی باشد، برای هر $z \in X$ که $\langle z, z \rangle \neq 0$ تعریف می کنیم

$$\langle \cdot, \cdot \rangle_z : X \times X \rightarrow A$$

$$\langle x, y \rangle_z := \|z\|^{-2} \langle x, y \rangle - \langle x, z \rangle \langle z, y \rangle$$

بوضوح $\langle \cdot, \cdot \rangle_z$ یک نیم ضرب داخلی دیگر روی X است.

برای $x_1, \dots, x_n \in X$ و هر $z \in X$ که $\langle z, z \rangle \neq 0$ داریم: $[\langle x_i, x_j \rangle_z] \geq 0$ و لذا

$$[\langle x_i, x_j \rangle] \geq \frac{1}{\|z\|^2} [\langle x_i, z \rangle \langle z, x_j \rangle]$$

نتیجه ۵.۱. فرض کنیم X یک فضای هیلبرت A -مدول باشد و $T \in B(X)$ یک نگاشت مثبت باشد آنگاه برای همه $z, x_1, \dots, x_n \in X$ داریم:

$$\|T^\dagger z\|^2 [\langle T x_i, x_j \rangle] \geq [\langle T x_i, z \rangle \langle z, T x_j \rangle] \geq 0$$



۲ نتایج اصلی

فرض کنیم A یک C^* -جبر با یک e باشد، برای هر عنصر مثبت $a \in A$ و $a \neq 0$ برای هر $m \in \mathbb{N}$ تعریف می کنیم:

$$\begin{aligned} f_0(a) &= a, & g_0(a) &= \|f_0(a)\|e - f_0(a) \\ f_m(a) &= f_{m-1}(a)g_{m-1}(a), & g_m(a) &= \|f_m(a)\|e - f_m(a) \end{aligned}$$

و با استقرا روی $m \geq 0$ داریم:

$$f_{m+1}(a) = f_m(f_1(a)) \quad g_{m+1}(a) = g_m(f_1(a)).$$

اگر برای $m \in \mathbb{N}$ ، $f_m(a) = 0$ آنگاه $f_k(a) = 0 \quad \forall k \geq m$ ، $f_j(a) \neq 0$ ، $\forall j \leq m$ بنا براین برای m به طوری که $f_m(a) \neq 0$ باشد تعریف می کنیم:

$$\begin{aligned} p_0(a) &= \frac{e}{\|f_0(a)\|} \\ p_1(a) &= \frac{e}{\|f_0(a)\|} + \frac{g_0(a)^2}{\|f_0(a)\| \cdot \|f_1(a)\|} \\ &\dots \\ p_m(a) &= \frac{e}{\|f_0(a)\|} + \sum_{i=1}^m \left(\frac{1}{\prod_{k=0}^i \|f_k(a)\|} \prod_{k=0}^{i-1} g_k(a)^2 \right) \end{aligned}$$

فرض کنیم $m \in \mathbb{N}$ به گونه ای باشد که $f_m(a) \neq 0$ ، $f_{m+1}(a) = 0$ ، در این صورت قرارداد می کنیم

$$p_j(a) = p_m(a) \quad (\forall j > m)$$

واضح است که

$$0 \leq p_0(a) \leq p_1(a) \leq \dots \leq p_m(a) \leq \dots$$

قضیه ۱.۲. فرض کنیم $z \in X$ و $\langle z, z \rangle \neq 0$ آنگاه دنباله غیرنزولی $(p_m(\langle z, z \rangle))_m$ از عناصر مثبت A وجود دارد به طوری که

$$\begin{aligned} \langle x_i, x_j \rangle &\geq \dots \geq \langle x_i, z \rangle p_m(\langle z, z \rangle) \langle z, x_j \rangle \\ &\geq \langle x_i, z \rangle p_{m-1}(\langle z, z \rangle) \langle z, x_j \rangle \\ &\geq \dots \\ &\geq \langle x_i, z \rangle p_0(\langle z, z \rangle) \langle z, x_j \rangle \\ &= \frac{1}{\|z\|^2} \langle x_i, z \rangle \langle z, x_j \rangle \\ &\geq 0. \end{aligned}$$

قضیه ۲.۲. فرض کنیم a یک عنصر مثبت از C^* -جبر $A \subseteq B(H)$ باشد. آنگاه $m \in \mathbb{N}$ وجود دارد به طوری که $f_m(a) = 0$ و تنها اگر a طیف متناهی داشته باشد.

قضیه ۳.۲. اگر $a \neq 0$ یک عنصر مثبت از C^* -جبر $A \subseteq B(H)$ با طیف متناهی و $M \in \mathbb{N}$ با ویژگی $f_M(a) \neq 0$ و $p_M(a) = a^{-1}$ باشد، آنگاه $ap_M(a)$ تصویر متعامد، $Im(a)$ است و در حالت خاص اگر a وارون پذیر باشد آنگاه a^{-1} است.



مثال ۴.۲.

$$a = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \text{diag}(5, 4, 2, 1) \quad (a \in M_4(\mathbb{C}))$$

$$\begin{aligned} f_0(a) &= \text{diag}(5, 4, 2, 1) & \|f_0(a)\| &= 5 & g_0(a) &= \text{diag}(5, 4, 2, 1) \\ f_1(a) &= \text{diag}(0, 4, 6, 4) & \|f_1(a)\| &= 6 & g_1(a) &= \text{diag}(6, 2, 0, 2) \\ f_2(a) &= \text{diag}(0, 8, 0, 8) & \|f_2(a)\| &= 8 & g_2(a) &= 0 \\ f_3(a) &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p_0(a) &= \text{diag}\left(\frac{1}{5}, \frac{1}{5}, \frac{1}{5}, \frac{1}{5}\right), & p_1(a) &= \text{diag}\left(\frac{1}{5}, \frac{7}{3}, \frac{1}{3}, \frac{11}{5}\right) \\ p_2(a) &= \text{diag}\left(\frac{1}{5}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 1\right), & p_k(a) &= p_2(a) \quad k \geq 3 \end{aligned}$$

بوضوح $p_2(a) = a^{-1}$.

اگر $\sigma(a)$ مجموعه‌ای نامتناهی باشد $f_m(a)$ هرگز با صفر برابر نمی‌شود. بنابراین $(p_m(a))$ در این حالت دنباله‌ای اکیداً صعودی از عناصر مثبت از $B(H)$ است.

ملاحظه ۵.۲. فرض کنیم a یک عملگر فشرده مثبت با طیف نامتناهی باشد و دنباله $(ap_m(a))$ همگرا به p در نرم باشد. در نظر می‌گیریم $p_m(a) \in C^*(a)$ برای همه $m \geq 0$ ، که $C^*(a)$ جبر تولید شده با a است. چون $C^*(a)$ بسته است، پس $p \in C^*(a)$. اما این غیرممکن است زیرا $\sigma(a)$ مجموعه‌ای نامتناهی است و \overline{Ima} فضای نامتناهی بعد است. بنابراین $p \notin C^*(a)$.

گزاره ۶.۲. فرض کنیم a یک عنصر مثبت از C^* -جبر $A \subseteq B(H)$ با طیف نامتناهی باشد. آنگاه

$$\lim_{m \rightarrow \infty} ap_m(a)a = a$$

در حالت خاص اگر a یک عملگر وارون پذیر باشد

$$\lim_{m \rightarrow \infty} p_m(a) = a^{-1}$$

گزاره ۷.۲. فرض کنیم $a \in B(H)$ یک عملگر مثبت باشد و $p \in B(H)$ تصویر متعامد \overline{Ima} باشد آنگاه $(ap_m(a))_m$ همگرا به p در نرم است اگر و فقط اگر \overline{Ima} زیرفضای بسته از H باشد.

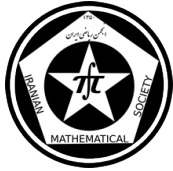
گزاره ۸.۲. فرض کنیم X یک نیم ضرب داخلی روی C^* -جبر $A \subseteq B(H)$ باشد. برای $z \in X$ و $a = \langle z, z \rangle \in A$ ، فرض کنیم $p \in B(H)$ تصویر متعامد \overline{Ima} را نمایش می‌دهد. فرض کنیم عملگر مثبت $h \in B(H)$ وجود داشته باشد به طوری که برای $x_1, \dots, x_n \in X$ و هر $m \geq 0$ داشته باشیم:

$$[\langle x_i, x_j \rangle] \geq [\langle x_i, z \rangle h \langle z, x_j \rangle] \geq [\langle x_i, z \rangle p_m(\langle z, z \rangle) \langle z, x_j \rangle]$$

آنگاه $ah = p$ و $aha = a$.

مراجع

- [1] Lance, E Christopher, *Hilbert C^* -modules: a toolkit for operator algebraists*, Cambridge University Press. 210 (1995).
- [2] Arambaic, Ljiljana and Bakic, DAMIR and Moslehian, MS, *Gram matrix in inner product modules over C^* -algebras*, arXiv preprint arXiv:0905.3509, (2009).



مقایسه مخروط نرمال و مخروط منظم

ولی حسینی
دانشگاه لرستان

*ولی حسینی
دانشگاه لرستان

چکیده

در این مقاله قصد داریم ارتباط مخروط نرمال و مخروط منظم را بررسی نماییم. ابتدا مفهوم مخروط به عنوان زیرمجموعه یک فضای باناخ حقیقی معرفی می شود؛ سپس یک رابطه ترتیب جزئی روی مخروط تعریف می کنیم. پس از آن مخروط نرمال و منظم را معرفی و به بررسی ارتباط بین آنها می پردازیم.

واژه‌های کلیدی: فضای متریک مخروط، ثابت نرمال، مخروط نرمال، مخروط منظم، فضای باناخ

۱ مقدمه

فضاهایی متریک مخروط یکی از بحث‌هایی است که اخیراً توسط پژوهشگران زیادی مورد بررسی قرار گرفته است. ما در این مقاله فقط بر معرفی مخروط به عنوان زیرمجموعه‌ای از یک فضای باناخ حقیقی متمرکز شده ایم. در بخش اول این مقاله مفهوم مخروط همراه با مثالهای متنوعی از آن معرفی می شود، همچنین یک رابطه ترتیب جزئی روی فضای باناخ حقیقی تعریف می شود. در بخش دوم مخروط نرمال و مثالهایی از آن ارائه خواهد شد. سپس در بخش سوم مخروط منظم معرفی و نشان خواهیم داد هر مخروط منظم نرمال است اما عکس آن برقرار نیست. منابع مورد استفاده در این مقاله با علامت [.] مشخص شده اند.

۲ مخروط

تعریف ۱.۰۲. [1, Introduction] فرض کنید E یک فضای باناخ حقیقی باشد، یک زیر مجموعه P از E یک مخروط نامیده می شود هرگاه در شرایط زیر صدق کند.

الف- P بسته و ناتهی باشد و $P \neq \{0\}$

ب- به ازای هر $a, b \in \mathbb{R}$ که $a, b \geq 0$ و به ازای هر $x, y \in P$ داشته باشیم $ax + by \in P$

ج- اگر $x \in P$ و $-x \in P$ نتیجه گرفته شود $x = 0$

مثال ۲.۰۲. اگر $E = \mathbb{R}$ به عنوان فضای باناخ حقیقی در نظر گرفته شود آنگاه P با تعریف زیر را می توان به عنوان یک مخروط در نظر گرفت. $P = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$

*



مثال ۳.۲. [2, Example 1.1] اگر $E = \mathbb{R}^2$ به عنوان فضای باناخ حقیقی در نظر گرفته شود آنگاه مخروط P را می توان به صورت زیر تعریف کرد. $P = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x, y \geq 0\}$ به عنوان فضای باناخ حقیقی در نظر گرفته شود مخروط P را می توان به صورت زیر تعریف کرد. $P = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_i \geq 0\}$

تعریف ۴.۲. [1, Introduction] فرض کنید P یک مخروط در فضای باناخ حقیقی E باشد. یک رابطه ترتیب جزئی روی E به صورت زیر تعریف می کنیم.

الف - $x \leq y$ اگر و فقط اگر $y - x \in P$

ب - $x < y$ اگر و فقط اگر $x < y$ و $x \neq y$

ج - $x \ll y$ اگر و فقط اگر $y - x \in \text{int}P$

مثال ۵.۲. اگر $E = \mathbb{R}^2, P = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x, y \geq 0\}$ آنگاه

$(1, 2) \ll (3, 4) \Leftrightarrow (3, 4) - (1, 2) = (2, 2) \in \text{int}P$ یعنی $(2, 2) \in \text{int}P$ یک همسایگی دارد که کاملاً در داخل مخروط قرار می گیرد کاملاً درست است.

۳ مخروط نرمال

تعریف ۱.۳. [1, Introduction] مخروط P نرمال نامیده می شود اگر عدد صحیح مثبت k موجود باشد بطوریکه به ازای هر $x, y \in E$ از $x \leq y$ نتیجه گرفته شود که $\|x\| \leq k\|y\|$. کوچکترین عدد صحیح مثبتی که در رابطه مذکور صدق کند ثابت نرمال مخروط P نامیده می شود. تعریف دیگری از مخروط نرمال نیز وجود دارد که می گوید [3, Introduction]: مخروط P نرمال است اگر $\inf\{\|x + y\| : x, y \in P, \|x\| = \|y\| = 1\} > 0$

مثال ۲.۳. اگر E, P همانهایی باشند که در مثال (۲-۱-۳) آمده اند داریم:

$$(0, 0) \leq (2, 3) \leq (4, 5) \Rightarrow \|(2, 3)\| \leq 1 \times \|(2, 5)\|$$

مثال ۳.۳. [4, Example 1.1] اگر $E = C_{\mathbb{R}}^1[0, 1]$ با نرم $\|f\|_E = \|f\|_{\infty} + \|f'\|_{\infty}$ یک فضای باناخ حقیقی و

$P = \{f \in E : f \geq 0\}$ آنگاه این مخروط نرمال نیست. زیرا کافی است قرار دهیم

$$\begin{cases} f(x) = x \\ g(x) = x^{2k}, k \in \mathbb{N} \end{cases} \Rightarrow 0 \leq g \leq f$$

در حالی که $\|f\|_E = 2, \|g\|_E = 1 + 2k$ و همواره $\|g\|_E \geq k\|f\|_E$ و بنابراین k یک ثابت نرمال برای مخروط P نمی باشد.

مثال ۴.۳. [3, Example 1.1] فرض کنید $E = C_{\mathbb{R}}^1[0, 1]$ یک فضای باناخ حقیقی با نرم

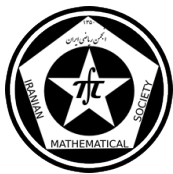
$\|f\|_E = \|f\|_{\infty} + \|f'\|_{\infty}$ و مخروط $P = \{f \in E : f(t) \geq 0\}$ آنگاه این مخروط نرمال نیست زیرا به عنوان

$$x_n(t) = \frac{1 - \sin(nt)}{n+2}, y_n(t) = \frac{1 + \sin(nt)}{n+2}$$

$$\|x_n\| = \|y_n\| = 1 \text{ آنگاه}$$

اما

$$\|x_n + y_n\| = \frac{2}{n+2} \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty)$$



۴ مخروط منظم

تعریف ۱.۴. [1, Introduction] مخروط P منظم نامیده می شود اگر هر دنباله افزایشی از بالا کراندار آن همگرا باشد. یعنی اگر $\{x_n\}$ یک دنباله باشد که $x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq \dots \leq y$ آنگاه وجود داشته باشد $x \in X$ بطوریکه $\|x_n - x\| \rightarrow 0$ ویا بطور معادل هر دنباله کاهشی از پایین کراندار آن همگرا باشد.

لم ۲.۴. [1, Lem 1.1] هر مخروط منظم نرمال می باشد.

برهان: فرض کنید P یک مخروط منظم باشد که نرمال نیست. (فرض خلف) با این توصیف برای

$n \geq 1$ عناصر $t_n, s_n \in P$ را در نظر بگیرید بطوریکه $t_n - s_n \in P$ و $t_n \geq s_n$ و $n^2 \|t_n\| < \|s_n\|$ قرار دهید $x_n = \frac{s_n}{\|t_n\|}, y_n = \frac{t_n}{\|t_n\|}$ در این صورت واضح است که

$\|x_n\| = \frac{\|s_n\|}{\|t_n\|} > \frac{n^2 \|t_n\|}{\|t_n\|} = n^2$ زیرا $\|x_n\| > n^2$ (*)، $y_n \geq x_n, \|y_n\| = 1$ حال چون سری

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{n^2}$ همگراست و P بسته است بنابراین وجود دارد $y \in P$ بطوریکه $y = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{n^2}$ حال ملاحظه می

کنیم که دنباله $x_1 \leq x_1 + \frac{1}{4^2} x_2 \leq x_1 + \frac{1}{4^2} x_2 + \frac{1}{3^2} x_3 \leq \dots \leq y$ یک دنباله کاهشی از پایین کراندار است و مخروط منظم است بنابراین همگراست اما شرط لازم همگرایی این است که

و این با عبارت (*) که بیان می کند: $\|x_n\| > n^2$ در تناقض است. لذا فرض خلف باطل و حکم ثابت است.

مثال ۳.۴. [1, Example 2.1] در این مثال می خواهیم نشان دهیم هر مخروط نرمال منظم نمی باشد یعنی عکس لم فوق برقرار نیست.

$E = C_{\mathbb{R}}([0, 1]), \|f\| = \sup\{|f(x)| : x \in [0, 1]\}, P = \{f \in E : f \geq 0\}$ ملاحظه می شود که P یک

مخروط نرمال با ثابت نرمال یک می باشد. حال دنباله ای در E پیدا می کنیم که از پایین کراندار است اما همگرا نیست.

$$x \geq x^2 \geq x^3 \geq \dots \geq 0$$

اما دنباله $\{x^n\}$ در بازه $[0, 1]$ همگرا نیست. زیرا

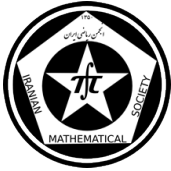
$$\lim_{n \rightarrow \infty} x^n = \begin{cases} 1 & x = 1 \\ 0 & x = 0 \\ 0 & 0 < x < 1 \end{cases}$$

اما چون این حد یکتا نیست پس دنباله فوق همگرا نیست.

آدرس نویسنده: ولی حسینی، پلدختر لرستان، خیابان ۷ تیر، کوچه رسالت ۱۱ جنوبی، جنب باغ سابق نبوی

مراجع

- [1] SH.REZAPOUR, R.HAMLEBARANIHAGHI, some notes on the paper "cone metric spaces and fixed point theorems of contractive mappings", *J. math. anal. appl.* 345(2008)719-724
- [2] L.G.HUANG, X.ZANG, CONE METRIC SPACES AND FIXED POINT THEOREMS OF CONTRACTIVE MAPPINGS, *J. MATH. ANGL. APPL.* 322(2)(2007)1468-1476



ص: ۴-۴

چهل و ششمین کنفرانس ریاضی ایران

۳-۶ شهریور ۱۳۹۴

دانشگاه یزد

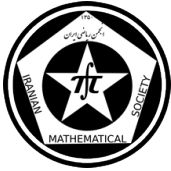
مقایسه مخروط نرمال و مخروط منظم



پوستر

- [3] S.JANKOVIC,Z.KADELBURG,S.RADENOVIC,B.E.RHOADES, *Assad-kirk-type fixed point theorems for pair of nonself mappings on cone metric spaces, fixed point theory appl. (2008)*
- [4] S.M.VEAZPOUR.P.RAJA,SOME EXTENSIONS OF BANACH CONTRACTION PRINCIPLE IN COMPLETE CONE METRIC SPACES ,FIXED POINT THEORY AND APPLICATIONS VOLUME 2008

پست الکترونیکی: Vali.hosiny@yahoo.com

نتایج نقطه ثابت سوزوکی در فضای b - متریک مخروطیعلی خسروی
دانشگاه خواجه نصیرهادی خسروی*
دانشگاه آزاد اسلامی قائمشهر

چکیده

در این مقاله، قضیه نقطه ثابت سوزوکی را به حالت b - متریک مخروطی تعمیم می‌دهیم. همچنین نتایجی از شرط انقباض سوزوکی را برای فضاهای متریک مخروطی به دست می‌آوریم.

واژه‌های کلیدی: فضای b - متریک مخروطی، مخروط نرمال، نقطه ثابت.

Mathematics Subject Classification [2010]: 13D45, 39B42

۱ مقدمه

در سال ۲۰۰۷، هانگ^۱ و ژانگ^۲ فضای متریک مخروطی را در [۴] معرفی کردند. این مفهوم در اواسط قرن بیستم با نامهای مختلفی شناخته می‌شد که خلاصه‌اش در [۷] آمده است. تعمیم دیگری از فضای متریک توسط خمسی^۳ با نام متریک نوعی معرفی شد که این فضاها، قبلاً توسط سزویک^۴ b - متریک نامگذاری شده بودند. سوتکویک^۵ و شاه^۶ تعریف خمسی را گسترش دادند.

قضیه ۱.۱. فرض کنید (X, d) فضای متریک کامل باشد، فرض کنید $T : X \rightarrow X$ خودنگاشت و $\theta : [0, 1) \rightarrow (\frac{1}{\sqrt{2}}, 1]$ به صورت زیر تعریف شده باشد

$$\theta(r) = \begin{cases} 1, & 0 \leq r < \frac{\sqrt{5}-1}{2} \\ \frac{1-r}{r^2}, & \frac{\sqrt{5}-1}{2} \leq r < \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{1+r}, & \frac{1}{\sqrt{2}} \leq r < 1 \end{cases}$$

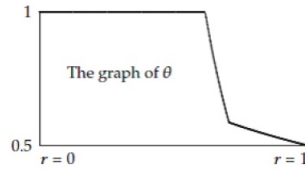
اگر وجود داشته باشد $r \in [0, 1)$ به طوری که برای هر $x, y \in X$

$$\theta(r)d(x, Tx) \leq d(x, y) \quad \Rightarrow \quad d(Tx, Ty) \leq rd(x, y)$$

آنگاه دارای نقطه‌ی ثابت منحصر به فرد $Z \in X$ است و برای هر $x \in X$ دنباله $\{T^n x\}$ به z میل می‌کند.

* سخنران

^۱Huang^۲Zhang^۳Khamsi^۴Czerwik^۵Cvetkovic^۶Shah

شکل ۱: تصویر تابع θ

تعریف ۲.۱. فرض کنید E یک فضای باناخ حقیقی با بردار صفر^۷ \circ باشد و P زیرمجموعه‌ای از E باشد. P را مخروط^۸ می‌نامیم اگر و فقط اگر:

۱. P بسته، غیرتهی باشد و $\{ \circ \} \neq P$ ؛

۲. اگر $a, b \in \mathbb{R}$ ، $a, b \geq \circ$ و $x, y \in P$ آنگاه $ax + by \in P$ ؛

۳. اگر $x \in P$ و $-x \in P$ آنگاه $x = \circ$ ، به عبارتی $P \cap -P = \{ \circ \}$.

تعریف ۳.۱. فرض کنیم $P \subset E$ یک مخروط باشد، رابطه‌ی جزئی مرتب \preceq را برای P به این صورت تعریف می‌کنیم که $x \preceq y$ اگر و فقط اگر $y - x \in P$. برای $x \preceq y$ که $x \neq y$ ، می‌نویسیم $x \prec y$ و برای $x \preceq y$ می‌نویسیم $x \ll y$ در این جا $\text{int}P$ درون P است.

تعریف ۴.۱. اگر $\text{int}P \neq \emptyset$ ، آنگاه P را مخروط توپر می‌نامیم.

تعریف ۵.۱. مخروط P را نرمال^۹ گوئیم هرگاه عددی مانند $K > \circ$ وجود داشته باشد به طوری که برای هر $x, y \in E$ و $\circ \leq x \preceq y$ نتیجه دهد $\|x\| \leq K\|y\|$. کوچکترین ثابت K را ثابت نرمال از P می‌نامیم.

تعریف ۶.۱. مخروط P را منظم گوئیم هرگاه هر دنباله‌ی صعودی که از بالا کراندار است، همگرا باشد. لازم به ذکر است که هر مخروط منظم، مخروطی نرمال است.

در ادامه همواره فرض خواهیم کرد E فضای باناخ، P مخروطی در E با $\text{int}P \neq \emptyset$ و \preceq ترتیبی جزئی نسبت به P باشد.

تعریف ۷.۱. فرض کنید X مجموعه‌ای غیر تهی باشد، E فضای باناخ با مخروط توپر P و فرض کنید $K \geq 1$ عددی حقیقی باشد. اگر تابع $D: X \times X \rightarrow E$ در شروط زیر صدق کند:

$$1. \quad D(x, y) = \circ \text{ اگر و فقط اگر } x = y$$

$$2. \quad D(x, y) = D(y, x) \text{ برای هر } x, y \in X$$

$$3. \quad D(x, y) \preceq K(D(y, x) + D(y, z)) \text{ برای هر } x, y, z \in X$$

آنگاه D را تابع b -متریک مخروطی می‌نامیم و (X, D, K) فضای b -متریک مخروطی (CMTS) نامیده می‌شود. در حالت خاص، هرگاه $E = \mathbb{R}$ و $P = [\circ, \infty)$ ، فضای b -متریک مخروطی به فضای b -متریک (MTS) تبدیل می‌شود. در این حالت برای $K = 1$ آن تبدیل به فضای متریک معمولی می‌شود.

^۷Zero vector

^۸Cone

^۹Normal



تعریف ۸.۱. فرض کنید (X, D) فضای b -متریک مخروطی، P مخروط نرمال با ثابت نرمال K باشد. فرض کنید $\{x_n\}$ دنباله‌ای در X و $x \in X$. اگر برای هر $c \in E$ با $c \ll c$ وجود داشته باشد N به طوری که برای همه $n > N$ داشته باشیم $D(x_n, x)$ ، آنگاه $\{x_n\}$ را همگرا نامیم و x به همگراست، و x حد $\{x_n\}$ است. به این صورت نمایش می‌دهیم $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$.

تعریف ۹.۱. فرض کنید (X, D) فضای b -متریک مخروطی، P مخروط نرمال با ثابت نرمال K باشد و $\{x_n\}$ دنباله‌ای در X باشد. اگر برای هر $c \in E$ با $c \ll c$ وجود داشته باشد N به طوری که به ازای هر $n, m > N$ داشته باشیم $D(x_n, x_m) \ll c$ ، در این صورت $\{x_n\}$ را دنباله‌ی کوشی در X می‌نامیم.

تعریف ۱۰.۱. فرض کنید (X, D) فضای b -متریک مخروطی باشد. اگر هر دنباله کوشی در X همگرا باشد، در این صورت X فضای b -متریک مخروطی کامل^۱ نامیده می‌شود.

قضیه ۱۱.۱. فرض کنید (X, D, K) یک $CMTS$ فشرده با مخروط نرمال P ، که D_1 در هر متغیر پیوسته می‌باشد. فرض کنید $T : X \rightarrow X$ خود نگاشت و $\theta = \theta_K : [0, 1) \rightarrow (\frac{1}{k+1}, 1]$ به صورت زیر تعریف شده باشد

$$\theta = \theta_K \begin{cases} 1, & 0 \leq r < \frac{\sqrt{5}-1}{2} \\ \frac{1-r}{r^2}, & \frac{\sqrt{5}-1}{2} \leq r < b_K \\ \frac{1}{K+r}, & b_K \leq r < 1 \end{cases} \quad (1)$$

که $b_K = \frac{1-K+\sqrt{1+6K+K^2}}{4}$ ریشه‌ی مثبت $\frac{1-r}{r^2} = \frac{1}{K+r}$ است. اگر وجود داشته باشد $r \in [0, 1)$ به طوری که برای هر $x, y \in X$

$$\theta(r)D_1(x, Tx) - D_1(x, y) \notin \text{int}P \quad \Rightarrow \quad D_1(Tx, Ty) \leq \frac{r}{K}u(x, y), \quad (2)$$

برای تعدادی

$$u(x, y) \in \{D_1(x, y), D_1(x, Tx), D_1(y, Ty), \frac{1}{2K}(D_1(x, Ty) + D_1(y, Tx))\},$$

آنگاه T دارای نقطه‌ی ثابت $z \in X$ و برای هر $x \in X$ دنباله‌ی $\{T^n x\}$ به z همگراست.

۲ نتایج اصلی

نتیجه ۱.۲. فرض کنید (X, D, K) یک $CMTS$ کامل باشد که D_1 در هر متغیر پیوسته می‌باشد. فرض کنید $T : X \rightarrow X$ خود نگاشت و $\theta = \theta_K : [0, 1) \rightarrow (\frac{1}{k+1}, 1]$ در (۱) تعریف شده بود. اگر وجود داشته باشد $r \in [0, 1)$ به طوری که برای هر $x, y \in X$

$$\theta(r)D_1(x, Tx) - D_1(x, y) \notin \text{int}P \quad \Rightarrow \quad D_1(Tx, Ty) \leq \frac{r}{K}u(x, y),$$

آنگاه T دارای نقطه‌ی ثابت $z \in X$ و برای هر $x \in X$ دنباله‌ی $\{T^n x\}$ به z همگراست.

^۱ Complete



نتیجه ۲.۲. فرض کنید (X, D_λ, K) یک $CMTS$ کامل باشد که D_λ در هر متغیر پیوسته می‌باشد. فرض کنید $T : X \rightarrow X$ خود نگاشت و $\left(\frac{1}{k+1}, 1\right]$ $\theta = \theta_K : [0, 1) \rightarrow$ در (۱) تعریف شده بود. اگر وجود داشته باشد $r \in [0, 1)$ به طوری که برای هر $x, y \in X$

$$\theta(r)D_\lambda(x, Tx) - D_\lambda(x, y) \notin \text{int}P \quad \Rightarrow \quad D_\lambda(Tx, Ty) \leq \frac{r}{K}u(x, y),$$

که $u(x, y) \in \{D_\lambda(x, Tx), D_\lambda(y, Ty)\}$ آنگاه T دارای نقطه‌ی ثابت منحصر به فرد $z \in X$ می‌باشد و برای هر $x \in X$ دنباله‌ی $\{T^n x\}$ به z همگراست.

نتیجه ۳.۲. فرض کنید (X, D_λ, K) یک $CMTS$ کامل باشد که D_λ در هر متغیر پیوسته می‌باشد. فرض کنید $T : X \rightarrow X$ خود نگاشت و $\left(\frac{1}{k+1}, 1\right]$ $\theta = \theta_K : [0, 1) \rightarrow$ در (۱) تعریف شده بود. اگر وجود داشته باشد $r \in [0, 1)$ به طوری که برای هر $x, y \in X$

$$\theta(r)D_\lambda(x, Tx) - D_\lambda(x, y) \notin \text{int}P \quad \Rightarrow \quad D_\lambda(Tx, Ty) \leq \frac{r}{K}u(x, y),$$

آنگاه T دارای نقطه‌ی ثابت منحصر به فرد $z \in X$ و برای هر $x \in X$ دنباله‌ی $\{T^n x\}$ به z همگراست.

مراجع

- [۱] رودین، والتر، آنالیز حقیقی و مختلط، علی اکبر عالم زاده، تهران، ۱۳۸۸
- [2] Cvetkovi'c AS, Stani'c MP, Dimitrijevi'c S, Simi'c Su: *Common fixed point theorems for four mappings on cone metric type space*, Fixed Point Theory Appl., Article ID 589725, 15 pages, doi:10.1155/2011/589725 (2011).
- [3] Huang LG, Zhang X: *Cone metric spaces and fixed point theorems of contractive mappings I*, J. Math. Anal. Appl. 332 (2), 1468–1476 (2007).
- [4] Khamsi MA, Hussain N, *KKM mappings in metric type spaces*, Nonlinear Anal. TM&A 73, 3123–3129 (2010).
- [5] Kikkawa M, Suzuki T: *Some similarity between contractions and Kannan mappings*, Fixed Point Theory Appl., Article ID 649749, 8 pages, doi:10.1155/2008/649749 (2008).
- [6] Suzuki T: *A generalized Banach contraction principle that characterizes metric completeness*, Proc. Amer. Math. Soc. 136, 1861–1869 (2008).
- [7] Zabrejko PP: *K-metric and K-normed linear spaces: survey*, Collect. Math. 48, 825–859 (1997).

پست الکترونیکی: hadi2066@yahoo.com

پست الکترونیکی: alikhosravi@mail.kntu.ac.ir



نگاشت های ماتریسی روی فضاهاى دنباله ای اوپلر

محمدجعفر صالحی*

دانشگاه ولی عصر (عج) رفسنجان

چکیده

در این مقاله، فضاهاى دنباله ای e_p^r از مرتبه r را معرفی و بعضی از خواص توپولوژیکی مربوط به این فضاها را بررسی می کنیم همچنین α, β و دوگان را برای این فضاها مشخص کرده و پایه ای برای این فضاها معرفی خواهیم کرد. بعلاوه برای هر $1 \leq p \leq \infty$ کلاس های $(e_p^r : X)$ از تبدیلات ماتریسی از فضاهاى e_p^r بتوی X را مشخص می کنیم که در آن X یکی از فضاهاى کلاسیک c, c_0 و l_p است.

واژه های کلیدی: فضاهاى دنباله ای اوپلر، تبدیلات ماتریسی، α, β و دوگان نگاشتهای ماتریسی.

Mathematics Subject Classification [2010]: 47A55, 39B52

۱ مقدمه

فضاهای دنباله ای در سال ۱۹۸۱ توسط کایزمر مطرح شد سپس بصر و آلتای فضاهاى دنباله ای اوپلر e_c^r و e_c^r را در سال ۲۰۰۵ معرفی کردند [۲]. این فضاها در سال ۲۰۰۶ توسط بصر، آلتای و مرسلین به فضاهاى e_p^r ، e_∞^r تعمیم داده شده اند [۱]. فرض کنید ω فضای دنباله های حقیقی باشد، هر زیر فضای برداری از ω یک فضای دنباله ای نام دارد. برای فضای دنباله ای λ دامنه ماتریسی λ_A از ماتریس نامتناهی A به صورت زیر تعریف می شود

$$A : \lambda \rightarrow \mu$$

$$\lambda_A = \{x = (x_k) \in \omega : Ax \in \lambda\}.$$

فضاهای c و c_0 به ترتیب فضاهاى دنباله ای همگرا و همگرا به صفر هستند، همچنین فضاهاى cs و bs را به ترتیب برای سری های همگرا و کراندار به کار می بریم.

۲ معرفی نگاشت های ماتریسی

تعریف ۱.۲. فضای دنباله ای λ با توپولوژی خطی k -فاضا نام دارد، به شرطی که برای هر $i \in \mathbb{N}$ نگاشت $p_i : \lambda \rightarrow \mathbb{C}$ که در آن $p_i(x) = x_i$ پیوسته باشد و لازم به ذکر است که \mathbb{C} میدان اعداد مختلط و $N = \{0, 1, 2, \dots\}$ است.

تعریف ۲.۲. k -فضای λ ، FK -فاضا نام دارد هرگاه λ ، فضای متریک خطی کامل باشد.

تعریف ۳.۲. FK -فضایی که توپولوژی آن نرم پذیر باشد، BK -فاضا نام دارد.

*سخنران



تعریف ۴.۲. فرض کنید λ و μ دو فضای دنباله‌ای و $A = (a_{nk})$ ماتریس نامتناهی باشد که a_{nk} ها اعداد حقیقی یا مختلط و $n, k \in \mathbb{N}$. ماتریس A یک نگاشت ماتریسی از λ به μ است اگر برای هر دنباله λ $x = (x_k) \in \lambda$ داشته باشیم $Ax = \{(Ax)_n\} \in \mu$ که در آن

$$(Ax)_n = \sum_k a_{nk} x_k. \quad (1)$$

در مجموع (۱) مقدار k از صفر تا بینهایت تغییر می‌کند و برای سادگی تا آخر از این نماد استفاده می‌شود و مجموعه همه نگاشت های ماتریسی از فضای دنباله‌ای λ به فضای دنباله‌ای μ را با نماد $(\lambda : \mu)$ نشان می‌دهیم.

لم ۵.۲. نگاشتهای ماتریسی بین $BK -$ فضاها پیوسته هستند.

□

اثبات. به [۳] مراجعه شود.

۳ معرفی فضاهاى دنباله‌ای اویلر

تعریف ۱.۳. فضاهاى دنباله‌ای e_p^r برای $1 \leq p < \infty$ و e_∞^r به صورت زیر تعریف می‌شوند

$$e_p^r = \left\{ (x_k) \in w : \sum_n \left| \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (1-r)^{n-k} r^k x_k \right|^p < \infty \right\},$$

$$e_\infty^r = \left\{ (x_k) \in w : \sup_{n \in \mathbb{N}} \left| \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (1-r)^{n-k} r^k x_k \right| < \infty \right\},$$

که در آن $0 < r < 1$.

درایه های ماتریس اویلر $E^r = (e_{nk}^r)$ عبارت است از

$$e_{nk}^r = \begin{cases} \binom{n}{k} (1-r)^{n-k} r^k & 0 \leq k \leq n, \\ 0 & k > n. \end{cases}$$

قضیه ۲.۳. فضای e_p^r تحت جمع مؤلفه‌ای و ضرب اسکالری فضای برداری است و با نرم $\|x\|_{e_p^r} = \|E^r x\|_{l_p}$ برای $1 \leq p \leq \infty$ یک $BK -$ فضا می‌شود.

□

اثبات. برای اثبات این قضیه و سایر قضایایی که در ادامه مقاله آورده شده به مرجع [۱] مراجعه شود.

قضیه ۳.۳. فضای e_p^r فقط برای $p = 2$ یک فضای ضرب داخلی است، بنابراین فقط برای $p = 2$ فضای هیلبرت است.

۴ α, β, γ -دوگان فضاهاى e_p^r و e_∞^r و پایه برای فضای e_p^r

تعریف ۱.۴. فرض کنید w فضای دنباله‌های حقیقی باشد و مجموعه $s(\lambda, \mu)$ برای فضاهاى دنباله‌ای λ و μ به صورت زیر باشد

$$s(\lambda, \mu) = \{z = (z_k) \in w : xz = (x_k z_k) \in \mu, \forall x = (x_k) \in \lambda\} \quad (2)$$



α, β و $-\gamma$ دوگان از فضای λ را به ترتیب با $\lambda^\alpha, \lambda^\beta, \lambda^\gamma$ نشان می‌دهیم و به صورت زیر تعریف می‌شوند

$$\lambda^\alpha = s(\lambda, l_1), \quad \lambda^\beta = s(\lambda, cs), \quad \lambda^\gamma = s(\lambda, bs).$$

قضیه ۲.۴. فرض کنید مجموعه‌های a_∞^r و a_q^r به صورت زیر تعریف شده باشند

$$a_q^r = \left\{ a = (a_k) \in \omega : \sup_{K \in F} \sum_k \left| \sum_{n \in K} \binom{n}{k} (r-1)^{n-k} r^{-n} a_n \right|^q < \infty \right\},$$

$$a_\infty^r = \left\{ a = (a_k) \in \omega : \sup_{k \in \mathbf{N}} \left| \sum_n \binom{n}{k} (r-1)^{n-k} r^{-n} a_n \right| < \infty \right\}.$$

در این صورت برای هر $1 < p \leq \infty$ داریم $(e_p^r)^\alpha = a_q^r$ و $(e_1^r)^\alpha = a_\infty^r$.

قضیه ۳.۴. مجموعه های $d_\infty^r, d_\gamma^r, d_\beta^r$ و b_q^r برای هر $k \in \mathbf{N}$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$d_\gamma^r = \left\{ a = (a_k) \in \omega : \sum_{j=k}^{\infty} \binom{j}{k} (r-1)^{j-k} r^{-j} a_j < \infty \right\},$$

$$d_\beta^r = \left\{ a = (a_k) \in \omega : \sup_{n, k \in \mathbf{N}} \left| \sum_{j=k}^n \binom{j}{k} (r-1)^{j-k} r^{-j} a_j \right| < \infty \right\},$$

$$\begin{aligned} d_\alpha^r &= \left\{ a = (a_k) \in \omega : \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_k \left| \sum_{j=k}^n \binom{j}{k} (r-1)^{j-k} r^{-j} a_j \right| \right. \\ &= \left. \sum_k \left| \sum_{j=k}^{\infty} \binom{j}{k} (r-1)^{j-k} r^{-j} a_j \right| \right\} \end{aligned}$$

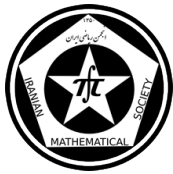
$$b_q^r = \left\{ a = (a_k) \in \omega : \sup_{n \in \mathbf{N}} \sum_{k=0}^n \left| \sum_{j=k}^n \binom{j}{k} (r-1)^{j-k} r^{-j} a_j \right|^q < \infty \right\},$$

که $1 < q < \infty$. در این صورت روابط زیر برقرار هستند

$$(e_\infty^r)^\beta = d_\gamma^r \cap d_\beta^r,$$

$$(e_p^r)^\beta = d_\gamma^r \cap b_q^r,$$

$$(e_1^r)^\beta = d_\gamma^r \cap d_\beta^r.$$



قضیه ۴.۴. مجموعه b_λ^r را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$b_\lambda^r = \left\{ a = (a_k) \in w : \sup_{n \in \mathbb{N}} \sum_{k=0}^n \left| \sum_{j=k}^n \binom{j}{k} (r-1)^{j-k} r^{-j} a_j \right| < \infty \right\}$$

آنگاه تساوی‌های زیر برای $1 < p < \infty$ برقرار است

$$(e_1^r)^\gamma = d_\lambda^r, \quad (e_p^r)^\gamma = b_q^r, \quad (e_\infty^r)^\gamma = b_\lambda^r.$$

در پایان این بخش دنباله‌ای از نقاط موجود در فضای e_p^r را به عنوان پایه‌ای برای فضای e_p^r که در آن $1 \leq p < \infty$ معرفی می‌کنیم.

ابتدا پایه شودر فضای نرم‌دار را تعریف می‌کنیم.

تعریف ۵.۴. اگر فضای دنباله‌ای نرم‌دار λ شامل دنباله (b_n) باشد که برای هر $x \in \lambda$ دنباله (α_n) منحصر بفرد وجود داشته باشد به طوری که:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x - (\alpha_0 b_0 + \alpha_1 b_1 + \dots + \alpha_n b_n)\| = 0$$

آنگاه (b_n) پایه شودر برای λ است و می‌نویسیم

$$x = \sum_k \alpha_k b_k$$

قضیه ۶.۴. فرض کنید برای هر $k \in \mathbb{N}$ دنباله $b_n^{(k)}(r) = \{b_n^{(k)}(r)\}_{n \in \mathbb{N}}$ از عناصر فضای e_p^r به صورت زیر باشد

$$b_n^{(k)}(r) = \begin{cases} \binom{n}{k} (r-1)^{n-k} r^{-n} & k \leq n, \\ 0 & k > n. \end{cases}$$

در این صورت $\{b^{(k)}(r)\}_{k \in \mathbb{N}}$ یک پایه شودر برای فضای e_p^r است و برای هر $x \in e_p^r$ نمایش یکتا $x = \sum_k \alpha_k(r) b^{(k)}(r)$ وجود دارد که برای هر $k \in \mathbb{N}$ و $1 \leq p < \infty$ داریم $\alpha_k(r) = (E^r x)_k$.

مراجع

- [1] B. Altay, F. Basar, M. Mursaleen. *On the Euler sequence spaces which include the spaces l_p and l_∞* , Inform. Sci, 176 (10) (2006), pp. 1450-1462.
- [2] B. Altay, F. Basar, *Some Euler sequence spaces of non-absolute type*. Ukrainian Math J, 57 (1) (2005), 1-17.
- [3] A. Wilansky, *Summability Through Functional Analysis*, North-Holland Mathematics Studies, North-Holland, Amsterdam-New York-Oxford, 1984.

ترکیبیات



بررسی بعضی از پارامترها روی عدد ژئودتیک یالی گرافها

سید رحمان کریمپور*
دانشگاه صنعتی نوشیروانی بابل

دکتر حسین عبدالله زاده آهنگر
دانشگاه صنعتی نوشیروانی بابل

چکیده

فرض کنید G یک گراف همبند با حداقل دو راس باشد. مجموعه $S \subseteq V(G)$ یک مجموعه ژئودتیک یالی است اگر هر یال G در یک ژئودتیک همبند از راسهایی در S واقع شوند. به کوچکترین اندازهی مجموعه ژئودتیک یالی در گراف G عدد ژئودتیک یالی گویند و با $g_1(G)$ نشان می‌دهند. هدف در این مقاله شناسایی تمام گرافهای G که (i) عدد ژئودتیک یالی آن n ؛ (ii) عدد ژئودتیک یالی آن $n - 1$ می‌باشد.

(عدد ژئودتیک، پایه عدد ژئودتیک یالی، عدد ژئودتیک یالی)

Mathematics Subject Classification [2010]: 05C69

۱ مقدمه

در این بخش بحث مختصری پیرامون عدد ژئودتیک یالی را ارائه می‌دهیم. تمامی گرافهایی که در این مقاله مورد بررسی قرار می‌گیرند همبند، متناهی، بدون دور یا یالهای چندگانه هستند. مسیر $x - y$ با طول $d_G(x, y)$ را مسیر ژئودتیک گویند. در هر درخت راس مجاور به برگ را راس تکیه‌گاهی گویند. مجموعه‌ی همه راس‌های تکیه‌گاهی در یک گراف را با $Stem(G)$ نشان می‌دهند. برای راس x در گراف G به فاصله بین x و دورترین راس نسبت به x ، خروج از مرکز از راس x گویند و با $e_G(x)$ نشان می‌دهند. راس سادگی راسی از گراف G است که با مجاورهای خود در گراف G ، تشکیل یک گراف کامل می‌دهند. مجموعه‌ی راس‌های سادگی را با $Ext(G)$ نشان می‌دهند. برای یک گراف همبند G از مرتبه $n \geq 3$ و یک مجموعه $W \subseteq V(G)$ ، یک درخت T شامل G برابر یک درخت اشتاینر^۱ نسبت به W می‌باشد اگر یک درخت T از کمترین مرتبه با $W \subseteq V(T)$ باشد. مجموعه W یک مجموعه اشتاینر از G می‌باشد اگر $S(W) = V(G)$. کمترین اندازه در میان مجموعه‌های اشتاینر از G برابر عدد اشتاینر که با $s(G)$ نشان می‌دهند.

قضیه ۱.۱. $[1] G$ ، یک گراف ژئودتیک می‌باشد اگر و تنها اگر برای هر راس v ، هر راس $u \in N_k(v)$ مجاور به یک راس واحد در $N_{k-1}(v)$ برای $2 \leq k \leq e(v)$.

قضیه ۲.۱. $[2]$ اگر G ، یک گراف همبند باشد، آن‌گاه $g(G) = n$ اگر و تنها اگر $G = K_n$.

قضیه ۳.۱. $[3]$ هر مجموعه ژئودتیک از یک گراف، شامل راس‌های سادگی می‌باشد.

قضیه ۴.۱. $[3]$ عدد ژئودتیک یک درخت T ، تعداد راس‌های انتهایی در T می‌باشد.

* سخنران

^۱Steiner



قضیه ۵.۱. [۴] برای یک گراف همبند G ، $s(G) = n$ ، اگر و تنها اگر $G = K_n$.

قضیه ۶.۱. [۵] برای هر گراف G ، رئوس برشی از G به هیچ پایه‌ای از ژئودتیک یالی تعلق ندارد.

قضیه ۷.۱. [۵] هر راس سادگی از یک گراف همبند G به هر پوشش ژئودتیک یالی از G تعلق دارد. به طور خاص، هر راس انتهایی از G به هر پوشش ژئودتیک یالی از G تعلق دارد.

اثبات. فرض کنید S یک پوشش ژئودتیک یالی از G باشد و v یک راس سادگی از G باشد. فرض کنید $\{v_1, v_2, \dots, v_k\}$ همسایگی‌هایی از v باشند vv_i ($1 \leq i \leq k$) یال‌هایی روی v برخورد داشته باشند. چون v یک راس سادگی است. v_i و v_j برای $i \neq j$ ($1 \leq i, j \leq k$) مجاور هستند. به طوری که برای ژئودتیک که شامل vv_i ($1 \leq i \leq k$) است. هر کدام $v_i v$ یا $u_1 u_2 \dots u_L v_i v$ به طوری که هر u_i ($1 \leq i \leq L$) از v_i متفاوت است. در نتیجه $v \in S$ می‌باشد. □

نتیجه ۸.۱. [۵] برای هر درخت T عدد ژئودتیک یالی $g_1(T)$ برابر است با راس‌های انتهایی به آن رئوس در T می‌باشد. در حقیقت مجموعه همه رئوس انتهایی از T پایه‌ای ژئودتیک یالی از T می‌باشد.

اثبات. طبق قضیه‌هایی از ۶.۱ و ۷.۱ حکم بدست می‌آید. □

نتیجه ۹.۱. [۵] برای هر گراف کامل K_n ($n \geq 2$) و $g_1(K_n) = n$ می‌باشد.

اثبات. چون هر راس از گراف کامل K_n ($n \geq 2$) یک راس دورترین نقطه می‌باشد. مجموعه راس K_n برابر با پوشش ژئودتیک یالی از K_n می‌باشد. بنابراین $g_1(K_n) = n$. □

قضیه ۱۰.۱. [۵] برای گراف دوبخشی کامل $G = K_{m,n}$ داریم:

الف) اگر $m = n = 1$ ، آن‌گاه $g_1(G) = 2$.

ب) اگر $n \geq 2$ ، آن‌گاه $g_1(G) = n$.

ج) اگر $m, n \geq 2$ ، آن‌گاه $g_1(G) = \min\{m, n\}$.

اثبات. الف) با استفاده از نتیجه ۹.۱ حکم بدست می‌آید.

ب) با استفاده از نتیجه ۸.۱ حکم بدست می‌آید.

ج) فرض کنید $m, n \geq 2$ باشد. فرض اولیه این که $m < n$ باشد. فرض کنید $U = \{u_1, u_2, \dots, u_m\}$ و $W = \{w_1, w_2, \dots, w_n\}$ یک گراف دوبخشی از G باشد. فرض کنید $S = U$ باشد. ما اثبات می‌کنیم که S یک پایه ژئودتیک یالی از G می‌باشد. هر یال $u_i w_j$ ($1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n$) روی ژئودتیک $u_i w_j u_k$ قرار دارد و برای هر $i \neq k$ به طوری که S یک پوشش ژئودتیک یالی از G می‌باشد. فرض کنید T ، به طوری که به ازای هر راس‌هایی از $|T| < |S|$ باشد. اگر $T \subsetneq U$ ، آن‌گاه وجود دارد یک راس $u_i \in U$ به طوری که $u_i \notin T$ نمی‌باشد. آن‌گاه برای هر یال $u_i w_j$ ($1 \leq j \leq n$)، تنها ژئودتیک که دارای $u_i w_j u_k$ هستند $u_i w_j u_k$ ($k \neq i$) می‌باشند. و $w_j u_i w_L$ ($L \neq j$) و بنابراین $u_i w_j$ نمی‌توانند در یک ژئودتیک متصل به دو راس‌هایی از T قرار بگیرند. بنابراین T پوششی از ژئودتیک یالی نمی‌باشد. اگر $T \subsetneq W$ ، دوباره به طور مشابه T نمی‌تواند یک پوشش ژئودتیک یالی از G باشد. اگر $T \subsetneq S \cup W$ به طوری که T شامل حداقل یک راس از هر S, W می‌باشد. آن‌گاه چون $|T| < |S|$ ، وجود دارد راس‌هایی از $u_i \in U$ و $w_j \in W$ به طوری که $u_i \notin T$ و $w_j \notin T$ نمی‌باشد. آن‌گاه واضح می‌باشد که یال $u_i w_j$ روی یک ژئودتیک همبند، دو راس از T قرار ندارد. به طوری که T یک ژئودتیک یالی را پوشش نمی‌دهد. بنابراین در هر حالت T نمی‌تواند ژئودتیک یالی از G را پوشش دهد. بنابراین S پایه ژئودتیک یالی می‌باشد. به طوری که $g_1(K_{m,n}) = |S| = m$. ما می‌توانیم به طور مشابه اثبات کنیم $S = U$ یا W یک پایه ژئودتیک یالی از G می‌باشد. □



قضیه ۱۱.۱. [۵] اگر G در واقع روی یک راس از درجه $n - 1$ باشد، آن گاه $g_1(G) = n - 1$.

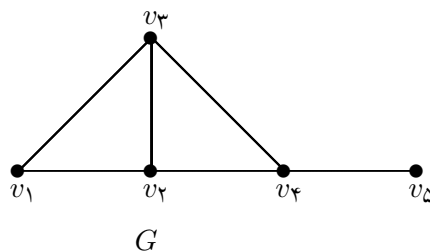
اثبات. فرض کنید v راس تنها از درجه $n - 1$ باشد، آن گاه $n \geq 3$. فرض کنید $S = V - \{v\}$ ، فرض کنید vu هر یال با v واقع باشد. چون v تنها راس از درجه $n - 1$ می باشد. حداقل یک راس u' وجود دارد، به طوری که u, u' مجاور نیستند. آن گاه vu روی ژئودتیک uvu' متصل به u و u' در S می باشد. هر یال $e = xy$ به طوری که با راس v واقع نیست، روی ژئودتیک xy با اتصال دو راس از S در خودش قرار گیرد. بنابراین S یک پوشش ژئودتیک یالی است به طوری که $g_1(G) \leq n - 1$. ما نشان می دهیم که $g_1(G) = n - 1$ ، فرض کنید T به ازای هر مجموعه از راس هایی با $|T| \leq n - 2$ ، آن گاه وجود دارد حداقل دو راس u, v نامیده می شود به طوری که در T نیستند.

اگر $v \notin T$ ، آن گاه $v \neq u$ یا $v \neq w$ به طوری که یال vu یا vw نمی توانند روی ژئودتیک متصل به دو راس از T قرار بگیرند. اگر $v \in T$ باشد، دوباره یال vu یا vw نمی تواند در یک ژئودتیک متصل از دو راس T قرار بگیرد. در هر مورد T نمی تواند پوشش ژئودتیک یالی از G باشد، بنابراین $g_1(G) = n - 1$. \square

نتیجه ۱۲.۱. [۵] برای هر درخت T ، با راس های $g_1(T) = n - 1$ ($n \geq 3$) می باشد، اگر و تنها اگر T یک ستاره باشد.

اثبات. اگر T یک ستاره باشد، $K_{1,n}$ نامیده می شود و آن گاه با نتیجه ۸.۱ $g_1(T) = n - 1$ می باشد. حالا فرض کنید که $g_1(T) = n - 1$ باشد. اگر T یک ستاره نباشد. آن گاه قطر $T > 3$ ، می باشد به طوری که راس u, v وجود دارد به طوری که $d = d(u, v) > 3$ می باشد. بنابراین حداقل یک راس داخلی از T وجود دارد و بنابر قضیه ۶.۱ $g_1(T) \leq n - 2$ می باشد، که این تناقض است. \square

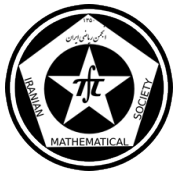
ملاحظه ۱۳.۱. [۵] عکس قضیه ۱۱.۱ برقرار نیست، برای گراف G در شکل زیر داریم $S = \{v_1, v_3, v_4, v_5\}$ پایه ای برای ژئودتیک یالی است بنابراین $g_1(G) = 4 = n - 1$ اما راسی از G ، دارای درجه $n - 1$ نمی باشد.



لم ۱۴.۱. برای هر درخت T با $n \geq 3$ رئوس $g_1(T) = g(T) = n - 1$ اگر و تنها اگر T یک ستاره باشد.

لم ۱۵.۱. اگر G شامل یک راس v از درجه $n - 1$ باشد. آن گاه $g_1(G) = g(G) = n - 1$ و G شامل یک پایه ژئودتیک واحد شامل همه رئوس از G به غیر از v می باشد.

لم ۱۶.۱. فرض کنید G یک گراف از مرتبه n باشد. آن گاه $g_1(G) = g(G) = n$ اگر و تنها اگر تمام رئوس آن ساده باشد.



لم ۱۷.۱. فرض کنید T یک درخت از مرتبه n است. آنگاه برای i برای $(i \geq 1)$ اگر و تنها اگر $T - \Omega(T)$ یک درخت از مرتبه i باشد.

لم ۱۸.۱. فرض کنید G گرافی است که $G - Ext(G)$ فاقد دور است. آنگاه i برای $(i \geq 0)$ به طوری که i مجموعه رئوس برشی می باشد، اگر و تنها اگر $i = |Ext(G)|$.

لم ۱۹.۱. اگر $G - Ext(G) = K_3$ آنگاه $g_1(G) = n - 3$.

لم ۲۰.۱. اگر $|G - Ext(G)| = 4$ و شامل دور باشد. آنگاه $g_1(G) \geq n - 4$.

مراجع

- [1] F. Buckley and F. Harary, *Distance in Graphs*, Addition-Wesley, Red-wood City, CA, (1990).
- [2] F. Buckley, F. Harary and L.V. Quintas. *Extremal Results on the geodetic numbers of a graph*, Scientia, Vol. A2, (1988), pp. 17-26.
- [3] G. Chartrand, F. Harary, and P. Zhang, *On the geodetic number of a graph*, Networks, Vol.39(1) (2002), pp. 1-6.
- [4] G. Chartrand and P. Zang. *The Steiner number of a graph*, *Discrete Mathematics*, Vol, 242, (2002), pp.1-6.
- [5] A.P. Santhakumaran and J. John, *The Edge geodetic number of a graph*, *Journal of Discrete Mathematical Sciences & Cryptograph*, Vol.10(2007), pp.415 - 432.

پست الکترونیکی: ha.ahangar@nit.ac.ir
پست الکترونیکی: sr.karimpour@gmail.com



کدهای دوری دوتایی ناشی از سه جمله‌ای جایگشت $f(x) = x + x^3 + x^{2^t+1}$ روی $GF(2^{2t-1})$

محمدآزاد ویسی*
دانشگاه زنجان

مژگان امامی
دانشگاه زنجان

چکیده

کدهای دوری زیرخانواده‌ای از کدهای خطی هستند که به دلیل داشتن الگوریتم‌های کدگذاری و کدگشایی کارآمد در مصارف الکترونیکی، سیستم‌های ذخیره‌سازی اطلاعات و سیستم‌های تبادل اطلاعات کاربرد دارند. در این مقاله، چندجمله‌ای $f(x) = x + x^3 + x^{2^t+1}$ روی $GF(2^{2t-1})$ را برای ساختن خانواده‌ای از کدهای دوری دوتایی به کار می‌گیریم و کرانی برای کمترین فاصله‌ی آن تعیین می‌کنیم. بیشتر کدهای ساخته شده در این مقاله بهینه هستند.

واژه‌های کلیدی: کدهای خطی، کدهای دوری، چندجمله‌ای جایگشت

Mathematics Subject Classification [2010]: 05B20

۱ مقدمه

فرض کنیم q توانی از عدد اول p باشد. α را عنصر اولیه‌ی میدان متناهی $GF(q)$ در نظر می‌گیریم. یک $[n, k, d]$ کد خطی روی $GF(q)$ زیرفضای k بعدی از $GF(q)^n$ با کمترین فاصله همینگ d است. یک $[n, k]$ کد خطی \mathcal{C} روی میدان متناهی $GF(q)$ را دوری نامیم هرگاه $(c_0, c_1, \dots, c_{n-1}) \in \mathcal{C}$ ایجاب کند که $(c_{n-1}, c_0, \dots, c_{n-2}) \in \mathcal{C}$. فرض کنیم $\mathcal{C} = (g(x))$ یک کد دوری باشد، که $g(x)$ تکین و دارای کوچکترین درجه باشد، در این صورت $g(x)$ را چندجمله‌ای مولد \mathcal{C} می‌نامیم. یک راه برای ساختن کدهای دوری روی $GF(q)$ از طول n استفاده از چندجمله‌ای مولد

$$\frac{x^n - 1}{\gcd(S^n(x), x^n - 1)} \quad (1)$$

است که $S^n(x) = \sum_{i=0}^{n-1} s_i x^i \in GF(q)[x]$ و $s^\infty = (s_i)_{i=0}^\infty$ یک دنباله با دوره‌ی تناوب n روی $GF(q)$ است. در این مقاله، کد دوری با چندجمله‌ای مولد (۱) را کد تولید شده توسط دنباله‌ی s^∞ نامیده و با \mathcal{C}_s نمایش می‌دهیم. دنباله‌ی s^∞ را دنباله‌ی معرف کد دوری \mathcal{C}_s می‌نامیم. در این مقاله، سه جمله‌ای جایگشت $f(x) = x + x^3 + x^{2^t+1}$ روی $GF(2^{2t-1})$ ، را برای ساخت رده‌ای از کدهای دوری دوتایی به کار خواهیم گرفت [۱] و کران پایینی برای کمترین وزن این کدها به دست می‌آوریم.

* سخنران



۲ گسترده‌گی خطی و چندجمله‌ای مینیمال دنباله‌های متناوب

فرض کنیم $s^\infty = (s_i)_{i=0}^\infty$ دنباله‌ای از دوره‌ی تناوب L در $GF(q)$ باشد. چندجمله‌ای $c(x) = \sum_{i=0}^L c_i x^i$ روی $GF(q)$ را که $c_0 = 1$ ، چندجمله‌ای مشخصه‌ی s^∞ می‌نامیم هرگاه

$$-c_0 s_i = c_1 s_{i-1} + c_2 s_{i-2} + \dots + c_l s_{i-l} \quad \forall i \geq l. \quad (2)$$

چندجمله‌ای مشخصه از کوچکترین درجه را چندجمله‌ای مینیمال s^∞ و درجه چندجمله‌ای مینیمال را گسترده‌گی خطی s^∞ نامیده به ترتیب با $\mathbb{M}_s(x)$ و \mathbb{L}_s نشان می‌دهیم. چون جمله‌ی ثابت چندجمله‌ای مینیمال برابر ۱ است، چندجمله‌ای مینیمال هر دنباله‌ی متناوب s^∞ منحصر به فرد است. در فصل ۵ از [۲] به صورت زیر تعیین شده‌اند

$$\mathbb{M}_s = \frac{x^L - 1}{\gcd(S^L(x), x^L - 1)}, \quad \mathbb{L}_s = L - \deg(\gcd(x^L - 1, S^L(x))).$$

واضح است که هر دنباله s^∞ روی $GF(q)$ با دوره‌ی تناوب $q^m - 1$ دارای بسط یکتایی به شکل زیر است

$$s_t = \sum_{i=0}^{q^m-2} c_i \alpha^{it} \quad \forall t \geq 0. \quad (3)$$

قضیه زیر روش دیگری برای محاسبه‌ی گسترده‌گی خطی و چندجمله‌ای مینیمال دنباله‌ی متناوب s^∞ به دست می‌دهد [۳].

قضیه ۱.۲. فرض کنیم s^∞ دنباله‌ای روی $GF(q)$ از دوره‌ی تناوب $q^m - 1$ با بسط به فرم (۳) باشد. فرض کنیم $I = \{i | c_i \neq 0\}$ مجموعه‌ی اندیس‌های مخالف صفر باشد، در این صورت چندجمله‌ای مینیمال این دنباله به صورت $\mathbb{M}_s(x) = \prod_{i \in I} (1 - \alpha^i x)$ و گسترده‌گی خطی آن برابر $|I|$ است.

فرض کنیم $n = 2^m - 1$. C_j را هم‌رده‌ی ۲-دایره‌بر شامل j و به پیمانه‌ی n به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$C_j = \{j, j^2, j^{2^2}, \dots, j^{2^{\ell_j-1}}\}$$

که ℓ_j کوچکترین عدد صحیح مثبت است به طوری که $2^{\ell_j} j \equiv j \pmod{n}$. لم زیر از هم‌رده‌های ۲-دایره‌بر در ادامه مفید خواهد بود.

قضیه ۲.۲. [۴] فرض کنیم h عدد صحیحی باشد که $1 \leq h \leq \lceil \frac{m+1}{2} \rceil$ ، در این صورت برای هر $j \in \Gamma_1$ ، که در آن $\Gamma_1 = \{j \text{ فرد باشد} : 1 \leq j \leq 2^h - 1\}$

• j پیش‌رو هم‌رده‌ی C_j است.

• $\ell_j = m$ مگر در حالتی که m زوج باشد $\ell_j = m/2$.

۳ کدهای دوری دوتایی ناشی از سه جمله‌ای $f(x) = x + x^3 + x^{2^t+1}$

در این بخش، $\text{Tr}(x)$ تابع اثر^۱ از $GF(2)$ به $GF(2^{2t-1})$ ، α مولد $GF(2^{2t-1})^*$ و $m_a(x)$ چندجمله‌ای مینیمال $a \in GF(2^{2t-1})$ روی $GF(2)$ است. سه جمله‌ای جایگشت $f(x) = x + x^3 + x^{2^t+1}$ روی $GF(2^{2t-1})$ را در نظر

^۱linear span

^۲trace function



می‌گیریم، دنباله‌ی s^∞ متناظر با آن را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$s_i = \text{Tr}(f(\alpha^i + 1)) \quad \forall i \geq 0. \quad (4)$$

در این بخش، کد C_s با دنباله‌ی معرف (۴) را بررسی خواهیم کرد. اما قبل از این لازم است لم زیر را ثابت کنیم.
لم ۱.۳. فرض کنیم $2t - 1 \geq 5$. فرض کنیم s^∞ دنباله‌ی (۴) باشد. در این صورت گستردگی خطی آن برابر $2 - 6t$ و چندجمله‌ای مینیمال آن به صورت زیر است

$$\mathbb{M}_s(x) = (x - 1)m_{\alpha^{-1}}(x)m_{\alpha^{-3}}(x)m_{\alpha^{-(2t+1)}}(x). \quad (5)$$

اثبات. با توجه به تعریف داریم

$$s_i = \text{Tr}(f(\alpha^i + 1)) = \sum_{j=0}^{2t-2} (\alpha^i)^{2^j} + \sum_{j=0}^{2t-2} (\alpha^i)^{3 \times 2^j} + \sum_{j=0}^{2t-2} (\alpha^i)^{(2^t+1)2^j} + \sum_{j=0}^{2t-2} (1)^{2^j}. \quad (6)$$

حال نشان می‌دهیم C_1, C_3 و C_{2t+1} مجزا و از اندازه‌ی $2t - 1$ هستند. بنابر قضیه ۲.۲ داریم $|C_1| = |C_3| = |C_{2t+1}| = 2t - 1$. ثابت می‌کنیم $|C_{2t+1}| = |C_{2t+1}| = 2t - 1$. طبق تعریف همردی ۲-دایره $0 \equiv 2^{2t-1} - 1 \pmod{2^t + 1}$ و چون $\gcd(2^t + 1, 2^{2t-1} - 1) = 1$ در نتیجه $2t - 1 \equiv 2^{2t-1} - 1 \pmod{2^t + 1}$. اکنون نشان می‌دهیم C_1, C_3 و C_{2t+1} مجزا هستند. قضیه ۲.۲ ایجاب می‌کند که ۱ و ۳ پیشروهای همرده باشند بنابراین C_1 و C_3 مجزا هستند. چون $3 \notin C_1$ و همچنین $2^t + 1 \notin C_1$ لذا $2^t + 1 < 2^{2t-1} - 1$ ، $C_1 = \{2^i | i = 0, 1, \dots, 2t - 2\}$ لذا C_1 متمایز از C_3 و C_{2t+1} است. حال نشان می‌دهیم C_3 و C_{2t+1} متمایز هستند. قرار می‌دهیم $\Delta(i) = 3 \times$ (پیمانه $2^{2t-1} - 1$) 2^i . نشان می‌دهیم برای هر i که $i \in \{0, 1, \dots, 2t - 2\}$ ، $\Delta(i) \neq 2^t + 1$. اگر $i = 0$ در این صورت $\Delta(0) = 3 \neq 2^t + 1$ اگر $1 \leq i \leq 2t - 3$ آنگاه چون

$$6 \leq \Delta(i) \leq 3 \times 2^{2t-3} = 2^{2t-2} + 2^{2t-3} < 2^{2t-1} - 1,$$

$\Delta(i) = 3 \times 2^i$ زوج است و $2^t + 1$ فرد است لذا در این حالت نیز $\Delta(i) \neq 2^t + 1$. حال اگر $i = 2t - 2$ داریم

$$\Delta(2t - 2) = 3 \times 2^{2t-2} = 2^{2t-1} + 2^{2t-2} \equiv 1 + 2^{2t-2} \pmod{2^t + 1}.$$

فرض کنیم $\Delta(2t - 2) = 1 + 2^{2t-2} = 2^t + 1$ که این تناقض است زیرا $t \geq 3$ پس $\Delta(2t - 2) \neq 2^t + 1$. بنابراین $2^t + 1 \notin C_3$ و $2^t + 1 \notin C_{2t+1}$ است. با توجه به این که C_1, C_3 و C_{2t+1} مجزا و از اندازه‌ی $2t - 1$ هستند، از (۶) داریم

$$s_i = 1 + \sum_{j \in C_1} (\alpha^i)^j + \sum_{j \in C_3} (\alpha^i)^j + \sum_{j \in C_{2t+1}} (\alpha^i)^j.$$

با توجه به قضیه ۱.۲ داریم

$$\begin{aligned} \mathbb{M}_s(x) &= (x - 1) \prod_{j \in C_1} (1 - \alpha^j x) \prod_{j \in C_3} (1 - \alpha^j x) \prod_{j \in C_{2t+1}} (1 - \alpha^j x) \\ &= (x - 1)m_{\alpha^{-1}}(x)m_{\alpha^{-3}}(x)m_{\alpha^{-(2t+1)}}(x). \end{aligned}$$

چون همرده‌های C_1, C_3 و C_{2t+1} از اندازه $2t - 1$ هستند و گستردگی خطی برابر درجه‌ی چندجمله‌ای مینیمال است لذا $\mathbb{L}_s = 6t - 2$ است. \square



در قضیه‌ی زیر پارامترهای کد C_s را مشخص می‌کنیم.

قضیه ۲.۳. فرض کنیم $2t - 1 \geq 5$. کد C_s تعریف شده توسط دنباله‌ی لم ۱.۳ یک $[2^{2t-1} - 1, 2^{2t-1} - 6t + 1, d]$ کد دوری دوتایی با چندجمله‌ای مولد $M_s(x)$ است که $M_s(x)$ در لم ۱.۳ به دست آمده و $d \geq 6$ است.

اثبات. چون s^∞ دنباله‌ای از دوره‌ی تناوب $2^{2t-1} - 1$ است لذا طول کد نیز این گونه است. با توجه به این که \mathbb{L}_s درجه‌ی چندجمله‌ای مولد $M_s(x)$ است لذا بعد این کد برابر $2^{2t-1} - 6t + 1 - \mathbb{L}_s = 2^{2t-1} - 1 - \mathbb{L}_s$ است. چون کد دوری با چندجمله‌ای مولد $M_s(x)$ و وارون آن دارای توزیع وزن یکسان هستند و وارون $M_s(x)$ دارای مجموعه‌ی معرف $T = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ است بنابراین طبق کران BCH داریم $d \geq 6$. \square

مثال ۳.۳. فرض کنیم $2t - 1 = 5$ و α مولد $GF(2^5)^*$ باشد که $\alpha^5 + \alpha^2 + 1 = 0$. در این صورت چندجمله‌ای مولد کد C_s ، \mathbb{L}_s ، $M_s(x) = x^{16} + x^{11} + x^9 + x^4 + x + 1$ بوده و C_s یک $[31, 15, 8]$ کد دوری دوتایی است. این کد طبق پایگاه داده‌ی کدهای بهینه^۳ مارکوس گراسل^۴ بهینه است.

مثال ۴.۳. فرض کنیم $2t - 1 = 7$ و α مولد $GF(2^7)^*$ باشد که $\alpha^7 + \alpha + 1 = 0$. در این صورت چندجمله‌ای مولد کد C_s ، \mathbb{L}_s ، $M_s(x) = x^{22} + x^{21} + x^{20} + x^{19} + x^{17} + x^{15} + x^{14} + x^{13} + x^6 + x^3 + x + 1$ بوده و C_s یک $[127, 105, 8]$ کد دوری دوتایی است. این کد نیز طبق پایگاه داده معرفی شده در مثال قبل، بهینه است.

مراجع

- [1] H. Dobbertin, *Almost perfect nonlinear power functions on $GF(2^n)$: the Welch case*, IEEE Trans. Inform. Theory, 1999.
- [2] C. Ding, G. Xiao and W. Shan, *The Stability Theory of Stream Ciphers*, in: Lecture Notes in Computer Science, vol. 561, Springer-Verlag, Heidelberg, 1991.
- [3] M. Antweiler and L. Bomer, *Complex sequences over $GF(p^m)$ with a two-level autocorrelation function and a large linear span*, IEEE Trans. Inform. Theory, 1992.
- [4] C. Ding and Z. Zhou, *Binary cyclic codes from explicit polynomials over $GF(2^m)$* . Discret. Math., 2014.

پست الکترونیکی: azad.weisi@znu.ac.ir
پست الکترونیکی: emami@znu.ac.ir

^۳<http://www.codetables.de>

^۴Markus Grassl



لم اسپرنر و هم ارزی قضیه نقطه ثابت و قضیه هگز

بهباد صالحیان متی کلائی
دانشگاه دامغان

محبوبه شریفی*
دانشگاه دامغان

چکیده

هر نگاشت پیوسته f از یک بازه بسته به توی خودش دارای یک نقطه ثابت است که این قضیه به نام قضیه نقطه ثابت براور شناخته می‌شود و دارای گسترده‌ی وسیعی از کاربردها در ریاضی مدرن است. نکته جالب توجه این است که این قضیه به سادگی از یک لم ترکیبیاتی توسط اسپرنر (۱۹۲۸) نتیجه گرفته شد. لم ترکیبیاتی اسپرنر نوعی مثلث بندی سادگی است که یک مثلث را به مثلث‌های کوچک‌تر تقسیم می‌کند و طبق یک قاعده مشخص به برجسب‌گذاری گوشه‌های مثلث بزرگ می‌پردازد و این روند در اثبات قضیه نقطه ثابت با معرفی، مختصات مرکزی باری، یک اثبات ترکیبیاتی برای یک قضیه توپولوژی و آنالیز ریاضی ارائه می‌دهد. در پایان ضمن بیان تاریخچه بازی هگز هم ارزی قضیه هگز و قضیه نقطه ثابت براور را شرح می‌دهیم.

واژه‌های کلیدی: لم اسپرنر، قضیه نقطه ثابت، قضیه نقطه ثابت براور، بازی هگز
Mathematics Subject Classification [2010]: 05C78, 37C25, 37F20

۱ مقدمه

لم اسپرنر به تجزیه یک سادک (مثلث، چندوجهی، پاره خط و ...) به سادک‌های کوچک‌تر مربوط است. فرض کنید T یک مثلث بسته در صفحه است. تجزیه T به تعدادی متناهی مثلث‌های کوچک را مثلث‌بندی می‌نامیم که هر دو مثلث در یک رأس یا یک وجه مشترک، اشتراک دارند. فرض کنید یک تجزیه سادکی برای T داریم آن‌گاه برجسب‌گذاری رئوس مثلث‌های حاصل از تجزیه با نمادهای 0 ، 1 و 2 سره است هرگاه:

- هر سه رأس T به ترتیب دلخواه با 0 ، 1 و 2 برجسب‌گذاری شود و
- به ازای $0 \leq i \leq j \leq 2$ هر رأس روی یک وجه T متصل بین i و j یا با i یا با j برجسب‌گذاری شود.

به مثلی که در مثلث‌بندی رأس‌هایش دارای همه سه برجسب 0 ، 1 و 2 است، مثلث ممتاز گوئیم.

قضیه ۱.۱ (لم اسپرنر). هر تجزیه سادکی از یک مثلث با برجسب‌گذاری سره دارای تعدادی فرد مثلث ممتاز است [۴].

از آنجا که لم ترکیبیاتی اسپرنر برای هر سادک n بعدی ثابت شده است لذا می‌توان قضیه (۱.۱) را برای یک مربع در قالب لم زیر بیان کرد.

لم ۲.۱. فرض کنید Q یک مربع است که توسط خط‌های موازی اضلاع آن، به مربع‌های کوچک‌تری افزاز شده است. رأس‌های مربع Q با اعداد 1 ، 2 ، 3 ، 4 برجسب‌گذاری شده‌اند. رأس‌های این افزاز با همین اعداد طوری برجسب‌گذاری شده که برجسب هر رأس افزاز که روی یک ضلع از مربع Q واقع شده با برجسب یکی از رأس‌های انتهایی این ضلع برابر است. در این صورت وجهی در این افزاز وجود دارد که در رأس‌های آن حداقل سه برجسب متفاوت ظاهر شده است [۱].

* سخنران



برای بیان اثبات قضیه نقطه ثابت براور با استفاده از لم اسپرنر ابتدا نگاهی کوتاه به تاریخ داریم؛ نفر اول ابداع کننده روش نقطه ثابت، ریاضی‌دان معروف فرانسوی هانری پوانکاره (۱۸۵۴-۱۹۱۲) است. وی اولین کسی بود که از روش‌های ترکیبیاتی در توپولوژی استفاده کرد. مثلث‌بندی شکل‌های هندسی و تقسیم آن‌ها به سادک‌ها از ایده‌های اوست. نفر دوم، ریاضی‌دان هلندی براور (۱۹۶۶-۱۸۸۱) است. او قضایای نقطه ثابت را برای مربع، کره، و مشابه n بعدی آن‌ها اثبات کرد. نفر سوم، ریاضی‌دان آلمانی اسپرنر (۱۹۸۰-۱۹۰۶) است. او در سال ۱۹۸۲ لم هندسی ترکیبیاتی درباره تجزیه یک مثلث را اثبات کرد که نقش بسیار مهمی در نظریه نقطه ثابت دارد. در ادامه برای اثبات قضیه براور کافیت ثابت کنیم تابعی پیوسته از یک مثلث به توی خودش دارای نقطه ثابت است. فرض کنید T مثلثی بسته با رأس‌های x_0, x_1, x_2 است. آن‌گاه هر نقطه x از T را می‌توان بصورت یکتا به شکل $x = a_0 x_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2$ نوشت که $a_i \geq 0$ و $\sum a_i = 1$ می‌توان x را با بردار (a_0, a_1, a_2) نمایش داد. اعداد حقیقی a_0, a_1, a_2 را مختصات باری x می‌گوییم.

تعریف ۳.۱. مختصات مرکزی باری بیان می‌کند یک نقطه درون یک مثلث به عنوان میانگین وزن‌دار سه رأس است به بیان دیگر، مثلث را به عنوان یک پوشش محدب در نظر بگیرید که در این صورت هر نقطه را می‌توان به شکل

$$\alpha a + \beta b + \gamma c$$

نوشت که در آن

$$\alpha + \beta + \gamma = 1$$

و a, b, c مختصات رئوس مثلث هستند. بنابراین مختصات مرکزی باری به صورت سه‌تایی مرتب است که مجموعشان برابر با ۱ است.

مثال ۴.۱. $(0, 0, 1), (0, 1, 0), (1, 0, 0)$ سه رأس از مثلث هستند. مختصات باری آن‌ها به ترتیب $(0, 1, 0), (1, 0, 0), (0, 0, 1)$ و $(0, 0, 1)$ است و هم چنین مختصات باری نقطه $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ باید $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ باشد [۴].

با توجه به تعریف مختصات مرکزی باری، قضیه نقطه ثابت براور که در زیر بیان می‌شود با این فرض که f نگاشتی پیوسته از T به توی خودش است و $f(a_0, a_1, a_2) = (a'_0, b'_0, c'_0)$ اثبات می‌شود. S_i را مجموعه نقاط (a'_0, b'_0, c'_0) در T در نظر بگیرید که $a'_0 \leq a_i$. برای اینکه نشان دهیم f دارای نقطه ثابت است کافیت نشان دهیم $S_0 \cap S_1 \cap S_2 \neq \emptyset$. اگر فرض کنیم $(a_0, a_1, a_2) \in S_0 \cap S_1 \cap S_2$ آنگاه طبق تعریف S_i به ازای هر i داریم $a'_0 \leq a_0$. که این با توجه به این حقیقت که $\sum a'_0 = \sum a_i$ نتیجه می‌دهد $(a_0, a_1, a_2) = (a'_0, b'_0, c'_0)$ به عبارت دیگر (a_0, a_1, a_2) نقطه ثابت f است.

قضیه ۵.۱. (نقطه ثابت براور (۱۹۱۵)). فرض کنید S یک سادک n -بعدی است و فرض کنید $\phi: S \rightarrow S$ تابعی پیوسته باشد. آن‌گاه ϕ دارای نقطه ثابت است یعنی $\exists x \in S$ به طوری که $\phi(x) = x$ [۳].

هم ارزی قضیه هگز و قضیه نقطه ثابت براور

بازی هگز اولین بار در سال ۱۹۴۲ توسط پیت هاین ریاضی‌دان، دانشمند، نویسنده و شاعر دانمارکی اختراع شد. همچنین در سال ۱۹۴۸ جان نش در دانشگاه پرینستون این بازی را دوباره کشف کرد که در بین دانشجویان فارغ التحصیل پرینستون شهرت پیدا کرد. آن‌ها بازی هگز را "جان" یا "نش" نامیدند. در سال ۱۹۵۲ برادران پارکر اولین بار بازی هگز را در بازار ارائه کردند.

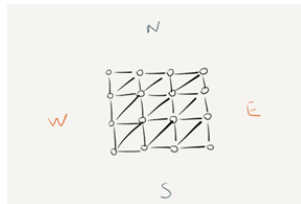


هگز یک بازی دو نفره روی یک صفحه الماس شکل تشکیل شده از خانه‌هایی شش ضلعی است. ابعاد این صفحه می‌تواند متفاوت باشد که نوعاً اندازه آن 11×11 است. دو وجه مقابل در صفحه با "سیاه" و دو وجه دیگر با "سفید" برجسب گذاری می‌شوند. روند بازی این چنین است: هر یک از بازیکن‌ها به نوبت مهره‌های رنگ خود را در خانه‌های خالی صفحه بازی قرار می‌دهند بطوری که بتوانند زنجیری از مهره‌های رنگ خود را بین دو وجه مقابل با همان رنگ طوری ایجاد کنند که بازیکن دیگر با رنگ مخالف نتواند این زنجیر را با مهره‌هایش بشکند. این یعنی برنده بازی شخصی است که بتواند اولین مسیر همبند را از یک نوع رنگ بر روی شش ضلعی‌های متمایز صفحه بازی بین دو وجه مقابل بیابد. به این ترتیب قضیه هگز بیان می‌کند بازی هگز به تساوی ختم نمی‌شود و یک بازیکن حتماً برنده است. دیوید گاله اثباتی ساده از قضیه هگز براساس نظریه گراف ارائه داد و همچنین نشان داد قضیه هگز و قضیه نقطه ثابت براوئر هم ارز هستند؛ از اینرو، در بخش پایانی این مقاله تنها یک طرف اثبات هم ارزی این دو قضیه را شرح می‌دهیم.

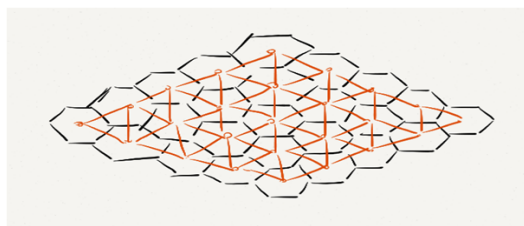
قضیه ۶.۱ (قضیه هگز). فرض کنید B_k به وسیله دو مجموعه H و V پوشیده شود آنگاه یا H شامل مجموعه همبند متلاقی \mathbb{E} و \mathbb{W} یا V شامل مجموعه ای همبند متلاقی \mathbb{N} و \mathbb{S} است [۶].

برای نمایش هم ارزی قضیه (۵.۱) و قضیه (۶.۱)، ابتدا فرض کنید \mathbb{Z}^n نقاط مشبک از \mathbb{R}^n است. به ازای $x \neq y \in \mathbb{R}^n$ فرض کنید به ازای هر i ، $|x - y| = \max(x_i - y_i)$ ؛ به ازای همه i ها اگر $x_i \leq y_i$ آنگاه $x < y$ است. نقاط x, y را مقایسه پذیر گوئیم هرگاه $x < y$ یا $y < x$.

صفحه هگز ۲-بعدی B_k با اندازه k ، گرافی است که رأس‌های آن مجموعه همه $z \in \mathbb{Z}^2$ با $(1, 1) \leq z \leq (k, k)$ است. اگر $|z - z'| = 1$ و z و z' مقایسه پذیر باشند آنگاه دو رأس z و z' مجاورند. فرض کنید شکل (آ) یک نمونه مثلث بندی صفحه بازی هگز باشد آنگاه مطابق شکل (ب) یال‌های مرزی با جهت‌های اصلی $\mathbb{N}, \mathbb{S}, \mathbb{E}, \mathbb{W}$ برجسب گذاری می‌شوند.



(ب) برجسب گذاری یال‌های یک مثلث بندی



(آ) مثلث بندی صفحه هگز

شکل ۱: صفحه بازی هگز

برای صفحه‌ای با اندازه k رئوس روی مرز همه $y = (z_1, z_2) = z$ هستند که به ترتیب در $z_1 = k$ و $z_2 = 0$ و $z_1 = 0$ و $z_2 = k$ صدق میکند [۶].

۲ نتیجه

برای اینکه از قضیه نقطه ثابت براوئر قضیه هگز را نتیجه بگیریم، از این واقعیت استفاده می‌کنیم که هر نقطه x در مربع $k \times k$ ، I_k^2 در \mathbb{R}^2 می‌تواند بصورت منحصربفرد مانند ترکیب محدب از مجموعه رئوس B_k نمایش داده شود. همچنین توجه کنید که برای هر نگاشت f از B_k به \mathbb{R}^2 می‌توانیم آن را به یک نگاشت سادگی پیوسته \hat{f} به توی I_k^2 توسعه دهیم. اگر



$$x = \lambda_1 z^1 + \lambda_2 z^2 + \lambda_3 z^3 \text{ آن‌گاه اگر } \lambda_i > 0 \text{ و } \sum_i \lambda_i = 1 \text{ طبق تعریف داریم:}$$

$$\hat{f}(x) = \lambda_1 f(f(z^1)) + \lambda_2 f(z^2) + \lambda_3 f(z^3).$$

قبل از ادامه روند اثبات ابتدا به لم جبری زیر توجه نمایید.

لم ۱.۲. فرض کنید z^1, z^2 و z^3 رئوس مثلثی در \mathbb{R}^2 باشند و ρ نگاشتی باشد که $\rho(z^i) = z^i + v^i$ ، v^1, v^2 و v^3 بردار و $\hat{\rho}$ توسیع سادک آن باشد. آن‌گاه $\hat{\rho}$ دارای نقطه ثابت است اگر و فقط اگر در پوششی محدب از بردارهای v^1, v^2 و v^3 باشد [۵].

اکنون فرض کنید B_k با دو مجموعه H و V تقسیم بندی شود. یک H -مسیر (V -مسیر) مجموعه‌ای همبند در $(V)H$ است. چهار زیرمجموعه از B_k بدین صورت تعریف می‌کنیم؛ فرض کنید همه رئوس همبند در \mathbb{W} به وسیله H -مسیر و $\hat{\mathbb{E}} = H - \hat{\mathbb{W}}$ و $\hat{\mathbb{S}} = V - \hat{\mathbb{S}}$ به وسیله V -مسیر و $\hat{\mathbb{N}} = V - \hat{\mathbb{S}}$ است. باید $\hat{\mathbb{E}}$ و $\hat{\mathbb{W}}$ را چنان تعریف کنید که مجاور نباشند. فرض می‌کنیم H -مسیری از \mathbb{E} به \mathbb{W} وجود ندارد و V -مسیری از \mathbb{N} به \mathbb{S} وجود ندارد و یک تناقض را نمایش دهیم. فرض کنید e^1 و e^2 بردارهای واحد از \mathbb{R}^2 هستند و $f: B_k \rightarrow B_k$ به صورت زیر باشد؛

$$f(z) = \begin{cases} z + e^1 & \forall z \in \hat{\mathbb{W}} \\ z - e^1 & \forall z \in \hat{\mathbb{E}} \\ z + e^2 & \forall z \in \hat{\mathbb{S}} \\ z - e^2 & \forall z \in \hat{\mathbb{N}} \end{cases}$$

برای هر حالت باید بررسی کنیم $f(z)$ در B_k است. تنها راهی که $z + e^1$ می‌تواند خارج از B_k باشد این است که $z \in \hat{\mathbb{W}}$ متعلق به \mathbb{E} باشد. به هر حال، فرض کردیم H -مسیری از \mathbb{W} به \mathbb{E} وجود ندارد پس $\hat{\mathbb{W}}$ نمی‌تواند با \mathbb{E} در تلاقی باشد. چون $\hat{\mathbb{E}}$ و $\hat{\mathbb{W}}$ مجاور نیستند، z نمی‌تواند با \mathbb{W} در تلاقی باشد و به ازای همه $z \in \hat{\mathbb{E}}$ ، $z - e^1$ به B_k تعلق دارد. اکنون توجه خود را به \hat{f} میل می‌دهیم، که توسیع سادکی از f روی I_k^1 است. توجه کنید \hat{f} پیوسته است. عدم مجاورت $\hat{\mathbb{E}}$ و $\hat{\mathbb{W}}$ نتیجه می‌دهد نگاشت f هر مثلث با رئوس دو به دو مجاور متقابل را با e^1 یا e^{-1} و نه هر دو آن‌ها انتقال می‌دهد. پس f سه رأس را به وسیله دو بردار که تنها در یک-چهارم \mathbb{R}^2 قرار دارند، بدون اینکه صفر در پوشش محدب باشد، منتقل می‌کند. طبق لم، \hat{f} تابعی پیوسته در I_k^1 است و نقطه ثابت ندارد؛ که با قضیه نقطه ثابت براور در تناقض است. بنابراین قضیه براور، قضیه هگز را نتیجه می‌دهد [۵، ۶].

مراجع

- [۱] شاشکین، یوری، اصغری، امیرحسین و نبیعی، مونا، نقطه ثابت، انتشارات فاطمی، تهران، ۱۳۸۸.
- [2] A. WRIGHT, SPERNER'S LEMMA AND BROUWER'S FIXED POINT THEOREM, July 2005.
- [3] A. Frome, K. Talwar, Ch. Papadimitriou, CS294-1 Algorithmic Aspects of Game Theory Spring 2001.
- [4] J. A. Bondy and U. S. R. Murty, GRAPH THEORY WITH APPLICATIONS, Department of Combinatorics and Optimization, University of Waterloo, 1976, pp.21-23.
- [5] D. GALE, THE GAME OF HEX AND BROUWER'S FIXED-POINT THEOREM, University of California.
- [6] M. Gymrek J. Li, Supervisor: E.Demaine, SP.268 - The Mathematics of Toys and Games, Spring 2011.



معرفی یک نوع ماتریس خاص و تعیین مقادیر ویژه و بردارهای ویژه متناظر با آن

فاطمه الزهرا حیدری*
دکتری آموزش ریاضی

خلیل پاریاب
دانشگاه علم و صنعت

چکیده

متخصصین محاسبات عددی همواره در پی یافتن تئوری‌های ریاضی و الگوریتم‌های پیشرفته‌ای در جهت محاسبه مقادیر ویژه و بردارهای ویژه ماتریس‌های بزرگ می‌باشند و همواره دو هدف زیر را دنبال می‌کنند: ۱- کمترین خطای ممکن در حین محاسبات. ۲- کمترین زمان ممکن برای محاسبه. در این مقاله یک ماتریس خاص معرفی می‌شود که مقادیر ویژه و بردارهای ویژه این نوع ماتریس را با استفاده از مقادیر ویژه و بردارهای ویژه زیرماتریس‌هایش پیدا کنیم تا بتوان حل یک مسئله بزرگ‌تر را به حل چند مسئله کوچک‌تر و ساده‌تر تبدیل کرد.

واژه‌های کلیدی: مقادیر ویژه، بردار ویژه، زیرماتریس

مقدمه

بسیاری از ویژگی‌های مهم یک ماتریس و یک گراف در بردارهای ویژه آن مستتر می‌باشد. بنابراین مسئله مقادیر ویژه و بردارهای ویژه متناظر آن‌ها در تئوری گراف و همچنین در تحلیل سیستم‌های مهندسی حائز اهمیت است. این اهمیت موقعی نمود پیدا می‌کند که گراف یا سیستم مهندسی مورد بررسی ما دارای ابعاد بزرگ باشد [۲]. حال به معرفی این نوع ماتریس خاص و تعیین مقادیر ویژه و بردارهای ویژه آن از طریق زیرماتریس‌های آن می‌پردازیم.

تعریف ۱.۰. فرض کنید A یک ماتریس مربعی حقیقی از بعد $n \times n$ باشد. در این صورت عدد حقیقی λ را یک مقدار ویژه^۱ ماتریس A گویند اگر یک بردار غیر صفر X با n مولفه حقیقی وجود داشته باشد بطوری که $AX = \lambda X$. بردار n مولفه با خاصیت فوق را یک بردار ویژه^۲ ماتریس A متناظر به λ گویند [۶].

معرفی ماتریس

ماتریس‌هایی به صورت زیر را در نظر بگیرید:

$$M = \begin{bmatrix} [A] & [B] \\ [B] & [A] \end{bmatrix}_{N \times N} \quad N = 2n$$

* سخنران

^۱Eigenvalue
^۲Eigenvector



در این صورت مقادیر ویژه آن به صورت زیر بدست می‌آید [۴]:

$$\{\lambda_M\} = \{\lambda_C\} \cup \{\lambda_D\}$$

که در آن

$$[C] = [A] + [B] \quad , \quad [D] = [A] - [B]$$

که به C و D ماتریس‌های فشرده^۳ ماتریس M می‌گویند.

برای بدست آوردن بردارهای ویژه چون تعداد ستون‌ها و سطرها M زوج می‌باشد، بنابراین تعداد مولفه‌های هر یک از بردارهای ویژه M نیز زوج خواهد بود. پس بردارهای ویژه M به دو دسته تقسیم می‌شوند که دو دسته مولفه‌های نیمه اول در نیمه دوم تکرار می‌شوند و در دسته دوم، مولفه‌های نیمه اول با علامت مخالف در نیمه دوم تکرار می‌شوند [۱]. به این معنی که هرگاه M برای مثال، یک ماتریس 6×6 باشد مولفه‌های بردارهای ویژه دسته اول به صورت

$$\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ a \\ b \\ c \end{bmatrix}$$

و مولفه‌های بردارهای ویژه دسته دوم به صورت

$$\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ -a \\ -b \\ -c \end{bmatrix}$$

می‌باشند.

ارتباط بین بردارهای ویژه ماتریس خاص و بردارهای ویژه زیرماتریس‌های آن:

۱. مولفه‌های بردارهای ویژه زیرماتریس C با مولفه‌های بردارهای ویژه‌ای که از دسته اول هستند متناسب است.

۲. مولفه‌های بردارهای ویژه زیرماتریس D با مولفه‌های بردارهای ویژه‌ای که از دسته دوم هستند متناسب است.

مثال ۲.۰. ماتریس M را در نظر بگیرید:

$$M = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 & 1 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 6 & 1 & -4 & 2 \\ 0 & 2 & 7 & -1 & 4 & 2 \\ 1 & 3 & 0 & 1 & -2 & 4 \\ 1 & -4 & 2 & 2 & 3 & 6 \\ -1 & 4 & 2 & 0 & 2 & 7 \end{bmatrix}$$

^۳Condensed Matrix



که در آن

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 2 & 3 & 6 \\ 0 & 2 & 7 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 1 & -4 & -3 \\ -1 & 4 & 2 \end{bmatrix}.$$

در نتیجه داریم:

$$C = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 2 & -1 & 3 \\ -1 & 6 & 9 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 0 & -5 & 4 \\ 1 & 7 & 9 \\ 1 & -2 & 5 \end{bmatrix}.$$

بردارهای ویژه ماتریس‌های C و D به صورت زیر می‌باشند که V_1, V_2, V_3 مربوط به C و V_4, V_5, V_6 مربوط به D هستند.

$$V_1 = \begin{bmatrix} 0.2317 \\ 0.8631 \\ -0.4488 \end{bmatrix}, \quad V_2 = \begin{bmatrix} 0.8722 \\ 0.4326 \\ -0.2283 \end{bmatrix}$$

$$V_3 = \begin{bmatrix} 0.4320 \\ 0.2955 \\ 0.8521 \end{bmatrix}, \quad V_4 = \begin{bmatrix} 0.3872 \\ 0.0484 \\ -0.1519 \end{bmatrix}$$

$$V_5 = \begin{bmatrix} -0.277 + 0.4394i \\ 0.7707 \\ -0.5179 + 0.3682i \end{bmatrix}$$

$$V_6 = \begin{bmatrix} -0.277 - 0.4394i \\ 0.7707 \\ 0.5179 - 0.3682i \end{bmatrix}$$

پس با توجه به ارتباط‌های ذکر شده، بردارهای ویژه M به شرح ذیل خواهد بود:

$$V_{1M} = \begin{bmatrix} 0.2317 \\ 0.8631 \\ -0.4488 \\ 0.2317 \\ 0.8631 \\ -0.4488 \end{bmatrix}, \quad V_{2M} = \begin{bmatrix} 0.8722 \\ 0.4326 \\ -0.2283 \\ 0.8722 \\ 0.4326 \\ -0.2283 \end{bmatrix}, \quad V_{3M} = \begin{bmatrix} 0.4320 \\ 0.2955 \\ 0.8521 \\ 0.4320 \\ 0.2955 \\ 0.8521 \end{bmatrix}, \quad V_{4M} = \begin{bmatrix} 0.3872 \\ 0.0484 \\ -0.1519 \\ 0.3872 \\ 0.0484 \\ -0.1519 \end{bmatrix}$$

$$V_{5M} = \begin{bmatrix} -0.2777 + 0.4394i \\ 0.7707 \\ -0.5179 + 0.3682i \\ 0.2777 - 0.4394i \\ -0.7707 \\ 0.5179 - 0.3682i \end{bmatrix}, \quad V_{6M} = \begin{bmatrix} -0.277 - 0.4394i \\ 0.7707 \\ -0.5179 - 0.3682i \\ 0.2777 + 0.4394i \\ -0.7707 \\ 0.5179 + 0.3682i \end{bmatrix}$$

دو خاصیت مهم این نوع ماتریس خاص:

۱. در حالت کلی ضرب دو ماتریس خاصیت جابجایی ندارند اما اگر هر دو ماتریس به شکل این نوع ماتریس خاص باشند، خاصیت جابجایی ضرب را دارند [۳].



۲. فرض کنید مجموعه U ، مجموعه کلید ماتریس‌های به فرم خاص باشند، آنگاه خواص زیر را داریم:
 الف) U نسبت به عمل جمع بسته می‌باشد.
 ب) $(U, +)$ تشکیل یک گروه جابجایی می‌دهد.

جمع‌بندی و نتیجه‌گیری

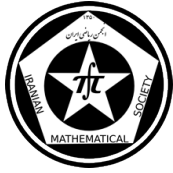
هدف اصلی این مقاله، معرفی یک نوع ماتریس خاص و تبدیل آن به زیرماتریس‌هایی است که بتوان با استفاده از آن‌ها، مقادیر ویژه و بردارهای ویژه ماتریس خاص را پیدا کرد. همچنین دو خاصیت مهم این نوع ماتریس را ذکر کردیم. کاربرد روش مذکور می‌تواند در تحلیل سیستم‌های مهندسی حائز اهمیت باشد.

مراجع

- [۱] خ. پاریاب، گسترش و کاربرد نظریه گراف‌ها برای تعیین مقادیر و بردارهای ویژه در سیستم سازه‌ای، پایان‌نامه، ۱۳۸۳.
- [۲] م. سیاری نژاد، استفاده از زیرماتریس‌های یک ماتریس برای محاسبه مقادیر ویژه و دترمینان ماتریس بزرگ در حالت‌های خاص و کاربرد آن در تئوری گراف‌ها، پایان‌نامه، دانشگاه خواجه نصیرالدین طوسی، ۱۳۷۹.
- [۳] ز. حیدری، گسترش و کاربرد نظریه گراف‌ها برای تعیین مقادیر و بردارهای ویژه ماتریس‌ها، پایان‌نامه، دانشگاه علم و صنعت، ۱۳۸۷.
- [۴] A. Kaveh and M. A. Sayarinejad, *EigenSolution of Special Compound Matrices and application*, Asian Journal of Civil Engineering, ۲۰۰۵.
- [۵] A. Kaveh and Kh. Paryab, *Graph Symmetry, Canonical forms and Eigenproblems in Structural Mechanics*, ۲۰۰۴.
- [۶] Jonathan Gross, Jey Yellen, *Graph Theory and it's application*, CRC Press, ۱۹۹۹.

پست الکترونیکی: Zahra.heidari@gmail.com
 پست الکترونیکی: Paryab@iust.ac.ir

علوم کامپیوتر



بررسی روش‌های انتخاب ویژگی و دسته‌بندی موضوعی متن با استفاده از دادگان خبری پارسی

سهیلا مسعودیان*	ولی درهمی	سجاد ظریف زاده
دانشگاه یزد	دانشگاه یزد	دانشگاه یزد

چکیده

امروزه حجم عظیمی از اسناد متنی در شبکه جهان گستر، موجود می‌باشد. به منظور بازیابی مؤثر و سریع این متون به مکانیزمی برای دسته‌بندی و سازماندهی آن‌ها نیاز است. مسلماً به دلیل حجم بسیار بالای اسناد، انجام دستی این مهم غیرممکن بوده و باید به صورت خودکار انجام گیرد. در مقاله حاضر، به مقایسه و ارزیابی چهار روش دسته‌بندی و بررسی روش‌های مناسب انتخاب ویژگی^۱ برای طبقه‌بندی موضوعی متن^۲ پرداخته شده است. آزمایش‌ها بر دادگان پیکره همشهری انجام پذیرفت. نتایج به دست آمده نشان می‌دهد که موثرترین روش‌های انتخاب ویژگی با هدف دسته‌بندی موضوعی متن، به ترتیب تست کای دو^۳ و بهره اطلاعات^۴ بوده و کلاس‌بند ماشین بردار پشتیبان از میان روش‌های طبقه‌بندی موضوعی متن، بهترین کارایی را دارا می‌باشد.

واژه‌های کلیدی: متن کاوی، دسته‌بندی موضوعی، انتخاب ویژگی

Mathematics Subject Classification [2010]: 13D45, 39B42

۱ مقدمه

با توجه به گسترش روزافزون شبکه جهانی وب و افزایش مداوم حجم دادگان متنی برخط، توسعه روش‌های دسته‌بندی خودکار متون از اهمیت بالایی برخوردار است. دسته‌بندی موضوعی متون، عبارت است از تخصیص خودکار دسته‌های از پیش تعیین شده به متون زبان طبیعی [۱]. سازماندهی و بازیابی اسناد، پالایش اخبار^۵، نظرکاوی^۶، پالایش هرزنامه‌ها^۷ [۲]، طبقه‌بندی سلسله‌مراتبی صفحات وب [۱] از کاربردهای طبقه‌بندی متن در بازیابی اطلاعات و متن‌کاوی بوده، و نشان‌دهنده اهمیت موضوع است.

مسئله دسته‌بندی متن از دهه ۶۰ میلادی مطرح شد؛ و به لطف پیشرفت‌های نرم‌افزاری و سخت‌افزاری از دهه ۹۰ به یک مبحث جدی بدل شد [۱]. طی این سال‌ها، الگوریتم‌های دسته‌بندی بسیاری از جمله درخت تصمیم، کلاس‌بندهای بیزین، کلاس‌بندهای نزدیک‌ترین همسایه، ماشین بردار پشتیبان، شبکه‌های عصبی و غیره در زمینه طبقه‌بندی متن ارائه شده است [۲]. این روش‌ها به طور کلی برای داده‌های سایر حوزه‌ها مانند داده‌های کمی و رسته‌ای^۸ کاربرد دارند. با مدل کردن متون با

* سخنران

^۱ Feature selection

^۲ Text categorization

^۳ Chi square test

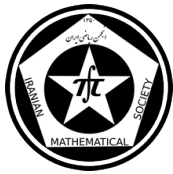
^۴ Information gain

^۵ News filtering

^۶ Opinion mining

^۷ Spam filtering

^۸ Quantitative and categorical data



استفاده از فراوانی کلمات، می‌توان مستقیماً از اکثر این روش‌ها برای متن نیز استفاده نمود. حال آن‌که، کارایی دسته‌بندی‌های متن وابسته به نمایش مناسب داده‌ها می‌باشد؛ اگر ویژگی‌ها^۹ به درستی انتخاب شوند، حتی کلاس‌بندی‌های ساده هم می‌توانند نتایج خوبی تولید کنند [۳]. از خصیصه‌های مهم مسائل دسته‌بندی متن، ابعاد بالای^{۱۰} فضای ویژگی^{۱۱} (عبارات و کلمات منحصر به فرد) می‌باشد. در نتیجه استفاده از روش‌های انتخاب ویژگی به هدف کاهش ابعاد در مسائل دسته‌بندی متون، امری مهم به حساب می‌آید [۴].

در این مقاله چهار روش دسته‌بندی و سه روش انتخاب ویژگی بر دادگان متنی زبان فارسی ارزیابی و مقایسه شدند؛ و کارایی هر یک از این روش‌ها به کمک معیار F-Measure مورد ارزیابی قرار گرفته شده است.

انتخاب ویژگی شامل حذف کلمات فاقد بار اطلاعاتی بر اساس آمارهای پیکره و دستیابی به زیرمجموعه‌ای از ویژگی‌ها می‌باشد. انتخاب ویژگی ابزاری قدرتمند برای ساده‌سازی و سرعت بخشیدن به محاسبات الگوریتم‌های دسته‌بندی است [۵]. در مقاله حاضر سه روش انتخاب ویژگی مورد بررسی قرار گرفته که شامل روش کای دو، بهره اطلاعات و نسبت بهره^{۱۲} می‌باشد:

کای دو: میزان استقلال رخداد یک عبارت خاص و رخداد یک کلاس خاص را می‌سنجد؛ و ویژگی‌هایی را که وابستگی بیشتری دارند برای دسته‌بندی انتخاب می‌کند.

بهره اطلاعات: با اندازه‌گیری میزان اطلاعاتی که حضور یا عدم حضور یک عبارت برای پیش‌بینی صحیح دسته‌بندی در اختیار ما قرار می‌دهد، ویژگی‌های مناسب را انتخاب می‌نماید.

نسبت بهره: این روش برگرفته شده از الگوریتم بهره اطلاعات است که در آن امتیازهای بهره اطلاعات را نرمال‌سازی می‌نماید. به منظور ارزیابی روش‌های دسته‌بندی نیز، چهار کلاس‌بند درخت تصمیم C_{4,5} [۶]، نایو بیس^{۱۳} [۷]، نایو بیس چندجمله‌ای^{۱۴} [۸] و ماشین بردار پشتیبان^{۱۵} (SVM) [۹] پیاده‌سازی شده و با دادگان به دست آمده از الگوریتم‌های انتخاب ویژگی آموزش دیدند.

۲ نتایج اصلی

پیاده‌سازی

آماده‌سازی دادگان و پیش‌پردازش: برای آماده‌سازی دادگان ۱۶۰۰۰ سند خبری به عنوان داده آموزش و ۱۶۰۰ سند به عنوان داده آزمون از ۸ دسته اصلی پیکره همشهری [۱۰] با توزیع مساوی و به صورت تصادفی انتخاب شدند. دسته‌ها شامل ادب و هنر، اجتماعی، علمی-فرهنگی، سیاسی، حوادث، اقتصادی، ورزشی و اخبار جهان می‌باشند. در مرحله پیش‌پردازش، تگ‌های xml حذف گردیده، نرمال‌سازی کاراکتری و ریشه‌یابی^{۱۶} صورت گرفت؛ و افعال و کلمات توقفی^{۱۷} (عباراتی با فراوانی بالا، که محتوای خاصی ندارند) حذف شدند. در گام بعدی، کلمات نادر (کلماتی که کمتر از سه بار در کل دادگان آموزشی تکرار شده‌اند) حذف گردید. این حذف باعث کاهش ۶۷ درصدی تعداد کلمات یکنای مجموعه آموزش و در نتیجه بالا رفتن سرعت محاسبات در مرحله انتخاب ویژگی شد. لازم به ذکر است که بررسی‌های انجام شده نشان داد که با حذف کلمات نادر هیچ

^۹Features

^{۱۰}High dimensional

^{۱۱}Feature space

^{۱۲}Gain ratio

^{۱۳}Traditional naïve Bayes

^{۱۴}Multinomial naïve Bayes

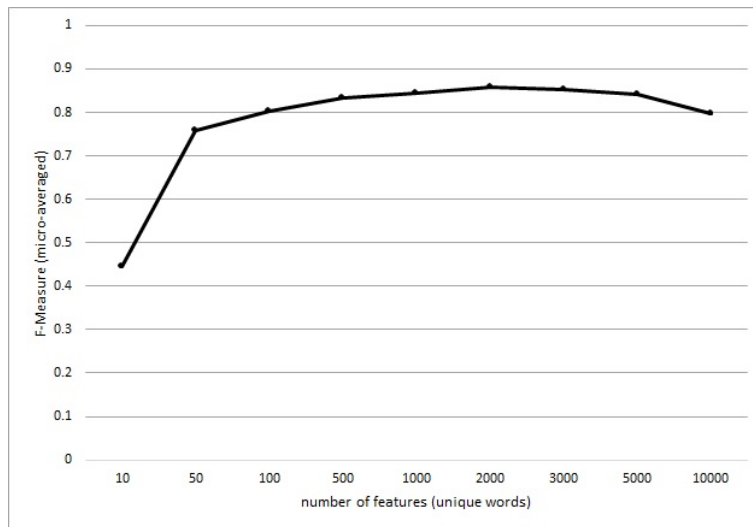
^{۱۵}Support vector machine

^{۱۶}Stemming

^{۱۷}Stopwords



تغییری در کلمات انتخاب شده توسط الگوریتم‌های انتخاب ویژگی ایجاد نشد. انتخاب ویژگی: ابتدا بررسی شد که چه تعداد ویژگی برای دسته‌بندی متن بهتر است. بدین منظور، با به کارگیری الگوریتم بهره اطلاعات و تغییر تعداد از ۱۰ تا ۱۰۰۰۰، ویژگی‌ها بدست آمدند و سپس با استفاده از این ویژگی‌ها، الگوریتم SVM آموزش داده شد. نمودار ۱ نتایج این آزمایش را نشان می‌دهد. همان طور که مشاهده می‌شود معیار F-Measure در ۲۰۰۰ به قله خودش می‌رسد؛ از این روی، آزمایشات بعدی با تعداد ۲۰۰۰ ویژگی انجام گرفتند.



شکل ۱: میانگین F-measure با تغییر تعداد ویژگی‌های بدست آمده از روش بهره اطلاعات

دسته‌بندی موضوعی: در گام بعد، پس از اعمال روش‌های انتخاب ویژگی، هر یک از کلاس‌بندها با ویژگی‌های به دست آمده آموزش دیده و تست شدند؛ همچنین عملکرد این الگوریتم‌ها با داده‌های اولیه (بدون اعمال انتخاب ویژگی) نیز مورد بررسی قرار گرفت. نتایج این آزمایش در جدول ۱ آمده است.

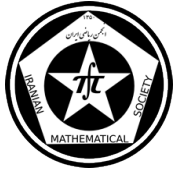
جدول ۱: نتایج معیار F-measure از کلاسبندها با ویژگی‌های متفاوت

دخت تصمیم C4,5	SVM	نایو بیز چندجمله‌ای	نایو بیز ساده	
۰/۷۵۹	۰/۸۵۳	۰/۸۴۴	۰/۷۲۳	بهره اطلاعات
۰/۷۶۷	۰/۸۵۴	۰/۸۴۵	۰/۷۲۷	کای دو
۰/۶۵۴	۰/۷۷	۰/۶۶۵	۰/۶۵۱	نسبت بهره
۰/۷۷	۰/۶۶۳	۰/۸۵۵	۰/۷۰۷	بدون انتخاب ویژگی

جدول فوق نشان می‌دهد که الگوریتم‌های انتخاب ویژگی کای دو و بهره اطلاعات با شباهت زیاد، بهترین عملکرد را داشته‌اند. این شباهت ناشی از هم‌بستگی قوی بین این دو روش می‌باشد [۴]. بررسی انجام گرفته در این تحقیق نیز نشان داد که این دو روش به میزان ۹۰ درصد ویژگی‌های یکسانی انتخاب نموده‌اند. در مورد کلاس‌بندها نیز روش SVM در اکثر مواقع بهترین عملکرد را داشته است. جالب این که روش نایو بیز با به کارگیری تمام ویژگی‌ها بهتر عمل کرده است.

جمع‌بندی و نتیجه‌گیری

در این مقاله به ارزیابی تعدادی از روش‌های انتخاب ویژگی و دسته‌بندی موضوعی متن بر دادگان زبان فارسی پرداخته شد. طی آزمایش‌های انجام گرفته نتایج ذیل به دست آمدند:



- حذف کلمات نادر با کاهش بیش از نیمی از حجم فضای ویژگی، باعث افزایش سرعت الگوریتم‌های انتخاب ویژگی شده و نیز تغییری در ویژگی‌های انتخاب شده ایجاد نمی‌کند.
- انتخاب تعداد ۲۰۰۰ ویژگی برای دسته‌بندی موضوعی متن مناسب است.
- انتخاب یک روش انتخاب ویژگی مناسب باعث بهبود در عملکرد دسته‌بندها می‌شود.
- به ترتیب روش انتخاب ویژگی کای دو و بهره‌ اطلاعات با اندکی تفاوت بهترین عملکرد را از خود نشان داده‌اند.
- از میان کلاس‌بندها روش SVM (با وجود یک روش انتخاب ویژگی) و روش نایویز چندجمله‌ای (بدون انتخاب ویژگی) بهترین عملکرد را داشته‌اند.

مراجع

- [1] F. Sebastiani, *Machine learning in automated text categorization*, ACM computing surveys, vol. 34, pp. 1-47, 2002.
- [2] C. C. Aggarwal, C. Zhai, *A Survey of Text Classification Algorithms*, in Mining Text Data, Springer, 2012, pp. 163-222.
- [3] A. Rahman, H. A. Babri, M. Saeed, *Feature Extraction Algorithms for Classification of Text Documents*, in Proc. International Conference on Computer and Information Technology, 2012, pp. 231-236.
- [4] Y. Yang, J. O. Pedersen, *A comparative study on feature selection in text categorization* in Proc. ICML, 1997, vol. 97, pp. 412-420.
- [5] A. Dasgupta, P. Drineas, B. Harb, V. Josifovski, M. W. Mahoney, *Feature selection methods for text classification*, in Proc. 13th ACM SIGKDD international conference on Knowledge discovery and data mining, 2007, pp. 230-239.
- [6] J. R. Quinlan, *C4. 5: programs for machine learning*, Morgan Kaufmann Publishers, 1993.
- [7] G. H. John, P. Langley, *Estimating continuous distributions in Bayesian classifiers*, in Proc. 11th conference on Uncertainty in artificial intelligence, 1995, pp. 338-345.
- [8] A. McCallum, K. Nigam, *A comparison of event models for naive bayes text classification*, in Learning for Text Categorization: Papers from the 1998 AAAI Workshop, pp. 41-48.
- [9] T. Joachims, *Text categorization with support vector machines: Learning with many relevant features*, in Machine Learning: ECML-98, Springer, 1998, pp. 137-142.
- [10] A. AleAhmad, H. Amiri, E. Darrudi, M. Rahgozar, F. Oroumchian, *Hamshahri: A standard Persian text collection*, Journal of Knowledge-Based Systems, vol. 22, p.382-387, 2009.

پست الکترونیکی: s.masoudian@stu.yazd.ac.ir
پست الکترونیکی: vderhami@yazd.ac.ir



بررسی صحت پروتکل کلید عمومی نیدهام-شرودر با استفاده از جبر پردازه ACP

هادی فراهانی

محمد رضا صدیقین

دانشگاه شهید بهشتی، گروه علوم کامپیوتر

دانشگاه شهید بهشتی، گروه علوم کامپیوتر

سید محمود موسوی

دانشگاه شهید بهشتی، گروه علوم کامپیوتر

چکیده

جبرهای پردازه به عنوان یکی از روش‌های صوری، ابزاری جهت مدل‌سازی و توصیف فرآیندهای همروند است. در این مقاله پروتکل کلید عمومی نیدهام-شرودر که پروتکلی بر پایه‌ی رمزنگاری با هدف احراز اصالت دوطرفه است، توسط جبر پردازه ACP تحلیل و صحت اجرای آن بررسی خواهد شد.

واژه‌های کلیدی: جبر پردازه، پروتکل کلید عمومی نیدهام-شرودر

۱ مقدمه

موضوع جبرهای پردازه، در دهه هفتاد قرن بیستم میلادی مطرح شد. اصطلاح "جبر پردازه"^۱ در سال ۱۹۸۲ توسط برگسترا^۲ و کلاپ^۳ [۲] به معنای جبر جهانی با ساختار ویژه‌ای از اصول موضوعه ابداع شد. امروزه از آن در معنی عام‌تر، در روش‌های جبری، برای توصیف و مطالعه فرآیندهای همروند^۴ استفاده می‌شود. پردازه‌ها، عناصر جبر پردازه هستند و با استفاده از اصول موضوعه می‌توانیم بر روی پردازه‌ها محاسبات انجام دهیم. (برای مطالعه بیشتر به [۱] مراجعه گردد.) در تحلیل صوری پروتکل‌ها معمولاً از روش‌های منطقی و جبری استفاده می‌شود. می‌توان به منطق BAN از روش‌های منطقی، ACP و CSP^۵ به عنوان روش‌هایی جبری و همچنین فضاها^۶ استرند^۵ اشاره نمود. در این مقاله مروری بر پروتکل کلید عمومی نیدهام-شرودر^۶ می‌شود و سپس مدل‌سازی این پروتکل توسط جبر پردازه ACP^۷ صورت می‌گیرد.

^۱Process Algebra

^۲Jan Bergstra

^۳Jan willem klop

^۴Concurrent

^۵Strand Space

^۶Needham-Schroeder

^۷Algebra of Communicating Processes



۲ مدل سازی پروتکل کلید عمومی نیدهام شرودر

نیدهام و شرودر [۳] در سال ۱۹۷۸ پروتکل احراز اصالت زیر را ارائه کردند:

$$A \longrightarrow B : \{N_a, A\}_{Pk}(B)$$

$$B \longrightarrow A : \{N_a, N_b\}_{Pk}(A)$$

$$A \longrightarrow B : \{N_b\}_{Pk}(B)$$

ابتدا عامل A نانس خود را به همراه نام خود برای عامل B می فرستد و با این کار به B می فهماند که می خواهد با او ارتباط برقرار کند. این اطلاعات را با کلید عمومی B رمز می کند. سپس در مرحله دوم B پیام را رمزگشایی کرده و نانس عامل A را دریافت می کند. عامل B نانس خود را به نانس عامل A الحاق کرده و با کلید عمومی A رمز می کند. به این ترتیب در مرحله دوم وقتی A نانس N_a را می بیند، هویت B برایش محرز می شود و با این پیام عامل B به عامل A می فهماند که متوجه شده است که A آن طرف خط است. به همین ترتیب در مرحله سوم هویت A برای B محرز می شود، زیرا عامل B نزد خود می گوید، تنها کسی که نانس او را داشته است، عامل A بوده است. رفتار خارجی پروتکل در ACP به صورت زیر است:

$$X = \left(\sum_{d, d' \in \Delta} r_A(d) \cdot s_B(d') \right) \cdot X$$

که در آن Δ یک گردایه از داده های ورودی است و عمل $r_A(d)$ و $s_B(d')$ به ترتیب نمایش دهنده خواندن داده d از کانال A و فرستادن داده d' روی کانال B می باشد.

۳ تحلیل پروتکل کلید عمومی نیدهام شرودر

مدل سازی مراحل عامل A

مدل سازی مراحل عامل B

$$A = \sum_{d \in \Delta} r_A(d) \cdot A_1$$

$$A_1 = R[N_a] \cdot A_2$$

$$A_2 = Enc_{Pk(B)}(N_a, A; e) \cdot A_3$$

$$A_3 = s_C(e) \cdot A_4$$

$$A_4 = r_D(e') \cdot A_5$$

$$A_5 = Dec_{Pr(A)}(e'; N_a, N_b) \cdot A_6$$

$$A_6 = Enc_{Pk(B)}(N_b; e'') \cdot A_7$$

$$A_7 = s_c(e'') \cdot A$$

$$B = r_C(e) \cdot B_1$$

$$B_1 = Dec_{Pr(B)}(e; N_a, A) \cdot B_2$$

$$B_2 = R[N_b] \cdot B_3$$

$$B_3 = Enc_{Pk(A)}(N_a, N_b; e') \cdot B_4$$

$$B_4 = s_D(e') \cdot B_5$$

$$B_5 = r_C(e'') \cdot B_6$$

$$B_6 = Dec_{Pr(B)}(e''; N_b) \cdot B_7$$

$$B_7 = \sum_{d' \in \Delta} s_B(d') \cdot B$$



$R[N_a]$ نانس A را تولید می‌کند. در مرحله A_2 ، عامل A نانس و اسم A را با کلید عمومی B رمز می‌کند. برای سهولت در نظر می‌گیریم که این متن رمز شده را درون e قرار می‌دهد. به همین ترتیب در A_5 متن رمز شده e' را رمزگشایی می‌کند و N_b و N_a را بدست می‌آورد. در مورد مدل‌سازی مراحل عامل B نیز از همین علامت گذاری استفاده شده است. ارتباطات^۸ این پروتکل به صورت زیر است:

$$\gamma(s_C(x), r_C(x)) = C_C(x)$$

$$\gamma(s_D(x), r_D(x)) = C_D(x)$$

H مجموعه متغیرهایی است که تنها در ارتباط ظاهر می‌شوند و اگر به تنهایی ظاهر شوند منجر به بن‌بست^۹ می‌شوند:

$$H = \{s_C(x), r_C(x), s_D(x), r_D(x)\}$$

در ادامه بررسی خواهیم نمود که پروتکل کلید عمومی نیدهام-شرودر رفتار خارجی مورد نظر را برآورده می‌سازد. می‌توان بررسی نمود:

$$\partial_H(A||B) = \sum_{d \in \Delta} r_A(d) \cdot \partial_H(A_1||B) = \sum_{d' \in \Delta} s_B(d') \cdot \partial_H(A||B)$$

فرض کنید:

$$\partial_H(A||B) = \langle X_1 | E \rangle$$

که E یک GLRS^{۱۰} به صورت زیر است:

$$E = \begin{cases} X_1 = \sum_{d \in \Delta} r_A(d) \cdot X_2 \\ X_2 = R[N_a] \cdot X_3 \\ \vdots \\ X_{13} = \sum_{d \in \Delta} s_A(d) \sum_{d' \in \Delta} s_B(d') \cdot X_1 \end{cases}$$

I مجموعه متغیرهایی است که به ایجاد بن‌بست ارتباطی ندارند.

$$I = \{C_C(x), C_D(x), Enc(x), Dec(x), R\}$$

^۸Communications

^۹Deadlock

^{۱۰}Gaurded Linear Recursive Specification



حال عملگر مجردسازی τ_I ^{۱۱} را روی $\langle X_1 \| E \rangle$ اعمال می‌نماییم.

$$\begin{aligned} \tau_I(\langle X_1 | E \rangle) &= \sum_{d \in \Delta} r_A(d) \cdot \tau_I(\langle X_2 | E \rangle) \\ &= \sum_{d \in \Delta} r_A(d) \cdot \tau_I(\langle X_3 | E \rangle) \\ &\vdots \\ &= \sum_{d \in \Delta} r_A(d) \cdot \tau_I(\langle X_{12} | E \rangle) \\ &= \sum_{d \in \Delta} r_A(d) \cdot \tau_I(\langle X_{13} | E \rangle) \\ &= \sum_{d \in \Delta} r_A(d) \sum_{d' \in \Delta} s_B(d') \cdot \tau_I(\langle X_1 | E \rangle) \end{aligned}$$

$$\tau_I(\langle X_1 | E \rangle) = \sum_{d \in \Delta} r_A(d) \sum_{d' \in \Delta} s_B(d') \cdot \tau_I(\langle X_1 | E \rangle) \quad \text{داریم}$$

$$\tau_I(\partial_H(A \| B)) = \sum_{d \in \Delta} r_A(d) \sum_{d' \in \Delta} s_B(d') \cdot \tau_I(\partial_H(A \| B)) \quad \text{یعنی}$$

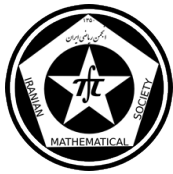
□ بنابراین پروتکل کلید عمومی نیدهام-شرودر رفتار خارجی ادعا شده را نمایش می‌دهد.

مراجع

- [1] W. Fokkink, *Introduction to Process Algebra*, Theoretical Computer Science, 168 (2000).
- [2] J. Baeten, *A brief history of process algebra*, Theoretical Computer Science 335 (2005), pp. 131–146.
- [3] R. Needham, M. Schroeder, *Using encryption for authentication in large networks of computers*, Communications of the ACM 21 (1978), pp. 993–999.
- [4] Y. Wang, *An Axiomatization for Quantum Processes to Unifying Quantum and Classical Computing*, arXiv:1311.2960 [cs.LO] (2013).

پست الکترونیکی: h_farahani@sbu.ac.ir
پست الکترونیکی: mr.sedighin@gmail.com
پست الکترونیکی: smahmoudm90@gmail.com

^{۱۱} Abstraction



بکارگیری رقابت استعماری در بهینه‌سازی پرس‌وجو در پایگاه داده‌های رابطه‌ای

علی محمد اسمعیلی زینی

دانشگاه علم و هنر

فاطمه سعادت جو

دانشگاه علم و هنر

محمد رضا شیخ صادقی*

دانشگاه علم و هنر

چکیده

موضوع بهینه‌سازی پرس‌وجو یک فرایند حساس به هزینه است و با توجه به تعداد جداول مرتبط در پرس‌وجو، تعداد جایگشت‌های جداول در پیوند به صورت نمایی رشد می‌کند که هزینه اجرای آن‌ها باهم متفاوت است. کار بهینه‌سازی پرس‌وجو انتخاب بهترین جایگشت با کمترین زمان اجرا است. بر این اساس، الگوریتم‌های مختلف تاکنون برای حل این مشکل ارائه شده است. در این مقاله به دنبال طراحی یک بهینه‌ساز پرس‌وجو هستیم و برای کاهش زمان اجرای یک پرس‌وجو از الگوریتم رقابت استعماری استفاده شده است. با استفاده از این الگوریتم زمان یافتن بهینه‌ترین طرح اجرایی از نظر زمان در پرس‌وجو پایگاه داده رابطه‌ای نسبت به الگوریتم‌های PSO و ژنتیک در پایگاه داده رابطه‌ای کاهش یافته است.

واژه‌های کلیدی: بهینه‌ساز پرس‌وجو، طرح اجرایی، رقابت استعماری، پایگاه داده رابطه‌ای

Mathematics Subject Classification [2010]: 13D45, 39B42

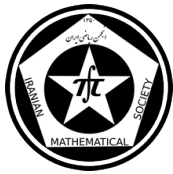
۱ مقدمه

هدف اولیه بهینه‌ساز پرس‌وجوهای رابطه‌ای کاهش هزینه‌های عملگر پیوند است. در هر پرس‌وجو از چندین رابطه استفاده می‌شود که در نهایت پس از اجرا جواب پرس‌وجو در یک رابطه قرار می‌گیرد. بهینه‌سازی پرس‌وجو فعالیتی است که در آن از یک استراتژی کارآمد برای انجام پرس‌وجو استفاده می‌شود [۱، ۳، ۴، ۶، ۸].

الگوریتم‌های قطعی، الگوریتم‌هایی هستند که کل فضای حالت را جستجو می‌کنند. اگر بخواهیم این فضا کاهش یابد لازم است از الگوریتم‌های مکاشفه‌ای^۱ استفاده شود [۸]. مهم‌ترین ایراد الگوریتم‌های قطعی این بود که با افزایش تعداد روابط، فضای حالت جستجو به صورت نمایی رشد کرده و از نظر مصرف حافظه و پردازنده به مشکل برمی‌خورد. با توجه به طبیعت الگوریتم‌های تکاملی و اینکه در اکثر مواقع مقاوم و کارا تر می‌باشند و با در نظر گرفتن کارهای صورت گرفته در این زمینه، مناسب‌ترین گزینه برای حل مسئله بهینه‌سازی پرس‌وجو، استفاده از الگوریتم‌های تکاملی می‌باشد. در [۴] مسئله بهینه‌سازی ترتیب پیوندها با استفاده از الگوریتم ژنتیک حل شده است. از ویژگی‌های دیگر این الگوریتم، قابلیت بکارگیری آن در معماری موازی می‌باشد. استفاده از الگوریتم تعمیم‌یافته بهینه‌سازی گسسته ذرات با رویکرد مقایسه چهار معیار زمان اجرای الگوریتم، زمان اجرای طرح، خطا و انحراف معیار در [۳] بیان شده است که نتایج بهتری نسبت به الگوریتم بکار رفته در [۴] دارد. در [۱] یک الگوریتم ترکیبی برای حل مسئله ترتیب عملگرهای پیوند در پرس‌وجوهای پایگاه داده‌ی رابطه‌ای پیشنهاد گردیده است. در آن از دو روش الگوریتم‌های ژنتیکی و آتاماتا‌های یادگیر به‌طور همزمان برای جستجو در فضای حالت استفاده شده است. دستاورد آن مقاله این است که استفاده همزمان از آتاماتا‌های یادگیر و الگوریتم‌های ژنتیکی در فرایند جستجو، سرعت

* سخنران

^۱Heuristic



رسیدن به جواب را افزایش داده و از به دام افتادن الگوریتم در مینیمم‌های محلی جلوگیری نموده است. در [۲] برای بهینه‌سازی پرس‌وجو ابتدا گراف متناظر با روابط پیوند داده‌شده طراحی می‌شود. سپس گراف را به چندین درخت تجزیه نموده و درخت‌ها را به صورت توزیع شده تحت الگوریتم ژنتیک و تپه نوردی بهینه نموده است.

در این مقاله با بکارگیری الگوریتم رقابت استعماری^۲ سعی در کاهش هزینه اجرای پرس‌وجوهای پیوند نموده‌ایم. به این ترتیب که هزینه طرح‌های اجرایی تولید شده توسط الگوریتم را ارزیابی نموده و طرحی با کمترین هزینه بر اساس ساختار الگوریتم استفاده شده به عنوان جواب نهایی انتخاب می‌شود. نتایج حاصل از بکارگیری الگوریتم رقابت استعماری روی یک پایگاه داده استاندارد AdventureWorks نشان داد که نسبت به سایر الگوریتم‌های مشابه دارای هزینه عملیات CPU و عملیات I/O کمتری می‌باشد.

ساختار مقاله به فرم زیر می‌باشد. در بخش دوم بهینه‌سازی پرس‌وجو بیان شده است. بیان مسئله استفاده شده در این مقاله در بخش سوم شرح داده شده است و در بخش چهارم نتیجه‌گیری و مقایسه آمده است.

۲ بهینه‌سازی پرس‌وجو

از بین عملگرهای رابطه‌ای موجود، پردازش و بهینه‌سازی عملگر پیوند^۳ که به وسیله نماد ∞ نمایش داده می‌شود، جزو پرهزینه‌ترین عملگرها از نظر زمان اجرا است. از آنجاکه عملگر پیوند دارای خاصیت انجمنی^۴ و جابجایی^۵ است، تعداد طرح‌های اجرایی موجود برای پاسخ‌دهی به یک پرس‌وجو با افزایش تعداد پیوندهای بین روابط، به صورت نمایی رشد می‌کند. گرچه تمامی طرح‌های اجرایی موجود برای پاسخ به یک پرس‌وجوی مشخص، دارای خروجی یکسان می‌باشد اما از آنجا که تعداد سطرهای روابط میانی ایجاد شده یکسان نیستند، طرح‌های اجرایی به وجود آمده دارای هزینه متفاوتی خواهند بود؛ بنابراین، انتخاب ترتیب مناسب برای اجرای عمل پیوند در هزینه کلی، تأثیرگذار است [۵].

در یک استراتژی بهینه‌سازی بر مبنای هزینه، چند طرح اجرا برای یک پرس‌وجو مشخص تولید و یک هزینه از نظر زمان اجرا برای هر طرح محاسبه می‌شود. بهینه‌سازی پرس‌وجو، طرحی که دارای کمترین هزینه باشد را انتخاب می‌کند که یکی از مراحل اساسی در پردازش پرس‌وجو است [۴].

۳ بیان مسئله

در این مقاله هدف یافتن بهترین طرح اجرایی برای n رابطه است که باهم پیوند داده شده‌اند. فرض بر این است که روابط به صورت $R_1 \infty R_2 \infty \dots \infty R_n$ باهم پیوند دارند. هر طرح اجرایی می‌تواند جایگشتی از روابط فوق باشد. برای مثال $R_3 \infty R_1 \infty R_2 \infty \dots \infty R_n$ یک طرح اجرایی و $R_1 \infty R_3 \infty R_2 \infty \dots \infty R_n$ نیز یک طرح اجرایی دیگر قلمداد می‌شود. هدف از حل مسئله بهینه‌سازی پرس‌وجو یافتن یک طرح اجرایی از بین $n!$ طرح اجرایی موجود می‌باشد که دارای کمترین زمان اجرا باشد. تعداد سطرهای حاصل از پیوند نهایی در همه طرح‌ها یکسان است ولی تعداد سطرهای حاصل از پیوند دو جدول باهم یکسان نیست و همین مسئله باعث تغییر در زمان اجرای طرح خواهد شد.

جهت بکارگیری الگوریتم رقابت استعماری تعدادی کشور به صورت تصادفی ایجاد می‌شود. هر کشور ترکیبی از قرارگیری روابط پایگاه داده و یا به عبارت دیگر یک طرح اجرایی می‌باشد. تعدادی از کشورهای اولیه که دارای تابع هدف کمتری نسبت به بقیه هستند را به عنوان استعمارگر و مابقی کشورها را به صورت مساوی به عنوان مستعمره انتخاب می‌کنیم. تابع هدف،

^۲Imperialist Competitive Algorithm (ICA)

^۳Join

^۴Associative

^۵Commutative



هزینه اجرای هر دو پیوند متوالی که شامل زمان عملیات CPU و عملیات I/O است را محاسبه و باهم جمع می‌کند. تابع هدف به فرم زیر است: $F = \min \sum_{i=1}^{n-1} C_i$ که در آن C_i مجموع هزینه عملیات CPU و عملیات I/O برای پیوند $R_i \infty R_{i+1}$ می‌باشد. تابع جذب بکار گرفته شده جهت تولید کشورهای جدید از روی کشورهای موجود در ادامه آورده شده است. برای این کار با توجه به دو کشور والد، یک جدول همسایگی ایجاد می‌شود. طریقه ایجاد آن با یک مثال نشان داده شده است. فرض کنید پنج رابطه R_1, R_2, R_3, R_4, R_5 وجود دارد و $[R_1 R_2 R_3 R_4 R_5]$ نشان دهنده کشور مستعمره و $[R_1 R_2 R_3 R_4 R_5]$ نشان دهنده کشور استعمارگر است. جدول ۱ بیانگر همسایه‌های هر گره در دو کشور می‌باشد.

جدول ۱: همسایه‌های هر گره

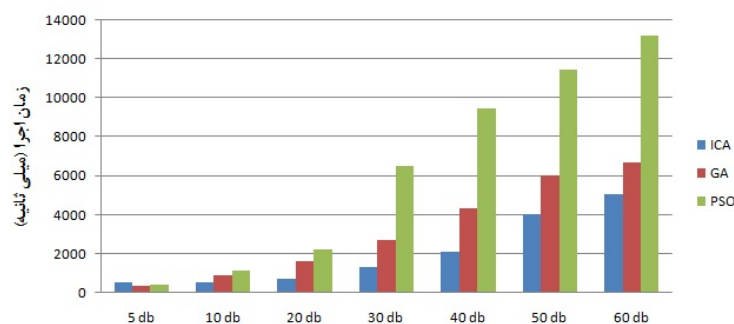
گره	گره همسایه
R_1	R_2, R_5, R_4
R_2	R_1, R_3, R_5
R_3	R_2, R_4, R_5
R_4	R_3, R_5, R_1
R_5	R_4, R_1, R_2, R_3

الگوریتم اولین گره از کشور مستعمره را انتخاب می‌کند (در اینجا R_1) با توجه به جدول ۱ همسایه‌های ملاقات شده گره R_1 در مجموعه $S = \{R_2, R_5, R_4\}$ قرار می‌گیرد. حال اگر C_{ij} نشان دهنده فاصله بین دو گره i و j یا به عبارت دیگر هزینه الحاق بین آن دو رابطه باشد، آنگاه گره‌های موجود در S با احتمال زیر مورد ملاقات قرار می‌گیرد که در آن i گره اصلی و j گره موجود در S است.

$$V_j = \frac{1/c_{ij}}{\sum_{j \in S} (1/c_{ij})} \quad \forall j \in S \quad (1)$$

فرض کنید با توجه به فرمول (۱) بیشترین احتمال مربوط به گره R_2 باشد پس گره جدید به صورت $[R_1 R_2 _ _]$ خواهد شد. یک‌بار دیگر همسایه‌های R_2 از جدول ۱ بررسی می‌شود. از آنجاکه قبلاً R_1 انتخاب شده است. لذا احتمال تنها دو همسایه R_3 و R_5 از فرمول (۱) به دست می‌آید و گره بعدی انتخاب می‌شود. این کار تا یافتن تمام گره‌های کشور جدید ادامه می‌یابد. با این کار عمل جذب برای تمام کشورها انجام می‌شود.

در اینجا مسئله بهینه‌سازی پرس‌وجو را برای پیوند جداول متفاوت توسط الگوریتم رقابت استعماری حل نموده‌ایم. سپس جهت مقایسه نتایج، از الگوریتم‌های GA و PSO روی همان مسئله استفاده شده است. نتایج حاصل از اجرای این الگوریتم‌ها با تعداد روابط متفاوت در شکل ۱ آورده شده است.



شکل ۱: زمان اجرای هر الگوریتم



همان‌طور که از شکل ۱ پیداست، هر چه تعداد جداول کمتر باشد الگوریتم ژنتیک نسبت به الگوریتم رقابت استعماری و PSO بهتر عمل می‌کند. با افزایش تعداد جداول در پیوند زمان اجرای الگوریتم رقابت استعماری نسبت به سایر الگوریتم‌ها بهتر خواهد شد.

۴ نتایج

در این مقاله از الگوریتم رقابت استعماری برای حل مسئله بهینه‌سازی ترتیب اجرای عملگرهای پیوند در پرس‌وجوهای پایگاه داده رابطه‌ای استفاده شده است. این الگوریتم از هزینه‌ی یک کشور با ارزیابی تابع f در متغیرهای $(R_1, R_2, R_3, \dots, R_n)$ برای جستجو در فضای حالات مسئله استفاده می‌نماید. هر یک از این متغیرها در مسئله بهینه‌سازی پرس‌وجو شامل یک رابطه در مسئله می‌باشد و ترتیب قرارگیری آن‌ها دقیقاً بیانگر ترتیب اجرای پیوند رابطه‌ها خواهد بود. از طرفی هزینه هر کشور برابر با مجموع هزینه عملیات CPU و عملیات I/O جهت اجرای پیوند بین متغیرها (روابط) خواهد بود. با استفاده از این الگوریتم یک دسته اولیه‌ای از این روابط تولید می‌شود و دسته‌بندی آن‌ها در قالب امپراتوری‌ها و مستعمره‌ها انجام می‌شود. با اعمال سیاست جذب از طرف استعمارگران بر روی مستعمرات و همچنین احتمال انقلاب در امپراتوری‌ها به جستجوی بهترین کشور (رابطه) پرداخته می‌شود که همان جواب مسئله بهینه‌سازی پرس‌وجو و یا به عبارت دیگر بهترین ترتیب اجرای پیوند رابطه‌ها در پرس‌وجو می‌باشد. نتایج آزمایش‌ها، برتری الگوریتم را نسبت به روش‌های مبتنی بر الگوریتم دیگر نشان می‌دهد.

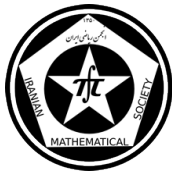
مراجع

- [۱] اصغری، کیوان، صفری ممقانی، علی، محمودی، فریبرز، میبیدی، محمدرضا، بهینه‌سازی اجرای پرس‌وجو در پایگاه داده‌های رابطه‌ای با الگوریتم تکاملی ترکیبی، مجله کامپیوتر و روباتیک ۱، ۱۳۸۷.
- [۲] پارسا، سعید، ایزدخواه، حبیب و حسین زاده، امیر، ترکیب الگوریتم ژنتیک با الگوریتم تپه نوردی در ماشین با ساختار موازی برای بهینه‌سازی پرس‌وجوهای بزرگ در گراف پرسش، سومین کنفرانس فناوری اطلاعات و دانش، مشهد، ۱۳۸۶.
- [۳] محمودی، فریبرز، زاهدی انارکی، مرتضی و زاهدی انارکی، امیرحسین، بهینه‌سازی اجرای پرس‌وجو در پایگاه داده رابطه‌ای با استفاده از الگوریتم اکتشافی ذرات، شانزدهمین کنفرانس ملی سالانه انجمن کامپیوتر ایران، تهران، ۱۳۸۹.
- [4] K. Bennet, M. C. Ferris, Y. E. Ioannidis, *A genetic algorithm for database query optimization*, In Proc. Of the Fourth Intl. Conf. On Genetic Algorithms, San Diego, USA (1991), pp. 400-407.
- [5] T. Ibaraki, T. Kameda, *On the optimal nesting order for computing n-relational joins*, Transactions on Database Systems, Vol. 9, ACM, 1984, pp. 482-502.
- [6] A. A. Kolaei, M. Ahmadzadeh, *The Optimization of Running Queries in Relational Databases Using ANT-Colony Algorithm*, International Journal of Database Management Systems, Vol. 5, 2013.
- [7] R. Lanzelotte, P. Valduries, M. Zait, *On the effectiveness of optimization search strategies for parallel execution spaces*, The International Journal on Very Large Data Bases, Vol. 9, 1993, pp. 493-504
- [8] M. Steinbrunn, G. Moerkotte, A. Kemper, *Heuristic and randomized optimization for the join ordering problem*, The International Journal on Very Large Data Bases, Vol. 6, 1997, pp. 191-208.

پست الکترونیکی: shsadeghi@stu.sau.ac.ir

پست الکترونیکی: saadatjou@sau.ac.ir

پست الکترونیکی: esmailizaini@gmail.com



تلفیق تغییرات کلی و تیخونوف با مجموعه تراز برای بی‌نویز کردن تصاویر

سودابه طاهری*

دانشگاه تربیت مدرس تهران

سید محمد حسینی

دانشگاه تربیت مدرس تهران

چکیده

این مقاله روشی جدید برای بی‌نویز کردن تصاویر نویزی را بیان می‌کند. ایده اصلی تلفیق روش تیخونوف و تغییرات کلی با مجموعه تراز می‌باشد. با استفاده از این روش مشاهده می‌شود نویز بیشتری از دامنه‌ی تصویر نویزی با حفظ ویژگی لبه حذف می‌شود. ما در این جا با روش مجموعه تراز تصویر نویزی را ناحیه بندی نموده و سپس با روش تلفیقی تغییرات کلی و تیخونوف به حذف نویز از تصویر می‌پردازیم.

واژه‌های کلیدی: تلفیق تیخونوف و تغییرات کلی، مجموعه تراز، بی‌نویز

۱ مقدمه

هدف از بازسازی سیگنال و تصویر استفاده از فرایندهایی جهت بدست آوردن سیگنال و تصویر مطلوب از یک سیگنال و تصویر تخریب شده است. اگرچه در مواقعی نمی‌توان به تصویر مطلوب رسید، ولی می‌توان تأثیر آن را کمینه کرد. در بازسازی تصویر بسیاری از مسائل به صورت مسائل بد وضع گسسته می‌باشند و ما این گونه مسائل را به صورت

$$y = Gx + e \quad (1)$$

در نظر می‌گیریم که x جواب مجهول می‌باشد و باید تقریب کرده شود؛ y از اندازه‌های مشاهده شده می‌باشد و e بردار خطا است که شامل متغیرهای تصادفی با توزیع گاوسی با میانگین صفر می‌باشد. امروزه روش‌های متفاوتی برای بی‌نویز کردن سیگنال در شاخه‌های گوناگونی همچون پزشکی، مهندسی، علوم کامپیوتر، ریاضی و ... دیده می‌شود.

۲ تغییرات کلی

تعریف ۱.۲. (تغییرات کلی): تغییرات کلی تابع با دامنه پیوسته $x(t)$ روی بازه $[a, b]$ ، به صورت سوپریم قدر مطلق تفاضل هر افراز متناهی $P = \{t_0 = a, \dots, t_n, \dots, t_m = b\}_n$ تعریف می‌شود [۳]:

$$TV\{x\} = \sup \sum_{n=1}^m |x(t_n) - x(t_{n-1})| \quad (2)$$

اگر مشتق اول $x(t)$ خوش تعریف باشد؛ آن‌گاه تغییرات کلی می‌تواند به صورت زیر بیان شود:

$$TV\{x\} = \int_a^b |D\{x\}(t)| dt \quad (3)$$

که D مشتق منظم با دامنه پیوسته می‌باشد.

* سخنران



در بسیاری کاربردهای پردازش سیگنال، داده‌ها روی یک شبکه یکنواخت در دسترس می‌باشند. ما سری‌هایی را همانند $x = [x(t_n)]_{n \in \mathbb{Z}}$ در نظر می‌گیریم. در این حالت تغییرات کلی را می‌توان با نرم ℓ_1 از عملگر دیفرانسیل متناهی محاسبه شود:

$$TV\{x\} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} |\Delta x[n]| \quad (۴)$$

که $\Delta x = x[t_n] - x[t_{n-1}]$ می‌باشد.

تعریف ۲.۲. برای یک سیگنال گسسته x تغییرات کلی را در حالت کلی به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$TV\{x\} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} |\Delta_L\{x\}[n]| \quad (۵)$$

که Δ_L یک نسخه گسسته از عملگر دیفرانسیل مرتبه N ام می‌باشد.

$$L = \prod_{i=1}^N (D - \alpha_i I) \left(\prod_{i=1}^M (D - \gamma_i I) \right)^{-1} \quad (۶)$$

که I عملگر همانی، $\alpha_i \in \mathbb{C}, i = 1, 2, 3, \dots, N$ ، و $\gamma_i \in \mathbb{C}, i = 1, 2, 3, \dots, M$ ، به ترتیب صفرها و قطب‌های عملگر، و $M > N$ می‌باشد.

۳ منظم سازی تغییرات کلی

منظم سازی تغییرات کلی دامنه جواب‌های احتمالی را به داشتن گرادیان اسپارس محدود می‌کند، یعنی جواب مسئله (۱) وقتی $\|x\|_{TV} = \sum_i |\nabla x|_i$ مینیمم می‌شود که ∇ یک تقریب از عملگر گرادیان گسسته می‌باشد. برای مسائل یک بعدی گسسته $\|x\|_{TV}$ به سادگی $\|L_1 x\|_1$ می‌باشد. برای سادگی کار $\|L_1 x\|_1$ را با $\|x\|_{TV}$ نمایش می‌دهیم و منظم سازی تغییرات کلی به صورت زیر فرمول بندی می‌شود [۳]:

$$\arg \min_{x \in \mathbb{R}^n} \{ \|y - Gx\|_2^2 + \mu \|L_1 x\|_1 \}. \quad (۷)$$

که $\mu \in \mathbb{R}^+$ پارامتر منظم سازی و L_1 تقریب عملگر مشتق مرتبه اول می‌باشند. منظم سازی تغییرات کلی روی گرادیان اسپارس، برای رسیدن به جواب به طور قطعه‌ای ثابت تمرکز می‌کند. بنابراین با حفظ گسستگی‌های پرشی همراه می‌باشد.

۴ تیخونوف

شناخته شده‌ترین تکنیک منظم سازی تیخونوف یا ℓ_2 می‌باشد که در ساده‌ترین فرم روش منظم سازی تیخونوف مسئله (۱) را با مسئله مینیمم سازی زیر جایگزین می‌کنیم [۲، ۴]:

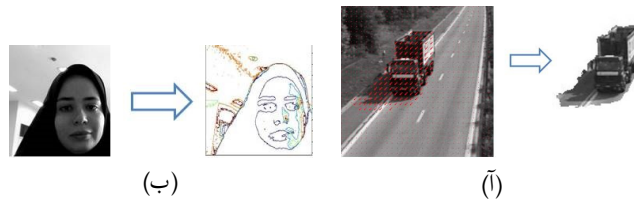
$$\arg \min_{x \in \mathbb{R}^n} \{ \|y - Gx\|_2^2 + \mu \|L_i x\|_2^2 \} \quad (۸)$$

که L_i عملگر مشتق مرتبه i ام می‌باشد.



۵ مجموعه تراز

تقریب دینامیک حرکت منحنی‌ها و سطوح، روش مجموعه تراز نامیده می‌شود [۵]. ناحیه بندی تصویر شامل تقسیم یک دامنه تصویر به نواحی مجزا می‌باشد. روش‌های متفاوتی برای ناحیه بندی تصویر وجود دارد یکی از این روش‌ها مجموعه تراز می‌باشد. مجموعه ترازا اولین بار توسط اوشر و ستهیان^۲ تولید شد [۱].

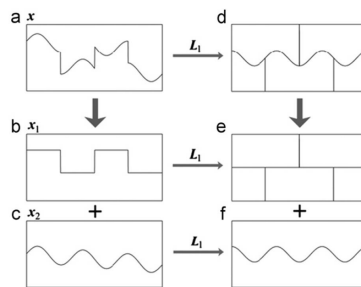


شکل ۱: روش مجموعه تراز

۶ تلفیق روش تغییرات کلی و تیخونوف

این گونه مسائل به صورت مسائل بد وضع می‌باشند و روش حل این گونه مسائل با روش‌های منظم سازی می‌باشد. روش منظم سازی به کار رفته در این بخش روش تلفیقی می‌باشد. هر سیگنال x را می‌توان به صورت جمع قسمت ثابت و هموار در نظر گرفت. که قسمت ثابت را با روش تغییرات کلی و قسمت هموار را با روش تیخونوف بازسازی می‌کنیم.

$$\arg \min_{x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n} \{ \|y - G(x_1 + x_2)\|_2^2 + \mu (\|L_2 x_2\|_2^2) + \xi \|L_1 x_1\|_1 \} \quad (9)$$



شکل ۲: a - یک سیگنال بطور قطعه‌ای هموار، d - مشتق سیگنال e ، قسمت ثابت سیگنال b ، قسمت ثابت سیگنال f ، قسمت هموار سیگنال

۷ نتایج

ما روش مجموعه تراز را با تلفیق روش‌های تغییرات کلی و تیخونوف ترکیب نموده به گونه‌ای که در ابتدا تصویر را با این روش ناحیه بندی نموده و سپس روش تلفیقی تغییرات کلی و تیخونوف برای حذف نویز گاوسی از تصویر به کار برده‌ایم و در آخر مقایسه مختصری با روش تغییرات کلی و تیخونوف انجام شده است. با تحلیل جدول زیر مشخص می‌شود با انحراف

^۲osher.sethian

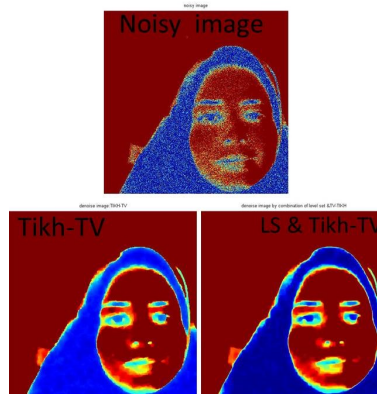


معیارهای یکسان علاوه بر این که میانگین مربع خطای^۳ روش پیشنهادی حدود نصف می‌باشد؛ نویز بیشتری را از دامنه تصویر می‌توان حذف نمود.

$$MSE = \sqrt{\sum_{i=1}^m (g_{i,j} - y_{i,j})^2} \quad (10)$$

Table ۱

σ	۱۰	۱۵	۲۰
$MSE(p_{1,2})$	۲۲,۳۹	۲۶,۵۳	۳۱,۳۱
$MSE(p_{1,2}, LS)$	۱۷,۶۰	۱۷,۶۲	۱۷,۶۳



شکل ۳: مقایسه دو روش $Tikh - TV$ با $LevelSet \& (Tikh - TV)$

مراجع

- [۱] طاهری، سودابه، حسینی، سید محمد، بازسازی تصویر با استفاده از تلفیق تغییرات کلی و مجموعه تراز، دومین کنفرانس ملی صنعتی، تبریز، ۱۳۹۴.
- [۲] رزقی، منصور، منظم سازی و پیش حالت سازی مسائل بد حالت بزرگ، رساله دکتری راهنمایی دکتر سید محمد حسینی، تربیت مدرس، ۱۳۸۸.
- [۳] F.I.karahanoglu, I.Bayram, D.van De Vill. *A signal processing approach to genralized ۱-d total variation*, IEEE Transactions on image processing, ۵۹ (۲۰۱۱). ۵۲۶۵-۵۲۷۴
- [۴] A.Gholami, S.M.Hosseini, *A balanced combination of Tikhonov and total variation regularizations for reconstruction of piecewise-smooth signals*, ELSEVIER, signal processing, ۹۳(۲۰۱۳) ۱۹۴۵-۱۹۶۰.
- [۵] C.L.Philips. *The level set method*, MIT undergraduate Journal of mathematics.

پست الکترونیکی: s.taheri@modares.ac.ir
پست الکترونیکی: hossei_m@modares.ac.ir

^۳MSE



تولید خودکار داده آزمون با استفاده از الگوریتم فاخته

محمد علی سعادت جو
دانشگاه کاشان

فاطمه سعادت جو
دانشگاه علم و هنر

مرضیه روئینا*
دانشگاه علم و هنر

چکیده

تولید داده آزمون به صورت خودکار، یکی از مهم‌ترین گام‌ها در آزمون نرم‌افزار می‌باشد. از چالش‌های عمده در آزمون نرم‌افزار، کاهش تعداد داده‌های آزمون و کاهش زمان تولید آن‌ها است. در این مقاله با استفاده از الگوریتم بهینه‌سازی فاخته به عنوان یکی از این الگوریتم‌ها سعی در کاهش زمان تولید داده‌های خودکار برای چند نمونه مسئله شده است. ضمناً با مقایسه انجام شده بر روی الگوریتم ژنتیک به عنوان یکی از رایج‌ترین الگوریتم‌های استفاده شده در آزمون نرم‌افزار مشخص گردید زمان لازم برای تولید داده آزمون مناسب در الگوریتم فاخته نسبت به الگوریتم ژنتیک کاهش خواهد یافت.

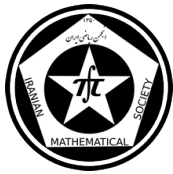
واژه‌های کلیدی: تولید داده آزمون، الگوریتم فاخته، گراف کنترل جریان

Mathematics Subject Classification [2010]: 13D45, 39B42

۱ مقدمه

آزمون نرم‌افزار فقط می‌تواند وجود خطاها را نشان دهد ولی نمی‌تواند عدم وجود خطا را تضمین نماید [۱]. تولید خودکار داده‌های آزمون با استفاده از منبع برنامه یکی از روش‌های آزمون جعبه سفید می‌باشد. هدف از این مقاله استفاده از الگوریتم فاخته [۱۰] به عنوان یکی از الگوریتم‌های فرا اکتشافی می‌باشد. استفاده از الگوریتم‌های فرا اکتشافی در [۲] و [۴] به عنوان یکی از روش‌های پرکاربرد در تولید خودکار داده‌های آزمون معرفی شده است. در [۳] و [۶] نویسندگان از الگوریتم ژنتیک برای پوشش مسیر استفاده نموده‌اند. در [۴] تولید خودکار داده آزمون به وسیله الگوریتم ممیتیک انجام شده است. کارایی آزمون بهبود بخشیده شده و زمان و هزینه آزمون به حداقل رسیده است. در [۱۱] و [۴] از سه فاکتور برای تولید یک داده آزمون مناسب استفاده شده است. این سه فاکتور عبارتند از احتمال، نزدیکی به مقادیر مرزی و پوشش تصمیم. تابع برازش بر اساس میانگین سه فاکتور فوق محاسبه شده است. از این سه فاکتور برای به دست آوردن داده‌ای مناسب در این مقاله نیز استفاده شده است. محققان در [۵] با استفاده از ازدحام ذرات، بدون دانش اولیه و با کمترین زمان ممکن داده‌های آزمون را تولید نموده‌اند که روش آن‌ها تنها برخی از جواب‌ها را تعیین می‌کند. در [۷] از الگوریتم زنبور عسل برای تولید داده آزمون استفاده شده است و در مواردی که داده‌های ورودی بسیار بزرگ باشد الگوریتم خوب جواب نمی‌دهد. در [۸] و [۹] روش مؤثر برای تولید داده آزمون با استفاده از الگوریتم‌های جستجوی فاخته و جستجوی ممنوعه ارائه شده است. فاکتورها و تابع هدف استفاده شده با آنچه در این مقاله بیان خواهد شد متفاوت است. به صورت کلی در آزمون ساختاری برنامه فضای جستجوی مسئله از روی گراف کنترل جریان برنامه که ساختار برنامه را نشان می‌دهد، به دست می‌آید. در همه روش‌های ارائه شده یک داده آزمون به صورت تصادفی به عنوان ورودی الگوریتم داده شده سپس با استفاده از عملگرهای الگوریتم فرا اکتشافی و تابع برازندگی

*سخنران



انتخاب شده تلاش برای بهینه نمودن آن و تولید داده‌هایی کارآمد در حداقل زمان ممکن شده است. در این مقاله برای تولید خودکار داده آزمون از برنامه دسته‌بندی مثلث [۵] و [۱۱] و برنامه مرتب‌سازی تعویضی جهت نمایش توانایی الگوریتم پیشنهادی استفاده شده است. از فاکتورها و تابع هدف بکار گرفته شده در [۱۱] برای بهینه نمودن الگوریتم استفاده خواهد شد. ساختار این مقاله به صورت زیر است. بیان مسئله در بخش دوم، مقایسه و پیاده‌سازی در بخش سوم و در انتها نتیجه‌گیری و کارهای آینده آمده است.

۲ بیان مسئله

تولید خودکار داده آزمون یکی از مسائل نسبتاً پیچیده در آزمون نرم‌افزار می‌باشد [۱]. در این مقاله با استفاده از گراف کنترل جریان برنامه [۱] جهت مشخص نمودن مسیرها و پیمایش آن‌ها و به کمک الگوریتم بهینه‌سازی فاخته که اطلاعات تکمیلی آن در [۱۰] آمده است به تولید خودکار داده آزمون می‌پردازیم. در اینجا جهت فهم مسئله به برخی از پارامترهای این الگوریتم اشاره خواهد شد. الگوریتم فاخته همانند سایر الگوریتم‌های تکاملی با یک جمعیت اولیه کار خود را شروع می‌کند. این جمعیت در الگوریتم فاخته، تعدادی تخم است که در لانه تعدادی پرنده میزبان دیگر قرار می‌گیرد [۱۰]. وقتی تمام فاخته‌ها به سمت نقطه هدف مهاجرت کردند و نقاط سکونت جدید هر کدام مشخص شد، هر فاخته صاحب تعدادی تخم می‌شود.

تابع هزینه از میانگین سه فاکتور برای هر تخم به دست می‌آید. سه فاکتور شامل [۱۱]:

- ۱) احتمال مسیر: مسیری که احتمال بیشتری داشته باشد برای اجرا انتخاب می‌شود و با $p(t)$ نمایش داده می‌شود.
- ۲) نزدیک به مقادیر مرزی: احتمال خطا در مقادیری که به مرز نزدیک هستند بیشتر است پس این مقادیر احتمال بیشتری برای انتخاب دارند. نزدیک به مقادیر مرزی با $N(T)$ نشان داده می‌شود.
- ۳) پوشش تصمیم: هر چه تعداد یال‌های پیمایش شده در یک مسیر بیشتر باشد احتمال انتخاب آن مسیر بیشتر است. پوشش تصمیم با $D(T)$ نشان داده شده است.

۱.۲ گراف کنترل جریان

برای تولید خودکار داده آزمون، ابتدا گراف جریان برنامه رسم می‌شود. این گراف برای تولید تعداد کافی داده آزمون برای پوشش فضای جستجو در مسیرهای شدنی یک گراف کنترل جریان برنامه است. الگوریتم و گراف کنترل جریان برنامه مثلث به ترتیب در قسمت آ و ب در شکل ۱ آورده شده است. مسیرها بر اساس گراف جریان کنترل برنامه انتخاب می‌شوند.

۳ مقایسه و پیاده‌سازی

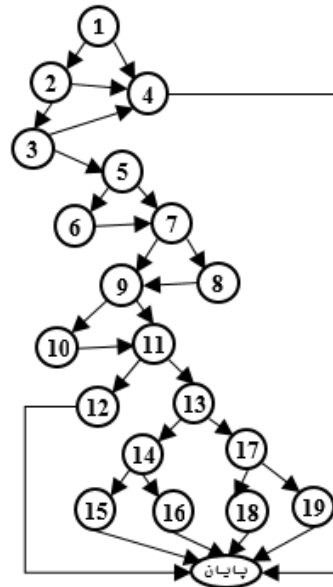
الگوریتم فاخته همانند سایر الگوریتم‌های فرا اکتشافی با یک جمعیت اولیه کار خود را شروع می‌کند. جمعیتی متشکل از فاخته‌ها، این جمعیت از فاخته‌ها تعدادی تخم دارند که آن‌ها را در لانه تعدادی پرنده میزبان خواهند گذاشت [۱۰]. به دلیل نبود دانش اولیه، جمعیت اولیه تصادفی در نظر گرفته شده است. تابع هزینه شامل میانگین سه فاکتور برای تخم‌ها است و داده آزمون برای ۵۰ نسل آموزش داده شده‌اند. سپس نتایج ده سری اجرا میانگین‌گیری شده‌اند. برای مقایسه نتایج روش‌های ژنتیک و فاخته، آن‌ها را در محیط برنامه‌نویسی متلب پیاده‌سازی کردیم و شرایط حاکم بر دو الگوریتم یکسان در نظر گرفته‌ایم. به عنوان نمونه مقدار جمعیت اولیه دو الگوریتم تصادفی است، تعداد نسل تولید شده برای برنامه مثلث ۱۰۰ و برنامه مرتب‌سازی تعویضی ۵۰ است و تعداد کروموزم با تعداد تخم نیز برابر در نظر گرفته شده است. جهت پیاده‌سازی [۱۱]



```

Void tringle(int a, int b, int c)
1,2,3: if(a<=0||b<=0||c<=0)
4: printf("\nworng input");
else {
5:   if(a<b)
6:     swap(a,b);
7:   if(b<c)
8:     swap(b,c);
9:   if(a<c)
10:    swap(b,c);
11:  if(a>=b+c)
12:    printf("\nworng input");
13:  else if(a==b){
14:    if(b==c)
15:      printf("\nEquilate");
16:    printf("\nIsoslist");
17:  }else {
18:    if(b==c)
19:      printf("\nIsoslist");
20:    else
21:      printf("\nScalen");
22:  }
}

```



(ب) شبکه‌کد

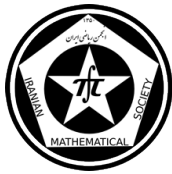
(آ) گراف جریان کنترل

شکل ۱: برنامه مثلث [۱۱]

تولید خودکار داده آزمون با الگوریتم فاخته و ژنتیک از تابع هدف استفاده شده اند. جهت پیاده‌سازی تولید خودکار داده آزمون با الگوریتم فاخته و ژنتیک از تابع هدف [۱۱] استفاده شده است. جدول ۱ نشان‌دهنده‌ی کاهش زمان اجرای الگوریتم فاخته نسبت به الگوریتم ژنتیک در مسئله تولید خودکار داده آزمون برای برنامه مثلث و برنامه مرتب‌سازی تعویضی است. همان‌طور که گفته شد به دلیل فرا اکتشافی بودن الگوریتم‌های فوق هر کدام ده بار در نرم‌افزار متلب اجرا شده و نتایج آن‌ها میانگین‌گیری شده‌اند. همان‌طور که از جدول ۱ مشخص است الگوریتم فاخته زمان اجرای کمتری دارد و در سایر موارد هر دو الگوریتم یکسان عمل کرده‌اند که در کل نتایج بیانگر بهبود عملکرد الگوریتم فاخته نسبت به الگوریتم ژنتیک در تولید خودکار داده آزمون است.

جدول ۱: مقایسه روش الگوریتم ژنتیک و فاخته (ده اجرای متوالی)

روش	تعداد تکرار	برنامه مثلث			برنامه مرتب‌سازی تعویضی		
		پوشش مسیر	تابع هزینه	زمان (ثانیه)	پوشش مسیر	تابع هزینه	زمان (ثانیه)
الگوریتم ژنتیک	۵۰	٪۷۹٫۳۱	۰٫۹۲۵۳	۲۱٫۷۱	٪۱۰۰	۰٫۶۶۶۷	۱۱٫۸۳
الگوریتم فاخته	۵۰	٪۷۹٫۳۱	۰٫۹۱۸۵	۱۵٫۰۸	٪۱۰۰	۰٫۶۶۶۷	۹٫۳۱



۴ نتیجه‌گیری و کارهای آینده

آزمون نرم‌افزار پرهزینه‌ترین مرحله‌ی تولید نرم‌افزار است و از آنجایی‌که آزمون نرم‌افزار نقش مهمی در تولید خودکار داده برای کاهش هزینه و زمان را دارد. مهم‌ترین مرحله در آزمون نرم‌افزار، تولید داده آزمون است. در این مقاله با کمک الگوریتم فاخته مجموعه داده آزمون را ایجاد کردیم که نسبت به الگوریتم ژنتیک دارای زمان اجرای کمتری می‌باشد. ارزیابی تولید خودکار داده آزمون برای برنامه‌هایی که دارای پیچیدگی بیشتری هستند به عنوان کار آینده پیشنهاد می‌شود.

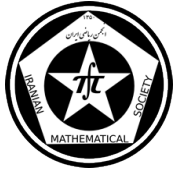
مراجع

- [۱] بابا میر س. م.، مبانی آزمون نرم‌افزار، دانشگاه کاشان، کاشان، ایران، ۱۳۹۱.
- [2] E. Cartaxo, G., Francisco, G. O. Neto, and P. Di Machado, *Test case generation by means of UML sequence diagrams and labeled transition systems*, IEEE, 2007.
- [3] M. R. Keyvanpour, H. Homayouni, and H. Shirazee, *Automatic Software Test Case Generation*, J. Software Engineering, vol. 5, pp. 91-101, 2011.
- [4] P. Krish, U. J. Mohan, K. Gaurav, J. Nitish, G. Raj and S. P. Ranjan, *Test data generation: A hybrid approach using cuckoo and tabu search*, Proceeding in Swarm Evolutionary and Memetic Computing, Lecture Notes in computer Science 7077, Springer, Berlin, pp. 46-54, 2011.
- [5] J.C. Lin and P. L. Yeh, *Automatic test data generation for path testing using GAs*, Information Sciences, vol. 131, pp. 47-64, 2001.
- [6] A. Pachauri, and G. Srivastava, *Automated Test Data Generation for Branch Testing Using Genetic Algorithm: An Improved Approach Using Branch Ordering, Memory and Elitism*, J. Systems and Software, vol. 86, pp. 1191-1208, 2013.
- [7] R. Rajabioun, *Cuckoo Optimization Algorithm*, Applied Soft Computing, vol. 11, Issue 8, pp. 5508-5518, 2011.
- [8] A.A. Sofokleous, A.S. Andreou, *Automatic, evolutionary test data generation for dynamic software testing*, J. System and Software, pp. 1883-1898, 2008.
- [9] B. Suri, B. Snehlata, *Review of Artificial Bee Colony Algorithm to Software Testing*, International Journal of Research and Review in Computer Science (IJRRCS), vol. 2, pp. 706-711, 2011.
- [10] P. R. Srivastava, R. Khandelwal, S. Khandelwal, S. Kumar, and S. S. Ranganatha, *Automated test data generation using cuckoo search and tabu search (csts) algorithm*, J. Intelligent Systems, vol. 21, pp. 195-224, 2012.
- [11] H. Singh, *Automatic Generation of Software Test Cases using Genetic Algorithms*, Computer Science Engineering Department (India) Thapar Institute of Engineering Technology, pp.122, 2004.

پست الکترونیکی: mzroeina@gmail.com

پست الکترونیکی: saadatjou@sau.ac.ir

پست الکترونیکی: m.a.saadatjoo@grad.kashanu.ac.ir



حل دستگاه معادلات مختلط فازی با روش تصویری

سولماز آقائی*

دانشگاه یزد، دانشکده ریاضی، گروه علوم کامپیوتر
دانشگاه یزد، آزمایشگاه پردازش موازی

سیدابوالفضل شاهزاده فاضلی

دانشگاه یزد، دانشکده ریاضی، گروه علوم کامپیوتر
دانشگاه یزد، آزمایشگاه پردازش موازی

چکیده

دستگاه معادلات خطی فازی، دستگاه معادلات خطی است که پارامترهای آن اعداد فازی هستند. در این مقاله می خواهیم دستگاه معادلات مختلط فازی را با استفاده از یک روش تصویری حل نماییم. در آخر مثال عددی ارائه می گردد و جواب بدست آمده با یک روش تکراری دیگر مقایسه می گردد.

واژه‌های کلیدی: عدد فازی، عدد مختلط، دستگاه خطی فازی، روش تصویری

۱ مقدمه

دستگاه معادلات خطی نقش بسیار حیاتی در مسائلی مانند بهینه سازی، اقتصاد و مهندسی دارد. بنابراین یافتن یک مدل ریاضی و روند عددی برای حل دستگاه خطی فازی بسیار با اهمیت است. به طور کلی برای ساده در نظر گرفتن و یا برای محاسبه آسان، متغیرها یا پارامترها معمولاً به صورت عدد غیرفازی گرفته شده است. اما در واقعیت پارامترها ممکن است غیر قطعی یا برآورد نامشخص در مورد متغیر داشته باشند که به طور کلی از سوی برخی از آزمایشات یا تجربیات یافت شده اند. بنابراین، این متغیرها ممکن است به عنوان یک عدد فازی در نظر گرفته شوند. برای اولین بار مفهوم اعداد فازی در سال ۱۹۶۵ توسط پروفیسور لطفی عسگرزاده، دانشمند ایرانی تبار و استاد دانشگاه برکلی آمریکا معرفی شد [۱، ۲].

در بسیاری از کاربردها مانند آنالیز، توابع موج در مکانیک کوانتوم و بسیاری از کمیت های فیزیکی، مقادیر به صورت مختلط هستند. بنابراین پارامترها، اعداد مختلط که در اصل فازی نیز هستند در نظر گرفته می شوند. برای اولین بار عدد مختلط فازی در سال ۱۹۸۹ توسط باکلی^۱ ارائه گردید [۳، ۴].

۲ تعاریف

تعریف ۱.۲. عدد فازی مختلط شامل دو عدد فازی است که یک عدد را قسمت حقیقی و عدد دیگر را قسمت موهومی گویند که به صورت زیر نمایش داده می شود:

$$\tilde{z} = \tilde{a} + i\tilde{b}$$

که

* سخنران

^۱J. J. Buckley



$$\tilde{a} = (\underline{a}(\alpha), \overline{a}(\alpha)) \quad , \quad \tilde{b} = (\underline{b}(\alpha), \overline{b}(\alpha)) \quad 0 \leq \alpha \leq 1$$

بنابراین

$$z = \underline{a}(\alpha) + i\underline{b}(\alpha) \quad , \quad \bar{z} = \overline{a}(\alpha) + i\overline{b}(\alpha)$$

تعریف ۲.۲. دستگاه مختلط فازی از معادلات خطی را به صورت زیر فرض می کنیم:

$$\begin{aligned} \tilde{c}_{11}x_1 + \tilde{c}_{12}x_2 + \dots + \tilde{c}_{1n}x_n &= \tilde{w}_1 \\ \tilde{c}_{21}x_1 + \tilde{c}_{22}x_2 + \dots + \tilde{c}_{2n}x_n &= \tilde{w}_2 \\ \dots & \\ \tilde{c}_{n1}x_1 + \tilde{c}_{n2}x_2 + \dots + \tilde{c}_{nn}x_n &= \tilde{w}_n \end{aligned} \quad (1)$$

ماتریس متناظر با معادلات بالا برابر است با: $[C] \{X\} = \{W\}$ که $[C]$ یک ماتریس فازی است و همه ی عناصر آن اعداد مختلط فازی هستند و $\{W\}$ یک بردار ستونی از اعداد مختلط فازی است و $\{X\}$ نامشخص است، ولی برای دستگاه فازی کامل، $\{X\}$ نیز فازی است.

تعریف ۳.۲. دستگاه خطی $[C] \{X\} = \{W\}$ ، دستگاه معادلات مختلط فازی است که $w_k = \tilde{b}_k + i\tilde{d}_k$ ، $1 \leq k \leq n$ بنابراین دستگاه را به صورت زیر بازنویسی می نمایم:

$$[C] \{X\} = B + iD$$

که $B = (b_k)$ و $D = (d_k)$ بردارهای فازی هستند.

تعریف ۴.۲. $[5]$ بردار مختلط فازی $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ به صورت زیر است:

$$x_j = (e_j + if_j) \quad 1 \leq j \leq n$$

اگر $E = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ و $F = (f_1, f_2, \dots, f_n)$ ، آنگاه برای حل دستگاه $[C] \{X\} = \{W\}$ کافی است دو دستگاه زیر را حل نماییم:

$$CE = B \quad , \quad CF = D$$

که به فرم پارامتری زیر است :

$$x_j = (\underline{x}_{jr}, \overline{x}_{jr}) = (\underline{e}_{jr} + i\underline{f}_{jr}, \overline{e}_{jr} + i\overline{f}_{jr}) \quad 1 \leq j \leq n \quad , \quad 0 \leq r \leq 1$$

در ادامه روش تصویری که برای حل دستگاه معادلات مورد استفاده قرار گرفته است توضیح داده می شود.

روش GMRES^۲

این روش تصویری روی $\kappa_m = \kappa$ و $\iota = \kappa$ است، که در آن κ_m زیرفضای کرالیف از بعد m و با بردار شروع $v_1 = b - Ax^{(m)} \perp \kappa_m$ با شرط $x^{(0)} + \kappa_m$ از صفحه ی آفین $x^{(m)}$ را از صفحه ی آفین $x^{(0)} + \kappa_m$ می باشد، که جواب تقریبی $r^{(0)} / \|r^{(0)}\|$ تعیین می کند. اگر بردار اولیه دلخواه و $r^{(0)} = b - Ax^{(0)}$ باشد. $\beta = \|r^{(0)}\|$ است، آنگاه

^۲Generalized Minimum Residual



$$V_m^T A V_m = H_m, \quad V_m^T r^{(\circ)} = V_m^T (\beta v_1) = \beta e_1$$

در نتیجه با استفاده از زیرفضای m بعدی جواب تقریبی به صورت زیر است:

$$x^{(m)} = x^{(\circ)} + V_m y^{(m)}, \quad y^{(m)} = \text{minimum} \|\beta e_1 - \bar{H}_m y\|_2$$

الگوریتم روش به صورت زیر است:

الگوریتم GMRES

۱. Compute $r^{(\circ)} = b - Ax^{(\circ)}$, $\beta = \|r^{(\circ)}\|_2$ and $v_1 = r^{(\circ)}/\beta$.

۲. Define the $(m+1) \times m$ matrix $\bar{H} = (h_{ij})_{1 \leq i \leq m+1, 1 \leq j \leq m}$.

Set $\bar{H} = \circ$.

۳. For $j = 1, 2, \dots, m$. Do :

۴. Compute $w_j = Av_j$.

۵. For $i = 1, 2, \dots, j$. Do :

۶. $h_{ij} = (w_j, v_i)$.

۷. $w_j = w_j - h_{ij}v_i$.

۸. End Do

۹. $h_{j+1,j} = \|w_j\|_2$. If $h_{j+1,j} = \circ$, set $m = j$ and go to ۱۲.

۱۰. $v_{j+1} = w_j / h_{j+1,j}$

۱۱. End Do

۱۲. Compute $y^{(m)}$ the minimizer of $\|\beta e_1 - \bar{H}_m y\|_2$ and $x^{(m)} = x^{(\circ)} + V_m y^{(m)}$, where

$$e = [1, \circ, \dots, \circ]^T, \quad \beta = \|r^{(\circ)}\|_2.$$

۳ مثال عددی و نتیجه گیری

حال دستگاه مختلط فازی 2×2 زیر را در نظر بگیرید:

$$x_1 - x_2 = (r + i(1+r), (2-r) + i(3-r))$$

$$x_1 + 3x_2 = ((4+r) + i(r-4), (7-2r) + i(-1-2r))$$

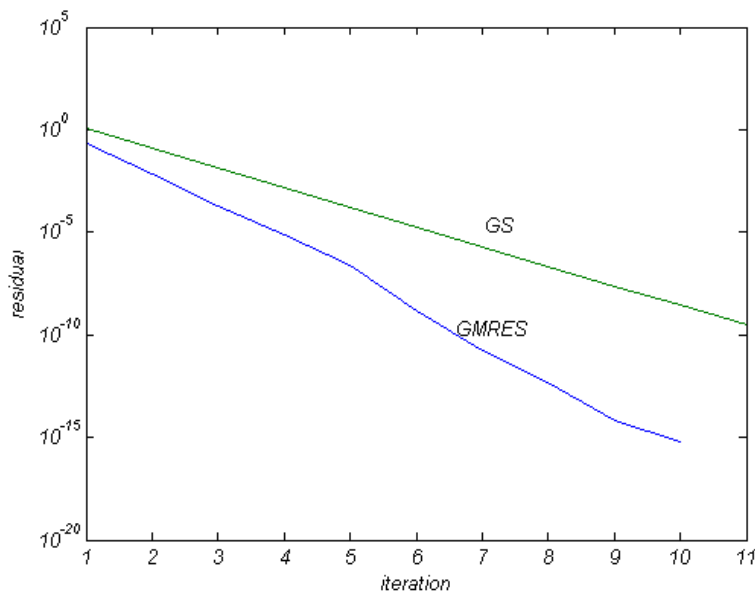
برای حل دستگاه، دو دستگاه حقیقی و مختلط زیر را با روش GMRES حل می نمایم:

$$\begin{bmatrix} 1 & \circ & \circ & 1 \\ 1 & 3 & \circ & \circ \\ \circ & 1 & 1 & \circ \\ \circ & \circ & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_1 \\ e_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r \\ 4+r \\ r-2 \\ 2r-7 \end{bmatrix} \quad (1)$$



$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_1 \\ f_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+r \\ r-4 \\ r-3 \\ 2r+1 \end{bmatrix} \quad (2)$$

نمودار همگرایی دو روش GMRES و گاوس - سایدل به صورت زیر است:



شکل ۱: مقایسه روش GMRES و گاوس- سایدل

که با توجه به شکل، جواب بدست آمده از روش GMRES بهتر از روش گاوس - سایدل است.

مراجع

- [1] Zadeh, L.A., Fuzzy sets, Inform. Control 8(1965) 338-353.
- [2] Zimmermann, H.J., Fuzzy Set Theory and its Applications, Kluwer, Dordrecht, 1996.
- [3] Buckley, J.J., Fuzzy Complex Numbers, Fuzzy Sets and Systems, vol.33, pp.333-345, 1989.
- [4] Buckley, J.J., Qu, Y., Solving Systems of linear fuzzy equations, Fuzzy Sets and Systems 43 (1991) 33-43.
- [5] Jahantigh, M. A., Khezerloo, S., Khezerloo, M., Complex Fuzzy Linear Systems, Industrial Mathematics, Vol.2, No.1 (2010) 21-28.

پست الکترونیکی: fazeli@yazd.ac.ir
پست الکترونیکی: aghaei.s@stu.yazd.ac.ir



یک روش آماری برای کاوش در داده‌های جریان دنباله‌ای

محمد قاسم‌زاده

دانشگاه یزد

حیدر قاسم‌زاده*

دانشگاه یزد

چکیده

در این مقاله یک روش آماری مبتنی بر حد هفدینگ برای ایجاد درخت طبقه‌بندی موسوم به «درخت تصمیم بسیار سریع» در داده‌های جریان دنباله‌ای ارائه می‌گردد. در این روش از یک معیار پیشنهادی برای بخش‌بندی داده‌ها بر اساس صفات بهره می‌بریم. این روش مبتنی بر ترکیب حد هفدینگ و خطای طبقه‌بندی است. در سال‌های اخیر داده‌های جریان دنباله‌ای یک زمینه تحقیقاتی مهم و رو به افزایش در انجمن‌های آماری و علم کامپیوتر به حساب می‌آید. این نوع داده‌ها به شکل دنباله‌های مرتب و بالقوه نامحدود از نقاط داده‌ای هستند که نوعاً توسط فرآیند مولد داده غیر ایستا ایجاد می‌شوند. چنین داده‌هایی به طور پیوسته و در جریان زمان تولید می‌شوند و باید خیلی سریع و به صورت بلادرنگ پردازش شوند. نتایج آزمایشی و تحلیل‌های آماری نشان می‌دهند که بکارگیری روش یاد شده منجر به رسیدن به دقت بالاتر و همچنین حد هفدینگ بهتری می‌گردد.

واژه‌های کلیدی: داده‌های جریان دنباله‌ای، درخت تصمیم بسیار سریع، اندازه‌گیری ناخالصی، معیار بخش‌بندی

۱ مقدمه

در سال‌های اخیر، حجم داده‌ها برای تجزیه و تحلیل کردن بسیار سریع در حال رشد هستند. بنابراین یک زمینه تحقیقاتی جدید به نام داده‌های جریانی به وجود آمد. محققان روش‌ها و الگوریتم‌ها را برای استخراج دانش از این نوع داده‌ها مورد بررسی قرار می‌دهند [۱] و [۲]. داده‌های جریان دنباله‌ای به شکل دنباله‌های مرتب و بالقوه نامحدود از نقاط داده‌ای تولید می‌شوند. در نتیجه تمام داده‌ها نمی‌توانند ذخیره گردند و تجزیه و تحلیل باید به صورت جریان دنباله‌ای از عناصر داده‌ها، بسیار سریع و با یک مرتبه اسکن داده‌ها اتفاق بیفتد. بنابراین انجام این عملیات، روش‌های استاندارد داده‌کاوی نمی‌تواند به کار برده شود. مسئله دیگر، رویداد تغییر مفهوم است [۳] و [۴]. تغییر مفهوم به تغییر در توزیع داده یا تغییر در ساختار داده گفته می‌شود. در این صورت مدل‌های تجزیه و تحلیل باید خودشان را بر طبق تغییرات بروز رسانی کنند. در این مقاله، یک روش آماری برای طبقه‌بندی داده‌های جریان دنباله‌ای بر اساس درخت تصمیم بسیار سریع مبتنی بر ترکیب حد هفدینگ و خطای طبقه‌بندی پیشنهاد می‌شود. نتایج آزمایشی و تحلیل‌های آماری نشان می‌دهند که بکارگیری روش یاد شده منجر به رسیدن به دقت بالاتر و همچنین حد هفدینگ بهتری می‌گردد.

۲ حد هفدینگ

هدف از طراحی درخت‌های تصمیم‌گیری بسیار سریع آن است که به هر نمونه آموزشی فقط یکبار دسترسی و زمان کوتاه ثابتی برای پردازش آن صرف گردد. بخش‌بندی داده‌های جریان دنباله‌ای که از یک گره در حال عبور هستند بر اساس بهترین صفت انجام می‌شود. بهترین صفت در هر گره مبتنی بر یک زیرمجموعه کوچک از نمونه داده‌ها تشخیص داده می‌شود. با ورود جریانی از نمونه‌ها، اولین نمونه‌ها برای انتخاب بهترین صفت ریشه استفاده می‌شوند. بعد از تعیین شدن صفت ریشه درخت



تصمیم، نمونه‌های بعدی به سمت پایین و برگ‌های مربوطه عبور داده می‌شوند تا برای انتخاب بهترین صفت در گره‌های برگ استفاده شوند. این عمل به صورت بازگشتی تکرار می‌شود. مسئله این است که به چه تعداد نمونه در هر گره نیاز است تا بهترین صفت تشخیص داده شود. یک راه‌حل، استفاده از یک نتیجه آماری به نام حد هفدینگ است. این روش از یک مقدار آستانه برای میزان خطای مورد قبول در خروجی، توسط کاربر مشخص می‌گردد. این مقدار آستانه مشخص کند چه موقع میزان خطای بخش‌بندی داده‌ها برای ایجاد شاخه‌ها یک گره مورد قبول است. میزان خطا (ϵ) فقط بر اساس اطلاعات داده‌های موجود در آن گره تعیین می‌گردد. به طور کلی، هر چقدر میزان خطا ($\epsilon + 1$) کمتر در نظر گرفته شود به میزان بیشتری نمونه‌ها در آن گره نیاز است و به همان نسبت به میزان بیشتری فضا برای ذخیره‌سازی نمونه‌ها نیاز است. یک متغیر تصادفی با نام r که دارای مقادیر حقیقی و برد R است را در نظر بگیرید (مثلاً در احتمال این برد ۱ است و برای یک بهره اطلاعاتی این برد $\log c$ است که c تعداد کلاس نمونه داده‌ها می‌باشد). فرض کنید که n مشاهده مستقل از این متغیر انجام شود و میانگین این مشاهدات \bar{r} باشد. حد هفدینگ نشان می‌دهد که میانگین واقعی متغیر بعد از این n مشاهده با احتمال $1 - \delta$ حداقل برابر $\bar{r} - \epsilon$ است که ϵ به شرح زیر محاسبه می‌شود.

$$R = \sqrt{\frac{\ln(\frac{1}{\delta})}{2n}} \quad (1)$$

حد هفدینگ خصوصیت جالبی دارد که مستقل از توزیع احتمالی تولیدکننده مشاهدات است. فرض کنید $G(Xi)$ تابع ابتکاری برای انتخاب صفات آزمون باشد (مانند بهره اطلاعاتی و شاخص جینی). هدف این است که با احتمال بالا، صفت انتخاب شده با استفاده از n نمونه (که n کوچکترین مقدار ممکن است) همان صفت انتخابی با استفاده از نامتناهی نمونه‌ها باشد. فرض کنید که Xa صفت دارای بالاترین مقدار ارزیابی بعد از n نمونه باشد. همچنین فرض کنید که Xb صفت دارای دومین بالاترین مقدار ارزیابی بعد از n نمونه باشد و $\Delta G = G(Xa) - G(Xb) > \epsilon$ باشد، با احتمال $1 - \delta$ انتخاب صحیح است و نمونه‌های بعدی به سمت برگ‌های جدید عبور داده می‌شوند [۴].

۳ اندازه‌گیری ناخالصی بر اساس خطای طبقه‌بندی

فرض کنید که s نشان دهنده مجموعه داده‌ها در یک گره باشد و $n(s)$ تعداد داده‌ها در مجموعه s باشد. همچنین فرض کنید که $n^k(s)$ تعداد داده‌های در کلاس k ام از مجموعه s باشد. آنگاه انتخاب صفت i با $i = 1, \dots, D$ برای بخش‌بندی داده‌های مجموعه s به Q زیرمجموعه به نام S_q^i با $q = 1, \dots, D$ از اندازه‌گیری ناخالصی $g(s)$ محاسبه می‌شود. تابع اندازه‌گیری کیفیت بخش‌بندی می‌تواند به صورت زیر بیان گردد: [۵]

$$\Delta g_i(s) = g(s) - \sum_{q=1}^Q \frac{n(S_q^i)}{n(s)} g(S_q^i) \quad (2) \cdot 1$$

صفتی که بالاترین مقدار کیفیت بخش‌بندی از تابع فوق داشته باشد به عنوان بهترین صفت انتخاب می‌گردد. هر تابع اندازه‌گیری ناخالصی باید دو شرط زیر را رعایت کند:

- اگر تمام مجموعه s در یک کلاس باشند یعنی $n^{k_0}(s) = n(s)$ $\exists k_0 \in \{1, \dots, k\}$ آنگاه $g(s) = 0$ است.
- اگر تعداد مساوی از داده‌های مجموعه s به وسیله یک کلاس بیان شوند یعنی $n^k(s) = n(s)/k$ $\forall k \in \{1, \dots, K\}$ آنگاه تابع $g(s)$ مقدار ماکزیمم دارد.

در متون علمی چندین شکل از اندازه‌گیری ناخالصی مانند بهره اطلاعاتی (در الگوریتم $ID3$) یا شاخص جینی (در الگوریتم $[A]CARD$) پیشنهاد شده است. اندازه‌گیری ناخالصی دیگری به نام خطای طبقه‌بندی وجود دارد که به ندرت در متون علمی



ذکر شده است. خطای طبقه‌بندی به شکل زیر محاسبه می‌شود: [۵]

$$g(s) = 1 - \max_{k \in \{1, \dots, K\}} \frac{n^k(s)}{n(s)} \quad (۳)$$

اکنون یک معیار اندازه‌گیری کیفیت بخش‌بندی بر اساس اندازه‌گیری ناخالصی (۳) محاسبه می‌شود و سپس با حد هفدینگ ترکیب می‌گردد.

۴ معیار پیشنهادی بخش‌بندی

برای به دست آوردن یک معیار اندازه‌گیری کیفیت بخش‌بندی، اندازه‌گیری ناخالصی (۳) در تابع اندازه‌گیری کیفیت بخش‌بندی (۱) جایگذاری می‌کنیم.

$$\Delta g_i(s) = 1 - \max_{k \in \{1, \dots, K\}} \frac{n^k(s)}{n(s)} - \sum_{q=1}^Q \frac{n(S_q^i)}{n(s)} \left(1 - \max_{k \in \{1, \dots, K\}} \frac{n^k(S_q^i)}{n(S_q^i)} \right) \quad (۴)$$

بعد از ساده‌سازی و با توجه به این که $\max_{k \in \{1, \dots, K\}} \frac{n^k(s)}{n(s)}$ برای تمام صفات یکسان است و فقط اختلاف مابین مقادیر کیفیت بخش‌بندی مهم است، بنابراین خواهیم داشت [۳]:

$$\Delta g_i(s) = \frac{\sum_{q=1}^Q \max_{k \in \{1, \dots, K\}} n^k(S_q^i)}{n(s)} \quad (۵)$$

تابع فوق بهره دقت طبقه‌بندی را محاسبه می‌کند. با ترکیب حد هفدینگ (۱) و تابع اندازه‌گیری کیفیت بخش‌بندی (۵) نامعادله زیر پیشنهاد می‌گردد:

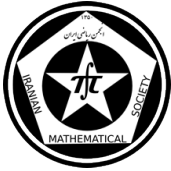
$$\Delta g_i(s) - \Delta g_j(s) > R \sqrt{\frac{\ln(\frac{1}{\delta})}{2n}} \quad (۶)$$

صفت i بالاترین مقدار بهره دقت و صفت j دومین بالاترین مقدار بهره دقت را مشخص می‌کنند. در ساخت درخت تصمیم بسیار سریع نیز از مدل ترکیبی استفاده می‌شود. در ابتدای کاوش در داده‌های جریان دنباله‌ای یعنی ساخت سطوح بالایی درخت تصمیم از رابطه حد ترکیبی پیشنهادی استفاده می‌گردد و برای ساخت سطوح پایینی درخت از حد هفدینگ بر اساس شاخص جینی استفاده می‌شود. این مدل ترکیبی به علاوه حد ترکیبی در مقایسه به درخت تصمیم هفدینگ دقت بالاتر طبقه‌بندی داده‌های جریان دنباله‌ای می‌گردد.

۵ تحلیل نتایج

دو مجموعه داده‌ای واقعی برای آزمایش استفاده می‌شود که از مخزن یادگیری ماشین [۷] UCI گرفته شده‌اند. اولین مجموعه داده‌ای CUP KDD ۹۹ است که شامل ۴۸۹۸۴۳۱ داده و ۴۱ صفت می‌باشد. هفت صفت اسمی و ۳۴ صفت عددی است. هر داده به یکی از دو کلاس اتصال حمله شبکه‌ای یا اتصال شبکه‌ای عادی تعلق دارد. کلاس اتصال حمله شبکه‌ای، جدول ۱: میانگین دقت محاسبه شده

مجموعه داده‌ای	میانگین دقت درخت تصمیم هفدینگی	میانگین دقت درخت تصمیم حد ترکیبی
CUP KDD ۹۹	۰,۹۵۵۴	۰,۹۵۸۱
Covertime	۰,۰۳۳۴	۰,۰۳۸۴



همچنان که در جدول ۱ مشاهده می‌شود درخت تصمیم بر اساس حد ترکیبی دقت بالاتری را نسبت درخت تصمیم هدفینگ دارد. در درخت تصمیم حد ترکیبی تقریباً

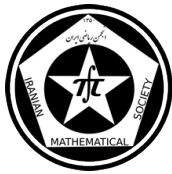
۶ نتیجه

در این مقاله یک معیار ترکیبی مبتنی بر اندازه‌گیری خطای طبقه‌بندی برای بخش‌بندی داده‌ها و گسترش گره‌های درخت پیشنهاد گردید. این معیار موجب می‌شود بهترین صفت در میان داده‌های فعلی در گره، انتخاب شود به طوری که تقریباً بهترین صفت در میان کل داده‌ها نیز باشد. براساس نتایج آزمایشی و تحلیل‌های آماری نشان داده شد که بکارگیری روش ترکیبی منجر به رسیدن به دقت بالاتر و همچنین حد هدفینگ بهتر می‌گردد.

مراجع

- [1] M. Gaber, A. Zaslavsky, and S. Krishnaswamy, *Mining data streams: A review*, Sigmod Rec., vol. 34,
- [2] R. Bose, W. van der Aalst, I. Zliobaite, and M. Pechenizkiy, *Dealing with concept drifts in process mining*, IEEE Trans. Neural Netw. Learn Syst., vol. 25, no. 1, pp. 154–171, Jan. 2014.
- [3] L. Rutkowski, *Fellow*, M. Jaworski, L. Pietruczuk, and P. Duda, *A New Method for Data Stream Mining Based on the Misclassification Error*, IEEE TRANS. ON Neural Networks and Learning Systems, vol. 26, no. 5, pp.1048-1059, May 2015.
- [4] P. Domingos and G. Hulten, *Mining high-speed data streams*, in Proc. 6th ACM SIGKDD Int. Conf. Knowl Discovery Data Mining, pp. 71–80, 2000.
- [5] L. Rutkowski, L. Pietruczuk, P. Duda, and M. Jaworski, *Decision trees for mining data streams based on the McDiarmid's bound*, IEEE Trans. Knowl. Data Eng., vol. 25, no. 6, pp. 1272–1279, Jun. 2013.
- [6] M. Wozniak, *A hybrid decision tree training method using data streams*, Knowl. Inform. Syst., vol. 29, no. 2, pp. 335–347, 2011.
- [7] A. Frank and A. Asuncion., *UCI Machine Learning Repository*[Online]. Available: <http://archive.ics.uci.edu/ml/> , 2010.
- [8] L. Rutkowski, M. Jaworski, L. Pietruczuk, and P. Duda, *The CART decision tree for mining data streams*, Int. J. Inform. Sci., vol. 266, pp. 1–15, May 2014.

معادلات دیفرانسیل



آنالیز انشعاب های سیستم دینامیکی نواک-بنگام

زینب لجمیری
دانشگاه شهرکردرضا خوش سیر
دانشگاه شهرکردپریسا عزیزی*
دانشگاه شهرکرد

چکیده

در این مقاله وجود انشعاب های یک سیستم پنج بعدی مستقل از زمان نواک-بنگام^۱ مورد بررسی قرار می گیرد. سیستم نواک-بنگام مدل بررسی پاسخ سیستم ایمنی بدن (CTL) در مقابل هجوم ویروس HIV است. هریک از عوامل تاثیرگذار در بیمار شدن سلول های سالم در تعامل با سلول های آلوده و ویروس، و پاسخ CTL در این مدل مورد بررسی قرار می گیرد. با بررسی نقطه انشعاب هیف و سیکل های حدی با استفاده از معیار لیو^۲ تاثیر عملکرد سیستم ایمنی بدن را تا زمان رسیدن به مرحله ایدز با استفاده از الگوریتم های عددی و محاسبه ی دیاگرام انشعاب مورد بررسی قرار می دهیم.

واژه های کلیدی: انشعاب هیف، سیکل های حدی، معیار لیو

Mathematics Subject Classification [2010]: 13D45, 39B42

۱ مقدمه و معرفی مدل دینامیکی

مطالعه سیستم ایمنی با استفاده از مدل های ریاضی از سال ۱۹۹۰ شروع شده است. ویروس های عفونی لنفوسیت T سیتوتیکس (CTL) نقش کاربردی مهمی در مکانیزم واکنش ایمنی در داخل بدن دارند. بنابراین بسیاری از مولفان، دینامیک ویروس CTL را مورد بررسی قرار داده اند [۳، ۴]. نواک و بنگام یک مدل ریاضی برای سیستم ایمنی بدن بصورت زیر ارائه کرده اند [۲]:

$$\begin{cases} \dot{x} = \lambda - dx - \beta xv, \\ \dot{y} = \beta xv - ay - syz + (r_2 + r_4)w, \\ \dot{v} = ky - uv \\ \dot{z} = (r + r_1 + r_2)w - bz - syz, \\ \dot{w} = syz - rw, \end{cases} \quad (1)$$

$$r = r_1 + r_2 + r_3 + r_4, c = \frac{s(r_1 + r_2)}{r}, p = \frac{s(r_1 + r_3)}{r},$$

که در آن $k, d, a, u, b, s, r_1, r_2, r_3, r_4, \lambda, \beta$ پارامترهای حقیقی و مثبت هستند. این سیستم دارای نقاط تعادل زیر است:

*سخنران
Nowak-Bangham.^۱
Liu^۲



$$\begin{aligned}
 E_1 &= (x, y, v, z, w) = \left(\frac{\lambda}{a}, 0, 0, 0, 0\right), R = \frac{\lambda\beta k}{aud} \text{ تحت شرایط} \\
 E_2 &= (x, y, v, z, w) = \left(\frac{au}{\beta k}, \frac{\lambda\beta k - aud}{a\beta k}, \frac{\lambda\beta k - aud}{a\beta k}, 0, 0\right), R \geq 1 \text{ تحت شرایط} \\
 E_3 &= (x, y, v, z, w) = \left(\frac{\lambda cu}{cud + b\beta k}, \frac{b}{c}, \frac{bk}{cu}, \frac{1}{p} \left(\frac{c\lambda\beta k}{cud + b\beta k} - a\right), \frac{sb}{rcp} \left(\frac{c\lambda\beta k}{cud + b\beta k} - a\right)\right) \\
 &\text{تحت شرایط } \bar{R} = 1 + \frac{b\beta k}{cud} \text{ بطوری که } R \geq \bar{R}
 \end{aligned}$$

با به دست آوردن دترمینان ماتریس ژاکوبین دستگاه (۱) در نقطه E_3 ، $\gamma(\omega)$ ، شرایط زیر را تعریف می کنیم:

$$\begin{aligned}
 \gamma(\omega) &= \Phi(\omega) + \psi(\omega), \\
 f(\omega) &= (\omega + d + vb)(\omega + a)(\omega + u) - \beta kx(\omega + d), \\
 g(\omega) &= \omega(\omega + r + b + sy), \\
 \psi(\omega) &= z(\omega + d + vb)(\omega + u)(\omega + b)(s\omega + pr), \\
 f(\omega) &= \omega^3 + \omega^2(a + u + d\bar{R}) + \omega au \left(1 + d\bar{R} \frac{a+u}{au} - \frac{R}{\bar{R}}\right) + aud(\bar{R} - \frac{R}{\bar{R}}), \\
 g(\omega) &= \omega^2 + \omega(r + b(1 + \frac{s}{c})), \\
 \omega &= \frac{a}{p} \left(\frac{R}{\bar{R}} - 1\right) s\omega^2 + \omega^2 pr + s(u + b + d\bar{R}) + \omega^2 bpr + pr u + bus + d\bar{R}(pr + s(b + u)) \\
 &+ \omega bpr u + d\bar{R}(bpr + pr u + bus) + bpr u d\bar{R}, \\
 f_0 &= 1, f_1 = a + ud\bar{R}, f_2(R) = au \left(1 + d\bar{R} \frac{a+u}{au} - \frac{R}{\bar{R}}\right), f_3(R) = aud(\bar{R} - \frac{R}{\bar{R}}), \\
 \psi_0(R) &= \frac{as}{p} \left(\frac{R}{\bar{R}} - 1\right), \psi_1(R) = \frac{a}{p} \left(\frac{R}{\bar{R}} - 1\right) (pr + s(u + b + d\bar{R})), \\
 \psi_2(R) &= \frac{a}{p} \left(\frac{R}{\bar{R}} - 1\right) (bpr + pr u + bus + d\bar{R}(pr + s(b + u))), \\
 \psi_3(R) &= \frac{a}{p} \left(\frac{R}{\bar{R}} - 1\right) (bpr u + d\bar{R}(bpr + pr u + bus)), \psi_4 = audrb(R - \bar{R}), \\
 \gamma_1(R) &= f_1 + g_1 + \psi_0(R), \gamma_2(R) = f_2(R) + f_1 g_1 + \psi_1(R), \\
 \gamma_3(R) &= f_3(R) + f_2(R) g_1 + \psi_2(R), \gamma_4(R) = f_3(R) g_1 + \psi_3(R), \gamma_5(R) = \psi_4(R),
 \end{aligned}$$

قضیه ۱.۱. فرض کنید شرایط زیر برقرار باشد:

$$\begin{aligned}
 \gamma'_4 &> 0 \text{ and } \gamma'_3 < 0, \gamma_1(\xi)\gamma_4(\xi) - \gamma_5(\xi) < 0, \\
 \xi &= \max\{x \in R : \gamma_1(x)\gamma_4(x) - \gamma_3(x) = 0\},
 \end{aligned}$$

آنگاه سیستم (۱) دارای یک نقطه انشعاب هیف است.

۲ نتایج عددی

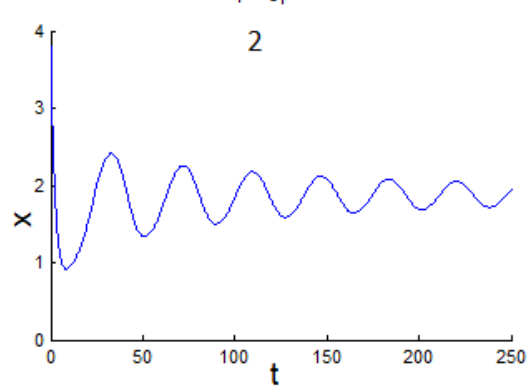
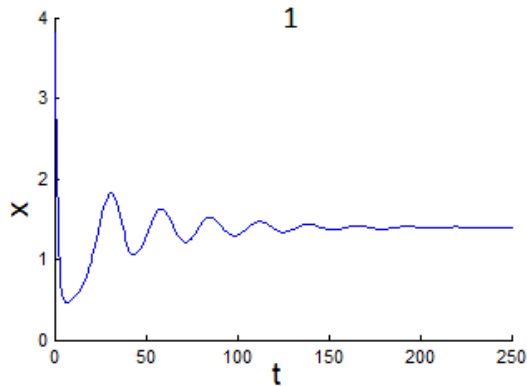
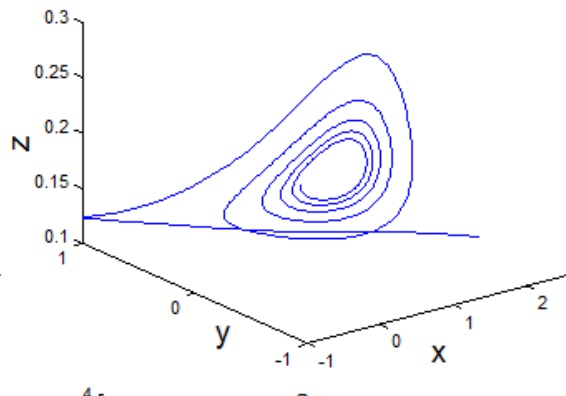
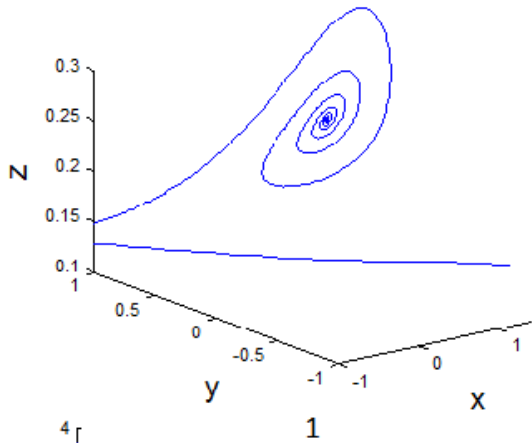
در این قسمت به بررسی پایداری و ناپایداری نقاط تعادل نسبت به زمان و پارامتر آزاد β ، وجود انشعاب های همبند-۱ و همبند-۲ شامل انشعاب هیف زیر بحرانی و سیکل های حدی منشعب شده از آن با استفاده از مجموعه ثابت پارامترهای



زیر و روش امتداد پیوسته [۶] می پردازیم، نتایج عددی در شکل های ۱ و ۲ ارائه شده است:

$$b = 0.3, r_1 = 0.1, r_2 = 0.1, r_3 = 0.3, r_4 = 0.1, s = 2.5, \lambda = 1, \beta = 0.33, a = 0.2, u = 1,$$

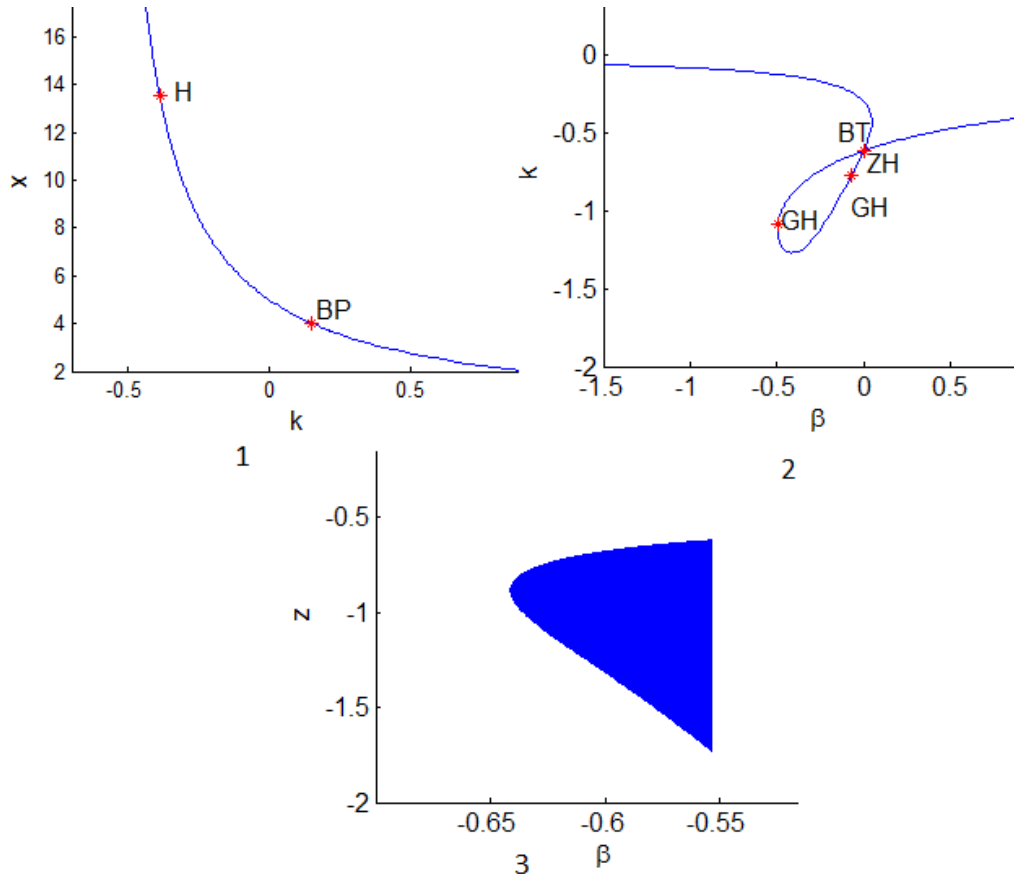
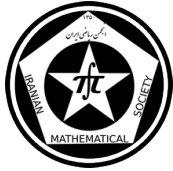
$$d = 0.2, R = 1.640, c = 0.3, p = 1.22, (x, y, v, z, w) = (0.24, 1, 0.199, 0.41, 0.06),$$



3

4

شکل ۱: ۱- نمودار پایداری مدار دستگاه نسبت به پارامتر آزاد β ۲- نمودار ناپایداری مدار دستگاه نسبت به پارامتر آزاد β ۳- نمودار پایداری دستگاه نسبت به زمان ۴- نمودار ناپایداری دستگاه نسبت به زمان



شکل ۲: ۱- منحنی انشعاب های همبعد-۱، ۲- منحنی انشعاب های همبعد-۲، ۳- سیکل های حدی انشعاب هیف

مراجع

- [1] M.A. Nowak, C.R.M. Bangham, *Bifurcation analysis of the Nowak-Bangham model in CTL dynamics*, mathematical Biosciences, 221 (2009), pp. 33–42.
- [2] M.A. Nowak, C.R.M. Bangham, *population dynamic of immune responses to presistent viruses*, science, 272 (1996) 74.
- [3] R.M. Anderson, R.M. May, *infection Diseases of Humans: Dynamic and control*, Oxford university, Oxford, 1991.
- [4] D. Wodarz, *killer cell dynamics, interdisciplinary Applied Mathematics*, Vol. 32, springer, New York, 2007 . mathematical approaches to immunology.
- [5] Yu. A. Kuznetsov, *Elements of Applied Bifurcation Theory*, 3rd ed., Springer-Verlag, New York, 2004.
- [6] E. L. Allgower and K. Georg, *Numerical Continuation Methods: An Introduction*, Springer-Verlag, Berlin, 1990

پست الکترونیکی: aziziparisa1@gmail.com
 پست الکترونیکی: khoshsiar@sci.sku.ac.ir
 پست الکترونیکی: lajmiri.zb@gmail.com



بررسی پایداری و نقاط انشعاب یک سیستم دینامیکی جمعیتی با تابع پاسخ هولینگ

زینب لجمیری*
دانشگاه شهرکرد

دکتر رضا خوش سیر
دانشگاه شهرکرد

چکیده

این مقاله به تحلیل رفتار کیفی و دینامیکی یک مدل جمعیتی برای تعیین وجود جمعیت های تعادلی، نوسانی و انفجار جمعیتی یک سیستم دینامیکی زیستی غیرخطی با چهار پارامتر حقیقی می پردازد. پدیده های دینامیکی فوق که از طریق نقاط تعادل پایدار، انشعاب هپف، سیکل های حدی، و انشعاب هموکلیتیک حادث می شوند، را با استفاده از الگوریتم های امتداد عددی و تکنیک های دینامیکی تعیین می کنیم. جهت انشعاب هاپف و پایداری جواب های تناوبی انشعابی با محاسبه ضرایب فرم نرمال تعیین می شود. با استفاده از تکنیک امتداد عددی، دیاگرام انشعاب و سیکل های حدی نیز محاسبه می گردند.

واژه های کلیدی: (انشعاب هپف، انشعاب هموکلیتیک، سیکل حدی، ضرایب فرم نرمال)

Mathematics Subject Classification [2010]: 13D45, 39B42

۱ مقدمه

استفاده ی بهینه و مداوم از منابع باعث می شود که نه تعادل طبیعی محیط از بین برود و نه زندگی انسانها در نبود منابع دشوار گردد. یکی از معمول ترین مدل های ریاضی در زیست شناسی، مدل شکارشکارچی است که در آن تعامل بین دو گونه از موجودات مدل سازی می گردد، یکی از این مدل ها سیستم لزی^۱ می باشد. تابع پاسخ این مدل توسط هولینگ^۲ در زمینه ی حشره شناسی معرفی شد، که نشان می دهد در صورت وجود جمعیت های تعادلی (نقاط تعادل)، گونه های جمعیتی برای همیشه در همان سطح باقی می مانند، در صورت وجود جمعیت های نوسانی (سیکل های حدی)، گونه ها افزایش و کاهش دارند ولی هیچ گونه ای به طور کامل از بین نمی رود و دچار انقراض نمی شود و در صورت انفجار جمعیتی (انشعاب هموکلیتیک) بر اثر شرایط زیست محیطی مطلوب و نشان دادن حالت تدافعی بهتر، جمعیت طعمه از ماکسیم خط آستانه جمعیت متعادل خود فراتر می رود تا زمانیکه دوباره تحت شرایطی کاهش یافته و به خط آستانه تعادل برسد [۳]. سیستم مورد بحث به صورت زیر است [۱]، که در آن: $b > -\sqrt{a}$ ، $a > 0$ ، $\delta, \beta > 0$ ، $x, y \in \{(x, y) : x > 0, y > 0\}$

$$\begin{cases} \dot{x} = x(1-x) - \frac{x^2 y}{ax^2 + bx + 1} \\ \dot{y} = y(\delta - \frac{\beta y}{x}) \end{cases} \quad (1)$$

تعریف ۱.۱. برای سیستم دینامیکی $\dot{x} = f(x, \alpha)$ که $x \in R^n, \alpha \in R^p$ نقطه $(x^*, \alpha^*) \in R^n \times R^p$ را یک نقطه تعادل نامیم هر گاه $f(x^*, \alpha^*) = 0$. [۴]

* سخنران
Leslie^۱
Holling^۲



تعریف ۲.۱. نقطه تعادل x^* را زینی گوئیم، اگر مقادیر ویژه ماتریس $Df(x^*, \alpha^*)$ دارای قسمت حقیقی مثبت و منفی باشد، و تباهیده گوئیم، اگر ماتریس $Df(x^*, \alpha^*)$ مقدار ویژه صفر داشته باشد [۴].

لم ۳.۱. ([۱]) فرض کنید $A = (\frac{\delta}{\beta} + b - a)^2 + 3a(b - 1)$ و

$$\Delta = -4A^3 + (27a^2 + 9a(1-b))(\frac{\delta}{\beta} + b - a) - 2(\frac{\delta}{\beta} + b - a)^3$$

(a) اگر $\Delta > 0$ ، آنگاه سیستم (۱) دارای یک نقطه تعادل غیر زینی E_1 است.

(b) اگر $\Delta = 0$ و

(۱b) $A > 0$ آنگاه سیستم (۱) دارای یک نقطه تعادل منحصربفرد غیر زینی E_2 است.

(b۲) اگر $A = 0$ آنگاه سیستم (۱) دارای یک نقطه تعادل مثبت و منحصربفرد تباهیده E_3 است.

(c) اگر $\Delta < 0$ و $\frac{\delta}{\beta} \leq a - b - \sqrt{3a(1-b)}$ و $-\sqrt{a} < b < 1$ ، آنگاه سیستم (۱) دارای سه نقطه تعادل مثبت و متفاوت E_1, E_2, E_3 است، که E_3 زینی می باشد.

$$E_1(x^*, y^*) = (1 - \delta, \frac{\delta}{\beta}(1 - \delta)), E_2 = (\frac{\beta\delta}{\beta\delta + (1 - \delta)^2}, \frac{\delta^2}{\beta\delta + (1 - \delta)^2}), E_3 = (\frac{3}{1 - b}, \frac{\delta}{\beta} \frac{3}{1 - b})$$

۲ نتایج اصلی

در این قسمت پایداری نقاط تعادل و انشعاب آنها وقتی یک و دو پارامتر از پارامترهای سیستم تغییر می کند را بررسی می کنیم. ابتدا با شروع از یک نقطه تعادل و با استفاده از روش امتداد عددی پیوسته [۲]، خم نقاط تعادل را با تغییر یک پارامتر محاسبه و کلیه نقاط انشعاب روی آن را تعیین می کنیم، سپس با شروع از یک نقطه انشعاب بدست آمده و تغییر دو پارامتر، خم های عددی مختلف انشعاب و نقاط متناظر انشعاب روی آنها را بدست می آوریم. اگر $\delta = 0.5$ را به عنوان پارامتر آزاد و سایر پارامترها و متغیرها را ثابت و با مقادیر $b = -0.5, a = 10, \beta = 0.333333, x = 0.39$ و $y = 0.58$ قرار دهیم، انشعاب های همبند ۱ نقاط تعادلی که شامل انشعاب هیف زیر بحرانی است، به شرح زیر محاسبه می شود و دیاگرام آن در شکل ۱ قسمت (الف) نشان داده شده است:

label = LP, x = (0.499996 0.749994 0.499999)

a=1.870593e+004

label = H , x = (0.499999 0.749999 0.499999)

Neutral saddle

label = LP, x = (0.430074 0.641692 0.497349)

a=-3.746749e+000

label = H , x = (0.400001 0.600001 0.499999)

First Lyapunov coefficient = 6.765879e+000

با در نظر گرفتن نقطه هایف به دست آمده در مرحله قبل به عنوان نقطه آغازین، خانواده ای از سیکل های حدی به همراه ضرایب فرم نرمال آنها با آزاد قرار دادن پارامتر δ به صورت زیر محاسبه شده (شکل ۱ قسمت (ب) و (ج))

Limit point cycle (period = 2.809886e+001, parameter = 4.999981e-001)

Normal form coefficient = 3.787920e-002



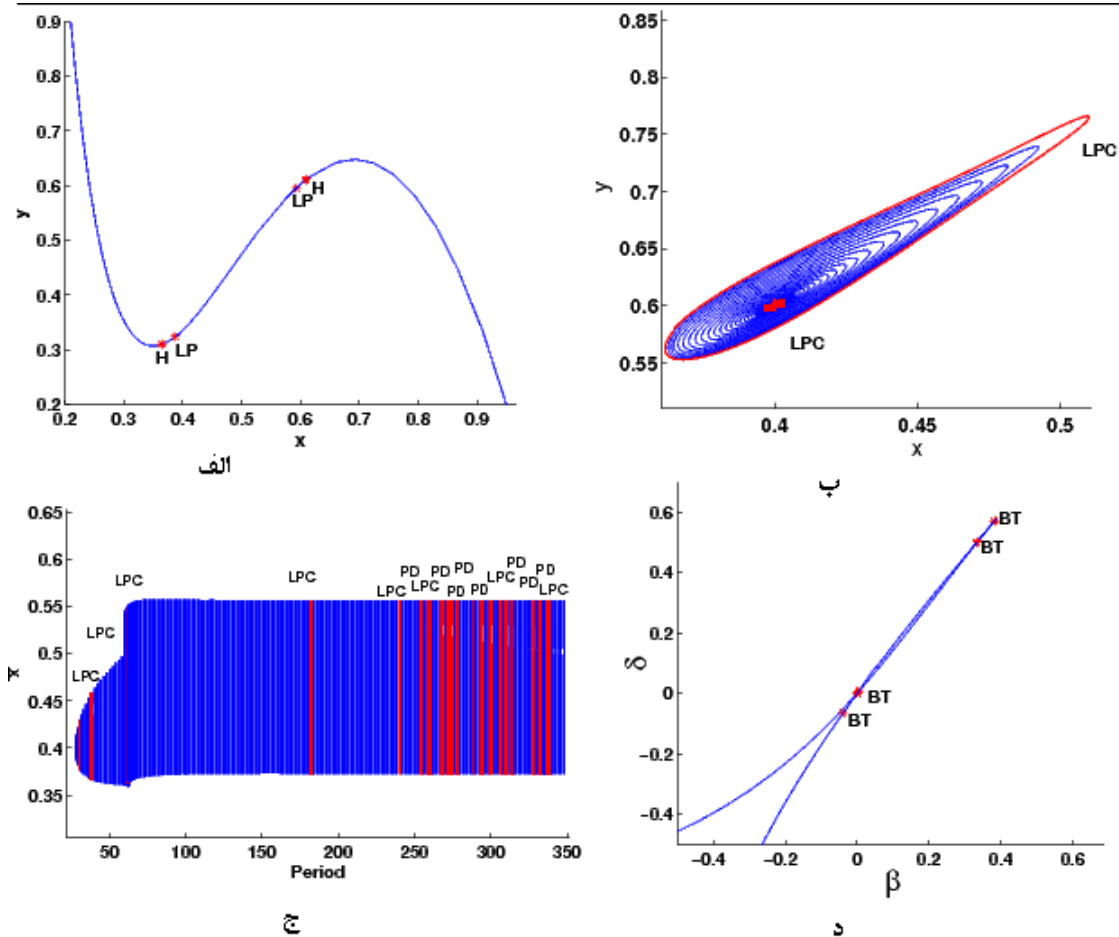
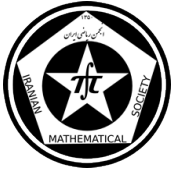
Limit point cycle (period = 2.809886e+001, parameter = 4.999981e-001)
 Normal form coefficient = 8.346238e-001
 Limit point cycle (period = 6.147957e+001, parameter = 5.010396e-001)
 Normal form coefficient = -8.997390e-002
 Limit point cycle (period = 1.782926e+002, parameter = 4.993615e-001)
 Normal form coefficient = -4.197384e-001
 Period Doubling (period = 2.532912e+002, parameter = 4.993615e-001)
 Normal form coefficient = 4.818100e-006
 Period Doubling (period = 2.882910e+002, parameter = 4.993615e-001)
 Normal form coefficient = -2.827609e-007
 Limit point cycle (period = 2.882918e+002, parameter = 4.993615e-001)
 Normal form coefficient = -5.858022e-002
 Period Doubling (period = 3.132908e+002, parameter = 4.993615e-001)
 Normal form coefficient = -1.840599e-006
 Period Doubling (period = 3.302995e+002, parameter = 4.993615e-001)
 Normal form coefficient = 2.940100e-006

با تغییر دو پارامتر δ و β انشعاب های همبعد ۲ به شرح زیر بدست می آید:

label = BT, x = (0.430074 0.641691 0.381976 0.569926 0.000000)
 (a,b)=(3.116163e-001, 5.367915e-001)
 label = BT, x = (0.500000 0.750000 0.333333 0.500000 0.000000)
 (a,b)=(-1.849000e-001, -1.294300e+000)
 label = BT, x = (0.660331 0.889152 -0.000000 -0.000000 -0.000000)
 (a,b)=(-2.129652e-009, 3.292908e+000)
 label = BT, x = (0.338416 0.555137 -0.000000 -0.000000 -0.000000)
 (a,b)=(6.879794e-008, -1.274577e+001)

با محاسبه و ترسیم انشعاب های همبعد ۱ در قسمت (الف) شکل ۱، وجود انشعاب های پ نشان داده شده است، این انشعاب مهم ترین نقش را در مدل های اکولوژی جمعیتی ایفا می کند، زیرا رفتار تناوبی و نوسانی پیچیده تر و قابل بحث تر از رفتار ثابت، و رفتار آشوبی هم پیچیده تر از رفتار تناوبی است و نیز این که انشعاب های زمانی رخ می دهد که مقدار مواد مغذی برای شکار و در نتیجه مقدار طعمه ی در دسترس برای شکارچی افزایش میابد و این باعث ادامه ی چرخه در گونه های شکار و شکارچی در طبیعت می شود [۳].

وجود انشعاب همبعد ۲ (Bogdanov-Takens) که با BT مشهود شده است در مدل های دینامیک اکولوژی ثابت می کند که انشعاب شبه هایف و هموکلینیک منشعب از BT باید وجود داشته باشد، در این مدل ها اغلب شاهد یک انفجار جمعیت ناگهانی در نزدیکی انشعاب هموکلینیک خواهیم بود که منجر به جذب آشوب می شود [۳]. (قسمت (د) شکل ۱)

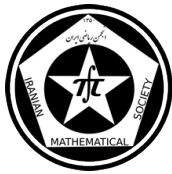


شکل ۱: (الف) خم نقاط تعادل به همراه انشعاب های همبند ۱، (ب) سیکل های حدی در صفحه متغیر های حالت، (ج) سیکل های حدی نسبت به محور تناوب، (د) دیاگرام انشعاب به همراه نقاط انشعاب همبند ۲

مراجع

- [1] J. Huang, S. Ruan, J. Song, *Bifurcations in predator-prey system of Leslie type with generalized Holling type III functional response*, J. Differential Equations, 257 (2014) 1721–1752.
- [2] E. L. Allgower, K. Georg, *Numerical Continuation Methods: An Introduction*, Springer Verlag, Berlin, 1990.
- [3] A. D. Bazykin, *Nonlinear Dynamics of interacting Populations*, Word Sci. ser. Nonlinear Sci. Ser. A, Vol. 11, Word Scientific, Singapore, 1998.
- [4] Yu. A. Kuznetsov, *Elements of Applied Bifurcation Theory*, 3rd ed., Springer-Verlag, New York, 2004.

پست الکترونیکی: lajmiri.zb@gmail.com
پست الکترونیکی: khoshsiar@sci.sku.ac.ir



بسط های نمایی برای ساده سازی تابع پوانکاره موضعی حول مدار هموکلینیک

نیلوفر کیاماری*

دانشگاه تربیت مدرس

چکیده

روش معمول برای مطالعه انشعابات مدارهای هموکلینیک^۱، بحث درباره تابع بازگشتی پوانکاره حول آنها می باشد که به صورت ترکیبی از دو قسمت موضعی و کلی معرفی می شود. تابع موضعی پوانکاره در یک همسایگی مبدا و تابع کلی در امتداد مدار هموکلینیک و در خارج همسایگی قبلی تعریف می شود. اما مشکل اصلی در مورد تابع پوانکاره موضعی است. در این مقاله روش بسیار جالب بسط های نمایی برای رسیدن به صورت ساده ای از تابع پوانکاره موضعی شرح داده می شود. یک فرم نرمال مناسب برای دستگاه مورد نظر با شرایط موجود به دست می آید که توسط آن بسط های نمایی تا حد امکان ساده پیدا می شود. این روش به هیچ شرطی روی مقادیر ویژه نیاز ندارد و در اثبات وجود جاذب های شبه لورنز در شکافت انشعاب های هموکلینیک مدار-چرخش^۲ و شیب-چرخش^۳ کاربرد دارد.

واژه های کلیدی: بسط های نمایی، تابع پوانکاره، مدار هموکلینیک

۱ مقدمه

دستگاه معادلات دیفرانسیل دو پارامتری هموار به صورت

$$\dot{X} = f(x, \mu) \quad (1)$$

را که $x \in R^3$ و $\mu = (\mu_1, \mu_2) \in R^2$ در نظر می گیریم. فرض می کنیم دستگاه مورد نظر، یک نقطه ی تعادل هذلولوی در مبدا دارد و دارای تقارن نیز می باشد، یعنی دیفیومورفیسم R موجود است که $Rf(u, \mu) = f(Ru, \mu)$. بعد فضای نقاط ثابت R یک در نظر می گیریم. همچنین فرض می کنیم $Df(0, 0)$ دارای سه مقدار ویژه λ_u و λ_{ss} ، λ_s باشد که $\lambda_{ss} < \lambda_s < 0 < \lambda_u$. قرار می دهیم $\alpha = -\frac{\lambda_{ss}}{\lambda_u}$ ، $\beta = -\frac{\lambda_s}{\lambda_u}$. به علاوه فرض می کنیم که برای $\mu = 0$ یک مدار هموکلینیک در مبدا وجود دارد. به دلیل تقارن R_γ هم یک مدار هموکلینیک دیگر خواهد بود.

مختصات $x = (x_u, x_s, x_{ss})$ را در نظر می گیریم. با توجه به بسط تیلور تابع F حول مبدا و یک تغییر متغیر مناسب به سادگی دیده می شود که دستگاه (۱) را می توان به صورت معادلات دیفرانسیل

$$\begin{cases} \dot{x}_u &= x_u + F_u(x_u, x_s, x_{ss}, \mu) \\ \dot{x}_s &= -\beta x_s + F_s(x_u, x_s, x_{ss}, \mu) \\ \dot{x}_{ss} &= -\alpha x_{ss} + F_{ss}(x_u, x_s, x_{ss}, \mu) \end{cases} \quad (2)$$

*سخنران

^۱homoclinic orbit^۲orbit-flip^۳inclination-flip



نوشت که

$$D^i F_j(\circ, \mu) = \circ, i = \circ, 1, j = u, s, ss$$

فرض می کنیم

$$R(x_u, x_s, x_{ss}) = (-x_u, x_s, -x_{ss}). \quad (3)$$

گزاره ۱.۱. دستگاه معادلات دیفرانسیل (۲) همراه با تقارن (۳) به صورت هموار هم ارز است با دستگاه معادلاتی که در آن

$$\begin{aligned} F_u &= \circ, \\ F_s &= O(|x_u| |x_{ss}, x_s|), \\ F_{ss} &= O(|x_u| |x_{ss}|). \end{aligned}$$

نظریه بسط های نمایی اولین بار در کارهای شلنیکوف^۴ در دهه ۶۰ هنگامی که روی انشعاب های هموکلینیک و هتروکلینیک^۵ مطالعه می کرد بیان شد [۴] و [۵]. بعدها این نظریه برای حالات مختلط شامل دستگاه های با نقطه تعادل هندلولوی و غیر هندلولوی توسعه داده شد. در ادامه این نظریه را برای مطالعه دستگاه مورد نظرمان به کار می بریم و با استفاده از آن فرمول های مناسبی برای تابع بازگشتی پوانکاره به صورت موضعی حول مبدا می یابیم. فرض کنید میدان برداری X_μ بعد از اعمال گزاره ۱.۱ در مختصات $x = (x_u, x_s, x_{ss})$ نزدیک مبدا به صورت زیر داده شده باشد.

$$X_\mu(x) = x_u \frac{\partial}{\partial x_u} + (-\beta x_s + F_s(x; \mu)) \frac{\partial}{\partial x_s} + (-\alpha x_{ss} + F_{ss}(x; \mu)) \frac{\partial}{\partial x_{ss}} \quad (4)$$

حال ۴ صفحه متقاطع بر γ و R_γ را مانند شکل ۱ در نظر بگیرید. بدون از دست دادن کلیت می توان فرض کرد

$$\begin{aligned} \Sigma_u &= \{(\delta, x_s, x_{ss}) \mid |x_s|, |x_{ss}| < \delta\}, \\ \Sigma_{ss} &= \{(x_u, x_s, \delta) \mid |x_u|, |x_s| < \delta\} \end{aligned}$$

بیان کننده این ۴ صفحه متقاطع باشند. حال قرار دهید $\Sigma^{in} = \Sigma_{ss} \cup R(\Sigma_{ss}), \Sigma^{out} = \Sigma_u \cup R(\Sigma_u)$ برای $\circ < \tau < 1$ و $|\xi_s| < 1$ فرض کنید $x(t, \tau, \xi_s; \mu) = (x_u, x_s, x_{ss})(t, \tau, \xi_s; \mu)$ یک جواب از X_μ با شرایط اولیه زیر باشد.

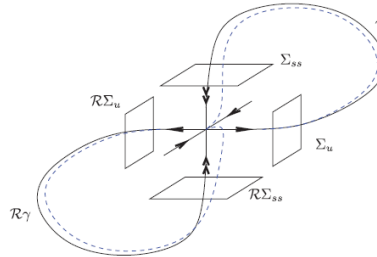
$$|x_u(\tau, \tau, \xi_s; \mu)| = 1, x_s(\circ, \tau, \xi_s; \mu) = \xi_s, |x_{ss}(\circ, \tau, \xi_s; \mu)| = 1. \quad (5)$$

قضیه ۲.۱. میدان برداری (۴) را در نظر بگیرید، آنگاه همسایگی $N_\delta(\circ)$ از مبدا در R^3 وجود دارد که در شرایط زیر صدق می کند.

(a) برای هر (τ, ξ_s) که $\circ < \tau < \delta$ و $|\xi_s| < \delta$ ، عدد $t_\circ > \tau$ وابسته به (τ, ξ_s) و $x : [\circ, t_\circ] \rightarrow R^3$ وجود دارد که در شرایط (۵) صدق می کند.

(b) $x(t; \tau, \xi_s) = (x_u, x_s, x_{ss})(t; \tau, \xi_s)$ از رده C^∞ نسبت به $(t, \tau, \xi_s; \mu)$ است.

^۴L.P.Shilnikov
^۵heteroclinic



شکل ۱: صفحات متقاطع بر حلقه ی هموکلینیک دوتایی در مبدا

اثبات قضیه فوق شبیه ایده پیکارد^۶ است که در اثبات قضیه وجود و یکتایی جواب از معادلات دیفرانسیل با شرایط اولیه به کار رفته است [۲]. در حقیقت وجود و یکتایی جوابهای مساله شلنیکوف معادل وجود و یکتایی جوابهای معادلات انتگرالی زیر می باشند.

$$x_s(t) = e^{-\beta t} \xi_s + \int_0^t e^{-\beta(t-\zeta)} F_s(x_u(\zeta), x_s(\zeta), x_{ss}(\zeta); \mu) d\zeta,$$

$$x_{ss}(t) = e^{-\alpha t} x_{ss}(0) + \int_0^t e^{-\alpha(t-\zeta)} F_{ss}(x_u(\zeta), x_s(\zeta), x_{ss}(\zeta); \mu) d\zeta$$

با یک مقیاس جدید^۷ می توان فرض کرد، $\delta = 1$. لذا، $|F_s(x_u, x_s, x_{ss}; \mu)|, |F_{ss}(x_u, x_s, x_{ss}; \mu)| \leq C\delta$ که $C > 0$ است. لم زیر کران هایی را برای $x_s(t, \tau, \xi_s)$ و $x_{ss}(t, \tau, \xi_s)$ بیان می کند.

لم ۳.۱. برای $k \geq 0$ و $0 \leq t \leq \tau$ و μ های نزدیک μ_0 ، ثابت های مثبت C_k وجود دارند که

$$\left| \frac{\partial^k}{\partial(t, \xi_s; \mu)^k} x_s(t, \tau, \xi_s; \mu) \right| \leq C_k e^{-\beta t},$$

$$\left| \frac{\partial^k}{\partial(t, \xi_s; \mu)^k} x_{ss}(t, \tau, \xi_s; \mu) \right| \leq C_k e^{-\alpha t},$$

$$\left| \frac{\partial^k}{\partial(t, \xi_s; \mu)^k} \frac{\partial}{\partial \tau} x_s(t, \tau, \xi_s; \mu) \right| \leq C_k e^{-\beta t + (t-\tau)},$$

$$\left| \frac{\partial^k}{\partial(t, \xi_s; \mu)^k} \frac{\partial}{\partial \tau} x_{ss}(t, \tau, \xi_s; \mu) \right| \leq C_k e^{-\alpha t + (t-\tau)},$$

تعریف ۴.۱. گویم مولفه های (x_s, x_{ss}) از جواب $x = (x_u, x_s, x_{ss})(t, \tau, \xi_s)$ یک بسط نمایی می پذیرند هرگاه تابع

هموار $\varphi = (\varphi_s, \varphi_{ss})(t, \xi_s)$ مستقل از τ و عدد ثابت $\sigma > 0$ موجود باشند که

$$(x_s(t, \tau, \xi_s; \mu) e^{\beta(t-\tau)}, x_{ss}(t, \tau, \xi_s; \mu) e^{\alpha(t-\tau)})$$

به همراه همه مشتقات نسبت به t و τ و ξ_s با نرخ همگرایی $e^{\delta(t-\tau)}$ همگرا به $(\varphi_s, \varphi_{ss})(t, \xi_s)$ باشند هرگاه $\tau \rightarrow +\infty$ با توجه به لم ۳.۱ می توان نتیجه گرفت که توابع

$$z_s = z_s(u; \tau, \xi_s) = x_s(\tau - u; \tau, \xi_s) e^{\beta(\tau-u)}$$

$$z_{ss} = z_{ss}(u; \tau, \xi_s) = x_{ss}(\tau - u; \tau, \xi_s) e^{\alpha(\tau-u)}$$

برای $0 \leq u \leq \tau$ کراندار هستند.

لم ۵.۱. محدود $z_s^\infty = \lim_{\tau \rightarrow \infty} z_s(u, \tau, \xi_s)$ و $z_{ss}^\infty = \lim_{\tau \rightarrow \infty} z_{ss}(u, \tau, \xi_s)$ به عنوان توابعی از (u, ξ_s) موجودند. علاوه بر آن ثابت های $C_k > 0$ و $\sigma > 0$ چنان وجود دارند که برای μ نزدیک به μ_0 و $0 \leq u \leq \tau$ داریم

^۶Picard
^۷rescaling



$$\left| \frac{\partial^k}{\partial(u, \tau, \xi_s; \mu)^k} (z_s(u, \tau, \xi_s) - z_s^\infty(u, \xi_s)) \right| \leq C_k e^{\sigma(u-\tau)},$$

$$\left| \frac{\partial^k}{\partial(u, \tau, \xi_s; \mu)^k} (z_{ss}(u, \tau, \xi_s) - z_{ss}^\infty(u, \xi_s)) \right| \leq C_k e^{\sigma(u-\tau)},$$

۲ نتایج اصلی

لم فوق و مباحث قبل از آن گزاره زیر را نتیجه می دهد.

گزاره ۱.۲. برای μ نزدیک μ_0 می توان نوشت

$$x_s(\tau) = e^{-\beta\tau}(\phi_s(\xi_s) + \psi_s(\tau, \xi_s)),$$

$$x_{ss}(\tau) = e^{-\alpha\tau}(\phi_{ss}(\xi_s) + \psi_{ss}(\tau, \xi_s)).$$

که $\psi_s, \psi_{ss}, \phi_s, \phi_{ss}$ توابعی هموار هستند. علاوه بر آن $C_{k+l} > 0$ و $\delta > 0$ وجود دارند که

$$\left| \frac{\partial^{k+l}}{\partial(\tau)^k \partial(\xi_s, \mu)^l} \psi_s \right| \leq C_{k+l} e^{-\tau(\sigma-k)},$$

$$\left| \frac{\partial^{k+l}}{\partial(\tau)^k \partial(\xi_s, \mu)^l} \psi_{ss} \right| \leq C_{k+l} e^{-\tau(\sigma-k)}.$$

اکنون نگاشت موضعی پوانکاره را به صورت زیر معرفی می کنیم

$$\Pi_{loc} : \Sigma^{in} \rightarrow \Sigma^{out}$$

می نویسیم $\Pi_{loc} = (\Pi_{loc}^s, \Pi_{loc}^{ss})$. حال فرض کنید مختصات روی Σ^{in} و Σ^{out} به ترتیب با (x_u^{in}, x_s^{in}) و $(x_s^{out}, x_{ss}^{out})$ نمایش داده می شود. فرض کنید $\tau = -\log|x_u^{in}|$ زمان لازم برای باشد که یک نقطه از Σ^{in} به Σ^{out} می رسد. لذا با توجه به فرمهای نرمال گفته شده داریم

$$x_s^{out} = |x_u^{in}|^\beta (x_s^{in} + |x_u^{in}|^{w_s} \phi_s(x_u^{in}, x_s^{in}; \mu)),$$

$$x_{ss}^{out} = |x_u^{in}|^\alpha (\pm 1 + |x_u^{in}|^{w_{ss}} \phi_{ss}(x_u^{in}, x_s^{in}; \mu)).$$

که w_s و w_{ss} ثابت های مثبتی هستند که به α و β وابسته می باشند. همچنین ϕ_s و ϕ_{ss} توابعی هموار از $(x_u^{in}, x_s^{in}; \mu)$ می باشند.

مراجع

- [۱] گلمکانی، علی، بررسی انشعابات مدارهای تناوبی و وجود آشوب در مدارهای هموکلینیک، دانشگاه فردوسی مشهد، ۱۳۸۶.
- [2] V. I. Arnold. *Ordinary Differential Equations*. MIT Press, Cambridge, MA, 1973.
- [3] A. Golmakani, A. J. Homburg, *Lorenz attractors in unfoldings of homoclinic-flip bifurcations*, Dynamical Systems, 2010.
- [4] L. P. Shil'nikov *The existence of a countable set of periodic motions in the neighborhood of a homoclinic curve*. Soviet Math. Dokl. 8, 102-106, 1967.
- [5] L. P. Shil'nikov *A contribution to the problem of the structure of an extended neighborhood of a rough state of saddle-focus type*. Math. USSR Sb. 10, 91-102, 1970.



تاثیر تابع وزن در چندگانگی جوابهای مثبت معادلات بیضوی نیم خطی

راحله محسنی

آموزش و پرورش شهرستان بابل

چکیده

در این مقاله قصد داریم تاثیر توابع وزن را در چندگانگی جوابهای مثبت معادلات بیضوی نیم خطی که شامل نقاط بحرانی در \mathbb{R}^N می باشند مورد بررسی قرار دهیم. برای λ های بزرگ ثابت می کنیم حداقل $k+1$ جواب مثبت برای معادلات بیضوی نیم خطی وجود دارد. برای اثبات وجود این جواب ها از روش خمینه نهاری استفاده می کنیم.

واژه‌های کلیدی: پالایس اسمایل، خمینه نهاری، معادلات بیضوی نیم خطی، نقاط بحرانی

Mathematics Subject Classification [2010]: 35J20; 35J25, 35J65.

۱ مقدمه

با توجه به فرضیات معادله می خواهیم تاثیر ضریب وزنی $a(z)$ و $b(z)$ را در تعداد جوابهای مثبت معادلات بیضوی نیم خطی که شامل محدب و مقعر غیر خطی در \mathbb{R}^N می باشند مورد بررسی قرار دهیم. برای λ های بزرگ حداقل $k+1$ جواب مثبت برای معادلات بیضوی نیم خطی وجود دارد. معادلات بیضوی نیم خطی را به صورت زیر در نظر می گیریم:

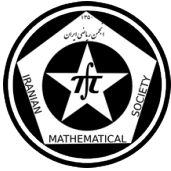
$$\begin{cases} -\Delta v + b(z)v = a(z)v^{p-1} + \lambda h(z)v^{q-1} & \text{in } \mathbb{R}^N; \\ v \in H^1(\mathbb{R}^N), \end{cases} \quad (E-1)$$

که در آن $N \geq 3$ برای $1 \leq q < 2 < p < 2^* = \frac{2N}{N-2}$ معادله $(E-1)$ که در شرایط زیر صدق می کنند:

(الف) $\lambda > 0$ (ب) $a(z)$ و $h(z)$ توابع پیوسته و دارای نقاط ماکزیمم می باشند و $\lim_{|z| \rightarrow \infty} a(z) = a_\infty > 0$.(پ) $b(z)$ یک تابع پیوسته و کراندار می باشد.(ج) k نقطه a^1, a^2, \dots, a^k در \mathbb{R}^N وجود دارند بطوریکه برای $1 \leq i \leq k$ داریم

$$a_\infty < a_{max} \text{ و } a(a^i) = a_{max} = \max_{z \in \mathbb{R}^N} a(z)$$

(چ) $h \not\equiv 0$ و $h \in L^{\frac{p}{p-q}}(\mathbb{R}^N) \cap L^\infty(\mathbb{R}^N)$



سپس فرض می کنیم :

$$S = \sup \| u \|_{L^p}$$

$$u \in H^1(\mathbb{R}^N)$$

$$\| u \|_H = 1$$

همچنین نرم $\| u \|_b$ و $\| u \|_H$ را در $H^1(\mathbb{R}^N)$ به فرم

$$\| u \|_H^2 = \int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla u|^2 + u^2) dz \quad \text{و} \quad \| u \|_b^2 = \int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla u|^2 + b(z)u^2) dz$$

تعریف می کنیم.

فرض می کنیم $d = \max\{1, b(z)\}$ آنگاه $d \| u \|_H \leq \| u \|_b \leq d \| u \|_H$ و بنابراین $\| u \|_b$ و $\| u \|_H$ معادل یکدیگرند و همچنین $u_+ = \max\{u, 0\} \geq 0$.

تعریف ۱.۱. $\gamma_{max} = \left(\frac{1}{q} - \frac{1}{p}\right)(a_{max}^{\frac{1}{p}} S)^{\frac{2p}{p-q}} > 0$.

تابع انرژی $(E - 1)$ را به صورت زیر محاسبه می کنیم:

$$J_\lambda(u) = \frac{1}{q} \| u \|_H^2 - \frac{1}{p} \int_{\mathbb{R}^N} a(z)u_+^p dz - \frac{1}{q} \int_{\mathbb{R}^N} \lambda h(z)u_+^q dz$$

تعریف ۲.۱. ابتدا دنباله پالیس اسمایل را با شرایط زیر تعریف می کنیم :

الف - به ازای $\beta \in \mathbb{R}$ دنباله $\{u_n\}$ را یک دنباله $(PS)_\beta$ در $H^1(\mathbb{R}^N)$ می نامیم هرگاه $J(u_n) = \beta + o_n(1)$ و $J'(u_n) = o_n(1)$ بوده و هر جا $n \rightarrow \infty$ همگرایی قوی در $H^1(\mathbb{R}^N)$ باشد. $(H^1(\mathbb{R}^N))$ دوگان $H^{-1}(\mathbb{R}^N)$.
ب - اگر هر دنباله $(PS)_\beta$ در $H^1(\mathbb{R}^N)$ شامل زیر دنباله همگرا باشد ، تابع J در شرط تابع $(PS)_\beta$ صدق می کند .

ملاحظه ۳.۱. لازم به ذکر است J_λ از پایین کراندار نیست ، بنابراین ما خمینه نهاری را به صورت زیر در نظر می گیریم:

$$M_\lambda = \{u \in H^1(\mathbb{R}^N) | u_+ \not\equiv 0, \langle J'_\lambda(u), u \rangle = 0\};$$

و

$$\langle J'_\lambda(u), u \rangle = \| u \|_H^2 - \int_{\mathbb{R}^N} a(z)u_+^p dz - \int_{\mathbb{R}^N} \lambda h(z)u_+^q dz$$



ملاحظه ۴.۱. M_λ شامل همه جوابهای نا منفی معادله $(E - 1)$ است.

تعریف ۵.۱. $\psi_\lambda(u) = \langle J'_\lambda(u), u \rangle$ تعریف می کنیم

با بکارگیری روش خمینه نهاری ترانتلو [۳] M_λ را به M_λ^+ و M_λ^- تقسیم می کنیم.
بنابراین

$$M_\lambda^+ = \{u \in M_\lambda | (\gamma - q) \|u\|_H^\gamma - (p - q) \int_{\mathbb{R}^N} a(z)u_+^p dz > 0\};$$

$$M_\lambda^0 = \{u \in M_\lambda | (\gamma - q) \|u\|_H^\gamma - (p - q) \int_{\mathbb{R}^N} a(z)u_+^p dz = 0\};$$

$$M_\lambda^- = \{u \in M_\lambda | (\gamma - q) \|u\|_H^\gamma - (p - q) \int_{\mathbb{R}^N} a(z)u_+^p dz < 0\}.$$

همچنین با توجه به فرضیات بالا

$$\Lambda = (p - \gamma) \left(\frac{\gamma - q}{a_{max}} \right)^{\frac{\gamma - q}{p - \gamma}} \left[(p - q) S^\gamma \right]^{\frac{q - p}{p - \gamma}} \|h\|_{\#}^{-1}$$

در نظر می گیریم.

لم ۶.۱. اگر $0 < \lambda < \Lambda$ آنگاه $M_\lambda^0 = \emptyset$.

تعریف ۷.۱. تعریف می کنیم $\alpha_\lambda = \inf_{u \in M_\lambda} J_\lambda(u)$; $\alpha_\lambda^+ = \inf_{u \in M_\lambda^+} J_\lambda(u)$; $\alpha_\lambda^- = \inf_{u \in M_\lambda^-} J_\lambda(u)$

قضیه ۸.۱. فرض کنیم که h در شرط ب صدق کند و $0 < \lambda < \Lambda$ اگر $\{u_n\}$ یک دنباله $(PS)_\beta$ در $H^1(\mathbb{R}^N)$ برای J_λ و $u_n \rightharpoonup u$ همگرایی ضعیف در $H^1(\mathbb{R}^N)$ باشد آنگاه $J'_\lambda(u) = 0$ در $H^{-1}(\mathbb{R}^N)$ است و

$$J_\lambda(u) \geq -C_0 \lambda^{\frac{\gamma}{\gamma - q}} \geq -C'_0$$

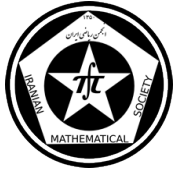
$$C_0 = (\gamma - q) [(p - q) \|h\|_{\#} S^q]^{\frac{\gamma}{\gamma - q}} / \left[\gamma pq (p - \gamma)^{\frac{\gamma - q}{p - \gamma}} \right]$$

$$C'_0 = \left[(p - \gamma) (\gamma - q)^{\frac{p}{p - \gamma}} \right] / \left\{ \gamma pq [a_{max} (p - q)]^{\frac{\gamma}{p - \gamma}} S^{\frac{\gamma p}{p - \gamma}} \right\}$$

اثبات. به مرجع [۱] ارجاع داده می شود. □

قضیه ۹.۱. با برقراری (ب) و (ج)، اگر $0 < \lambda < \Lambda$ آنگاه حداقل یک عدد مثبت حالت پایه u از معادله $(E - 1)$ در \mathbb{R}^N وجود دارد بطوریکه $u_0 \in M_\lambda^+$ و $J_\lambda(u_0) = \alpha_\lambda = \alpha_\lambda^+ \geq -C_0 \lambda^{\frac{\gamma}{\gamma - q}}$

اثبات. به مرجع [۲] ارجاع داده می شود. □



۲ نتایج اصلی

فرض می کنیم برای $1 < i \neq j \leq k$ داشته باشیم $\overline{B_{\rho_0}^N(a^i)} \cap \overline{B_{\rho_0}^N(a^j)} = \emptyset$ و همچنین $a(a^i) = a_{max}$ و $\overline{B_{\rho_0}^N(a^i)} \cap \overline{B_{\rho_0}^N(a^j)} = \emptyset$ از طرفی $B_{\rho_0}^N(a^i) = \{z \in \mathbb{R}^N \mid |z - a^i| \leq \rho_0\}$ و $\mathbf{k} = \{a^i \mid 1 \leq i \leq k\}$ بنا براین $\cup_{i=1}^k \overline{B_{\rho_0}^N(a^i)} \subset B_{r_0}^N(o)$ و برای $r_0 > \rho_0$ $K_{\frac{\rho_0}{r_0}} = \cup_{i=1}^k \overline{B_{\rho_0}^N(a^i)}$

تعریف ۱.۲. تابع $Q_\lambda : H^1(\mathbb{R}^N) \setminus \{o\} \rightarrow \mathbb{R}^N$ را به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$Q_\lambda(u) = \frac{\int_{\mathbb{R}^N} \chi(\varepsilon z) |u|^p dz}{\int_{\mathbb{R}^N} |u|^p dz}$$

و تعریف می کنیم برای $\chi(z) = z, |z| \leq r_0$ و برای $\chi(z) = z, |z| < r_0$ $\chi(z) = \frac{r_0 z}{|z|}$

قضیه ۲.۲. اگر $u \in M_\lambda^-$ و $J_\lambda(u) \leq \gamma_{max} + \frac{\delta_0}{\lambda}$ و δ_0 یک عدد باشد آنگاه یک عدد مثبت $\Lambda^* > 0$ وجود دارد بطوریکه برای هر $0 < \lambda < \Lambda^*$ داریم $Q_\lambda(u) \in K_{\frac{\rho_0}{r_0}}$.

اثبات. به مرجع [۲] ارجاع داده می شود. □

قضیه ۳.۲. برای هر $1 \leq i \leq k$ یک دنباله $(PS)_\beta$ در $H^1(\mathbb{R}^N)$ برای J وجود دارد.

اثبات. به مرجع [۲] ارجاع داده می شود. □

قضیه ۴.۲. با توجه به فرضیات مساله یک عدد مثبت $\lambda^* = \varepsilon^{-2}$ وجود دارد بطوریکه معادله $(E-1)$ ، $k+1$ جواب مثبت در \mathbb{R}^N دارد.

اثبات. به مرجع [۲] ارجاع داده می شود. □

مراجع

- [1] Hsu, TS, Lin, HL: Four positive solutions of semilinear elliptic equations involving concave and convex nonlinearities in \mathbb{R}^N . J. Math. Anal. App (2010) no.365,758-775.
- [2] Huei -LI, Lin : Multiple positive solutions of semilinear elliptic equations involving concave and convex nonlinearities in \mathbb{R}^N Boundary value problems (2012) no. 2012:24 .
- [3] Tarantello , G: On nonhomogeneous elliptic involving critical Sobolev exponent . Ann . Inst. H. Poincare Anal. Non Lmeaire (1992) no. 9,281-304 .



تحلیل انشعاب های یک سیستم دینامیکی اکو اپیدمیولوژیک

دکتر رضا خوش سیر
دانشگاه شهرکردزینب لجمیری*
دانشگاه شهرکرد

چکیده

این مقاله به تحلیل انشعاب های یک مدل زیستی اکو اپیدمیولوژی برای تعیین تداوم یا از بین رفتن بیماری در یک گونه ی جمعیتی که به عنوان شکار در نظر گرفته شده است، می پردازد. تغییر در اندازه جمعیت، گسترش امواج بیماری همه گیر، تداوم بیماری و رفتار کلی گونه های آلوده را از طریق تجزیه و تحلیل رفتار کیفی این سیستم دینامیکی زیستی پیوسته، به وسیله ی محاسبه ی انشعاب هیف و سیکل های حدی منشعب از آن و ضرایب فرم نرمال، با استفاده از الگوریتم های عددی و روش امتداد پیوسته تعیین می کنم.

واژه های کلیدی: (انشعاب هیف، سیکل حدی، ضریب فرم نرمال)

Mathematics Subject Classification [2010]: 13D45, 39B42

۱ مقدمه

مطالعه ی سیستم های اکولوژیکی با در نظر گرفتن پارامترهای اپیدمیولوژی، اکو اپیدمیولوژی نامیده می شود. در حقیقت یک شاخه از اکولوژی است که تاثیر قابلیت انتقال بیماری بر جمعیت گونه ها را در نظر می گیرد. تحلیل رفتار دینامیکی این مدل، جهت مطالعه ی تاثیر بیماری در یک اکوسیستم که در آن تعامل بین دو یا چند گونه ی جمعیتی وجود دارد به منظور تضمین بقای طولانی مدت این سیستم دینامیکی گسترده شده است. هدف اصلی این مدل بر روی نقش عفونت در مرگ و میر گونه ها، و کاهش نرخ تولید مثل متمرکز شده است. این سیستم مستقل از زمان توسط باتاچاریا^۱ و موکوپدیا^۲ در سال ۲۰۱۱ به صورت زیر معرفی شده است [۱]، که دارای پارامترهای حقیقی $\mu, \sigma, \alpha, \beta, \gamma, p, q, h, m, d, K, r$ است.

$$\begin{cases} \dot{S} = rS\left(1 - \frac{S+I}{K}\right) - \beta I^p S^q - dS + \gamma I \\ \dot{I} = \beta I^p S^q - dI - \gamma I - \frac{mPI^\gamma}{I^\gamma + h^\gamma} \\ \dot{P} = \frac{\alpha PI^\gamma}{I^\gamma + h^\gamma} - \mu P - \sigma P^\gamma \end{cases} \quad (1)$$

این سیستم دارای دو نقطه تعادل $E_1 = (\hat{S}, \hat{I}, 0)$ و $E_\gamma = (S^*, I^*, P^*)$ است که در آن $\hat{I} = \frac{(r-1)K\hat{S} - r\hat{S}}{r\hat{S} + Kd}$ و $\hat{S} = \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ در رابطه $\beta\hat{S}^{q-1}(rK - r\hat{S} - Kd)^{q-1} = (d+\gamma)(r\hat{S} + Kd)^{q-1}$ صدق می کند و $S^* = \frac{mKI^{*\gamma}}{\sigma(I^{*\gamma} + h^\gamma)} - \mu$ و $P^* = \frac{1}{\sigma} \left(\frac{\alpha I^{*\gamma}}{I^{*\gamma} + h^\gamma} \right) - \mu$ و $a = r$ بطوریکه $b = (rI^* + Kd - rK)$ و $c = \frac{\alpha I^{*\gamma}}{\sigma(I^{*\gamma} + h^\gamma)} - \mu$

* سخنران
Bhattacharyya^۱
Mukhopadhyay^۲



تعریف ۱.۱. در یک سیستم دینامیکی انشعاب هیف زمانی رخ می دهد که یک جفت مقدار ویژه مزدوج مختلط محض حاصل از ماتریس ژاکوبی داشته باشیم که از خطی سازی یک سیستم در نقطه تعادل به دست آمده باشد [۲، ۳].

۲ نتایج اصلی

در این قسمت به بررسی پایداری و ناپایداری نقاط تعادل نسبت به زمان و تغییر پارامتر h ، انشعاب های همبعد-۱ و همبعد-۲ رخ داده در همسایگی این نقاط، شامل انشعاب هیف زبر بحرانی و سیکل های حدی منشعب از آن می پردازیم. ابتدا با شروع از مختصات یک نقطه اولیه در همسایگی نقاط تعادل و با استفاده از تکنیک امتداد عددی پیوسته [۴]، پایداری و ناپایداری که باعث رخ دادن انشعاب هیف شده است و همگرایی آن نیز در شکل ۱ قابل مشاهده است را محاسبه و ارائه کرده و پس از آن خم نقاط تعادل به همراه انشعاب های همبعد-۱ با آزاد قرار دادن پارامتر h به عنوان پارامتر انشعاب، و سپس با امتداد منحنی انشعاب های همبعد-۱ و آزاد قرار دادن پارامتر h و نیز تغییر مقدار q خم انشعاب های همبعد-۲ را محاسبه کرده که در شکل ۲، ارائه شده است. پارامتر های سیستم را به صورت زیر مقدار دهی اولیه می کنیم:

$$S = 50, P = 9, I = 45, r = 1.5, k = 50, p = 0.5, q = 0.5, d = 0.003, \gamma = 0.5, \alpha = 0.9$$

$$\mu = 0.001, \sigma = 0.1, h = 1.5, \beta = 0.4$$

محاسبه ی انشعاب های همبعد-۱ شامل دو انشعاب هیف زبر بحرانی با اولین ضریب لیاپانف منفی که نشان دهنده ی نقطه ی تعادل ناپایدار احاطه شده توسط یک سیکل حدی پایدار است :

$$\text{label} = H, x = (19.634058 \ 44.932285 \ 8.944574 \ 3.200297)$$

$$\text{First Lyapunov coefficient} = -8.984564e-005$$

$$\text{label} = LP, x = (53.051951 \ 27.941383 \ 8.821651 \ 3.857736)$$

$$a=8.148534e-003$$

$$\text{label} = BP, x = (99.296567 \ 0.028062 \ 0.000000 \ 0.841401)$$

$$\text{label} = H, x = (2.248914 \ 37.438925 \ 8.977718 \ 1.384012)$$

$$\text{First Lyapunov coefficient} = -2.177513e-003$$

انشعاب سیکل های حدی منشعب شده از نقطه هیف با ضریب فرم نرمال منفی که نشان دهنده ی پایدار بودن این سیکل حدی پس از رخ دادن انشعاب در جواب های تناوبی است:

$$\text{Limit point cycle (period} = 1.843959e+001, \text{parameter} = 3.200296e+000)$$

$$\text{Normal form coefficient} = -3.047089e-001$$

انشعاب های همبعد-۲ که در امتداد منحنی انشعاب هیف، و با تغییر دو مقدار h و q حادث می شوند به شرح زیر محاسبه شده است:

$$\text{label} = GH, x = (43.096513 \ 21.939708 \ 8.589680 \ 0.656710 \ 4.733619 \ 0.172742)$$

$$l2=1.440208e-007$$



label = BT, $x = (50.875372 \ 19.425565 \ 8.484554 \ 0.746984 \ 4.738498 \ 0.000000)$

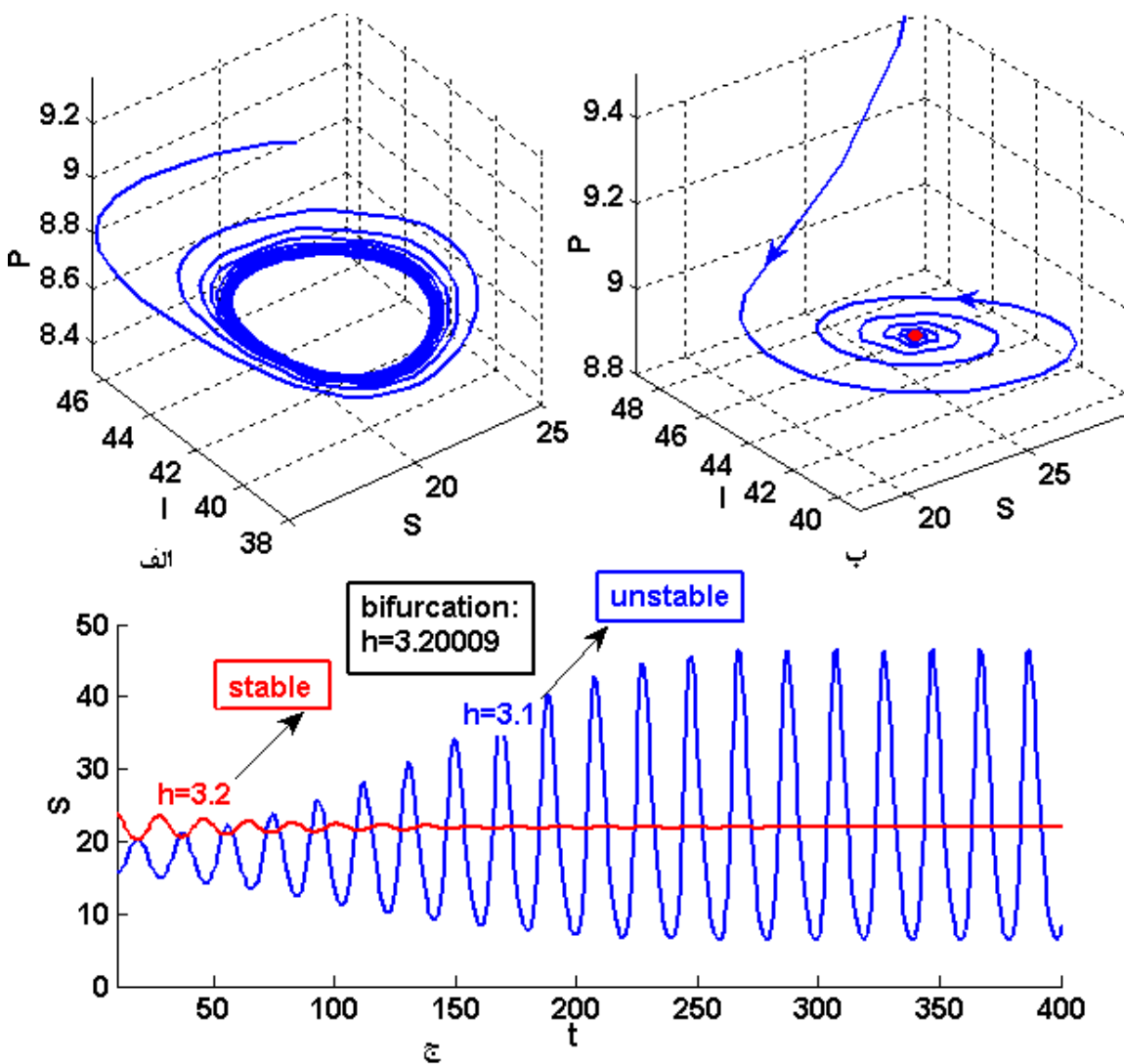
(a,b)=(7.956851e-003, -6.009868e-003)

label = ZH, $x = (0.000002 \ 0.000054 \ 0.000334 \ 0.547175 \ 0.001600 \ 0.000137)$

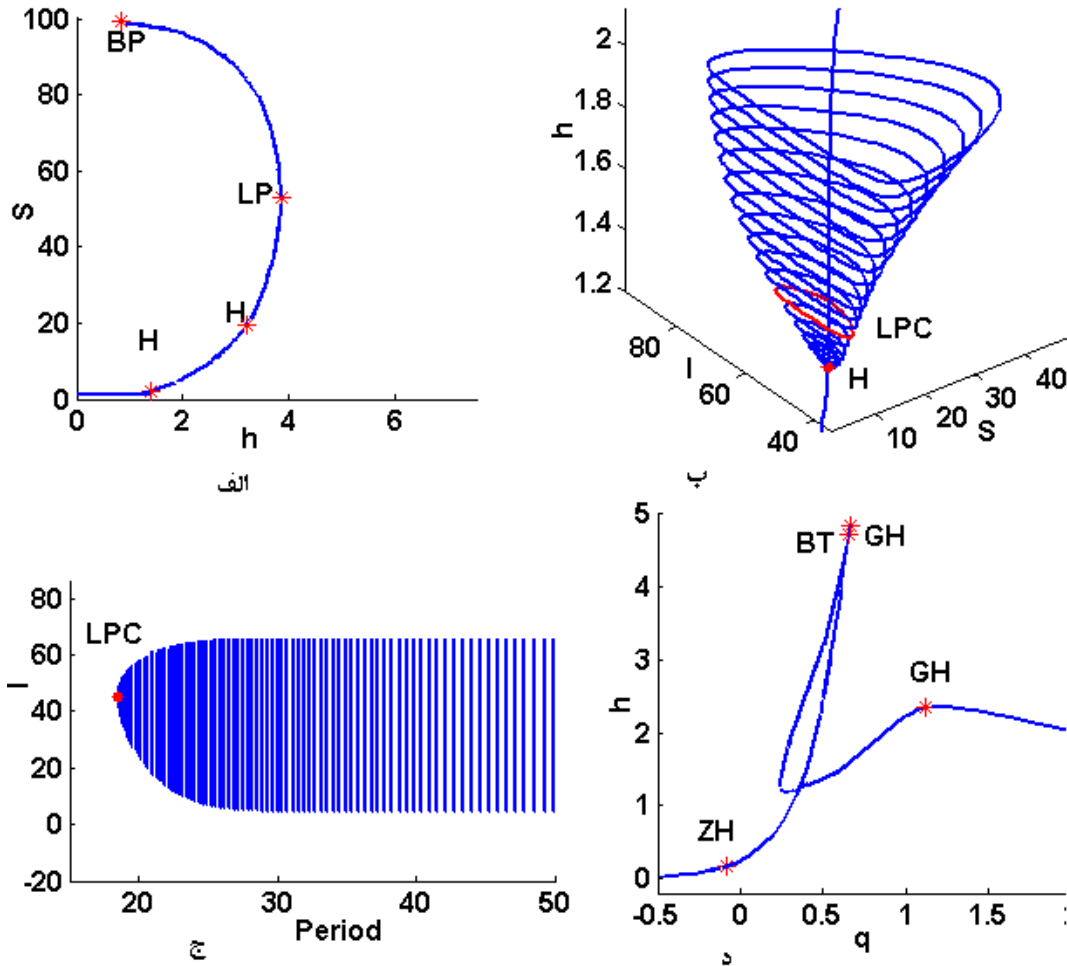
Neutral saddle

label = GH, $x = (4.188405 \ 7.809683 \ 8.246432 \ 1.119915 \ 2.343677 \ 1.0511789)$

l2=3.018755e-007



شکل ۱: (الف) واگرایی نقطه تعادل و پس از آن وقوع انشعاب هیف، (ب) همگرایی و پایداری نقطه تعادل قبل از وقوع انشعاب هیف، (ج) پایداری و ناپایداری نقطه تعادل نسبت به زمان.



شکل ۲: (الف) انشعاب های همبند-۱، (ب) سیکل های حدی منشعب از نقطه هیف، (ج) سیکل های حدی نسبت به محور تناوب، (د) انشعاب های همبند-۲.

مراجع

- [1] K. Chakraborty, K. Das, S. Haldar, T.K. Kar, *A mathematical study of an eco-epidemiological system on disease persistence and extinction perspective*, Applied Mathematics And Computation, 254 (2015), 99–112.
- [2] S. Wiggins, *Introduction to Applied Nonlinear Dynamical Systems and Chaos*, Springer, Verlag New York Berlin Heidelberg, 1990.
- [3] Yu. A. Kuznetsov, *Elements of Applied Bifurcation Theory*, 3rd ed., Springer-Verlag, New York, 2004.
- [4] E. L. Allgower and K. Georg, *Numerical Continuation Methods: An Introduction*, Springer-Verlag, Berlin, 1990



حل معادلات دیفرانسیل مرتبه کسری با موجک لژاندر

راضیه استکی *

دانشجوی کارشناسی ارشد ریاضی کاربردی دانشگاه شهرکرد

محمدرضا احمدی

حجت الله سعیدی

عضو هیات علمی دانشگاه شهرکرد

فارغ التحصیل کارشناسی ارشد ریاضی کاربردی دانشگاه شهرکرد

چکیده

در این مقاله روش ماتریس عملیاتی متشکل از پایه‌های موجک لژاندر به منظور حل معادلات دیفرانسیل کسری مطرح گردیده است. به کمک این ماتریس می‌توانیم معادلات با شرایط اولیه را به سیستمی از معادلات جبری تبدیل کنیم، تبدیل سیستمی از معادلات به معادلات جبری و حل دستگاه با نرم افزارهایی ریاضی از مزیت‌های روش عملیاتی موجک لژاندر است. بزرگ‌ترین مزیت این روش سرعت بالا همگرایی است.

واژه‌های کلیدی: ماتریس عملیاتی، معادلات دیفرانسیل کسری، روش هم‌مکانی، موجک لژاندر

Mathematics Subject Classification [2010]: 13D45, 39B42

۱ مقدمه

عملگر انتگرال کسری مفهوم جدیدی از انتگرال با مرتبه دلخواه است و مسئله مدل شده مربوط به بسیاری از پدیده‌های فیزیک، اخترشناسی، کنترل رباتیک و سیستم‌های دینامیکی از نوع معادلات دیفرانسیل با مشتقات نسبی از مرتبه کسری و معادلات دیفرانسیل معمولی از مرتبه کسری است.

تعریف ۱.۱. تابع مقیاس لژاندر را به صورت زیر تعریف می‌کنیم [۱]:

$$\phi(t) = \begin{cases} \sqrt{m + \frac{1}{\nu}} P_m(\nu t - 1), & -1 \leq t \leq 1, \\ 0, & \text{در غیر اینصورت} \end{cases}$$

$P_m(t)$ چندجمله‌ای لژاندر مرتبه m است.

خانواده متشکل از تجانس‌ها و انتقال‌های تابع موجک مادر $\psi(t)$ را موجک می‌نامیم. اگر a پارامتر تجانس و b پارامتر انتقال باشد، آن‌گاه موجک را به صورت زیر تعریف می‌کنیم [۲]:

$$\psi_{a,b}(t) = |a|^{-\frac{1}{\alpha}} \psi\left(\frac{t-b}{a}\right), \quad a, b \in \mathbb{R}, \quad a \neq 0.$$

اگر $a = a_0^{-k}$, $b = nb_0 a_0^{-k}$, $a_0 > 1$, $b_0 > 1$, $n, k \in \mathbb{N}$ داریم:

* سخنران



$$\psi_{k,n}(t) = |a_0|^{-\frac{k}{2}} \psi(a_0^k t - nb_0),$$

در رابطه بالا $\psi_{k,n}(t)$ تشکیل پایه‌های متعامد برای فضای $L^2(\mathbb{R})$ می‌دهد. به طور مشخص، اگر $a_0 = 2$ و $b_0 = 1$ باشد آنگاه $\psi_{k,n}(t)$ تشکیل پایه‌های متعامد یکه می‌دهد. همان طور که مشاهده می‌کنیم موجک لژاندر $\psi_{n,m}(t) = \psi(k, n', m, t)$ شامل چهار پارامتر است که $n' = 2n - 1$ و $n = 1, 2, 3, \dots, 2^{k-1}$ و m مرتبه چند جمله‌ای لژاندر است. تابع موجک لژاندر روی بازه $[0, 1]$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\psi_{nm}(t) = \begin{cases} \sqrt{m + \frac{1}{2}} 2^{\frac{k}{2}} P_m(2^k t - n'), & \frac{n' - 1}{2^k} \leq t \leq \frac{n' + 1}{2^k}, \\ 0, & \text{در غیر اینصورت} \end{cases} \quad (1)$$

$$m = 0, 1, \dots, M - 1, n = 1, 2, \dots, 2^{k-1}.$$

ضریب نرمال‌سازی موجک و M عدد صحیح ثابت مثبت است. لازم به ذکر است که چند جمله‌ای‌های لژاندر نسبت به تابع وزن $w(t) = 1$ روی بازه $[-1, 1]$ متعامد هستند و در رابطه بازگشتی زیر صدق می‌کنند:

$$P_0(t) = 1, P_1(t) = t, P_{m+1}(t) = \frac{2m+1}{m+1} t P_m(t) - \frac{m}{m+1} P_{m-1}(t), m \in \mathbb{N}.$$

بنابراین مجموعه $\psi_{nm}(t)$ تشکیل پایه‌های متعامد یکه برای فضای $L^2([0, 1])$ می‌دهد [۳].

مثال ۲.۱. معادله دیفرانسیل با شرایط اولیه زیر را در نظر بگیرید [۴]:

$$D^\alpha u(t) + \sin(t) D_*^\alpha u(t) + tu(t) = f(t), t \in [0, 1],$$

$$u(0) = u'(0) = 0, \quad (2)$$

$$f(t) = t^9 - t^8 + 56t^6 - 42t^5 + \frac{\sin(t)}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{32768}{6435} t^{\frac{15}{2}} - \frac{2048}{429} t^{\frac{13}{2}} \right)$$

جواب دقیق این معادله $u(t) = t^8 - t^9$ است.

حل. فرم گسسته معادله به شکل زیر است:

$$C^T H + C^T F^T H A + C^T F^T H B = f^T H$$

پس می‌توانیم معادله دیفرانسیل ۲ را به سیستمی از معادلات جبری تبدیل کنیم. با حل دستگاه معادلات جبری می‌توانیم بردار C^T را به دست بیاوریم. سپس با استفاده از رابطه $u(t) = C^T F^T H_m(t)$ تابع $u(t)$ را تقریب می‌زنیم.



۲ محاسبه فرمول‌ها

در ابتدا توابع $u(t)$ ، $\psi_{nm}(t)$ و c_{nm} را به ترتیب تابع معلوم، پایه‌های لژاندر و ضرایب مجهول روش موجک لژاندر به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$u(t) = \sum_{n=1}^{2^{k-1}} \sum_{m=0}^{M-1} c_{nm} \psi_{nm}(t), \quad (3)$$

$$c_{nm} = \int_0^1 f(t) \psi_{nm}(t) dt. \quad (4)$$

انتگرال $\Psi(t) = [\psi_{10}(t), \psi_{11}(t), \dots, \psi_{1M-1}(t), \dots, \psi_{2^{k-1}0}(t), \dots, \psi_{2^{k-1}M-1}(t)]^T$ را می‌توانیم به صورت زیر تقریب بزنیم:

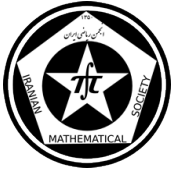
$$\int_0^t \Psi(s) ds \cong F \Psi(t)$$

که در آن F ماتریس عملیاتی انتگرال مرتبه کسری موجک لژاندر نامیده می‌شود. لازم به ذکر است که F ماتریسی $2^{k-1}M \times 2^{k-1}M$ است و آن را به صورت زیر نمایش می‌دهیم [۲]:

$$F = \frac{1}{2^k} \begin{bmatrix} L & & & P & \dots & P \\ \circ & & & L & \dots & P \\ \vdots & & & \vdots & & \vdots \\ \cdot & & & \cdot & & \cdot \\ \vdots & & & \vdots & & \vdots \\ \circ & & & \circ & \dots & L \end{bmatrix}$$

L و P ماتریس‌هایی M به شکل زیر هستند:

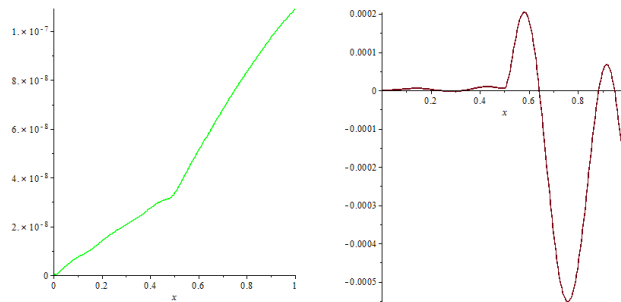
$$L = \begin{bmatrix} 1 & \frac{\sqrt{3}}{3} & \circ & \dots & \circ & \circ \\ -\frac{\sqrt{3}}{3} & \circ & \frac{\sqrt{3}}{3\sqrt{5}} & \circ & \dots & \circ \\ \circ & \circ & \frac{-\sqrt{5}}{5\sqrt{3}} & \dots & \dots & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \dots & \dots & \frac{-\sqrt{2M-3}}{(2M-3)\sqrt{2M-5}} \dots & \dots & \frac{\sqrt{2M-3}}{(2M-3)\sqrt{2M-1}} & \dots \\ \circ & \dots & \dots & \circ & \frac{-\sqrt{2M-1}}{(2M-1)\sqrt{2M-3}} & \circ \end{bmatrix}$$



$$P = \begin{bmatrix} ۲ & ۰ & \dots & ۰ \\ ۰ & ۰ & \dots & ۰ \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ ۰ & ۰ & \dots & ۰ \end{bmatrix}$$

۳ نتیجه‌گیری

همان‌طور که در شکل‌های ۱ و ۲ نشان داده شده‌است، با افزایش تعداد نقاط هم‌مکانی و افزایش بعد ماتریس عملیاتی میزان خطای این روش کاهش می‌یابد. بزرگ‌ترین مزیت این روش تبدیل معادله دیفرانسیل به سیستمی از معادلات جبری است که موجب راحتی محاسبات در مقایسه با روش‌های دیگر است.



شکل ۱: مقایسه خطا به ازاء مقادیر مختلف nm

مراجع

- [1] S. A. Yousefi, Legendre scaling function for solving generalized Edman-Fowler equations. International Journal of Information and System Science, Vol.3 (2007) No. 2, 243-250.
- [2] H. Jafari, S.A. Yousefi, M.A. Firoozjaee, S. Momani, C.M. Khalique, Application of Legendre wavelets for solving fractional differential equations. Computers and Mathematics with Applications, 62 (2011) 1038-1045.
- [3] M. Razzaghi, S. Yousefi. The Legendre wavelet operational matrix of integration, International Journal of systems science, 32 (2001) 495-502.
- [4] Mingxu Yi, Jun Huang, Wavelet operational matrix method for solving fractional differential equations with variable coefficients, Applied Mathematics and Computation, 230 (2014) 383-394.

پست الکترونیکی: raziyeesteki@gmail.com

پست الکترونیکی: aboueshaghi@gmail.com

پست الکترونیکی: farshidahmadi633@gmail.com



حل معادلات دیفرانسیل مرتبه کسری با موجک هار

راضیه استکی*

دانشجوی کارشناسی ارشد ریاضی کاربردی دانشگاه شهرکرد

حجت الله سعیدی

فارغ التحصیل کارشناسی ارشد ریاضی کاربردی دانشگاه شهرکرد

چکیده

در این مقاله روش ماتریس عملیاتی متشکل از پایه‌های موجک هار به منظور حل معادلات دیفرانسیل کسری مطرح گردیده است. ماتریس عملیاتی انتگرال مرتبه کسری موجک هار را بدون استفاده از توابع بلاک پالس به دست آورده‌ایم. به کمک این ماتریس می‌توانیم معادلات با شرایط اولیه را به سیستمی از معادلات جبری تبدیل کنیم، تبدیل سیستمی از معادلات به معادلات جبری و حل دستگاه با نرم افزارهای ریاضی بزرگترین مزیت روش عملیاتی موجک هار است.

واژه‌های کلیدی: ماتریس عملیاتی، معادلات دیفرانسیل کسری، روش هم‌مکانی، موجک هار

Mathematics Subject Classification [2010]: 13D45, 39B42

۱ مقدمه

در سال ۱۹۰۹ هار اولین کسی بود که به موجک اشاره کرد. هار ساده‌ترین نوع موجک است و پایه‌هایی متعامد برای تنیدن فضای محاسبه ارائه می‌دهد مشکل این موجک در این است که پیوسته نیست و در نتیجه مشتق ناپذیر است. مجموعه توابع هار روی بازه $[0, 1]$ یک مجموعه از موج‌های مربعی با مقادیر ۱، ۰، -۱ است. این توابع در فضای هیلبرت $L^2[0, 1]$ یک سیستم متعامد کامل تشکیل می‌دهند. اولین تابع از توابع هار یعنی $h_0(t)$ تابع مقیاس نامیده می‌شود. دومین تابع یعنی $h_1(t)$ موج مربعی پایه است، سایر توابع از انتقال و اتساع روی $h_1(t)$ به دست می‌آیند، از این رو $h_1(t)$ را موجک مادر^۱ نیز می‌نامند.

تعریف ۱.۱. به طور کلی توابع هار روی بازه $[0, 1]$ به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$h_n(t) = h_1(2^j t - k), \quad n = 2^j + k, \quad 0 \leq k < 2^j, \quad j \geq 0, \quad (1)$$

به طوری که

$$h_0(t) = 1, \quad 0 \leq t < 1$$

* سخنران

^۱Mother wavelet



$$h_1(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t < \frac{1}{4}, \\ -1, & \frac{1}{4} \leq t < 1. \end{cases}$$

در این مقاله هدف به دست آوردن روشی متفاوت با [۴] برای حل معادلات دیفرانسیل مرتبه کسری با پایه‌های هار است. ماتریس عملیاتی انتگرال مرتبه کسری را بدون استفاده از توابع بلاک پالس به دست می‌آوریم. این ماتریس در مقایسه با ماتریس عملیاتی انتگرال مرتبه کسری [۴] دقت بالاتری دارد. ماتریس متعامد موجک هار را متفاوت با [۲] اختیار می‌کنیم. در این روش نیاز به محاسبه معکوس ماتریس موجک هار نداریم. برای $t \in [0, 1)$ توابع موجک هار را می‌توانیم به صورت زیر تقریب بزنیم [۳]:

$$h_0(t) = \frac{1}{\sqrt{m}},$$

$$h_i(t) = \frac{1}{\sqrt{m}} \begin{cases} \frac{j}{2^j}, & \frac{k-1}{2^j} \leq t < \frac{k-\frac{1}{2}}{2^j}, \\ -\frac{j}{2^j}, & \frac{k-\frac{1}{2}}{2^j} \leq t < \frac{k}{2^j}, \\ 0, & \text{در غیر اینصورت} \end{cases} \quad (2)$$

$$i = 0, 1, \dots, m-1, m = 2^{p+1}, p = 0, 1, \dots, j, i = 2^j + k - 1$$

مثال ۲.۱. معادله دیفرانسیل خطی با شرایط اولیه زیر را در نظر می‌گیریم [۱]:

$$D_*^{\frac{1}{2}} u(x) + u(x) = f(x),$$

$$u(0) = 0, \quad (3)$$

$$f(x) = \sqrt{x} + \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

جواب دقیق این مسئله $u(x) = \sqrt{x}$ است.

حل. فرم گسسته معادله به شکل زیر است:

$$C^T H_m(x) + C^T F^{\frac{1}{2}} H_m(x) = f^T H_m(x) \quad (4)$$

پس می‌توانیم معادله دیفرانسیل ۳ را به سیستمی از معادلات جبری تبدیل می‌کنیم. با حل دستگاه معادلات جبری

می‌توانیم بردار C^T را به دست بیاوریم. سپس با استفاده از رابطه $u(x) = C^T F^{\frac{1}{2}} H_m(x)$ تابع $u(x)$ را تقریب می‌زنیم.



۲ محاسبه فرمول‌ها

در این قسمت، هدف به دست آوردن بسط تابع $u(t) \in L^2[0, 1]$ بر حسب توابع هار است. برای رسیدن به چنین شکلی از جواب یک جواب تقریبی برای $u(t)$ به صورت

$$u(t) = \sum_{i=0}^{\infty} c_i h_i(t)$$

است، که در آن

$$c_i = \langle u(t), h_i(t) \rangle = \int_0^1 u(t) h_i(t) dt$$

ضرایب موجک هستند. سری هار در رابطه فوق شامل تعداد نامتناهی جمله است، اگر فرض کنیم $i = 0, 1, \dots, m-1$ آن‌گاه سری قطع شده با m جمله به صورت

$$u(t) = \sum_{i=0}^{m-1} c_i h_i(t) \quad (5)$$

است. یک مجموعه از m تابع هار را می‌توان به صورت یک ماتریس $m \times m$ نمایش داد، اگر نقاط هم‌مکانی را به صورت $t_l = \frac{(l-0.5)}{m}$, $l = 1, 2, \dots, m$ تعریف کنیم آن‌گاه ماتریس مربعی H از مرتبه m است. از آنجائی که ماتریس هار متعامد و تنک است در نتیجه حجم عملیات به شدت کاهش می‌یابد. انتگرال $H_m(t) = [h_0(t), h_1(t), \dots, h_{m-1}(t)]^T$ را می‌توانیم به صورت زیر تخمین بزنیم:

$$\int_0^t H_m(s) ds \cong FH_m(t) \quad (6)$$

که در آن F ماتریس عملیاتی انتگرال مرتبه کسری موجک هار است و آن را به صورت زیر نشان می‌دهیم:

$$F^\alpha H_m(t) = [Fh_0(t), Fh_1(t), \dots, Fh_{m-1}(t)]^T$$

که در آن

$$Fh_0(t) = \frac{1}{\sqrt{m}} \frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}, \quad t \in [0, 1) \quad (7)$$

و

$$Fh_i(t) = \frac{1}{\sqrt{m}} \begin{cases} 0, & 0 \leq t < \frac{k-1}{2^j}, \\ \frac{j}{2^{\frac{j}{2}}} f_1(t), & \frac{k-1}{2^j} \leq t < \frac{k-1}{2^{\frac{j}{2}}}, \\ \frac{j}{2^{\frac{j}{2}}} f_2(t), & \frac{k-1}{2^{\frac{j}{2}}} \leq t < \frac{k}{2^j}, \\ \frac{j}{2^{\frac{j}{2}}} f_3(t), & \frac{k}{2^j} \leq t < 1, \end{cases} \quad (8)$$



که در آن

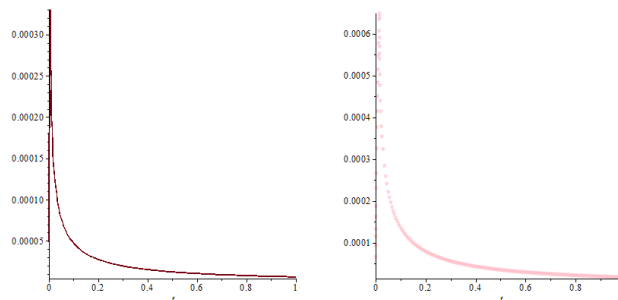
$$f_1(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha + 1)} \left(t - \frac{k-1}{2^j}\right)^\alpha$$

$$f_2(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha + 1)} \left(t - \frac{k-1}{2^j}\right)^\alpha - \frac{2}{\Gamma(\alpha + 1)} \left(t - \frac{k-\frac{1}{2}}{2^j}\right)^\alpha$$

$$f_3(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha + 1)} \left(t - \frac{k-1}{2^j}\right)^\alpha - \frac{2}{\Gamma(\alpha + 1)} \left(t - \frac{k-\frac{1}{2}}{2^j}\right)^\alpha + \frac{1}{\Gamma(\alpha + 1)} \left(t - \frac{k}{2^j}\right)^\alpha$$

۳ نتیجه‌گیری

همان‌طور که در شکل‌های ۱ و ۲ نشان داده شده‌است، با افزایش تعداد نقاط هم‌مکانی و افزایش بعد ماتریس عملیاتی میزان خطای این روش کاهش می‌یابد. بزرگ‌ترین مزیت این روش تبدیل معادله دیفرانسیل به سیستمی از معادلات جبری است که موجب راحتی محاسبات در مقایسه با روش‌های دیگر است.

(ب) تابع خطا به ازاء $m = 128$ (آ) تابع خطا به ازاء $m = 64$

شکل ۱: مقایسه خطا به ازاء مقادیر مختلف m

مراجع

- [1] M. Lakestani, M. Dehghan, S. Irandoust-pakchin, *The construction of operational matrix of fractional derivatives using B-spline functions*, Commun Nonlinear Sci Numer Simulat, 17 (2012), 1149-1162.
- [2] S. Saha Ray, *On Haar wavelet operational matrix of general order and its application for the numerical solution of fractional Bagley Torvik equation*, Applied Mathematics and Computation Journal, 218 (2012), 5239-5248.
- [3] M. Yi, J. Huang, *Wavelet operational matrix method for solving fractional differential with variable coefficients*, Applied Mathematics and Computation, 230(2014), 383-394.
- [4] Y. L. Li, W. W. Zhao, *Haar wavelet operational matrix of fractional order integration and its applications in solving the fractional order differential equations*, Applied Mathematics and Computation Journal, 185(2007), 695-704.



طرح تفاضلات متناهی فشرده ضمنی مرتبه چهارم معادله برگز یک بعدی

مینا رضائزاد

دانشگاه صنعتی ارومیه

احمدرضا حقیقی*

گروه ریاضی دانشگاه صنعتی ارومیه، آموزشکده شهید بهشتی ارومیه

چکیده

در این مقاله یک طرح تفاضلات متناهی فشرده ضمنی مرتبه چهارم برای حل معادله برگز یک بعدی ارائه شده است که بر اساس تبدیل هوپف-کول معادله غیرخطی اولیه برگز را به یک معادله حرارت خطی و شرایط مرزی دیریکله را به شرایط مرزی رابین تبدیل می کند. سپس معادله حرارت خطی با استفاده از طرح تفاضلات متناهی فشرده ضمنی مرتبه چهارم حل شده است. نتایج عددی نشان می دهد که این روش بدون هیچ شرایطی پایدار است و هیچ محدودیتی در اندازه گام زمانی وجود ندارد.

واژه های کلیدی: طرح تفاضلات متناهی، معادله برگز، پایداری

Mathematics Subject Classification [2010]: 65M06, 65N22

۱ مقدمه

معادله برگز یک بعدی را به صورت زیر در نظر می گیریم [۱]

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (1)$$

با شرایط اولیه $u(x, 0) = f(x)$ و شرایط مرزی $u(0, t) = \alpha(t)$, $u(1, t) = \beta(t)$, $t \in (0, T]$ $0 < x < 1$

که در آن $\nu = \frac{1}{Re}$ مشخص کننده اندازه ویسکوزیته می باشد، Re نشانگر عدد رینولدز است. معادله برگز (۱) یکی از مهم ترین معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی در مکانیک سیالات است [۲]. در [۳] نویسندگان به جای حل معادله برگز اصلی یک حل عددی را بر اساس تبدیل هوپف-کول پیشنهاد کرده اند. ابتدا معادله حرارت خطی با استفاده از روش تفاضلات متناهی صریح حل شده است. پس از آن برای به دست آوردن حل معادله برگز اصلی تغییر اعمال می شود. در این مقاله معادله گرما خطی بر اساس تبدیل هوپف-کول با استفاده از طرح تفاضلات متناهی فشرده ضمنی مرتبه چهارم حل شده است. طرح تفاضلات متناهی مرتبه چهارم: معادله برگز را با استفاده از تبدیل هوپف-کول می توان به یک معادله حرارتی

تبدیل کرد [۴]

$$u(x, t) = -2\nu \frac{w_x(x, t)}{w(x, y)} \quad (2)$$

که $w(x, t)$ معادله حرارتی زیر را برآورد می کند:

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \quad 0 < x < 1, t \in (0, T]$$

* سخنران



$$w(x, 0) = \exp - \int_0^x \frac{f(s)}{\nu} ds \quad \text{با شرایط اولیه}$$

و شرایط مرزی را بین $\nu w_x(0, t) + \alpha(t)w(0, t) = 0, t > 0$, $\nu w_x(1, t) + \beta(t)w(1, t) = 0, t > 0$,
با استفاده از الگوریتم کرانک نیکلسون برای رابطه (۲) داریم:

$$\frac{w_i^{n+1} - w_i^n}{\Delta t} = \frac{\nu}{\tau h^2} (\delta_x^2 w_i^{n+1} + \delta_x^2 w_i^n) \quad (3)$$

در حالی که عملگر مرکزی تفاضلات متناهی مرتبه دوم می باشد، که به صورت $\delta_x^2 w_i = w_{i+1} - 2w_i + w_{i-1}$ تعریف می شود. الگوریتم کرانک-نیکلسون فشرده و بدون قید و شرط پایدار است. اما تنها در مرتبه دوم در دو بعد زمانی و مکانی دقیق است. یک راه حل برای به دست آوردن یک تقریب مرتبه چهارم با استفاده از مقدار تقریبی پاده با جایگزینی عملگر مرکزی تفاضلات متناهی δ_x^2 با $(1 - \frac{1}{12}\delta_x^2)\delta_x^2$ انجام می شود و در نهایت به طرح مرتبه چهارم و طرح فشرده زیر منجر می شود. [۴] $(1 + \frac{1}{12}\delta_x^2 - r\delta_x^2)w_i^{n+1} = (1 + \frac{1}{12}\delta_x^2 + r\delta_x^2)w_i^n \quad i = 1, 2, \dots, N$
با استفاده از قانون ادغام مرتبه چهارم سیمپسون مقدار تقریبی شرایط اولیه مرتبه چهارم به صورت زیر تقریب زده میشود:

$$w(x_i, 0) = w(x_{i-2}, 0) + \exp\left\{-\frac{h}{\epsilon\nu}(f(x_{i-2}) + 4f(x_{i-1}) + f(x_i))\right\}$$

مقدار تقریبی فشرده مرتبه چهارم برای شرایط مرزی را نیز به صورت زیر داریم:

$$w(x_{-1}, t) = \frac{(\frac{\nu}{h} + \frac{x(t)}{\epsilon})w(x_1, t) + \frac{2}{3}\alpha(t)w(x_0, t)}{\frac{\nu}{h} + \frac{\alpha(t)}{\epsilon}}$$

$$w(x_{N+1}, t) = \frac{(\frac{\nu}{h} + \frac{\beta(t)}{\epsilon})w(x_{N-1}, t) - \frac{3}{4}\beta(t)w(x_0, t)}{\frac{\nu}{h} + \frac{\beta(t)}{\epsilon}}$$

برون یابی ریچاردسون: به خوبی شناخته شده است که خطای برشی الگوریتم کرانک-نیکلسون در بعد زمانی دارای یک شکل $c_1\Delta t^2 + c_2\Delta t^4$ است. بنابراین طبیعی است که اعمال برون یابی ریچاردسون در اینجا به منظور بهبود دقت در بعد زمانی به کار می رود.

تقریب فشرده مرتبه چهارم برای w_x : با توجه به این که برای بازسازی $u(x, t) = -2\nu \frac{w_x(x, t)}{w(x, t)}$ راه حل های دقیق عددی برای $w(x, t), w_x(x, t)$ مورد نیاز است. در این جا ما اول معادله حرارتی (۴) را با دقت مرتبه چهارم حل می کنیم و پس از آن برای $w_x(x, t)$ از مرتبه چهارم فشرده استفاده می کنیم. از آنجایی که $u(0, t) = \alpha(t)$, $u(1, t) = \beta(t)$ ما باید فقط $w_x(x_i, t)$ را برای $i = 1, 2, 3, \dots, N$ تقریب بزنیم. دوباره عملگر مرکزی تفاضلات متناهی درجه دوم را برای Δ_x در $w(x_i, t)$ به کار می بریم و در نهایت فرمول را به صورت زیر داریم:

$$(1 + \frac{1}{\epsilon}\delta_x^2)w_x(x_i, t) = \frac{\Delta x}{\tau h}w(x_i, t)$$

که می تواند با دقت مرتبه چهارم حل شود و راه حل w_x برای بازسازی راه حل $u(x, t)$ استفاده شود. [۵]



مثال ۱.۱. ابتدا معادله برگز با شرایط مرزی و اولیه زیر حل میکنیم: [۴]

$$u(0, t) = u(1, t) = 0, \quad t > 0, \quad u(x, 0) = 2\nu \frac{\pi \sin(\pi x)}{\sigma + \cos(\pi x)} \quad x \in (0, 1)$$

در اینجا شرایط اولیه طوری انتخاب شده است که $w(x, 0)$ می تواند به صورت زیر مشتق شده و صراحتا بیان

$$w(x, 0) = \sigma + \cos(\pi x) \quad x \in [0, 1]: \text{شود}$$

و شکل بسته راه حل دقیق آن به صورت زیر در دسترس است:

$$u(x, t) = \frac{2\nu\pi e^{-x^2\pi} \sin(\pi x)}{\sigma + e^{-x^2\pi} \cos(\pi x)}$$

با در دسترس بودن فرم بسته راه حل دقیق آن، می توانیم خطا و همگرایی عددی مرتبه را از روش حال حاضر محاسبه کنیم.

در جدول ۱، خطای حداکثر بین راه حل عددی توسط روش بالاتر بدون برون یابی ریچاردسون و حل دقیق برای $T = 1, \nu = 0.1, \sigma = 2$ محاسبه میشود. برای نشان دادن دقت مرتبه در ابعاد فضایی Δt به 0.000001 تنظیم شد. به طوری که اثر خطای برشی از زمان گسسته را می توان نادیده گرفت. به وضوح هنگامی که توسط عامل ۲ کاهش می یابد، خطا توسط یک عامل ۱۶ هم کاهش می یابد، که نتیجه ای را که الگوریتم مرتبه چهارم در ابعاد فضایی دقیق است را تایید می کند.

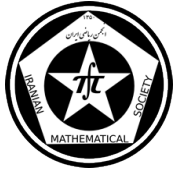
برای نشان دادن این که تنها روش مرتبه دوم در بعد زمانی و بدون برون یابی ریچاردسون دقیق است، ما $H = 0.001$ را برطرف کردیم و ΔT عامل ۲ را کاهش دادیم. خطاهای حداکثر با ΔT مختلف در $T = 1$ در جدول شماره ۲ نشان داده شده است که نتیجه ادعا شده در بالا را تایید می کند.

جدول ۱: خطای ماکزیمال ما بین راه حل دقیق و راه حل عددی برای زمان 0.000001

h	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{40}$	$\frac{1}{80}$	$\frac{1}{160}$
$E(h)$	$1.5763e-05$	$9.8231e-07$	$6.1273e-08$	$3.8303e-09$	$2.3954e-10$
$r = E(h)/E(h/2)$	-	16.0473	16.0473	15.9969	15.9901
\log_2^r	-	4.0042586	4.0042586	3.9997205	3.9991071

جدول ۲: خطای ماکزیمال ما بین راه حل دقیق و راه حل عددی برای زمان 0.001

	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{32}$	$\frac{1}{64}$	$\frac{1}{128}$	$\frac{1}{256}$
$E(h)$	$3.9298e-05$	$9.8217e-06$	$2.4552e-06$	$6.1380e-07$	$1.5345e-07$
$r = E(\Delta T)/E(\Delta T/2)$	-	4.001177	4.000293	4.00007	4.000017
\log_2^r	-	2.000424	2.000106	2.000003	2.000006



۲ نتایج اصلی

در این مطالعه، معادله غیر خطی برگز به یک معادله حرارتی همگن با استفاده از تبدیل هوپف-کول تبدیل شده است. طرح تفاضلات متناهی فشرده مرتبه چهارم برای حل معادله حرارتی توسعه داده شده است. برای حفظ کلی دقت مرتبه چهارم، برخی از مراحل بالاتر جدید، طرح های تقریبی فشرده را برای شرایط مرزی و اولیه توسعه داده اند. در نهایت بر اساس تبدیل هوپف-کول، یک طرح تفاضلات متناهی فشرده مرتبه چهارم برای بازسازی از راه حل عددی معادله حرارتی توسعه یافت. تقریب های عددی نشان داده است که این طرح جدید قوی می باشد و بدون قید و شرط پایدار و بسیار دقیق است.

مراجع

- [1] E.N. Aksan, A. Ozdes, *A numerical solution of Burgers's equation*, Appl. Math. Comput, 156 (2004), pp. 395-410.
- [2] H. Bateman, *Some recent researches on the motion of fluids*, Monthly Weather Rev, 43 (1915), pp. 163-170.
- [3] E. Benton, G.W. Platzman, *A table of solutions of the one-dimensional Burgers' equations*, Quart, Appl. Math., 30 (1972), pp. 195-212.
- [4] Wenyuan Liao, *An implicit fourth-order compact finite difference scheme for one-dimensional Burgers' equation*, Appl. Math. Comput, 206 (2008), pp. 755-764.
- [5] D.J. Evans, A.R. Abdullah, *The group explicit method for the solution of Burgers' equation*, Quart, Appl. Math., 30 (1984), pp. 239-253.

پست الکترونیکی: ah.haghighi@gmail.com

پست الکترونیکی: mina.rezanezhad10@gmail.com



فرمول اثر جدید برای معادله‌ی اشتورم-لیوویل ماتریسی با پارامتر ویژه در شرایط مرزی

دکتر علی اصغر جدیری اکبر فام
دانشگاه تبریز

اصغر محمدنژاد*
دانشگاه تبریز

چکیده

برای معادله‌ی اشتورم-لیوویل با پارامتر ویژه در شرایط مرزی در حالت‌های اسکالر و ماتریس با یک نقطه برگردان را مورد مطالعه قرار می‌دهیم و آن را به معادله‌ی انتگرال متناظر تبدیل می‌کنیم، سپس با استفاده از نمایش مجانبی جواب‌ها و مشتقات جواب‌ها و با توجه به آنها بسط مجانبی مقادیر ویژه را به دست می‌آوریم و برای اولین بار فرمول اثر منظم مرتبه‌ی اول را با ترکیب کردن حالت متناهی و نامتناهی دنباله‌ها و انتگرال‌ها به دست می‌آوریم.

واژه‌های کلیدی: مسأله‌ی اشتورم-لیوویل ماتریسی، فرمول اثر، مقدار ویژه، سیستم شرویدینگر، گراف متری

۱ مقدمه

در یک فضای با بعد متناهی یک عملگر دیفرانسیل یک اثر (مجموع مقادیر ویژه) متناهی دارد. در حالی که در یک فضای با بعد نامتناهی، عملگرهای دیفرانسیل معمولی، لزوماً یک اثر متناهی ندارند. اما گلفاند^۱ و لویتان^۲ در سال ۱۹۵۳ دریافتند که مجموع $\sum_n (\lambda_n - \mu_n)$ که λ_n و μ_n به ترتیب مقادیر ویژه مسأله‌ی بدون اختلال و مقادیر ویژه مسأله‌ی اختلال یافته هستند، معنا و مفهوم عمیقی دارد و با به دست آوردن حاصل این مجموع برای عملگر شرویدینگر، نظریه‌ی اثر منظم عملگرهای دیفرانسیل را بنیان‌گذاری کردند [۲]. در واقع آن‌ها برای مسأله‌ی

$$-y''(x) + q(x)y(x) = \lambda y(x), \quad y'(\circ) = y'(\pi) = 0$$

فرمول اثر

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left[\lambda_n - n^2 - \frac{1}{\pi} \int_{\circ}^{\pi} q(x) dx \right] = \frac{1}{\pi} [q(\circ) + q(\pi)] - \frac{1}{\pi} \int_{\circ}^{\pi} q(x) dx$$

را به دست آوردند که در آن $\{\lambda_n\}$ ها، مقادیر ویژه مسأله هستند.

تعریف ۱.۱. مسأله‌ی اشتورم-لیوویل ماتریسی

$$-Y''(x) + Q(x)Y(x) = \lambda Y(x), \quad x \in (\circ, \pi) \quad (1)$$

*سخنران

^۱Gelfand

^۲Levitan



با شرایط مرزی وابسته به پارامتر ویژه به صورت

$$\lambda(Y'(\circ) - LY(\circ)) = L_1 Y'(\circ) - L_2 Y(\circ) \quad (2)$$

$$\lambda(Y'(\pi) + HY(\pi)) = H_1 Y'(\pi) + H_2 Y(\pi) \quad (3)$$

را در نظر می‌گیریم که در آن $Q(x)$ ، یک تابع ماتریس مقدار است که مقادیر آن، ماتریس‌های اسکالر $d \times d$ با درایه‌های متعلق به فضای $C^1[0, \pi]$ هستند و L و L_1 و L_2 و H و H_1 و H_2 ، ماتریس‌های اسکالر d از مرتبه‌ی d هستند و

$$L_1 L_2 = L_2 L_1, L_1 L = L L_1, (L L_1 - L_2) \neq \circ_d, (H H_1 - H_2) \neq \circ_d \quad (4)$$

و \circ_d نشان دهنده‌ی ماتریس صفر از مرتبه‌ی d است.

برای به دست آوردن فرمول اثر به لم زیر نیاز داریم.

لم ۲.۱. برای N_0 های به اندازه‌ی کافی بزرگ، روی مسیر Γ_{N_0} به طور یکنواخت برای $t \in [0, \pi]$ ، نامساوی‌های زیر برقرارند [۱].

$$\left| \frac{\sin(\lambda t)}{\sin(\lambda \pi)} \right| \leq 4, \quad \left| \frac{\cos(\lambda t)}{\sin(\lambda \pi)} \right| \leq 4. \quad (5)$$

برای مسأله‌ی (۲)-(۳) فرمول اثر زیر را داریم.

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^d (\lambda_0^{(j)} + \lambda_1^{(j)} + \lambda_2^{(j)}) + \sum_{n=3}^{\infty} \left[\sum_{j=1}^d (\lambda_n^{(j)} - (n-2)^2) - \frac{2}{\pi} \text{tr}(\omega) \right] = \\ & = \frac{\text{tr}(Q(\circ) + Q(\pi))}{4} + \frac{1}{4\pi} \text{tr} \left(\int_{\circ}^{\pi} Q(t) dt \right) + \text{tr}(L_1 + H_1) + \\ & + \frac{1}{\pi} \text{tr}(L + H) - \frac{1}{4} \text{tr}(L^2 + H^2) - \sum_{i < j} \omega_{ij} \omega_{ji} \end{aligned} \quad (6)$$

برای به دست آوردن فرمول اثر به لم زیر نیز نیاز داریم.

لم ۳.۱. برای N_0 های بزرگ روی Γ_{N_0} داریم [۳]:

$$\frac{1}{4\pi i} \oint_{\Gamma_{N_0}} \frac{\cot(\sqrt{\lambda}\pi)}{\sqrt{\lambda}} d\lambda = \frac{2(N_0 - 2) + 1}{\pi}, \quad (7)$$

$$\frac{1}{4\pi i} \oint_{\Gamma_{N_0}} \frac{\cot^2(\sqrt{\lambda}\pi)}{\lambda} d\lambda = -1 + O\left(\frac{1}{N_0}\right), \quad (8)$$

$$\left| \oint_{\Gamma_{N_0}} O\left(\frac{1}{\lambda\sqrt{\lambda}}\right) \right| = O\left(\frac{1}{N_0}\right). \quad (9)$$

^۳ماتریس اسکالر به ماتریسی گفته می‌شود که مضربی از ماتریس همانی باشد.



با استفاده از فرمول‌های زیر

$$\cot z = \frac{1}{z} + 2z \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{z^2 - n^2 \pi^2}, \quad \csc^2 z = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(z + n\pi)^2}$$

با توجه به فرمول‌های بالا وقتی که $N \rightarrow \infty$ به رابطه‌ی زیر می‌رسیم

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^d (\lambda_0^{(j)} + \lambda_1^{(j)} + \lambda_2^{(j)}) + \sum_{n=3}^{\infty} \left[\sum_{j=1}^d (\lambda_n^{(j)} - (n-2)^2) - \frac{2}{\pi} \sum_{i=1}^d \omega_{ii} \right] = \\ & = \frac{1}{\pi} \sum_{i=1}^d \omega_{ii} + \sum_{i=1}^d \omega_{\lambda, ii} + a - \frac{1}{4} \sum_{i=1}^d \omega_{ii}^2 \end{aligned} \quad (10)$$

لذا داریم:

$$\sum_{i=1}^d \omega_{ii} = \text{tr}[\omega] = \text{tr} \left[L + H + \frac{1}{4} \int_0^{\pi} Q(t) dt \right] \quad (11)$$

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^d \omega_{\lambda, ii} = \text{tr}[\omega_{\lambda}] = \text{tr} \left[L_{\lambda} + H_{\lambda} + LH + \frac{Q(0) + Q(\pi)}{4} \right. \\ \left. + \frac{1}{4} \left(\int_0^{\pi} Q(t) dt \right) (L + H) + \frac{1}{4} \left(\int_0^{\pi} Q(t) dt \right)^2 \right] \end{aligned} \quad (12)$$

چون L, H و $Q(t)$ ماتریس‌های اسکالرند، پس $\omega = L + H + \frac{1}{4} \int_0^{\pi} Q(t) dt$ نیز یک ماتریس اسکالر است و بنابراین می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^d \omega_{ii}^{\lambda} = \text{tr}[\omega^{\lambda}] = \text{tr} \left[\left(L + H + \frac{1}{4} \int_0^{\pi} Q(t) dt \right)^2 \right] = \text{tr} [L^{\lambda} + H^{\lambda}] \\ + 2 \text{tr} [LH] + \frac{1}{4} \text{tr} \left[\left(\int_0^{\pi} Q(t) dt \right)^2 \right] + \text{tr} \left[\left(\int_0^{\pi} Q(t) dt \right) (L + H) \right]. \end{aligned} \quad (13)$$

با جایگذاری، (۱۲)، (۱۳) و (۱۴) در سمت راست (۱۰) می‌توان فرمول اثر را به صورت زیر به دست آورد:

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^d (\lambda_0^{(j)} + \lambda_1^{(j)} + \lambda_2^{(j)}) + \sum_{n=3}^{\infty} \left[\sum_{j=1}^d (\lambda_n^{(j)} - (n-2)^2) - \frac{2}{\pi} \text{tr}(\omega) \right] = \\ & = \frac{\text{tr}(Q(0) + Q(\pi))}{4} + \frac{1}{4\pi} \text{tr} \left(\int_0^{\pi} Q(t) dt \right) + \text{tr}(L_{\lambda} + H_{\lambda}) \\ & + \frac{1}{\pi} \text{tr}(L + H) - \frac{1}{4} \text{tr}(L^{\lambda} + H^{\lambda}) - \sum_{i < j} \omega_{ij} \omega_{ji}. \end{aligned}$$

سپاس‌گزاری

تشکر و قدردانی ویژه می‌کنم از تمامی استاد هایم که راه روشن علم را به من نشان دادند.



چهل و ششمین کنفرانس ریاضی ایران
۳-۶ شهریور ۱۳۹۴
دانشگاه یزد

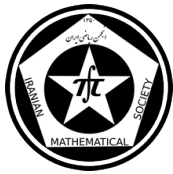


فرمول اثر جدید برای معادله‌ی اشتورم-لیوویل ماتریسی با پارامتر ویژه در شرایط مرزی ص: ۴-۴

پوستر

مراجع

- [1] I. Albayrak, M. Bayramoğlu and E. Adigüzelov: *The second regularized trace formula for the Sturm-Liouville problem with spectral parameter in a boundary condition*, Anal Topology, v.6 No.3 pp (2000) 1-8.
- [2] V. A. Ambarzumyan: *Über eine Frage der Eigenwerttheorie*, Z. Phys, 53 (1929) 690-695.
- [3] M. Bayramoğlu and H. Shahinturk: *Higher order regularized trace formula for the regular Sturm-Liouville equation contained spectral parameter in the boundary condition*. Applied Mathematics and Computation, 186 (2007) 1591-1599.



فرمولی برای اولین مقدار ویژه و اثر منظم برای سیستم معادلات دیفرانسیل مرتبه ی دوم با نقطه ی برگردان

دکتر علی اصغر جدیری اکبر فام

دانشگاه تبریز

اصغر محمدنژاد*

دانشگاه تبریز

چکیده

در این مقاله، مسأله‌ی استورم-لیوویل را با شرایط مرزی دیریکله و نویمان در نظر می‌گیریم و اولین مقدار ویژه در حالت های مختلف به دست می‌آوریم. سپس با استفاده از توزیع مجانبی مرتبه بالای مقادیر ویژه را با به کار بردن معادله‌ی ریکاتی به دست می‌آوریم، علاوه بر این سیستم استورم-لیوویل با یک نقطه‌برگردان را مورد مطالعه قرار می‌دهیم و آن را به معادله‌ی انتگرال متناظر تبدیل می‌کنیم، سپس نمایش مجانبی جواب‌ها و مشتقات جواب‌ها را به دست می‌آوریم و با توجه به آن‌ها بسط مجانبی مقادیر ویژه را نتیجه می‌گیریم.

واژه‌های کلیدی: مسأله‌ی استورم-لیوویل، جواب‌های مجانبی، نقاط برگردان، شرط‌های مرزی دیریکله و نویمان

۱ مقدمه

نظریه نقطه‌برگردان، شاخه‌ای از نظریه‌ی مجانبی معادلات دیفرانسیل است که وابسته به رفتار تکین یک پارامتر می‌باشد. نقاط برگردان، نقاط خاصی هستند که بررسی این نقاط، در درک کامل ماهیت مجانبی جواب‌های معادلات دیفرانسیل ضروری است و فرمول ریاضی مسائل زیادی در فیزیک و مهندسی شامل نقاط برگردان می‌باشند و این انگیزه‌ی اصلی برای ادامه‌ی روند مربوط به مطالعه‌ی نقاط برگردان را تشکیل می‌دهد.

تعریف ۱.۱. تابع تعمیم یافته‌ی زتا به صورت زیر تعریف می‌شود

$$\zeta(s, a) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+a)^{-s} \quad (1)$$

تعریف ۲.۱. در این مقاله دستگاه معادلات دیفرانسیل مرتبه‌ی دوم زیر را در نظر می‌گیریم

$$y''(x) + (\lambda^2 R(x) + Q(x))y(x) = 0, \quad 0 \leq x \leq \pi \quad (2)$$

که در آن

$$R(x) = \begin{pmatrix} s(x) & 0 \\ 0 & t(x) \end{pmatrix}, \quad Q(x) = \begin{pmatrix} p(x) & r(x) \\ r(x) & q(x) \end{pmatrix}, \quad y(x) = (y_1(x), y_2(x))^T$$

* سخنران



$s(x), r(x), q(x), p(x)$ و $t(x)$ توابع مشتق پذیر پیوسته با مقدار حقیقی روی بازه $[0, \pi]$ هستند. و به علاوه $s(x)$ و $t(x)$ در شرایط مختلف زیر مشخص هستند.

$$s(x) = xs_1(x), t(x) = xt_1(x), s_1(x) > 0, t_1(x) > 0, 0 \leq x \leq \pi \quad (3)$$

$$s(x) = s_1(x)/x, t(x) = t_1(x)/x, s_1(x) > 0, t_1(x) > 0, 0 \leq x \leq \pi \quad (4)$$

$$s(x) > 0, t(x) > 0, 0 \leq x \leq \pi \quad (5)$$

همچنین ما عباراتی برای اولین مقدار ویژه برای سیستم (۲) با $s(x)$ و $t(x)$ روابط مشخص شده (۳) یا (۴) یا (۵) تحت شرایط (i) مرزی دیریکله یعنی؛

$$y_1(0) = y_2(0) = y_1(\pi) = y_2(\pi) = 0 \quad (6)$$

یا (ii) مرزی نویمان یعنی؛

$$y_1'(0) = y_2'(0) = y_1'(\pi) = y_2'(\pi) = 0 \quad (7)$$

با استفاده از جواب $y(x) = (y_1(x), y_2(x))^T$ از سیستم (۱) در $x = \pi$ و $x = 0$ با استفاده از عبارات مجانبی برای n -امین مقدار ویژه یعنی $\Psi(x, \lambda_n) = (\Psi_1(x, \lambda_n), \Psi_2(x, \lambda_n))^T \lambda_n$ که در [۲، ۳، ۴] مشخص شده است به دست می آید.
فرض کنیم

$$\Psi(x, z; \lambda_n) = \begin{pmatrix} \psi_1(x, \lambda_n)\psi_1(z, \lambda_n) & \psi_1(x, \lambda_n)\psi_2(z, \lambda_n) \\ \psi_2(x, \lambda_n)\psi_1(z, \lambda_n) & \psi_2(x, \lambda_n)\psi_2(z, \lambda_n) \end{pmatrix} \quad (8)$$

و

$$H(x, z) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n^{-2} \psi(x, z; \lambda_n). \quad (9)$$

برای مسئله ی مقدار مرزی (۲-۶) یا (۲-۷) با $s(x), t(x)$ که در یکی از از شرط های (۳) یا (۴) یا (۵) صدق می کند با استفاده از حل مجانبی برای $\Psi(x, \lambda_n)$ که توسط [۲] مشخص شده است نتیجه می شود که

$$\Psi_i(x, \lambda_n)\Psi_j(z, \lambda_n) = k.g_i(x).g_j(z) + O(\lambda_n^{-1}), \quad (10)$$

برای $n > 0$ و $k, j, i = 1, 2$ یک ثابت خاص است و $g_i(x)$ توابعی شامل $s(x), t(x)$ اما مستقل از λ_n هستند. بنابراین با استفاده از حل مجانبی برای λ_n های مربوط داده شده در [۱] ما از (۹) و (۱۰) به دست می آوریم که سری $H(x, z)$ برای همه ی x, z روی هر بازه ی متناهی به طور یکنواخت همگراست.

قضیه ۳.۱. یک شرط لازم و کافی برای اینکه λ_n مقدار ویژه از مسئله ی مقدار مرزی

(۲-۶) یا (۲-۷) با $s(x)$ و $t(x)$ که در یکی از شرط های (۳) یا (۴) یا (۵) صدق می کند آن است که

$$P(x, z) \equiv H(x, z) - G(x, z) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n^{-2} \psi(x, z; \lambda_n) - G(x, z) \quad (11)$$

برابر صفر باشد که $H(x, z)$ و $\psi(x, z; \lambda_n)$ در (۷) و (۸) داده شده اند و $G(x, z)$ ماتریس گرین ویژه متناظر با سیستم (۲) است



قضیه ۴.۱. فرض کنیم $\{\lambda_n\}$ دنباله‌ای از مقادیر ویژه از مسئله‌ی مقدار مرزی (۲)-(۵) که $s(x), t(x)$ در شرط (۳) صدق می‌کند باشد آنگاه

$$\sum_{n=k}^{\infty} \lambda_n^{-2m} = (\pi)^{-2m} \left[\int_0^{\pi} \sqrt{z(x)} dx \right]^{2m} \cdot \zeta\left(2m, k - \frac{1}{12}\right) + O\left(\sum_{n=k}^{\infty} n^{-2m-2}\right) \quad (12)$$

که $\zeta(s, a)$ تابع زتای کلی تعریف شده در (۱) و $z(x)$ یا $s(x)$ یا $t(x)$ مطابق با $\int_0^x \sqrt{s(x)} dx > 0$ یا $\int_0^x \sqrt{t(x)} dx > 0$.

اثبات: از نمایش مجانبی λ_n مسئله‌ی مقدار مرزی معادله‌های (۲-۶) داده شده در [۴]، نتیجه می‌شود که

$$\sum_{n=k}^{\infty} \lambda_n^{-2m} = (\pi)^{-2m} \left[\int_0^{\pi} \sqrt{z(x)} dx \right]^{2m} \cdot \zeta\left(2m, k - \frac{1}{12}\right) + o\left(\sum_{n=k}^{\infty} n^{-2m-2}\right) \quad (13)$$

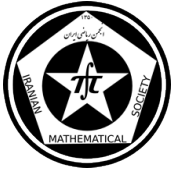
که $z(x)$ یکی از $s(x)$ یا $t(x)$ مطابق با $\int_0^x \sqrt{s(x)} dx > 0$ یا $\int_0^x \sqrt{t(x)} dx > 0$ است. معرفی تابع زتا $\zeta(s, a)$ در (۱) داده شده است، از (۱۳) قضیه اثبات می‌شود.

سپاس‌گزاری

تشکر و قدردانی ویژه می‌کنم از تمامی استاد هابیم که راه روشن علم را به من نشان دادند.

مراجع

- [1] D. Sengupta, *Asymptotic expressions for the eigenvalues and eigenvectors of a system of second order differential equations with a turning point*, IJPAM, (2010), 381-398.
- [2] D. Sengupta, *Asymptotic expressions for the eigenvalues and eigenvectors of a system of second order differential equations with a turning point (Extension - I)*, IJPAM, (2011), 453-462.
- [3] D. Sengupta, *Asymptotic expressions for the eigenvalues and eigenvectors of a system of second order differential equations with a turning point (Extension -II)*, IJPAM, (2012), 85-95.
- [4] D. Sengupta, *Expressions for the first eigenvalue and regularized trace formulae for a system of second order differential equations with a turning point*, J. Math.comput.Sci (2013), 304-321.



معرفی سیستم های دینامیکی دنباله ای و بررسی فضای فاز آن

حبیبه رحمانی نعیم آبادی
دانشگاه شهید باهنر کرمان

شکوفه صیاد*
دانشگاه آزاد زاهدان

چکیده

هدف از انجام این پژوهش معرفی سیستم های دینامیکی دنباله ای و بررسی فضای فاز آن است. ابتدا یک سیستم دینامیکی دنباله ای را روی یک گراف دوری بیان کرده و سپس فضای فاز آن را تحت جایگشت های مختلف به دست می آوریم. همچنین فضای فاز آن ها را با هم مقایسه خواهیم کرد و سرانجام شرط یکسان بودن دو سیستم را نشان می دهیم.

واژه های کلیدی: حالت ها، تابع های رأس، نگاشت های موضعی، جایگشت، فضای فاز

۱ مقدمه

فرض می کنیم Y یک گراف ترکیبی با مجموعه رئوس $V[Y] = \{v_1, \dots, v_n\}$ ، مجموعه یال های $e[Y]$ و درجه هر رأس v ، $d(v)$ باشد.

تعریف ۱.۱. فرض کنید k یک مجموعه متناهی باشد، به هر رأس $v \in V[Y]$ ، یک حالت رأس $v_x \in k$ اختصاص می دهیم. برای $F_v = |k|$ ، حالت ها را به عنوان حالت های 2 تایی $\{0, 1\}$ معرفی می کنیم. n -تایی حالت های رأس $(x_{v_1}, \dots, x_{v_n})$ یک حالت سیستم نامیده می شود.

تعریف ۲.۱. برای هر رأس v از Y تابع رأس f_v را داریم که $f_v : k^{d(v)+1} \rightarrow k$ می باشد. تابع موضعی F_v را تعریف می کنیم: $F_v : k^n \rightarrow k^n$ و $F_{v_i}(x) = (x_{v_1}, \dots, x_{v_{i-1}}, f_{v_i}(x[v_i]), x_{v_{i+1}}, \dots, x_{v_n})$ همانطور که می بینیم F_{v_i} تنها حالت رأس $-v_i$ ام را تغییر می دهد و بقیه حالت ها ثابت می مانند.

تعریف ۳.۱. فرض کنید $Y(V[Y], e[Y])$ یک گراف غیر جهتدار، بدون طوقه باشد و $(f_v)_{v \in V[Y]}$ خانواده ای از تابع های رأس Y و π یک جایگشت n -تایی باشد (n تعداد راس ها می باشد) [۱].

تعریف ۴.۱. سیستم دینامیکی دنباله ای 1SDS ، سه تایی $(Y, (F_v)_v, \pi)$ است که خانواده ای از نگاشت های موضعی می باشد. SDS -نگاشت وابسته به آن عبارتست از: $[F_Y, \pi] : k^n \rightarrow k^n$ بطوریکه ترتیب ترکیب را با π مشخص می کنیم [۲].

$$[F_Y, \pi] = F_{\pi(n)} \circ F_{\pi(n-1)} \circ \dots \circ F_{\pi(1)}$$

*شکوفه صیاد

¹Sequential dynamical system



مثال ۵.۱. فرض کنید $Y = circ_4$ یک گراف دوری با ۴ راس باشد. برای هر رأس Y تابع رأس F_Y $| F_Y^3 : nor_3$ را بکار می ببریم.

$$\begin{aligned} nor_k(x_1, \dots, x_k) &= (1 + x_1) \dots (1 + x_k) \\ F_0(x) &= (nor(x_0, x_1, x_2), x_1, x_2, x_3) \\ F_1(x) &= (x_0, nor(x_0, x_1, x_2), x_2, x_3) \\ F_2(x) &= (x_0, x_1, nor(x_1, x_2, x_3), x_3) \\ F_3(x) &= (x_0, x_1, x_2, nor(x_0, x_2, x_3)). \end{aligned}$$

فرض کنید $x = (0, 0, 0, 0)$ حالت اولیه سیستم باشد. با در نظر گرفتن ترتیب بروز شده $(0, 1, 2, 3) = \pi$ داریم:

$$\begin{aligned} F_0(0, 0, 0, 0) &= (1, 0, 0, 0) \\ F_1 \circ F_0 &= (1, 0, 0, 0) \\ F_2 \circ F_1 \circ F_0 &= (1, 0, 1, 0) \\ F_3 \circ F_2 \circ F_1 \circ F_0 &= (1, 0, 1, 0) \end{aligned}$$

بنابراین سیستم $(0, 0, 0, 0)$ را به حالت سیستم جدید $(1, 0, 1, 0)$ تغییر می دهد و می نویسم:

$$\begin{aligned} [Nor_{circ_4}, (0, 1, 2, 3)](0, 0, 0, 0) &= (1, 0, 1, 0) \\ [Nor_{circ_4}, (0, 1, 2, 3)](1, 0, 1, 0) &= (0, 0, 0, 1) \end{aligned}$$

و با اثر دادن $-SDS$ نگاشت $[Nor_{circ_4}, (0, 1, 2, 3)]$ روی حالت های سیستم جدید، دنباله ای از نقاط زیر بدست می آوریم:

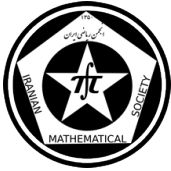
$$(0, 0, 0, 1), (0, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 0), (1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 1), (0, 0, 0, 0).$$

همانطور که می بینید دوباره به حالت سیستم اولیه $(0, 0, 0, 0)$ رسیدیم. بنابراین می توان گفت این مجموعه نقاط درون یک مدار متناوب قرار می گیرند. که در فضای فاز؛ $-SDS$ نگاشت متناظر با آن به خوبی قابل دیدن است [۳].

۲ فضای فاز یک SDS

تعریف ۱.۲. فضای فاز یک SDS عبارتست از یک گراف جهتدار و متناهی Γ ، $(\Gamma = \Gamma([F_Y, \pi]))$ که بصورت زیر تعریف می شوند:

^۲Phase space



$$V[\Gamma] = k^n$$

$$e[\Gamma] = \{(x, y) \mid x, y \in k^n, y = [F_Y, \pi](x)\}$$

ملاحظه ۲.۲. هر SDS را می توان توسط فضای فاز آن بررسی کرد.

مثال ۳.۲. فضای فاز SDS -نگاشت $[Nor_{circ_4}, \pi]$ را در دو حالت $\pi = (0, 1, 2, 3)$ و $\pi' = (0, 2, 1, 3)$ بدست می آوریم و با هم مقایسه می کنیم: $V[\Gamma] = 2^4 = 16$. بنابراین ۱۶ تا رأس داریم که نمونه هایی از آن ها عبارتند از

$$(0, 0, 0, 0), (1, 1, 1, 1), (0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 1), (1, 0, 1, 0), \dots$$

حالت اول: فرض کنیم $\pi = (0, 1, 2, 3)$ در این صورت

$$|F_Y^* \longrightarrow| F_Y^* : [Nor_{circ_4}, \pi] = Nor_{\pi(3)} \circ Nor_{\pi(2)} \circ Nor_{\pi(1)} \circ Nor_{\pi(0)}.$$

بنابراین این نقاط در سیستم فاز تشکیل یک دور می دهند و با اثر دادن SDS -نگاشت $[Nor_{circ_4}, \pi]$ روی بقیه حالات سیستم فاز (رئوس Γ)، شکل ۱ (ب) را بدست می آوریم.

$$[Nor_{circ_4}, \pi](1, 0, 0, 0) = (0, 1, 0, 1),$$

$$[Nor_{circ_4}, \pi](0, 1, 0, 1) = (0, 0, 0, 0),$$

$$[Nor_{circ_4}, \pi](0, 0, 0, 0) = (1, 0, 1, 0),$$

$$[Nor_{circ_4}, \pi](1, 0, 1, 0) = (0, 0, 0, 1),$$

$$[Nor_{circ_4}, \pi](0, 0, 0, 1) = (0, 1, 0, 0),$$

$$[Nor_{circ_4}, \pi](0, 1, 0, 0) = (0, 0, 1, 0),$$

$$[Nor_{circ_4}, \pi](0, 0, 1, 0) = (1, 0, 0, 0).$$

حالت دوم: فرض کنیم $\pi' = (0, 2, 1, 3)$ باشد، بنابراین SDS -نگاشت متناظر با این ترتیب بروز شده، عبارتست از:

$$[Nor_{circ_4}, \pi'] = Nor_{\pi'(3)} \circ Nor_{\pi'(1)} \circ Nor_{\pi'(2)} \circ Nor_{\pi'(0)}$$

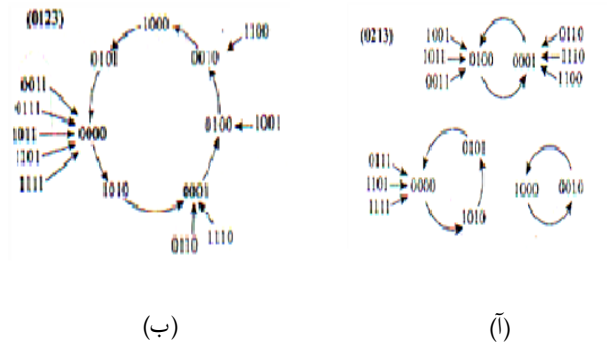
و فضای فاز آن شکل ۱ (آ) می باشد. در زیر مثالی ارائه می دهیم که $\pi \sim_Y \pi'$ نتیجه می دهد $[F_Y, \pi] = [F_Y, \pi']$.

مثال ۴.۲. در گراف $U(circ_4)$ ، جایگشت های $\pi = (0, 1, 2, 3)$ و $\pi' = (0, 3, 1, 2)$ هم ارزند یعنی $\pi \sim_Y \pi'$. پس SDS -نگاشت های القایی توسط π و π' در حالت سیستم $(0, 0, 0, 0)$ با هم برابر شدند و چون انتخاب حالت سیستم دلخواه می باشد، لذا برای هر حالت سیستم، همواره تساوی $[Nor_{circ_4}, \pi] = [Nor_{circ_4}, \pi']$ برقرار است. [۴]

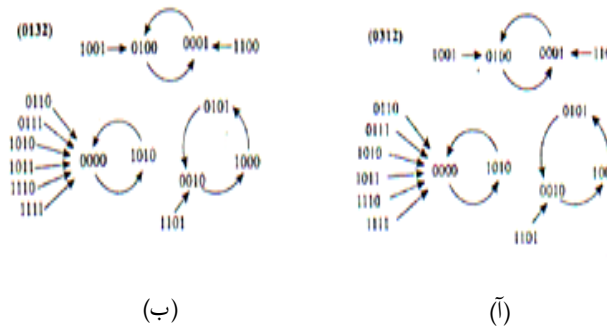
$$\begin{aligned} (0, 0, 0, 0) \xrightarrow{Nor_0} (1, 0, 0, 0) \xrightarrow{Nor_1} (1, 0, 0, 0) \xrightarrow{Nor_2} (1, 0, 0, 0) \xrightarrow{Nor_3} (1, 0, 1, 0), \\ (0, 0, 0, 0) \xrightarrow{Nor_0} (1, 0, 0, 0) \xrightarrow{Nor_1} (1, 0, 0, 0) \xrightarrow{Nor_2} (1, 0, 0, 0) \xrightarrow{Nor_3} (1, 0, 1, 0). \end{aligned}$$

همانطور که در شکل ۲ می بینید فضای فاز این دو SDS دقیقاً مانند هم هستند اگر چه ترتیب بروز شده ی آن ها با هم متفاوتند.

نتیجه ۵.۲. هرگاه دو SDS نگاشت با هم مساوی باشند، لزوماً فضای فاز آن ها مانند هم هستند [۴].



شکل ۱



شکل ۲

مراجع

- [1] BRIN, Stuck G. *Introduction to dynamical systems*.
- [2] James M. W. Duvall, *Characterization of Fixed Points in Sequential Dynamical Systems*, Virginia Polytechnic Institute and State University Department of Mathematics, 2009.
- [3] Mortveit H.S. Reidys, C. M., *Discrete sequential dynamical systems*, Discrete math. 226 (2001), pp. 281-295.
- [4] Mortveit H.S. Reidys, C. M., *An introduction to sequential dynamical systems*, (2007).

پست الکترونیکی: sh-sayad86@gmail.com
پست الکترونیکی: ha.rahmani172@gmail.com



وجود جواب ضعیف برای معادلات اویلر-لاگرانژ کسری

مرتضی زره پوش
دانشگاه تبریزپروانه آقامحمدزاده*
دانشگاه تبریز

چکیده

مسائل تغییراتی یکی از جذابترین زمینه‌های آنالیز ریاضی می‌باشد. ارتباط این مسائل با معادلات دیفرانسیل و حل دسته وسیعی از معادلات دیفرانسیل غیرخطی به واسطه آن‌ها و با استفاده از تکنیک‌های ساده آنالیز تابعی غیرخطی، موجب جلب توجه بسیاری از محققان به این زمینه از ریاضیات شده است. در این پژوهش، با استفاده از روش‌های مستقیم تغییراتی به اثبات وجود جواب ضعیف معادلات اویلر-لاگرانژ خواهیم پرداخت. نشان خواهیم داد تحت شرایطی جواب ضعیف معادله اویلر-لاگرانژ همان نقاط اکسترمم تابع لاگرانژ یا تابع انرژی است. در واقع با بهینه سازی دسته خاصی از عملگرهای انتگرالی درگیر با مشتقات کسری روی یک فضای خاص به اثبات وجود و یکتایی جواب معادلات دیفرانسیل کسری غیرخطی وابسته خواهیم پرداخت.

واژه‌های کلیدی: معادلات اویلر-لاگرانژ حساب تغییرات کسری، وجود جواب ضعیف، مسائل تغییراتی کسری

Mathematics Subject Classification [2010]: 47D03, 47A50

۱ مقدمه

در این تحقیق با به‌کارگیری روش‌های مستقیم تغییراتی به یافتن جواب ضعیف برای معادله اویلر-لاگرانژ کسری زیر روی بازه $[a, b]$ خواهیم پرداخت،

$$\frac{\partial L}{\partial x}(u, D_-^\alpha u, t) + D_+^\alpha \left(\frac{\partial L}{\partial y}(u, D_-^\alpha u, t) \right) = 0 \quad (1)$$

که در آن D_-^α و D_+^α به ترتیب مشتقات کسری ریمان-لیوویل^۱ چپ و راست از مرتبه α و همچنین $\frac{\partial L}{\partial x}$ و $\frac{\partial L}{\partial y}$ مشتقات جزئی عملگر لاگرانژین نسبت به مولفه‌های اول و دوم می‌باشند. برای این منظور روی تابع

$$\mathcal{L}(u) = \int_a^b L(u, D_-^\alpha u, t) dt \quad (2)$$

متمرکز می‌شویم، که از نوع مینیمم‌سازی تابع انرژی خواهد بود، و در آن $a < b$ و متغیر $\mathbb{R} \rightarrow (a, b) : u$ یک تابع برداری است.

\mathcal{L} را تابع انرژی یا تابع لاگرانژ نامیده و لاگرانژین L را به صورت زیر در نظر می‌گیریم، که در آن $d \in \mathbb{N}^*$ است.

$$L : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \times [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y, t) \mapsto L(x, y, t) \quad (3)$$

*سخنران

^۱Riemann-Liouville



در واقع با بررسی تابع (۲) و با اعمال شرایطی روی عملگر لاگرانژین L ، به بحث وجود و یکتایی جواب معادله اویلر-لاگرانژ به دست آمده از مسئله تغییراتی مورد نظر می‌پردازیم.

۲ بیان مساله

قضیه زیر و اثبات آن مساله اصلی ما می‌باشد، که در آن با اعمال شرایطی روی L ادعا می‌کنیم معادله اویلر-لاگرانژ جواب ضعیف دارد. برای این منظور به جای یافتن جواب‌های معادله به دنبال نقاط اکسترمم تابع لاگرانژ خواهیم بود، لذا مساله تغییراتی (\cdot) را مورد بررسی قرار می‌دهیم، ایده این اثبات از مرجع [۲] گرفته شده است. برای روشن شدن مطلب اثبات را در دو بخش و به کمک قضایای (۱.۴) و (۲.۵) پیش خواهیم برد، که در این راستا لم‌ها و قضایای دیگری نیز مطرح و اثبات می‌شود.

قضیه ۱.۲. فرض کنید L یک عملگر لاگرانژین از کلاس \mathcal{C}^1 ، و همچنین $1 < \alpha < (\frac{1}{p}) < \infty$ باشد.

اگر L در فرض‌های زیر صدق کند،

$$(1) \quad 0 \leq d_1 \leq p \text{ و } r_1, s_1 \in C(\mathbb{R}^d \times [a, b], \mathbb{R}^+), \text{ وجود داشته باشد، به طوری که:}$$

$$\forall (x, y, t) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \times [a, b], \quad |L(x, y, t) - L(x, 0, t)| \leq r_1(x, t) \|y\|^{d_1} + s_1(x, t).$$

$$(2) \quad 0 \leq d_2 \leq p \text{ و } r_2, s_2 \in C(\mathbb{R}^d \times [a, b], \mathbb{R}^+), \text{ وجود داشته باشد، به طوری که:}$$

$$\forall (x, y, t) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \times [a, b], \quad \left\| \frac{\partial L}{\partial x}(x, y, t) \right\| \leq r_2(x, t) \|y\|^{d_2} + s_2(x, t).$$

$$(3) \quad 0 \leq d_3 \leq p - 1 \text{ و } r_3, s_3 \in C(\mathbb{R}^d \times [a, b], \mathbb{R}^+), \text{ وجود داشته باشد، به طوری که:}$$

$$\forall (x, y, t) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \times [a, b], \quad \left\| \frac{\partial L}{\partial y}(x, y, t) \right\| \leq r_3(x, t) \|y\|^{d_3} + s_3(x, t).$$

$$(4) \quad (\text{شرط تراکمی}). \quad 0 < \gamma < p - d_4 \text{ و } c_1 \in C(\mathbb{R}^d \times [a, b], [\gamma, \infty)) \text{ و } c_2, c_3 \in C([a, b], \mathbb{R}) \text{ وجود داشته باشد، به طوری که:}$$

$$\forall (x, y, t) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \times [a, b], \quad L(x, y, t) \geq c_1(x, t) \|y\|^p + c_2(t) \|x\|^{d_4} + c_3(t).$$

(۵) (شرط محدب بودن)

$L(\cdot, \cdot, t)$ ، $\forall t \in [a, b]$ محدب باشد.

آنگاه معادله دیفرانسیل کسری

$$\frac{\partial L}{\partial x}(u, D_-^\alpha u, t) + D_+^\alpha \left(\frac{\partial L}{\partial y}(u, D_-^\alpha u, t) \right) = 0 \quad (4)$$

یک جواب ضعیف دارد.



تعریف ۲.۲. تابع u ، یک جواب ضعیف معادله (۴) است، اگر $u \in C := C([a, b]; \mathbb{R}^d)$ و u تقریباً همه جا در معادله (۴) روی بازه $[a, b]$ صدق کند.

فرض‌های فوق را با $(H_5) - (H_1)$ نشان می‌دهیم. در این مقاله برای حل معادله اویلر-لاگرانژ (۱) از ساختار تغییراتی معادله استفاده خواهیم کرد.

۳ فضای جواب

برای حل معادله دیفرانسیل با روش تغییراتی و در حالت اکیدا کسری $0 < \alpha < 1$ و $p \geq 1$ فضای توابع زیر را تعریف می‌کنیم.

$$E_{\alpha, p} = \{u \in L^p \mid D_-^\alpha u \in L^p, I_-^\alpha \circ D_-^\alpha u = u \text{ a.e on } [a, b]\} \quad (5)$$

با توجه به انتخاب توابع و مشتقاتشان از L^p ، فضای فوق را به نرم زیر مجهز می‌کنیم.

$$\begin{aligned} \|\cdot\|_{\alpha, p} : E_{\alpha, p} &\longrightarrow \mathbb{R}^+ \\ u &\longmapsto (\|u\|_{L^p}^p + \|D_-^\alpha u\|_{L^p}^p)^{\frac{1}{p}} \end{aligned} \quad (6)$$

گزاره ۱.۳. فرض کنید $0 < \frac{1}{p} < \alpha < 1$ ، آنگاه $E_{\alpha, p}$ یک فضای باناخ جدایی پذیر و انعکاسی است و $E_\alpha \hookrightarrow C_a$ یک نشاندن فشرده است.

در آن C_a به صورت زیر می‌باشد:

$$C_a := C_a([a, b]; \mathbb{R}^n) = \{f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^n ; f \in C(a, b) \ \& \ f(a) = 0\} \quad (7)$$

نتیجه ۲.۳. فرض کنید $\frac{1}{p} < \min(\alpha, 1 - \alpha)$ و $E_{\alpha, p} = \{u \in L^p \mid D_-^\alpha u \in L^p\}$ در این صورت اگر $u \in E_{\alpha, p}$ آنگاه تقریباً همه جا $I_-^\alpha \circ D_-^\alpha u = u$.

۱.۳ گتو مشتق پذیری \mathcal{L}

در این بخش تحت گزاره‌ای مشتق پذیری \mathcal{L} را بررسی می‌کنیم، قبل از آن لم زیر را در نظر بگیرید:

لم ۳.۳. گزاره‌های زیر برقرار هستند.

۱. اگر L در شرط (H_1) صدق کند، آنگاه برای هر $u \in \mathcal{L}(u)$ و $L(u, D_-^\alpha u, t) \in L^1$ و $L(u)$ در \mathbb{R} موجود و متناهی است.

۲. اگر L در شرط (H_2) صدق کند، آنگاه برای هر $u \in E_{\alpha, p}$ ، $\frac{\partial L}{\partial x}(u, D_-^\alpha u, t) \in L^1$.

۳. اگر L در شرط (H_3) صدق کند، آنگاه برای هر $u \in E_{\alpha, p}$ ، $\frac{\partial L}{\partial y}(u, D_-^\alpha u, t) \in L^q$.

گزاره ۴.۳. فرض کنید L در فرض‌های $(H_3) - (H_1)$ صدق کند، در این صورت \mathcal{L} در هر $u \in E_{\alpha, p}$ ، گتو-مشتق پذیر است، یعنی $D\mathcal{L}(u)(v)$ موجود و متناهی است، و

$$\forall u, v \in E_{\alpha, p} \quad D\mathcal{L}(u)(v) = \int \frac{\partial L}{\partial x}(u, D_-^\alpha u, t) \cdot v + \frac{\partial L}{\partial y}(u, D_-^\alpha u, t) \cdot D_-^\alpha v \, dt. \quad (8)$$



که در آن $D\mathcal{L}(u)(v)$ مشتق گتوی \mathcal{L} در u و در جهت v نامیده می‌شود.

تاکنون فضای جواب معادله کسری مورد نظرمان را تعیین کردیم. همچنین اگر قرار دهیم $D\mathcal{L}(u)(v) = 0$ در این صورت اکسترم‌های \mathcal{L} به دست می‌آید. با توجه به ساختار تغییراتی معادله، این اکسترم در معادله صدق خواهد کرد. در زیر این مطلب را تحت عنوان شرط کافی برای جواب ضعیف معادله (۴) مطرح می‌کنیم.

۴ شرط کافی برای یک جواب ضعیف

قضیه ۱.۴. فرض کنید L در فرض‌های $(H_1) - (H_3)$ صدق کند، در این صورت، اگر u یک مینیمم ساز تابع \mathcal{L} باشد، آنگاه u یک جواب ضعیف معادله (۴) خواهد بود.

□

اثبات. برای اثبات به [۱] مراجعه شود.

۵ وجود یک مینیمم کلی برای \mathcal{L}

لم ۱.۵. فرض کنید L در فرض (H_4) صدق کند، آنگاه \mathcal{L} تراکمی است و در این حالت:

$$\lim_{\|u\|_{\alpha,p} \rightarrow \infty} \mathcal{L}(u) = +\infty$$

قضیه ۲.۵. فرض کنید L در فرض‌های $(H_1) - (H_4)$ و شرط (H_5) صدق کند، آنگاه \mathcal{L} یک مینیمم کلی دارد.

□

اثبات. برای راهنمایی اثبات به [۱] مراجعه شود.

با اثبات قضایای (۱.۴) و (۲.۵) قضیه اصلی ما اثبات خواهد شد.

مثال ۳.۵. لاگرانژین L را به صورت زیر در نظر بگیرید:

$$L(x, y, t) = \frac{1}{p} \|y\|^2 \quad (9)$$

در این صورت، L در فرض‌های $(H_1) - (H_5)$ برای $p = 2$ صدق می‌کند، از این رو معادله اویلر-لاگرانژ وابسته به صورت (۱.۲) یک جواب ضعیف در $E_{\alpha,p}$ برای $1 < \alpha < \frac{1}{p}$ دارد.

مراجع

- [1] K. Diethelm. *The Analysis of Fractional Differential Equations*, Springer-Verlag, Berlin, (2010).
- [2] F. Jiao, Y. Zhou *Existence of solutions for a class fractional boundary value problems via critical point theory*, Comput. Math. Appl, 62 (3) (2011) 1181-1199.

آموزش ریاضی



ارزیابی عملکرد مدارس دولتی پایه هفتم بر اساس نقشه مفهومی (مطالعه‌ی موردی مدارس دخترانه دولتی شهرستان گرگان)

مریم طاری دشتی

دانشگاه علوم و تحقیقات فارس

چکیده

در این مقاله با استفاده از نقشه مفهومی و تدریس در مدارس دخترانه‌ی پایه هفتم و تعیین ورودی‌ها و خروجی‌ها، ارزیابی عملکرد مدارس را بررسی می‌کنیم. به طور کلی نقشه مفهومی یک استراتژی آموزشی برای تسهیل فعالیت گروهی در یادگیری مورد استفاده قرار می‌گیرد. با در نظر گرفتن ۲۴ مدرسه پایه هفتم و ورودی‌ها و خروجی‌های مشخص از مدل CCR و BCC مدارس مورد ارزیابی قرار گرفته‌اند که نتایج نشان می‌دهد دانش‌آموزان در روش نقشه مفهومی نسبت به روش سنتی پیشرفت تحصیلی داشته‌اند.

واژه‌های کلیدی: ارزیابی عملکرد، نقشه مفهومی، پیشرفت تحصیلی

Mathematics Subject Classification [2010]: 60K25 , 90BXX

۱ مقدمه

از حدود سال ۱۹۷۲ تا به امروز یعنی چهل سال است که نوک^۱ ایده نقشه‌های مفهومی را مطرح کرده است. پژوهشگران ابعدادی گسترده از این ایده راهبردی را طی تحقیقات و بررسی‌های کارشناسانه‌ی خود معرفی کرده‌اند. معلمان می‌توانند با بررسی نقشه‌های مفهومی یادگیرندگان، نقاط قوت و ضعف آنها را تشخیص دهند و در رفع نواقص یادگیری آنان بکوشند و همچنین هنگام ارائه اطلاعات تازه، آنها را به‌عنوان پیش‌سازمان‌دهنده مورد استفاده قرار دهند و در این صورت نقشه و الگوی مفهومی به‌عنوان پیش‌سازمان‌دهنده مورد استفاده قرار می‌گیرد. تحلیل پوششی داده‌ها تکنیکی جهت محاسبه کارایی نسبی یک مجموعه از واحدهای تصمیم‌گیرنده در مقایسه با یکدیگر، با استفاده از یک برنامه‌ریزی ریاضی است. در تحلیل پوششی داده‌ها با واحدهای تصمیم‌گیرنده‌ای سروکار داریم که به شکل بردارهایی هستند که ورودی متمایز را برای تولید خروجی متمایز مورد استفاده قرار می‌دهند. همواره فرض می‌کنیم که تمام ورودی‌ها و خروجی‌ها در واحدهای متجانس باشند و هر واحد تصمیم‌گیرنده را به‌صورت زیر در نظر می‌گیریم: [۱]

$$(X_o, Y_o)^T = (X_{1p}, \dots, X_{mp}, Y_{1p}, \dots, Y_{sp})$$

۲ مفاهیم اولیه نقشه مفهومی

نقشه مفهومی: نقشه مفهومی ابزاری ترسیمی برای سازماندهی و ارائه اطلاعات است. این نقشه شامل مفاهیمی است که در دایره‌ها یا جعبه‌هایی محصور شده و با خطوط ارتباط دهنده برچسب‌دار در ساختاری منظم با سلسله مراتبی منطبق

^۱novak



بر ساختار هرمی مغز در یادگیری، به هم مرتبط شده‌اند. [۴]

یادگیری معنادار: یادگیری معنادار از طریق ایجاد ارتباط بین مطالب تازه و مطالب قبلاً آموخته شده ایجاد می‌گردد. [۲]

دانش مفهومی: دانش مفهومی به‌عنوان دانش حقایق، مفاهیم، اصول و ایده‌های ریاضی تعریف می‌شود. دانشی که به روابط و اتصالات بین مفاهیم، حقایق و ایده‌های ریاضی مربوط است. این روابط و اتصالات مطابق با سطوح دانش ممکن است غنی یا ضعیف باشند. [۳]

دانش رویه‌ای: دانش رویه‌ای به‌عنوان دانش قوانین، الگوریتم‌ها، رویه‌ها، استراتژی‌ها و فرایندهای ریاضی برای کامل کردن تکالیف، تعریف می‌شود دانشی که به روابط و اتصالات بین قوانین، الگوریتم‌ها و رویه‌های ریاضی مربوط است. این روابط و اتصالات مطابق با سطوح دانش ممکن است غنی یا ضعیف باشند. [۳]

پیش سازمان دهنده: پیش سازمان دهنده به‌عنوان راهی جهت کمک به دانش‌آموزان به منظور پیوند دادن ایده‌هایشان با مطالب یا مفاهیم جدید می‌باشد. [۲]

۳ مدل‌های اساسی DEA

با در نظر گرفتن n واحد تصمیم‌گیرنده و m ورودی و s خروجی به‌صورت زیر مدل‌های CCR و BCC را در نظر می‌گیریم:

$$\begin{aligned} \text{Min } & \theta \\ \text{s.t. } & \sum_{j=1}^n \lambda_j x_{ij} \leq \theta x_{i_0}, \quad i = 1, \dots, m \\ & \sum_{j=1}^n \lambda_j y_{rj} \geq y_{r_0}, \quad r = 1, \dots, s \\ & \lambda_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, n \end{aligned} \quad (1)$$

مدل BCC در ماهیت ورودی به‌صورت زیر می‌باشد:

$$\begin{aligned} \text{Min } & \theta \\ \text{s.t. } & \sum_{j=1}^n \lambda_j x_{ij} \leq \theta x_{i_0}, \quad i = 1, \dots, m \\ & \sum_{j=1}^n \lambda_j y_{rj} \geq y_{r_0}, \quad r = 1, \dots, s \\ & \sum_{j=1}^n \lambda_j = 1, \quad j = 1, \dots, n \end{aligned} \quad (2)$$

اگر در مدل‌های (۱) و (۲)، DMU_0 را حذف کنیم یعنی $z \neq 0$ را در نظر بگیریم، رتبه‌بندی واحدهای تصمیم‌گیرنده انجام می‌شود.



۴ روش پیشنهادی برای ارزیابی عملکرد مدارس

در این بخش با در نظر گرفتن ورودی‌ها شامل میانگین نمره‌ی معلم، مساحت مدرسه، تعداد پرسنل مدرسه، تعداد کل دانش‌آموزان، تعداد دانش‌آموزان پایه‌ی هفتم، سابقه‌ی تدریس معلم مربوطه، سن معلم مربوطه و تجهیزات مدرسه و خروجی‌ها شامل میانگین نمره‌ی نقشه مفهومی و امتیاز تجهیزات مدرسه برای ۲۴ مدرسه‌ی پایه هفتم و استفاده از مدل‌های (۱) و (۲)، مقیاس کارایی و رتبه‌بندی آنها را انجام می‌دهیم. البته در حالتی که نسبتی از داده‌های ورودی و خروجی فقط در دسترس باشند مدل DEA-R در ماهیت ورودی استفاده می‌شود.

$$\begin{aligned} \text{Min } & \theta \\ \text{s.t. } & \sum_{j=1}^n \lambda_j \left(\frac{x_{ij}}{y_{rj}} \right) \leq \theta \left(\frac{x_{i^0}}{y_{r^0}} \right), \quad i = 1, \dots, m, \quad r = 1, \dots, s \\ & \sum_{j=1}^n \lambda_j = 1, \quad \lambda_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, n \end{aligned} \quad (3)$$

مدل (۳) خطی و دارای $(1 + mg)$ قید و $n + 1$ متغیر می‌باشد.

تعریف ۱.۴. DMU_0 در مدل (۳) کارا می‌باشد هرگاه $\theta^* = 1$.

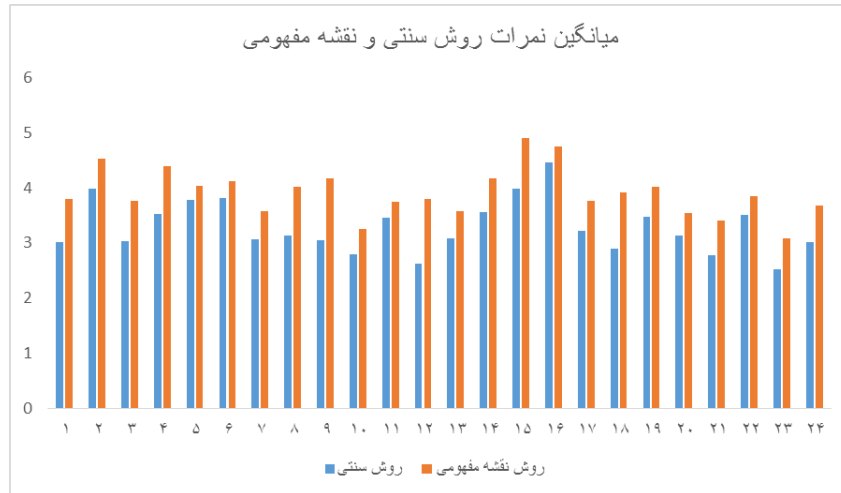
در این مقاله، جامعه آماری دانش‌آموزان دختر پایه هفتم مدارس دولتی شهرستان گرگان در سال تحصیلی ۹۳-۹۴ می‌باشند. نمونه آماری، از بین دانش‌آموزان پایه هفتم مدارس دولتی شهرستان گرگان که در سال تحصیلی ۹۳-۹۴ مشغول به تحصیل بودند که از هر مدرسه یک کلاس انتخاب شد. تعداد دانش‌آموزان مذکور ۶۲۶ نفر بود. گردآوری اطلاعات به دو روش کتابخانه‌ای و میدانی صورت گرفته است. ارزیابی عملکرد و پیشرفت تحصیلی دانش‌آموزان پایه هفتم با استفاده از نقشه مفهومی بسیار حائز اهمیت می‌باشد. در این پژوهش از روش غیر پارامتری برای ارزیابی عملکرد استفاده شده است. به دلیل تغییر نظام آموزشی و استفاده از روش‌های نوین در تدریس بسیار مهم و ضروری می‌باشد. مطالعه موردی بر مدارس دخترانه و نحوه استفاده از نقشه مفهومی پایه جدید بسیار ضروری می‌باشد.

این پژوهش موانع و محدودیت‌هایی را به همراه داشت که به برخی از آنها اشاره می‌گردد:

- تحقیق بر روی دانش‌آموزان دختر صورت گرفته است و تفکیک جنسیت انجام نشده است. بنابراین نتایج قابل تعمیم به دانش‌آموزان پسر نمی‌باشد.
- موضوع ریاضی که در تحقیق مد نظر قرار گرفته شده است، تنها یک فصل از کتاب ریاضی پایه‌ی هفتم (فصل دوم: عددهای صحیح) بوده است، که این قدرت تعمیم‌پذیری تحقیق را پایین می‌آورد.
- دسترسی به تحقیقات مشابه انجام شده در زمینه نقشه‌های مفهومی ریاضی محدود بوده است.

۵ مطالعه‌ی موردی

در این مقاله، با در نظر گرفتن تمام جزئیات مدارس پایه هفتم از قبیل ورودی‌ها که شامل میانگین نمره‌ی معلم، مساحت مدرسه، تعداد پرسنل مدرسه، تعداد کل دانش‌آموزان، تعداد دانش‌آموزان پایه‌ی هفتم، سابقه‌ی تدریس معلم مربوطه، سن معلم مربوطه و تجهیزات مدرسه و خروجی‌ها که شامل میانگین نمره‌ی نقشه مفهومی و امتیاز تجهیزات مدرسه بوده است، لحاظ شده است.



شکل ۱: مقایسه میانگین نمرات روش سنتی و نقشه مفهومی مدارس

۶ نتیجه‌گیری

در این مقاله، با استفاده از تحلیل پوششی داده‌ها و مدل نسبی بر تحلیل کسری DEA-R و استفاده از روش نقشه مفهومی ارزیابی عملکرد واحدهای تصمیم‌گیرنده یا مدارس انجام شده است. به طور کلی یادگیری دانش‌آموزان پایه هفتم در مفاهیم ریاضی با استفاده از نقشه مفهومی، چون یک استراتژی گروهی است، بسیار مفید بوده است یعنی ابزار ارزیابی DEA-R و DEA برای مقایسه و یافتن الگوی مناسب و مقیاس کارایی و رتبه‌بندی مدارس بسیار حائز اهمیت می‌باشد. برای کارهای آتی از روش‌های نوین در امر آموزش مقایسه آنها با DEA پیشنهاد می‌شود.

سپاس‌گزاری:

از زحمات استاد ارجمند جناب آقای دکتر محمد رضا مظفری که با سعه صدر در مراحل تهیه این مقاله مرا همراهی نمودند، تشکر می‌کنم.

مراجع

- [۱] جهان‌شاهلو، غلامرضا. حسین‌زاده لطفی، فرهاد، و نیکو مرام، هاشم (۱۳۸۷). تحلیل پوششی داده‌ها و کاربردهای آن (جلد ۱). تهران: انتشارات دانشگاه آزاد اسلامی واحد علوم و تحقیقات تهران. ۳.
- [۲] سیف، علی اکبر (۱۳۹۰). روانشناسی پرورشی نوین- روانشناسی یادگیری و آموزش. ششم، تهران، ایران: دوران.
- [۳] معینی، تریفه (۱۳۸۷). بررسی سیر تکامل دانش مفهومی و دانش رویه‌های ریاضی و رابطه میان آنها. فصلنامه نوآوری‌های آموزشی (۲۶)۸، ۲۷-۵۱.
- [4] Novak, J. and Gowin, D. (1984). Learning How to Learn: New York and Cambridge, Uk:Cambridge University Press. 1.P.



پیشرفت در توانایی حل مسائل هندسه از طریق پرورش مهارت طرح مسئله

مریم غلامی*

دانشگاه آزاد اسلامی واحد اراک

مجید حق وردی

دانشگاه آزاد اسلامی واحد اراک

چکیده

هدف این پژوهش، بررسی تأثیر پرورش مهارت طرح مسئله بر توانایی حل مسائل هندسه دانش آموزان دبیرستان می باشد. روش این پژوهش، از نوع شبه آزمایشی با طرح پیش آزمون-پس آزمون با دو گروه آزمایش و کنترل بوده و نمونه آماری آن، دانش آموزان پایه دوم تجربی دبیرستان به تعداد ۶۰ نفر که با روش نمونه گیری در دسترس انتخاب گردیدند. مدت زمان اجرای فعالیت های طرح مسئله یک دوره ۱ شش ماهه بازای ۱ جلسه آموزش در هفته می باشد. داده ها با استفاده از آزمون t مستقل مورد تجزیه و تحلیل واقع شده است. یافته های تحقیق نشان می دهد که بکارگیری فعالیت های مبتنی بر طرح مسئله باعث پیشرفت در توانایی حل مسئله دانش آموزان می شود.

واژه‌های کلیدی: حل مسئله، طرح مسئله ریاضی، آموزش هندسه

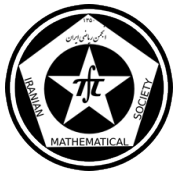
Mathematics Subject Classification [2010]: 97

۱ مقدمه

نقش بنیادی ریاضی در پیشبرد سایر علوم و فنون مورد پذیرش همگان است، به طوری که نرسیدن به هدف های آموزشی در زمینه ی ریاضی موجب ضعف، ناتوانی و دست نیافتن به اهداف مربوط به پیشرفت علوم و فنون دیگر خواهد بود. دانش آموزان تحت روش های آموزشی قدیمی قادر به حل مسائل و برقراری ارتباط میان زندگی واقعی و آموخته هایشان در دنیای در حال تغییر سریع نمی باشند و روش های آموزشی دانش آموز محور، به جای روش های معلم محور، می بایست مورد بحث قرار بگیرند. یکی از آن ها روش طرح مسئله در آموزش ریاضیات می باشد. یکی از موضوعات درسی که در دبیرستان تدریس می شود هندسه می باشد، هندسه با توجه به وسعتی که دارد به عنوان درک و توصیف فضایی که در آن قرار داریم، شاید شهودی ترین، ملموس ترین و واقعی ترین قسمت ریاضی باشد پس یادگیری آن به عنوان یکی از قسمت های اصلی ریاضی اهمیت بسیاری دارد. در این پژوهش نشان داده شده است که پرورش مهارت طرح مسئله می تواند دانش آموزان را در حل مسائل هندسه توانمند تر کند. بنابراین ابتدا به ماهیت و ضرورت طرح مسأله و آشنایی با انواع طرح مسأله می پردازیم، سپس استراتژی "اگر چنین نباشد، چه می شود؟" ^۱ را معرفی می کنیم، که چهار چوب آن از طرف براون و والتر (۲۰۰۵)، در کتاب "هنر طرح مسئله" بیان شده است، در آخر هم به تحلیل نتایج حاصل از بکارگیری فعالیت های طرح مسئله در کلاس درس هندسه روی توانایی حل مسائل هندسه توسط دانش آموزان می پردازیم.

* سخنران

^۱ what-if-not



۲ تعریف طرح مسئله ریاضی و انواع آن

طرح مسئله ایجاد مسائل جدید و صورت بندی دوباره مسائل موجود می باشد [۳]. فرمول بندی مسئله باید نه تنها به عنوان یک هدف آموزش بلکه به عنوان وسیله ی آموزش در نظر گرفته شود [۲].
گستره ی وسیعی از تکالیف طرح مسئله وجود دارد. استویانوا و التون سه نوع دسته بندی از تجارب طرح مسئله که به آگاهی دانش آموزان از موقعیت های مختلف برای تولید و حل مسائل ریاضی منجر می شود، ارائه می دهند:
موقعیتهای آزاد، موقعیت های نیمه ساختار یافته و موقعیت های طرح مسئله ساختار یافته [۴]. سیلور بیان می دارد که طرح مسئله ممکن است قبل از حل مسئله اتفاق بیفتد، در طی حل مسئله باشد، مانند استفاده از راهبرد " ایجاد مسئله مرتبط ساده تر " و یا پس از حل مسئله، این نوع طرح مسئله با جنبه " نگاه به عقب " حل مسئله مورد بحث توسط پولیا سازگار است [۳].

۳ معرفی استراتژی " اگر چنین نباشد، چه می شود؟ " در طرح مسئله ریاضی

براون و والتر در کتاب " هنر طرح مسئله " یک استراتژی برای طرح مسائل جدید با استفاده از یک مسئله داده شده معرفی می کنند که دارای پنج سطح می باشد. این استراتژی، یک روش کارآمد برای طرح مسائل جدید برمبنای یک مسئله ساختار یافته، قبل و پس از حل مسئله می باشد [۱]. سطح صفر راتحت عنوان انتخاب یک نقطه شروع آورده اند، که می تواند یک مسئله ی ساختار یافته باشد یا قضیه ای مانند قضیه فیثاغورس. بقیه سطوح به اختصار در زیر آورده شده اند:
سطح ۱- فهرست کردن ویژگی ها و مفروضات مسئله داده شده.
سطح ۲- پرسیدن سؤال "اگر چنین نباشد، چه می شود؟" برای هر ویژگی سطح قبل.
سطح ۳- طرح مسئله یا پرسیدن سؤال جدید. سطح ۴- تجزیه و تحلیل و بررسی مسئله جدید.

۴ روش پژوهش

به منظور بررسی تأثیر بکارگیری استراتژی طرح مسئله بر توانای حل مسائل هندسه توسط دانش آموزان، تعداد ۲ کلاس که هر کدام شامل ۳۰ دانش آموز می باشند از سال دوم دبیرستان با روش نمونه گیری در دسترس انتخاب شدند، این دو کلاس از نظر میانگین نمرات امتحانات کلاسی بسیار به هم نزدیک بودند تحقیق از نوع شبه آزمایشی با طرح پیش آزمون - پس آزمون با ۲ گروه آزمایش و کنترل انجام گرفت. تعداد دانش آموزان هر ۲ گروه برابر ۳۰ نفر بودند. با توجه به طرح و هدف پژوهش جهت تجزیه و تحلیل داده ها و بررسی معنا داری تفاوت بین میانگین نمرات دانش آموزان در آزمون ها، آزمون t مستقل مورد استفاده قرار گرفت.

۵ ابزار گرد آوری داده ها

به قصد گرد آوری داده ها، دو آزمون هر کدام شامل شش سوال که ساختاری شبیه به هم داشتند، تهیه شد. روایی محتوایی آزمون ها توسط یک استاد آموزش ریاضی و یک استاد ریاضی و چهار دبیر ریاضی تأیید گردید. پایایی آزمون ها هم با روش دو بار آزمایشی بررسی شد. برای هر یک از دو آزمون تعداد ۲۵ دانش آموز پایه دوم انتخاب شدند و هر بار به فاصله ی دو هفته آزمون برگزار شد و همبستگی بین نمرات این دانش آموزان مورد آزمون قرار گرفت و ضریب پایایی ۷۱٪ بدست آمد که مقدار قابل قبولی بودند.



۶ مراحل اجرای طرح

پس از برگزاری پیش آزمون مطالب کتاب به گروه کنترل بطور معمول تدریس می شد، ولی با گروه آزمایش در کنار تدریس معمولی فعالیت های طرح مسئله نیز کار می شد. در ابتدا استراتژی های طرح مسئله آموزش داده شد، سپس مسائل در موقعیت های گوناگون، آزاد، نیمه ساختار یافته و ساختار یافته با زمینه های گوناگون شامل مسائل اثبات کردنی و محاسباتی در راستای اهداف آموزشی کتاب توسط دانش آموزان طرح می شد. در هر جلسه حتماً چند نمونه از سوالات طرح شده مورد تجزیه و تحلیل و بررسی قرار می گرفت و پس از تعیین اینکه کدام سوالات قابل حل هستند، با کمک دانش آموزان به حل آنها پرداخته می شد. مدت زمان انجام این فعالیت ها ۶ ماه بود، البته باید خاطر نشان کرد که بیشتر جلسات خارج از ساعت رسمی و به صورت فوق برنامه انجام می شد.

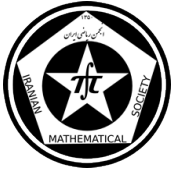
۷ یافته های پژوهش

برای آگاهی از تأثیر استفاده از فعالیت های طرح مسئله بر توانایی حل مسائل هندسه ی دانش آموزان گروه آزمایش، ابتدا توانایی حل مسئله دو گروه در پیش آزمون به وسیله آزمون t مستقل مورد بررسی و مقایسه قرار گرفت، سپس همین روش در مورد پس آزمون هم انجام شد. نتایج این بررسی ها در جدول های ۱ و ۲ ارائه شده است.

فاصله اطمینان ۹۵ درصد تفاوت	آزمون t برای تساوی میانگین ها						
	تفاوت خطا	تفاوت میانگین ها	معنی داری (۲- دامنه)	درجه آزادی	t	معنی داری	آزمون لوین برای تساوی واریانس ها
بالایی	پایینی						
۰/۷۸	-۰/۹۹	۰/۴۴۴	-۰/۱۰۵	۰/۸۱۴	۵۵	-۰/۲۳۷	فرض تساوی واریانس ها
۰/۷۸۲	-۰/۹۹	۰/۴۴۳	-۰/۱۰۵	۰/۸۱۳	۷۲/۵۴	-۰/۲۳۷	نمرات حل مسئله در پیش آزمون
							فرض عدم تساوی واریانس ها

جدول ۱: آزمون t برای مقایسه میانگین نمرات حل مسئله دو گروه آزمایش و کنترل در پیش آزمون

در جدول ۱ نتایج آزمون t مستقل نشان می دهد که سطح معنی داری آن (۰/۸۱۴) از فرض خطای ۰/۰۵ بیشتر است، در واقع بین توانایی حل مسئله گروه آزمایش و کنترل، در پیش آزمون، تفاوت معنی داری وجود ندارد، و نیز نتایج آزمون t مستقل در جدول ۲ حاکی از آن است که سطح معنی داری آن (۰/۰۰۰) از فرض خطای ۰/۰۵ کمتر است. یعنی بین مهارت حل مسئله گروه آزمایش و کنترل، در پس آزمون، تفاوت معنی داری وجود دارد. در واقع اجرای فعالیت های طرح مسئله بر پرورش توانایی حل مسئله دانش آموزان گروه آزمایش تأثیر مثبت داشته است.



	آزمون لوین برای تساوی واریانس‌ها		آزمون t برای تساوی میانگین‌ها						
	F	معنی داری	t	درجه آزادی	معنی داری (۲- دامنه)	تفاوت میانگین‌ها	تفاوت خطا	فاصله اطمینان ۹۵ درصد تفاوت	
								پایینی	بالایی
فرض تساوی واریانس‌ها			۶/۱۹۸	۵۱	۰/۰۰۰	۲/۹۵۲	۰/۴۶۷	۱/۹۹	۳/۹۰
نمرات حل مسئله در پس آزمون	۷/۰۰۸	۰/۰۱۱							
فرض عدم تساوی واریانس‌ها			۶/۱۴۶	۴۱/۸۴	۰/۰۰۰	۲/۹۵۲	۰/۴۸	۱/۹۸	۳/۹۲

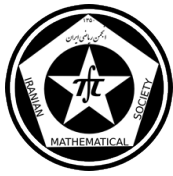
جدول ۲: آزمون t برای مقایسه میانگین نمرات حل مسئله دو گروه آزمایش و کنترل در پس آزمون

۸ نتیجه گیری

پژوهش حاضر که با روش شبه آزمایشی انجام شده است، نشان می دهد که پرورش مهارت طرح مسئله، توانایی حل مسائل هنده توسط دانش آموزان را افزایش می دهد، میانگین نمرات پس آزمون گروه آزمایش ۷/۴۶ و میانگین نمرات گروه کنترل در پس آزمون ۴/۵ می باشد که خود نشان دهنده ی آن است که انجام فعالیتهای طرح مسئله دارای تأثیری مثبت بر توانایی حل مسئله دانش آموزان دارد، لذا می توان در بین روش های نوین تدریس از این روش در کلاس های ریاضی استفاده کرد، ضمناً در کتابهای درسی هنده ی دبیرستان تکالیف طرح مسئله را گنجانند.

مراجع

- [1] I.S. Brown, I.M. Walter, *The Art Of Problem Posing*, Third Edition. Lawrence Erlbaum Associates, Publishers Mahwah, New Jersey, (2005).
- [2] J.Kilpatrick, *Problem Formulating: Where do Good Problems Come from?* In A.H. Schoenfeld (Ed.) *Cognitive science and mathematics education Hillsdale, NJ: Erlbaum* (1987), pp. 123-147.
- [3] E. A.Silver, *On Mathematical Problem Posing, For The Learning Of Mathematics*, Vol. (1) (1994), pp. 19-28.
- [4] E.Stoyanova, N. F. Ellerton, *A Framework For Research Into Students' Problem Posing*. P.Clarkson (Ed.), *Technology in Mathematics Education*. Melbourne: Mathematics Education Research Group of Australasia, (1996) ,pp.518-525



تأثیر روش تدریس ساخت گرایی با سنتی در هندسه (تقارن) بر پیشرفت تحصیلی دانش آموزان پایه هشتم

ملیحه پاشا *

دانشجوی کارشناسی ارشد آموزش ریاضی دانشگاه پیام نور کرمان
دبیر ریاضی ناحیه ۲ یزد

دکتر محمود فرهادیان

چکیده

هدف از پژوهش حاضر، مقایسه ی تأثیر روش تدریس ساخت گرایی با سنتی بر پیشرفت تحصیلی دانش آموزان پایه ی هشتم در درس هندسه است. روش پژوهش شبه آزمایشی با طرح پیش آزمون-پس آزمون در گروه آزمایش و کنترل می باشد. آزمودنی های پژوهش، ۱۲۰ دانش آموز دختر پایه ی هشتم ناحیه ی ۲ یزد که در دو مدرسه ی عادی و نمونه مشغول به تحصیل می باشند. در گروه آزمایش تدریس موضوع تقارن با روش ساختگرایی E_5 ارائه شد و به طور هم زمان گروه کنترل، با روش تدریس متداول (سنتی) آموزش دیدند. برای بررسی تفاوت های دو گروه و مقایسه ی نمرات هر گروه، قبل و بعد از مداخله، از آزمون آماری t استفاده شد. یافته های پژوهش نشان می دهد که پیشرفت تحصیلی گروه آزمایش، که با روش تدریس مبتنی بر ساخت گرایی E_5 آموزش دیدند، از گروه کنترل که با روش تدریس متداول (سنتی) آموزش دیده اند، بالاتر است.

واژه های کلیدی: روش تدریس ساختگرایی، روش تدریس سنتی، پیشرفت تحصیلی، هندسه

Mathematics Subject Classification [2010]: 97M20 , 97A30

۱ مقدمه

یکی از اساسی ترین مسائل در تعلیم و تربیت، توجه به شیوه های تدریس است. اگر محتوای آموزشی با مناسب ترین و کارآمدترین روش ها تدریس نشود، کارآمد نخواهد بود. به نظر می رود، چگونگی تدریس از محتوای آن اهمیت بالاتری دارد. چرا که متون آموزشی همه جا یافت می شود. اما راهبردها و شیوه های تدریس خوب می تواند تضمین کننده ی یادگیری باشد [۳]. به طور کلی آموزش هندسه به شیوه ی معلم محور، رویه مدار و تجویزی است. این روش ها رشد خلاقیت، تجسم و ادراک را محدود می کند [۵]. همچنین شونفیلد [۶] این عقیده را تأیید می کند که دانش آموزان نمی توانند در کلاس های سنتی خلاقیت کافی داشته باشند، و محدودیت روش های سنتی تدریس در ریاضیات را مرتبط به آموزش معلم محور و ارائه اطلاعات آماده به دانش آموزان دانسته است. روش های سنتی تدریس هیچ گونه فرصتی به دانش آموزان به غیر از تکیه دادن به صندلی و گوش دادن نمی دهد. در حالی که باید به دانش آموزان فرصتی برای درگیر شدن در فرایند آموزش به منظور یادگیری معنادار بدهند. از آن جا که دنیایی که ما در آن زندگی می کنیم، واقعی و ملموس می باشد، بدین جهت لازم است تفکر هندسی مورد نیاز برای فهم پدیده ها و چگونگی توسعه آن ها مطالعه و بررسی شود، زیرا محققان دریافتند که تفکر هندسی به فهم پدیده ها و مسائل و موضوعات روزمره جامعه انسانی و حل آن ها کمک می کند [۲]. روش های تدریس فعال می تواند در بالا بردن انگیزه ی یادگیری تأثیر به سزایی داشته باشد. در زمینه ایجاد انگیزه به دلیل تأثیر زیادی که در پیشرفت تحصیلی

* سخنران



دانش آموزان دارد، باید زمان و توجه بیشتری در نظر گرفته شود، زیرا دانش آموزان بدون انگیزه ی لازم بهره هایی از آموزش نخواهند برد. دانش آموزان با انگیزه خواندن و نوشتن و یادگیری وارد مدرسه می شوند ولی شرایط موجود در مدرسه و کلاس و خانواده این انگیزه را تحت تأثیر قرار داده و در اکثر موارد سیر نزولی طی می کند (بروان ۱۹۹۸). پژوهش حاضر بدنبال این است که مقایسه ای بین آموزش درس هندسه بر اساس نظریه ساخت گرایی با آموزش این درس به روش سنتی انجام دهد و میزان اثر بخشی هر دو روش را بر پیشرفت تحصیلی دانش آموزان در این درس مورد بررسی قرار دهد.

الگوی تدریس ساخت گرایی E_5 : در تدریس ساختن گرا با کنترل و نظارت بر فرایند، یادگیری به فراگیران سپرده می شود (حسینی، ۱۳۸۸). الگوی تدریس ساخت گرایی E_5 از پویا ترین و کارآمدترین الگوهای تدریس است که در بسیاری از کلاسهای دنیا با موفقیت در حال اجرا است (حریر فروش، صادقی، ۱۳۸۵).

گام اول- درگیر کردن: این مرحله برای جلب توجه کلاس به موضوع مورد آموزش و ایجاد هیجان و انگیزه در فراگیران طراحی شده است (گیج و برلایندر، ۱۹۸۴).

گام دوم- جستجو و کاوش: منظور، پیدا کردن راههایی برای دانش سازی توسط دانش آموزان می باشد در این قسمت دانش آموزان با کمک گرفتن از همه حواس خود به دانش سازی می پردازند. دانش سازی در طول جریان کاوش و جستجو اتفاق می افتد. کاوشگری از طریق همیاری بیشترین سودمندی را در بر دارد. (محرم آقازاده، ۱۳۸۴).

گام سوم- توصیف: در این مرحله معلمان با دانش آموزان به تعامل می پردازند تا دیدگاههایی را که عرضه می شوند در یابند. معلمان برای برقراری تعاملی اثرگذار باید به طرح سوالهای مربوط و متناسب با مرحله نخست بپردازند. به دیگر سخن، فراگیران را در یافته های خود سهیم کنند. (محرم آقازاده، ۱۳۸۴).

گام چهارم- تعمیم و گسترش: در این مرحله معلم یادگیرندگان را یاری می کند تا یافته ی جدید خود را تعمیم و گسترش دهند، به بیان دیگر، بهبود و توسعه ی اطلاعات و مهارتهای شخصی دانش آموزان و گسترش آنها برای سایر فراگیرندگان (محمد پناه، ۱۳۹۱).

گام پنجم- ارزشیابی: معلم باید یافته های روشی و مهارتهای اکتسابی و کیفی سازی دانش آموزان را بیازماید تا از تغییرات به وجود آمده در تفکر و میزان تسلط بر مهارتها آگاهی یابد و بازخوردی هم به فراگیران عرضه کند (محرم آقازاده، ۱۳۸۴).

فرضیه ها:

۱. بین پیشرفت تحصیلی دانش آموزان مدرسه ی نمونه که در درس هندسه از روش ساختگرایی بهره می برند با پیشرفت تحصیلی دانش آموزان مدرسه ی نمونه در همان درس که از روش سنتی بهره می برند تفاوت معنی داری وجود دارد.

۲. بین پیشرفت تحصیلی دانش آموزان مدرسه ی عادی که در درس هندسه از روش ساختگرایی بهره می برند با پیشرفت تحصیلی دانش آموزان مدرسه ی عادی در همان درس که از روش سنتی بهره می برند تفاوت معنی داری وجود دارد.

روش تحقیق: پژوهش حاضر با طرح پیش آزمون و پس آزمون با گروه کنترل و آزمایش می باشد. جامعه ی آماری، این پژوهش شامل دانش آموزان دختر پایه هشتم در ناحیه ی ۲ یزد در سال تحصیلی ۱۳۹۴-۱۳۹۳ می باشد، که در دبیرستانهای دوره اول مشغول به تحصیل می باشند. برای انتخاب نمونه ی تحقیق، دو مدرسه ی عادی و نمونه از بین دبیرستانهای دوره اول دخترانه ی ناحیه ی ۲ آموزش و پرورش یزد انتخاب شدند دو کلاس در هر مدرسه هر کدام به عنوان گروه آزمایش و گروه کنترل انتخاب شدند. که هر کلاس در هر مدرسه شامل ۳۰ دانش آموز بودند، در نتیجه تعداد اعضای نمونه ی این تحقیق، ۱۲۰ نفر بود. روش نمونه گیری این تحقیق، نمونه گیری دردسترس می باشد. در این تحقیق سوالات توسط معلم، ساخته شده است که پس از بررسی این سوالات توسط معلمان با تجربه، از آن به صورت پیش آزمون و پس آزمون استفاده گردید. که با توجه به بارم، سوالات تصحیح و نمره گذاری گردید. مراحل اجرای تحقیق: پس از انتخاب نمونه و انتخاب موضوع تقارن



از درس هندسه ی ریاضی پایه هشتم از دروسی که مربوط به موضوع و پایه یادگیری بودند و همچنین از دروسی که تدریس نشده بود پیش آزمونی که شامل سوالات چند گزینه ای، صحیح- غلط، کامل کردنی و تشریحی بود، از دو گروه آزمایشی و گواه به عمل آمد. یکی از عناصر مهم تدریس ساخت گرا، گروه بندی دانش آموزان است. که در این پژوهش، از شیوه گروه بندی ناهمگن استفاده شده است. در گروه آزمایشی تدریس تقارن به روش ساخت گرایی ۵E انجام شد، که مراحل آن توضیح داده شد.

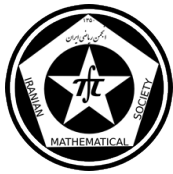
نمونه ی تدریس:

در جلسه ی اول، برای ایجاد انگیزه و شور و شوق در دانش آموزان عکسهایی از تقارن در طبیعت و کاربرد آن نشان داده شد. وسایل لازم در این جلسه چند ضلعی های منتظم کاغذی از سه ضلعی تا نه ضلعی می باشد. دانش آموزان در سالهای قبل با مفاهیم تقارن محوری، محور تقارن شکل آشنا شده بودند، از آنها خواستم به صورت گروهی سوال زیر بررسی و جدول را کامل کنند. *تعداد محورهای تقارن هر یک از چند ضلعی های منتظم را پیدا کنید و جدول را کامل کنید.

چند ضلعی منتظم	تعداد خطهای تقارن	طریقه رسم
سه ضلعی		
چهار ضلعی		
پنج ضلعی		
شش ضلعی		
هفت ضلعی		
هشت ضلعی		
نه ضلعی		

نتایج بدست آمده:

- ۱- تعداد محورهای تقارن n ضلعی منتظم، n تا می باشد.
 - ۲- در n ضلعی های منتظم که تعداد اضلاع آنها زوج است، محورهای تقارن از ضلع به ضلع مقابل و از رأس به رأس مقابل رسم می شوند.
 - ۳- در n ضلعی های منتظم که تعداد اضلاع آنها فرد است، محورهای تقارن از رأس به ضلع مقابل رسم می شوند.
- در جلسه ی دوم، وسایل لازم کاغذ شطرنجی، کاغذ پوستی، چند ضلعی های منتظم محاط شده در دایره را روی مقوا رسم کرده و چند ضلعی های منتظم طلقی همنهشت با آنها را توسط دکمه قابلمه ای به مرکز دایره وصل می کنیم، می باشد. دانش آموزان با مفاهیم دوران و تقارن مرکزی آشنا هستند، ابتدا از گروه ها خواستم قرینه ی شکل هایی که روی کاغذ شطرنجی رسم شده بود نسبت به نقطه ی دلخواه بدست آورده و سپس آنها را نسبت به آن نقطه ی دلخواه، ۴۵° و ۹۰° و ۱۳۵° و ۱۸۰° درجه با کمک کاغذ پوستی دوران دهند. گروهها بعد از انجام کار به این نتایج رسیدند:
- ۱- به طور کلی دوران ۱۸۰° درجه ی شکل ها حول نقطه ی مفروض، بر قرینه ی آنها نسبت به آن نقطه مفروض منطبق می شوند.
 - ۲- روش دیگر برای به دست آوردن قرینه ی شکل نسبت به نقطه، آن را می توان حول نقطه، دوران ۱۸۰° درجه داد. مخصوصاً شکل هایی که منحنی هستند، این روش خیلی بهتر است.
- سپس چند شکل به آنها دادم از آنها خواستم بررسی کنند نقطه ی مشخص شده ی درون هر شکل مرکز تقارن شکل می باشد. بعد از انجام فعالیت به این نتایج رسیدند:
- ۱- مرکز تقارن یک شکل نقطه ای است درون شکل که اگر شکل را حول آن ۱۸۰° درجه دوران دهیم بر خودش منطبق می شود.
 - ۲- مرکز تقارن یک شکل نقطه ای است درون شکل که قرینه هر نقطه روی شکل نسبت به آن روی خود شکل قرار می



گیرد. بعد از انجام فعالیتها از دانش آموزان خواستیم با کمک دست سازه هایی که در اختیار داشتند به سوال زیر پاسخ و جدول را کامل کنند. کدامیک از چند ضلعی های منتظم زیر مرکز تقارن دارند؟ جدول زیر را کامل کنید.

مرکز تقارن	چند ضلعی منتظم
	سه ضلعی
	چهار ضلعی
	پنج ضلعی
	شش ضلعی
	هفت ضلعی
	هشت ضلعی

نتیجه حاصل از فعالیت بالا چند ضلعی های منتظم با تعداد اضلاع زوج مرکز تقارن دارند، مرکز تقارن آنها محل برخورد محورهای تقارن آنهاست. در ادامه ی این بحث و گفتگوها به این نتیجه، با کمک دست سازه ها رسیدند که: هر چند ضلعی منتظم با دوران $\frac{360}{n}$ و مضارب آن حول نقطه برخورد محورهای تقارنش بر خودش منطبق می شود.

نتیجه گیری و پیشنهادها: مشاهده شد که این روش تدریس از آنجائیکه باعث مشارکت فعال تر دانش آموزان در جریان تدریس می شود و دانش آموزان را به تفکر و می دارد و آنها را با موقعیت های یادگیری درگیر می سازد در مقایسه با روش سنتی که معلم مطالب را عرضه می نماید و دانش آموزان با موقعیت یادگیری درگیر نمی شوند، باعث پیشرفت تحصیلی بیشتر در فراگیران شده است. و همچنین همکاری در گروه سبب رشد پیشرفت تحصیلی دانش آموزان و ارتقاء سطح یادگیری از طریق تعامل می گردد. اجرای این روش تدریس با دست سازه ها باعث شد دانش آموزانی که درس هندسه را سخت می دانستند و امیدی به پیشرفت خود نداشتند انگیزه ی خوبی برای پیشرفت و موفقیت بدست آورند. با توجه به اینکه تدریس بر اساس ساخت گرایی وقت گیر است و نیاز به زمان بیشتری دارد بهتر است زمان اختصاص داده به ریاضی پایه ی هشتم از ۴ ساعت به ۶ ساعت تغییر کند. بهتر است با تشکیل کارگاههای آموزشی رویکردهای نوین آموزش هندسه را بویژه ساخت گرایی $E5$ را به دبیران ریاضی آموزش دهند. پیشنهاد می شود این تحقیق را بطور آزمایشی و نیمه آزمایشی وسعت دهند و با نمونه های بزرگتر و با در نظر گرفتن جنسیت، با سطوح و پایه های مختلف بر تکرار این گونه پژوهش ها مبادرت ورزند، تا اثرات این روش را در مقاطع گوناگون و جمعیت های مختلف با هم مقایسه و بررسی کنند.

مراجع

- [۱] آقازاده، محرم، راهنمای روش های نوین تدریس، انتشارات آبیژ، ۱۳۸۴.
- [۲] رستگار، آرش، کارگاه هندسه، انتشارات موسسه ی فرهنگی فاطمی، تهران، ۱۳۸۷.
- [۳] کیوانفر، محمد رضا، تأثیر روشهای فعال در تدریس علوم بر میزان موفقیت دانش آموزان پایه ی چهارم ابتدایی، شورای تحقیقات آموزش و پرورش استان اصفهان، ۱۳۸۰.
- [۴] موسوی، سکینه، تأثیر روش تدریس ساخت گرایی بر خلاقیت و پیشرفت تحصیلی دانش آموزان دختر در درس علوم تجربی پایه ی پنجم ابتدایی شهر مهر، پایان نامه ی کارشناسی ارشد، دانشگاه آزاد اسلامی واحد مرودشت، دانشکده ی علوم تربیتی و روانشناسی، ۱۳۹۲.
- [5] Keiser, J.M, *The Development of Student Understanding of Angleina Non-directive Learning Environment (Unpublished PhD Dissertation)*, Indiana university, USA (1997).
- [6] Schoenfeld, A.H, *Problem Solving in the Mathematics Curriculum*. A Report, Recommendations, and an Annotated, Washington, D. C : Mathematical Association of America (1983).



آیا کتب درسی ریاضی ایران رو به بهبودند؟

تحلیل محتوای دو کتاب ریاضی قدیم (چاپ ۱۳۹۱) و جدید التالیف (چاپ ۱۳۹۳) پایه هشتم در مبحث جبر از دیدگاه شناختی بلوم

محمود فرهادیان
هیأت علمی دانشگاه پیام نور مرکز کرمان

محسن فرخی،*
دبیر ریاضی شهرستان نهبندان

چکیده

چاپ ۱۳۹۱ با کتاب جدید التالیف ریاضی -۳- در پژوهش حاضر سعی شده است کتاب ریاضی سال سوم راهنمایی (قبل از استقرار نظام آموزشی ۳ هشتم) معادل سوم راهنمایی (چاپ ۱۳۹۳) در بخش جبر به کمک دیدگاه شناختی بلوم تحلیل محتوا و مقایسه گردد. گفتنی است این مقاله برگرفته از پایان نامه کارشناسی ارشد محقق می باشد لذا علت انتخاب کتب مذکور و نیز بخش جبر این کتب، همین موضوع است. این تحقیق با توجه به روش از نوع توصیفی - تحلیلی و با توجه به هدف از نوع کاربردی است. پس از تحلیل یافته های پژوهش مشخص شد در کتاب سال ۱۳۹۱ به سطوح بالای حیطه شناختی بلوم کمتر پرداخته شده است (حدود ۹۸ درصد سوالات کتاب درسی تنها به سه حیطه دانش، درک و فهم و کاربرد توجه دارد). که این نقیصه تا حدودی در کتاب چاپ ۱۳۹۳ برطرف شده است و به کلیه ی شش حیطه توجه شده است (که موجب تعمیق یادگیری توسط دانش آموزان می گردد). اما هنوز هم نیاز به توجه بیشتر به حیطه های بالای شناختی احساس می شود. در مجموع کتاب چاپ ۱۳۹۱ از مزیت های قابل توجهی نسبت به کتاب چاپ ۱۳۹۳ برخوردار است. اما پیشنهاد می گردد برای هر چه بهتر شدن کتاب حاضر دبیران محترم از بازی و ریاضی، همچنین سوالات تکمیلی جهت پرداختن به سطوح بالای شناختی بهره گیرند.

واژه های کلیدی: تحلیل محتوا، کتب درسی ریاضی، دیدگاه شناختی بلوم

مقدمه

در این بخش، برای نمونه، مقدمه مقاله نوشته می شود. مقاله ارسالی باید حداقل ۳ و حداکثر ۴ صفحه داشته باشد و فقط در همین قالب نوشته شود. بدیهی است به مقالاتی که توصیه های موجود در قالب را رعایت نکرده باشند، ترتیب اثر داده نخواهد شد. ۶ در کتب درسی نیز به فراخور آن تغییراتی صورت -۳- همزمان با اجرای طرح تحول آموزش و پرورش در سال های اخیر، و استقرار نظام آموزشی ۳ گرفت. سوالی که در اینجا مطرح می شود این است که مولفان کتب درسی جدید (به ویژه در درس ریاضی) تا چه حد توانسته اند در برآورده کردن نیاز های آموزشی جامعه دانش آموزی کشور و تولید محتوای آموزشی متناسب با نیاز امروز جامعه، موفق عمل کنند. اهمیت این موضوع زمانی بیش از پیش می شود که بدانیم که در نظام های آموزشی متمرکز مانند آموزش و پرورش ایران، کتاب درسی به عنوان اولین راهنمای معلم، جایگاهی بسیار تعیین کننده دارد. با عنایت به مطالب ذکر شده بر آن شدیم تا با کمک یک دیدگاه علمی معتبر مانند دیدگاه شناختی بلوم، دو کتاب ریاضی قدیم و جدید التالیف پایه ی هشتم را تحلیل محتوا نماییم تا مشخص گردد آیا تغییرات صورت گرفته در این کتاب ها توانسته اهداف نظام آموزشی را محقق نموده و گامی رو به جلو بردارد و یا به عبارت دیگر محتوای کتاب جدید می تواند دانش آموز خلاق و فعال پرورش دهد و اگر در این امر موفق بوده نقاط قوت و ضعف آن کجاست؟ از اهداف دیگر این تحقیق این است معلمان

* سخنران



ریاضی را با شیوه های تحلیل محتوای کتب درسی (که از ابزارهای مفید در دسترس هر دبیری است) آشنا کنیم و به آنان در طرح سوالات مطلوب تریاری رسانیم. طبقه بندی بلوم بنجامین بلوم در سال ۱۹۵۶ به طبقه بندی هدف های آموزشی در حیطه شناختی پرداخت. این هدفها بر یادآوری یا بازسازی آنچه آموختنش ضروری است تاکید دارد. مثلاً در حل یک مسئله فکری فرد نخست باید مساله اصلی را تشخیص دهد. سپس مطالب داده شده را مرتب کند و آنها را به نظریه ها، روش ها و الگوهایی که یاد گرفته است ربط دهد. در این حیطه هدف ها از ساده ترین سطح شناخت به پیچیده ترین، و از امور ذاتی محسوس به امور معنوی و غیر محسوس تنظیم شده است.

طبقه بندی تهیه شده شامل ۶ طبقه ی عمده به شرح زیر می باشد: ۱- دانش ۲- فهمیدن ۳- کاربرد ۴- تجزیه و تحلیل ۵- ترکیب ۶- ارزشیابی

روش تحقیق

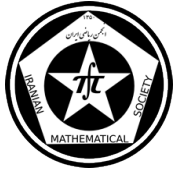
این تحقیق با توجه به روش از نوع توصیفی-تحلیلی و با توجه به هدف از نوع کاربردی می باشد. در بخش جبر کتاب ریاضی سال سوم راهنمایی (قبل از ۳۰۹ سوال ریاضی شامل ۱۲ فعالیت، ۱۴۸ کاردر کلاس، ۹۰ تمرین، ۹ حل مسئله و ۵۰ تمرین دوره ای: ۶) چاپ سال ۱۳۹۱-۳- استقرار نظام آموزشی ۳ موجود بود. که نتایج حاصل از تحلیل محتوای آن در جدول شماره ۱ آمده است. همچنین در بخش جبر کتاب ریاضی پایه ی هشتم چاپ سال ۱۳۹۳: تعداد ۱۸۳ سوال ریاضی شامل ۶۵ فعالیت، ۵۹ کاردر کلاس، ۵۵ تمرین و ۴ تمرین ترکیبی موجود است که نتایج حاصل از تحلیل محتوای آن در جدول شماره ۲ آمده است.

برای تعیین روایی، سطح بندی سوالات توسط سه نفر از دبیران ریاضی خبره و همچنین استاد راهنما بررسی گردید و نتایج تقریباً یکسانی بدست آمد. همچنین برای بررسی میزان پایایی به فاصله سه هفته بررسی مجدد صورت گرفت که در بیش از ۸۸ درصد موارد نتایج یکسان بود.

نتایج

پس از بررسی نتایج به دست آمده موارد ذیل استنباط شد:

۱. در هر دو کتاب توجه به سطوح پایین حیطه شناختی بیشتر است بطوریکه بیشتر سوالات به سطح دانش، درک و فهم و کاربرد مربوط است (بخصوص دانش) که البته این موضوع در کتاب جدید اندکی بهبود یافته.
۲. در کتاب قدیم به سه سطح تجزیه و تحلیل، ترکیب و ارزشیابی تقریباً هیچ توجهی نشده (یا بسیار اندک) که در کتاب جدید تا حدودی این موضوع نیز بهبود یافته (سوالات از تمام سطوح حیطه های شناختی می باشند) اما با توجه به ضرورت تنوع سوالات و اهمیت و کاربرد زیاد سطوح بالای حیطه شناختی (که موجبات فهم بهتر و عمیقتر دانش آموزان را فراهم می آورد)، پیشنهاد می گردد با گنجاندن قسمت هایی مثل بازی و ریاضی و... در محتوای کتاب به سطوح بالای حیطه شناختی باز هم توجه بیشتری صورت گیرد.
۳. می توان گفت که فعالیت های کتاب قدیم چون تقریباً از تمام سطوح حیطه های شناختی بهره برده، حتی بهتر از فعالیت های کتاب چاپ جدید ارزیابی می گردد.
۴. از مقایسه ی کاردر کلاس ها و تمرین ها در دو کتاب، تفاوت آشکاری دیده می شود که حاکی از آن است که سوالات مربوط به این قسمت ها در کتاب جدید از طراحی خوبی برخوردار بوده اند. (به عکس کتاب چاپ قدیم)



چهل و ششمین کنفرانس ریاضی ایران

۳-۶ شهریور ۱۳۹۴

دانشگاه یزد



پوستر تحلیل محتوای دو کتاب ریاضی قدیم (چاپ ۱۳۹۱) و جدید التالیف (چاپ ۱۳۹۳) پایه هشتم در ... ص: ۳-۴

۵. کتاب جدید به لحاظ محتوایی به جهت افزودن بخش احتمال سنخیت بیشتری با آزمون های بین المللی از جمله تیمز دارد.

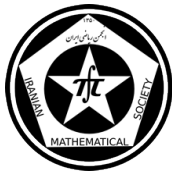
۶. در کتاب جدید به استفاده دانش آموز از وسایل کمکی همچون ماشین حساب توجه به جا و متعادلی شده است که این امر در کتاب قدیم مورد غفلت واقع شده بود.

مراجع

- [۱] بیابانگرد، اسماعیل، روش های تحقیق در روانشناسی و علوم تربیتی (جلد اول)، انتشارات نشر دوران، تهران، ۱۳۸۸.
- [۲] کائیدی، اعظم، از تجزیه تحلیل محتوای برنامه درسی ۲۰۶۱ بیاموزیم، مجله رشد آموزش ریاضی، ش ۱۱۵، ۱۳۹۳.
- [۳] امیر محمدی، تیمور، تحلیل محتوای کتاب ریاضی سال دوم دوره ی متوسطه بر مبنای طبقه بندی بلوم از حیطة شناختی، پایان نامه کارشناسی ارشد، کرمان: دانشگاه آزاد اسلامی، دانشکده تحصیلات تکمیلی، ۱۳۸۹.
- [۴] روح الله دامیده، بررسی سوالات ریاضی تیمز ۲۰۰۷ در پایه ی سوم راهنمایی از دیدگاه شناختی بلوم و تعیین سهم هر یک از عوامل در عملکرد دانش آموزان ایرانی شرکت کننده در این آزمون، پایان نامه کارشناسی ارشد، کرمان: دانشگاه شهید باهنر، ۱۳۹۰.

پست الکترونیکی: mohsenf1384@gmail.com

پست الکترونیکی: farhadian@pnu.ac.ir

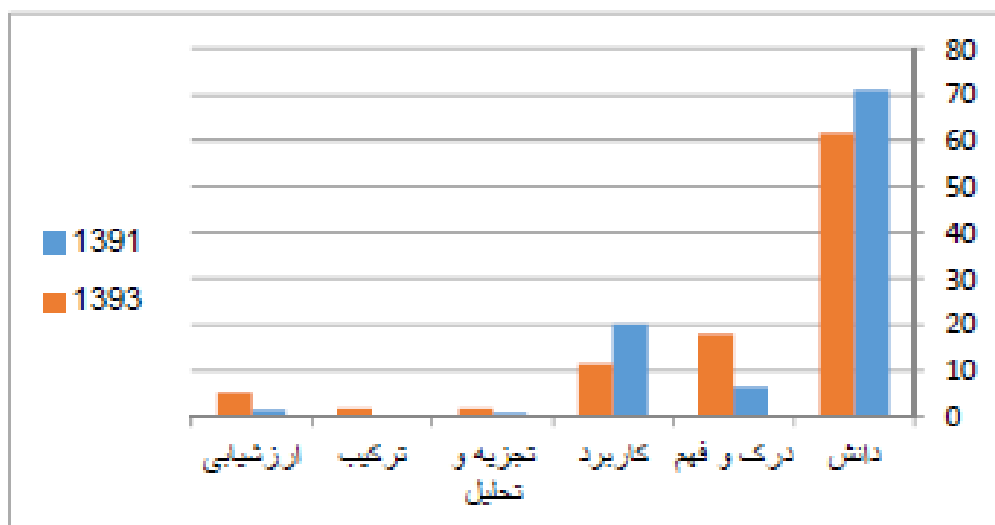


فعالیت	کاربرد کلاس	حل مسئله	تمرین	تمرین دوره ای	کل
دانش	۷۳/۳۷	۰	۸۴	۶۸	۷۱
درک و فهم	۵/۸	۰	۵/۳	۴/۲	۶/۵
کاربرد	۱۹/۴۹	۹۰	۱۰/۶	۳۷/۶	۲۰/۱
تجزیه و تحلیل	۰	۱۰	۰	۰	۰/۷
ترکیب	۰	۰	۰	۰	۰
ارزشیابی	۰/۸	۰	۰	۰	۱/۴

جدول ۱- درصد حیطه های شناختی میثک جبر در کتاب ریاضی سوم راهنمایی چاپ ۱۳۹۱

فعالیت	کاربرد کلاس	تمرین	تمرین ترکیبی	کل
دانش	۷۰/۵	۴۶/۸	۱۰۰	۶۱/۶
درک و فهم	۱۵/۶	۸/۱	۰	۱۷/۸
کاربرد	۳/۸	۳۴/۶	۰	۱۱/۳
تجزیه و تحلیل	۱/۸	۲	۰	۱/۷
ترکیب	۱/۸	۰	۰	۱/۷
ارزشیابی	۵/۸	۸/۱	۰	۵/۳

جدول ۲- درصد حیطه های شناختی میثک جبر در کتاب ریاضی پایه ی هشتم چاپ ۱۳۹۳



شماره ۳- مقایسه درصد کل حیطه های شناختی میثک جبر در دو کتاب ریاضی پایه هشتم چاپ ۱۳۹۱ با ۱۳۹۳



تناقض واضح در کتاب های جدیدالتالیف سال اول دبستان

فاطمه ملکی جلی

کارشناس ارشد آمار و مدرس ریاضی دانشگاه فرهنگیان پردیس زینبیه

پروین سلیمان تبار*

دانشجوی کارشناسی دانشگاه فرهنگیان پردیس زینبیه

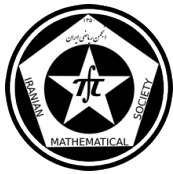
۱ مقدمه

یکی از مشکلاتی که اغلب دانش آموزان پایه ی ابتدایی و تعداد کمتری از دانش آموزان پایه های بالاتر را درگیر نموده و باعث ایجاد ضعف یادگیری ریاضی در دانش آموزان میشود، شمارش با انگشتان دست است. بسیاری از دانش آموزان ابتدایی برای انجام محاسبات ریاضی خود از انگشتان دست استفاده میکنند و همکاران نیز به جای بررسی علت این موضوع سعی میکنند با تکرار و تمرین و بعضاً تنبیه این مشکل را برطرف نمایند ولی موفق به انجام این کار نمی شوند. تأثیر شمارش با انگشتان دست در حل مسأله توسط دانش آموزان نمود بیشتری دارد، زیرا بعضاً دانش آموزان علاوه بر مشکل روان خوانی صورت مسأله، در درک مفهوم اعداد موجود در مسأله نیز دچار مشکل هستند.

۲ ایده ی رفع مشکل

در کتاب ریاضی سال اول که در سال های قبل تدریس می شد، به سرعت و بعد از چند صفحه مقدماتی شکل نوشتاری اعداد مطرح می شد و در مورد مفهوم مجرد اعداد آموزشی داده نمی شد. با توجه به مطالب بیان شده در کتاب، همکاران تأکید فراوانی بر روی مفهوم ترتیبی اعداد داشتند و حتی با وجود این که نوشتن اعداد از عدد "۲" شروع می شد، معلمان محترم با در نظر گرفتن آموزش های مقطع پیش دبستانی برای آموزش این عدد، ۲ شیء به دانش آموزان نشان داده و به آنها می گفتند: "بشمارید، ۱-۲، پس ۲ شیء داریم" و در ادامه ی بحث، زمانی که انجام جمع های اساسی نوع اول را تدریس می نمودند نیز از این شیوه بهره میبردند، بطوریکه فرضاً برای جمع "۳+۴=۷" ابتدا ۴ شیء به دانش آموزان نشان داده و به آنها می گفتند: "بشمارید، ۱-۲-۳-۴" و سپس ۳ شیء دیگر در دست گرفته و می گفتند: "بشمارید، ۱-۲-۳، پس در مجموع چند شیء داریم؟ ۱-۲-۳-۴-۵-۶-۷". یعنی دانش آموزان برای انجام یک جمع ساده باید سه بار مفهوم ترتیبی اعداد را مرور می نمودند، لذا هیچگاه مفهوم مشخصی از عدد "۳" در ذهن خود نداشتند و این عدد را در مقایسه با اعداد "۱، ۲" می شناختند. پس زمانی که می خواندند: "زهرا ۳ مداد دارد و ۴ مداد از برادرش گرفت، حالا چند مداد دارد؟" حتی اگر مفهوم مسأله را درک می کردند و از لحاظ روان خوانی مسأله هم مشکلی نداشتند، تجسم وجود ۳ مداد و دریافت ۴ مداد دیگر زمان زیادی از آن ها می گرفت و در برخی موارد دانش آموزان برای حل این مسأله ساده با مشکل مواجه می شدند. در کتاب جدیدالتالیف، این مشکل کمی مرتفع گردیده ولی بطور کامل حل نشده است، به عبارت دیگر نسبت به کتاب قبل تعداد صفحات مقدماتی پیش از معرفی شکل نوشتاری اعداد خیلی بیشتر گردیده است اما در بالای تمام صفحات بیان شده است:

* سخنران



”بشماروبگو“، که ناگزیر معلمان عزیز برای هر تعداد شکل خود را موظف میدانند به دانش آموزان بگویند: ”بشمار و بگو چندشیء در شکل میبینی“. در نتیجه دانش آموزان باز هم مفهوم ترتیبی اعداد را در این صفحات مرور می نمایند و بدون درک مفهوم مجرد اعداد، به شکل نوشتاری اعداد وارد می شوند و در نتیجه این کار سبب ایجاد ضعف بیشتر در یادگیری درس ریاضیات برای آن ها خواهد شد. در حالی که با توجه به معرفی چوب خط و معرفی دسته های پنج تایی به نظر می رسد که هدف کتاب، جدا کردن دانش آموز از مفهوم ترتیبی اعداد است و اگر تعداد اشیاء نشان داده شده به دانش آموز کمتر از ۵ باشد، وی باید بتواند بدون انجام هیچ گونه شمارشی تعداد را تشخیص دهد و برای تعداد بیشتر از ۵ نیز باید بتواند با ساخت سریع دسته ی ۵ تایی در ذهن خود بدون شمارش، تعداد را تشخیص دهد. بنابراین، این تناقض عمده در کتاب جدیدالتالیف مشهود است و به زعم نگارندگان لازم است عبارت ”بشمار و بگو“ در بالای تمامی صفحات حذف و به جای آن عبارت: ”ببین و بگو“ جایگزین شود تا بدین گونه همکاران عزیز خود را موظف بدانند با انجام بازی های مختلف مفهوم تشخیص تعداد شیء به محض دیدن آن ها و بدون انجام شمارش را در اعداد کمتر از ۵، بیشتر آموزش دهند و در زمان رسیدن به عدد ۵ با تعدادی چوب، چوب کبریت یا نی و چسب که به هر دانش آموز می دهند، از آن ها بخواهند که با دیدن ۵ شیء، چوب خطی به صورت $\parallel\parallel\parallel\parallel\parallel$ بسازند و در این صورت برای تشخیص اعداد بیشتر از ۵ مثلاً ۷، ۶ و ... کار بسیار آسان میشود؛ به طور مثال عدد ۷ از یک چوب خط پنج تایی و دو چوب خط جدا و عدد ۱۰ از دو چوب خط پنج تایی تشکیل شده اند. البته لازم بذکر است که باید روش های مختلف ساخت چوب خط را با بازی به دانش آموزان، آموزش داد. برای مثال آموزگاران محترم میتوانند ۳ شیء به دانش آموزان نشان داده و از آن ها بخواهند به قدر کافی شیء بردارند تا چوب خط پنج تایی بسازند، اگر چه ممکن است در ابتدا این بازی از سرعت کمی برخوردار باشد ولی به مرور سرعت انجام بازی توسط آموزگار بالا رفته به طوری که دانش آموزان در زمان انجام بازی هیچ فرصتی برای شمارش نداشته باشند. بدین شکل معلمین عزیز میتوانند با ارائه ی مثال های مشابه و متنوع دیگر با دانش آموزان تمرین نمایند و بدین گونه آن ها قبل از آموزش شکل نوشتاری اعداد، به مفهوم مجرد اعداد و تعداد زیادی از جمع ها و تفریق های اساسی نوع اول و همچنین مجهول یابی در جمع تسلط می یابند. در این صورت بسیاری از مشکلات ریاضی دانش آموزان برطرف شده و سرعت حل مسأله نیز بالا میرود.

نتیجه گیری

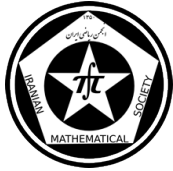
پس با انجام اصلاحات ذکر شده و استفاده از شیوه های آموزشی بر مبنای بازی و سرگرمی، دانش آموزان علاوه بر داشتن تسلط کافی بر مباحث مختلف کتاب، ترس و استرس کمتری نیز خواهند داشت و این امر سبب افزایش بازده یادگیری می گردد.

مراجع

[۱] کتاب ریاضی سال اول دوره ابتدایی چاپ، ۱۳۸۹.

[۲] کتاب ریاضی سال اول دوره ابتدایی چاپ، ۱۳۹۱.

پست الکترونیکی: kosarst2@yahoo.com



گزارشی از یک پژوهش: استفاده از شطرنج به عنوان ابزاری برای ارتقای توانایی حل مسئله ریاضی

محمدعلی رضوانی

دانشگاه شهید باهنر کرمان

چکیده

هدف اصلی این پژوهش بررسی نقش آموزش شطرنج بر توسعه تواناییهای حل مسئله ریاضی دانش آموزان پایه پنجم ابتدایی بود. این مطالعه از نوع تجربی بود و به صورت یک گروهی پیش آزمون-پس آزمون طراحی شد. داده ها از طریق برگزاری پیش آزمون و پس آزمون جمع آوری گردید. در این پژوهش، ۵۲ جلسه آموزش شطرنج به عنوان مداخله آموزشی ارائه شد و این مطالعه نشان داد که نقش آموزش شطرنج، بر توسعه توانایی های حل مسئله ریاضی دانش آموزان پایه پنجم ابتدایی، مثبت و معنادار است.

واژه‌های کلیدی: حل مسئله ریاضی، استراتژی حل مسئله و شطرنج، دانش آموزان پایه پنجم ابتدایی، توانایی حل مسئله.

Mathematics Subject Classification [2010]: 97

۱ مقدمه

در بعضی از منابع تجربی آموزشی، استفاده از شطرنج در مدرسه، به عنوان یک ورزش فکری که باعث تقویت تفکر می شود، توصیه شده است (ایزابلا، ۲۰۰۶). در واقع، یکی از سؤال هایی که در رابطه با حضور شطرنج در آموزش عمومی بارها مطرح شده، این است که آیا بازی شطرنج با توجه به ماهیتی که دارد، بر افزایش توانایی حل مسئله ریاضی در یادگیرندگان مؤثر است؟ طرح این موضوع در ایران، به خصوص از این جهت اهمیت ویژه دارد که در تغییرات جدید برنامه درسی ریاضی پایه های مختلف، آموزش «حل مسئله» به عنوان فصلی جدا در کتاب های درسی ریاضی، مورد تأکید قرار گرفته است (داودی، رستگار، شاهورانی و عالمیان، ۱۳۹۲). علاوه بر این، امکان آموزش شطرنج در قالب «فوق برنامه» در «خانه های ریاضیات» که بیش از یک دهه از زمان تأسیس آن ها در ایران می گذرد، ضرورت انجام پژوهش در حوزه حل مسئله ریاضی و شطرنج را بیش از پیش، برجسته می کند. به این دلیل، انجام پژوهش هایی جهت دستیابی به مستندات بیشتری برای چگونگی استفاده از شطرنج در آموزش حل مسئله ریاضی در سطح بومی، ضروری است.

۲ پیشینه پژوهش

بررسی رابطه بین شطرنج و حل مسئله ریاضی در تحقیقات مختلف مورد مطالعه قرار گرفته است. به طور مثال، فریرا و پالارس (۲۰۰۸) معتقدند که بین توانایی در بازی شطرنج و حل مسئله، رابطه وجود دارد و آموزش شطرنج، دانش آموزان را در تشخیص الگوها، کمک می کند هم چنین، یکی از تأثیرات مهم آموزش شطرنج، توسعه توانایی های فراشناختی و افزایش قدرت حل مسئله ریاضی دانش آموزان در سطوح مختلف تحصیلی است. (کازمی، یکتایار و محمدی، ۲۰۱۲).



۳ معرفی تحقیق

با توجه به پیشینه پژوهش در حوزه حل مسئله و شطرنج، تحقیقی طراحی شد که هدف اصلی آن، بررسی تأثیر شطرنج در توسعه توانایی های حل مسئله ریاضی دانش آموزان پایه پنجم ابتدایی در ایران بود.

۴ روش پژوهش

این تحقیق، از نوع تجربی و با طرح یک گروهی پیش آزمون-پس آزمون (گال، بورگ و گال، ۱۹۹۶) طراحی شد تا به این سؤال پاسخ دهد که «نقش آموزش شطرنج در توسعه توانایی های حل مسئله ریاضی دانش آموزان پایه پنجم ابتدایی چیست». جامعه و نمونه: جامعه این پژوهش، دانش آموزان پایه پنجم ابتدایی یکی از استان های جنوب شرقی ایران و نمونه آماری، شامل ۲۵ نفر از دانش آموزان پسر پایه پنجم ابتدایی از یک مدرسه واقع در یکی از شهرهای جنوب شرقی ایران و انتخاب نمونه به روش تصادفی خوشه ای دو مرحله ای بود (گال، بورگ و گال، ۱۹۹۶).

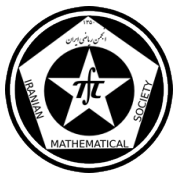
ابزار جمع آوری داده ها: داده های این پژوهش، از طریق یک پیش آزمون و یک پس آزمون هر کدام شامل ۲۰ مسئله کلامی با جواب های چند مرحله ای جمع آوری شدند. آزمون ها بر اساس شباهت های موجود بین استراتژی های شطرنج و حل مسئله ریاضی، توسط معلمان پایه پنجم مدرسه انتخاب شده و بر اساس هدف های آموزشی و محتوای کتاب درسی ریاضی پایه پنجم طراحی شدند. در این آزمون ها، علاوه بر استراتژی «حل مسئله ساده تر» و «استراتژی رسم شکل»، از سه استراتژی «حل زیرمسئله ها (مسئله های درون مسئله)»، «الگویابی» و «حدس و آزمایش» مطرح شده در همین کتاب استفاده شد که نظیر سه استراتژی شطرنج اند که در مداخله آموزشی بر آن ها تمرکز شد. در تمام مراحل اجرای آزمون ها، نویسنده اول مقاله، حاضر بود و بر اجرای آزمون ها نظارت داشت.

پایایی و روایی ابزار: برای تعیین پایایی آزمون ها یعنی اندازه گیری میزان پایداری داخلی اجزاء، از ضریب آلفای کرونباخ استفاده شد. همچنین، برای تعیین میزان روایی آزمون ها، با یک دعوت از معلمان پایه پنجم مدرسه انتخاب شده و طراحی دو پرسش نامه در مقیاس لیکرت با طیف «کاملاً نامناسب» تا «کاملاً مناسب» برای هر یک از سؤال های دو آزمون، روایی ابزارها تعیین شد.

متغیرهای پژوهش: متغیرهای این پژوهش عبارت از قدرت حل مسئله ریاضی؛ به معنای مهارت فرد در حل مسئله ریاضی (لاترل، ۲۰۱۱) و قدرت بازی شطرنج-الو؛ به معنای مهارت نسبی بازیکنان در انجام بازی شطرنج است (فریرا، ۲۰۱۲).

اجرای پژوهش: ابتدا قدرت حل مسئله دانش آموزان توسط یک پیش آزمون مشخص شد و پس از پایان دوره آموزش شطرنج، یک پس آزمون برگزار گردید. قدرت دانش آموزان در بازی شطرنج، از طریق میزان الوی دانش آموزان به عنوان بازیکنان شطرنج، توسط برنامه «فریتز» اندازه گیری شد. ابتدا، هر دانش آموز ۹ بازی با برنامه فریتز انجام داد و بر اساس نتایج کسب شده- هر برد یک امتیاز، مساوی نیم امتیاز و باخت صفر امتیاز- الوی اولیه وی تعیین شد پس از پایان دوره آموزش شطرنج، مجدداً قدرت شطرنجی یعنی میزان الوی نهایی دانش آموزان شرکت کننده در پژوهش به همین ترتیب، محاسبه شد.

ویژگی مداخله (آموزش شطرنج): پس از برگزاری پیش آزمون، ۵۲ جلسه آموزش شطرنج به مدت ۲۶ هفته، طبق طرح درس استاندارد فدراسیون شطرنج توسط مدرسان مورد تأیید فدراسیون شطرنج ایران و با نظارت محقق برگزار شد علاوه بر آموزش استاندارد شطرنج، مثال ها و مسائل متنوعی نیز متناسب با سه استراتژی/ راهبرد حل مسئله متناسب با کتاب درسی ریاضی پایه پنجم ابتدایی و سه استراتژی معادل این سه در شطرنج، انتخاب شدند. این سه استراتژی عبارت بودند از «حل زیرمسئله ها»، «الگویابی» و «حدس و آزمایش».



تجزیه و تحلیل داده ها: برای بررسی به هنجاری - تعیین نرمال بودن- داده ها، از آزمون کلموگروف-اسمیرنوف استفاده گردید (کنور، ۱۹۸۰). که بر طبق آن نمرات ریاضی دارای توزیع نرمال و نمرات الو غیرنرمال بودند. با توجه به نرمال بودن نمرات ریاضی از آزمون t و با توجه به غیر نرمال بودن نمرات الو از آزمون ویلکاکسون، برای مقایسه آماری آن ها استفاده شد. سپس با عنایت به این که یکی از محدودیت های آزمون t این است که میزان روابط بین متغیرها را نشان نمی دهد، نخست داده ها تحلیل شدند و با توجه به این که تفاوت های مشاهده شده از لحاظ آماری معنی دار بودند، با استفاده از آزمون اسپیرمن، همبستگی بین نمرات ریاضی و نمرات الو و میزان آن ها مشخص شد (گال، بورگ و گال، ۱۹۹۶). محدودیت های پژوهش: این پژوهش، به یک برنامه آموزشی شامل سه استراتژی شطرنج محدود بود و شرکت کنندگان در آن، دانش آموزان پسر دوره ابتدایی بودند. هم چنین، آموزش طراحی شده اگرچه هم سو با برنامه درسی دانش آموزان بود، اما ارتباط مستقیمی با آن نداشت. زمان اجرای جلسه های آموزشی نیز در ساعت های بعد از زمان رسمی مدرسه و به عنوان یک فعالیت فوق برنامه بود و نتایج آموزش، بر تعیین وضعیت تحصیلی دانش آموزان تأثیری نداشت.

۵ نتایج

طبق آزمون های آماری مشخص شد که عملکرد دانش آموزان در آزمون های نهایی حل مسئله ریاضی و الو، نسبت به پیش آزمون، رشد داشته است. مقایسه آماری نمرات پیش آزمون و پس آزمون ریاضی در جدول زیر نشان داده شده است.

جدول ۱: نتایج آزمون t برای مقایسه نمرات پیش آزمون و پس آزمون ریاضی

	مجموع رتبه ها	انحراف استاندارد	میانگین رتبه	تعداد
نمرات ریاضی پیش آزمون	۰,۰۰۰۱	۲۴	۴,۲۸۹	۳,۵۸۰۱۸
نمرات ریاضی پس آزمون				۳,۲۳۰۴۵

آزمون ویلکاکسون نشان داد که نمرات نهایی الو نسبت به نمرات اولیه پیشرفت داشته است. ، برای مشخص کردن میزان همبستگی بین قدرت حل مسئله (نمرات ریاضی) و مقدار الوی دانش آموزان، به توصیه کنور (۱۹۸۰) از آزمون همبستگی اسپیرمن استفاده شد. این آزمون نشان داد که بین نمرات ریاضی و نمرات الو رابطه وجود دارد.

۶ بحث و نتیجه گیری

این تحقیق نشان داد که آموزش شطرنج، بر ارتقای توانایی های حل مسئله ریاضی دانش آموزان پایه پنجم ابتدایی، نقش مثبت دارد. مثبت بودن به این معناست که می توان با طراحی مداخله های آموزشی مناسب مبتنی بر استفاده از شطرنج، توانایی های حل مسئله ریاضی دانش آموزان ابتدایی را توسعه داد.

مراجع

[۱] رضوانی، محمد علی، فدایی، محمد رضا، شطرنج ابزاری برای ارتقای توانایی حل مسئله ریاضی، فصل نامه علمی-پژوهشی نوآوری های آموزشی، تهران، ۱۳۹۴.

پست الکترونیکی: rezvani@uk.ac.ir



نقش تولید مثال توسط دانش آموزان در بهبود یادگیری و مهارت حل مسئله ریاضی آنان

فاطمه سادات شاه امیری*
دانشگاه اهواز

ثریاحیدری
دانشگاه اهواز

دکترنوراله نژادصادقی
دانشگاه اهواز

چکیده

پژوهش حاضر به منظور بررسی نقش تولید مثال توسط دانش آموزان در بهبود یادگیری و مهارت‌های حل مسئله آنان انجام شد. نمونه‌ی پژوهش شامل ۳۰ دانش آموز دختر سال سوم ریاضی (۱۵ نفر گروه آزمایش و ۱۵ نفر گروه کنترل) می‌باشد. تدریس در گروه کنترل به شیوه سنتی و در گروه آزمایش با رویکرد تولید مثال توسط دانش آموزان انجام شد. نتایج پژوهش نشان داد بین میانگین نمرات دو گروه (آزمایش و کنترل) در متغیرهای بهبود یادگیری و حل مسئله (مهارت فرضیه سازی، مهارت استدلال، مهارت استفاده از دانش موجود و مهارت استفاده از رهیافت‌ها) تفاوت معنی داری وجود دارد. بنابراین رویکرد تولید مثال توسط دانش آموزان موجب بهبود یادگیری و مهارت‌های حل مسئله آنان می‌شود.

واژه‌های کلیدی: تولید مثال، یادگیری، حل مسئله

۱ مقدمه

مثال‌ها نقش مهمی در آموزش و یادگیری ریاضی ایفا می‌کنند، به خصوص در مواردی که معلمان از مثال‌های خاص و مشخص، به منظور تشریح یک مسئله و یا انتقال مفاهیم به دانش‌آموزان استفاده می‌نمایند (هاریزون بایتی سوفین، ۲۰۱۰). بسیاری از آموزشگران و محققین معتقدند که اگر ما مطلبی را تدریس کنیم و سپس از دانش‌آموزان مثالی را در مورد آن مطلب بخواهیم، با این کار ذهن دانش‌آموزان را به چالش می‌کشانیم و مهارت‌هایی را در آن‌ها ایجاد و یا تقویت می‌کنیم. با توجه به وسعت و گستردگی دامنه مثال‌ها از نظر محققین، رویکردهای متفاوتی در استفاده از مثال‌ها در آموزش وجود دارد که بعضی از این رویکردها بر اساس تقسیم بندی کمین عبارتند از: استفاده از مثال‌ها در رابطه با ارائه یک مفهوم جدید، ارزشیابی یک مفهوم، روش‌های حل مسئله، ایجاد انگیزش و علاقه مندی در ریاضیات، ساخت مفهوم، ایجاد ارتباط بین مفاهیم و استفاده از رهیافت‌های حل مسئله (کمین، ۲۰۱۰). حل مسئله کاری فکری است که نیازمند شناخت مفاهیم و ارتباط بین آن‌ها است و تولید مثال توسط دانش‌آموزان می‌تواند عاملی در بهبود شناخت آن‌ها از مفاهیم و ترسیم کننده مسیری برای حل مسئله باشد. استفاده از مثال‌ها به طور کلی یکی از جنبه‌های لازم در اغلب روش‌های تدریس ریاضی شناخته شده است. مثال‌ها یک جز لازم در یاددهی و یادگیری به حساب می‌آیند که فقدان و یا عدم ارائه مناسب آن‌ها در ضمن تدریس می‌تواند اثرات منفی در شناخت و درک مفاهیم توسط دانش‌آموزان داشته باشد. از طرفی تولید مثال توسط دانش‌آموزان به عنوان شاخه‌ای از این حوزه تأثیرگذار در یادگیری مورد توجه بسیاری از آموزشگران بوده است (واشقانی فراهانی، ۱۳۹۰؛ ریس و رنکل، ۲۰۰۲؛ تال و وینر، ۱۹۸۱). زودیک و زاواسکی (۲۰۰۸) ارتباط بین محتوی دانش پداگوژیکی و استفاده معلمان

* سخنران



از مثال‌ها را مورد توجه قرار دادند و معتقدند که در رابطه با مثال‌ها آگاهی معلمان از سلسله مراتب نگرش دانش آموزان به مثال‌ها، تمایل آن‌ها به دانستن نکات غیر مرتبط از یک مثال به جای توجه به جنبه‌های مهم آن ضروری است. ریس و رنکل (۲۰۰۲)، زازکیس و لیکنین (۲۰۰۷)، در مطالعاتی که برای بیان اهمیت نقش مثال‌ها در ریاضیات داشتند، استفاده از مثال‌های کارشده و تمایل یادگیرنده‌ها به مثال‌های حل شده را مورد تأیید قرار دادند و دریافتند میزان تأثیر این گونه مثال‌ها بستگی به تشریح و تحلیلی دارد که هر فراگیر برای خودش انجام می‌دهد. کشیری (۱۳۸۸) در پژوهش خود، روش‌های تولید مثال توسط دانش آموزان دبستانی را مورد توجه قرار داد، نتایج بیانگر این بود که تولید مثال در یک موضوع باعث می‌شود که درک مفهومی از آن موضوع بالاتر رود. این تحقیق در صدد بررسی نقشی است که تولید مثال در بهبود یادگیری و مهارت‌های حل مسئله دانش‌آموزان دارد.

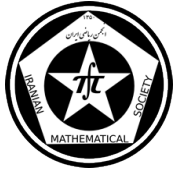
۲ روش پژوهش

پژوهش حاضر تجربی نیمه آزمایشی و از نوع "پیش‌آزمون-پس‌آزمون با گروه کنترل" است. نمونه مورد پژوهش دانش آموزان سال سوم متوسطه رشته ریاضی ناحیه ۴ شهرستان اهواز هستند که به شیوه نمونه‌گیری در دسترس انتخاب شدند. از بین این دانش آموزان ۱۵ نفر گروه آزمایش و ۱۵ نفر گروه کنترل به شیوه تصادفی ساده انتخاب شدند. جهت بررسی بهبود یادگیری و مهارت‌های حل مسئله دانش آموزان از ابزار محقق ساخته استفاده شد. به منظور روایی محتوا و صوری ابزار اندازه‌گیری، ابتدا ۴۰ سوال انتخاب گردید. سوالات توسط ۴ معلم ریاضی و دو تن از اساتید ریاضی و دو نفر با تخصص آموزش ریاضی مورد بررسی قرار گرفتند از میان سوالات آن‌هایی برگزیده شدند که توسط اشخاص مذکور بیشترین امتیاز را در نمره دهی به دست آورده بودند. در آخر ۸ سوال برای پیش‌آزمون و ۸ سوال برای پس‌آزمون انتخاب شدند. پس از مشخص شدن گروه‌های آزمایش و کنترل، از هر دو گروه پیش‌آزمون به عمل آمد، سپس گروه آزمایش به مدت ۸ جلسه ۵/۱ ساعتی تحت تأثیر متغیر مستقل (روش تدریس مبتنی بر تولید مثال توسط دانش آموزان) قرار گرفتند و گروه کنترل تحت آموزش سنتی رایج قرار گرفت. پس از اتمام دوره آموزشی، از هر دو گروه آزمون پایانی (پس‌آزمون) به عمل آمد. در این پژوهش ملاک و میزان تشخیص بهبود یادگیری، مقایسه نتایج پیش‌آزمون و پس‌آزمون دو کلاس می‌باشد و ملاک بهبود مهارت حل مسئله مقایسه نتایج پیش‌آزمون و پس‌آزمون دو کلاس در خرده‌مقیاس‌های استدلال، فرضیه‌سازی، استفاده از رهیافت‌ها و استفاده از دانش موجود است.

۳ یافته‌ها

در این قسمت به منظور مقایسه عملکرد دو گروه در مرحله پیش‌آزمون و پس‌آزمون از آزمون t مستقل و به منظور بررسی عملکرد هر گروه در قیاس با خودش در مرحله پیش‌آزمون و پس‌آزمون از آزمون t وابسته استفاده می‌شود. همان‌گونه که مندرجات جدول ۱ نشان می‌دهد تمامی داده‌ها برای متغیرهای پژوهش (بهبود یادگیری، مهارت استدلال، مهارت فرضیه‌سازی، مهارت استفاده از رهیافت‌ها و مهارت استفاده از دانش موجود) در دو گروه آزمایش و کنترل هم در پیش‌آزمون و هم در پس‌آزمون بالاتر از سطح معنی‌داری $\alpha = 0.05$ هستند، بدین معنی که بین داده‌ها هیچ تفاوتی وجود ندارد و فرض صفر تأیید می‌شود. با توجه به این که نرمال بودن داده‌ها مورد تأیید قرار گرفت، می‌توان از آزمون t مستقل برای معنی‌داری یا عدم معنی‌داری داده‌ها استفاده کرد.

با توجه به جدول ۲ مقدار t برای بهبود یادگیری، مهارت استدلال، مهارت استفاده از رهیافت‌ها، فرضیه‌سازی و استفاده از دانش موجود معنی‌دار نمی‌باشند. با توجه به آن چه که بیان شد بین دو گروه (آزمایش و کنترل) از نظر متغیرهای پژوهش بهبود یادگیری، مهارت استدلال، مهارت استفاده از رهیافت‌ها، فرضیه‌سازی و استفاده از دانش موجود تفاوت معنی‌داری



متغیرهای پژوهش	گروه	میانگین	آزمون	sig
بهبود یادگیری	آزمایش	۱۰/۷	پیش آزمون	۰/۸۳
	کنترل	۱۵/۴۵	پس آزمون	۰/۸۲
	آزمایش	۱۰/۴	پیش آزمون	۰/۹۷
	کنترل	۱۲/۵۶	پس آزمون	۰/۹۷
مهارت استدلال	آزمایش	۴	پیش آزمون	۰/۴۵
	کنترل	۱/۹	پیش آزمون	۰/۳۱
	آزمایش	۲/۸۵	پیش آزمون	۰/۴۵
	کنترل	۲/۹۶	پس آزمون	۰/۳۲
مهارت استفاده از رهیافت‌ها	آزمایش	۴	پس آزمون	۰/۳۵
	کنترل	۲/۷۳	پیش آزمون	۰/۳۱
	آزمایش	۳	پس آزمون	۰/۳۲
	کنترل	۲/۹۵	پس آزمون	۰/۲۹
مهارت فرضیه سازی	آزمایش	۳/۶۳	پس آزمون	۰/۸۳
	کنترل	۱/۹	پیش آزمون	۰/۵۶
	آزمایش	۲/۷	پس آزمون	۰/۰۶
	کنترل	۲/۴۳	پیش آزمون	۰/۲۹
مهارت استفاده از دانش موجود	آزمایش	۳/۶۳	پس آزمون	۰/۸۳
	کنترل	۱/۹	پیش آزمون	۰/۵۶
	آزمایش	۲/۷	پس آزمون	۰/۰۶
	کنترل	۱/۲۳	پس آزمون	۰/۲۹

جدول ۱

متغیر	گروه	میانگین	انحراف معیار	t	Df	sig
بهبود یادگیری	آزمایش	۱۰/۷	۳/۹	-۰/۲۲	۲۸	۰/۸۲
	کنترل	۱۰/۴	۳/۵۱			
مهارت استدلال	آزمایش	۲/۶	۰/۳۳	۰/۰۷	۲۸	۰/۹۴
	کنترل	۱/۹	۰/۲۹			
استفاده از رهیافت	آزمایش	۲/۸۵	۰/۲۷	۰/۱۷	۲۸	۰/۸۶
	کنترل	۲/۷۳	۰/۲۴			
فرضیه سازی	آزمایش	۲/۴۳	۰/۲۵	-۱/۰۷	۲۸	۰/۲۹
	کنترل	۱/۹	۰/۳			
استفاده از دانش موجود	آزمایش	۲/۴۳	۰/۲۵	-۱/۰۷	۲۸	۰/۲۹
	کنترل	۱/۹	۰/۳			

جدول ۲

وجود ندارد.

متغیر	گروه	میانگین	انحراف معیار	t	Df	sig
بهبود یادگیری	آزمایش	۱۵/۴۷	۲/۷۴	۲/۸۶	۲۸	۰/۰۰۸
	کنترل	۱۲/۵۶	۲/۶۷			
مهارت استدلال	آزمایش	۴	۰/۲۴	-۲/۸۷	۲۸	۰/۰۰۸
	کنترل	۲/۹۶	۰/۲۶			
استفاده از رهیافت	آزمایش	۴	۰/۹۴	-۲/۶	۲۸	۰/۰۱۵
	کنترل	۳	۰/۲۹			
فرضیه سازی	آزمایش	۳/۶۳	۰/۳۸	-۲/۵۷	۲۸	۰/۰۱۶
	کنترل	۲/۷	۰/۲۳			
استفاده از دانش موجود	آزمایش	۳/۶۳	۰/۳۸	-۲/۵۷	۲۸	۰/۰۱۶
	کنترل	۲/۷	۰/۲۳			

جدول ۳

همان گونه که مندرجات جدول شماره ۳ نشان می‌دهد t بهبود یادگیری در گروه آزمایش و کنترل در مرحله پس آزمون برابر با ۲/۸۶ است که این مقدار در سطح $(\alpha = ۰/۰۰۸)$ معنی دار است. همچنین t مهارت استدلال برابر با ۲/۸۷- است که در سطح $(\alpha = ۰/۰۰۸)$ معنی دار است. t استفاده از رهیافت برابر با ۲/۶- است که در سطح $(\alpha = ۰/۰۱۵)$ معنی دار



است. همچنین t فرضیه سازی برابر با $۲/۵۷-$ است که در سطح $(\alpha = ۰/۰۱۵)$ معنی دار است. مقدار t استفاده از دانش موجود برابر با $۲/۵۷-$ است که در سطح $(\alpha = ۰/۰۱۶)$ معنی دار است. بنابراین می توان گفت میانگین متغیرها در مرحله پس آزمون تحت تأثیر روش تدریس (تولید مثال) قرار گرفته است.

بحث و نتیجه گیری

نتایج بیانگر این بودند که تولید مثال در بهبود یادگیری و حل مسئله ریاضی افراد که از جمع جبری نمره های (مهارت استدلال، مهارت فرضیه سازی، استفاده از رهیافت ها و استفاده از دانش موجود) به دست می آید، اثر دارد. نتایج این پژوهش با پژوهش کثیری (۱۳۸۸)، واشقانی فراهانی (۱۳۹۰)، ریس و رنکل (۲۰۰۲)، زازکیس و لیکین (۲۰۰۷)، همسو است. وقتی از دانش آموزان می خواهیم در مورد مطلبی که در مراحل تدریس آن حضور داشته اند مثال بزنند عملاً آنان را در امر آموزش درگیر می کنیم و این چیزی است که در امر آموزش، جایگاه با ارزشی دارد. آگاهی از افکار دانش آموزان در یک مفهوم مهم ترین پیامد این رویکرد می باشد. تولید مثال توسط دانش آموزان شاید یکی از بهترین روش ها برای پی بردن به بدفهمی های دانش آموزان باشد. از نظر واتسون و میسون (۲۰۰۵) وقتی دانش آموزان در یک محیط یادگیری قرار می گیرند که می تواند به راحتی نظر دیگران را شنیده و از افکار آن ها مطلع شوند، خود نیز متمایل به شرکت در این فعالیت ها شده و از این طریق به دامنه وسیعی از اطلاعات دست می یابد. شاید برای یک معلم ترغیب و تشویق دانش آموزان به یافته های ذهنی شان مهم ترین قسمت این کار باشد. شرح و توضیح دانش آموزان از یک موضوع تلاش آنان به یافتن چرایی یک مفهوم، سعی آنان در ارتباط دادن دانش موجود از آن مفهوم به اطلاعات جدید، تلاش برای در نظر گرفتن حالات مختلفی که با تغییر یک شرط یا شرایط دیگر در مسأله به وجود می آید و تجزیه و تحلیل آن ها و آشنایی با روش های متفاوتی که برای حل مسئله وجود دارد، بخشی از نتایج کار با تولید مثال است.

مراجع

- [۱] کثیری، حسین، نقش تولید مثال در آموزش ریاضی، پایان نامه کارشناسی ارشد آموزش ریاضی، دانشگاه شهید بهشتی، دانشکده علوم، ۱۳۸۸.
- [۲] واشقانی فراهانی، احمد، بررسی شناخت معلمان ریاضی دوره متوسطه در مورد مثال ریاضی و چگونگی به کارگیری آن در معرفی یک مفهوم جدید ریاضی، پایان نامه کارشناسی ارشد، دانشگاه تربیت دبیر شهید رجایی، ۱۳۹۰.
- [3] Harizon binti Suffian, Shafia binti Abdul Rahma, *TTeacher choice and the use of examples in the teaching learning of mathematics in primary school and their relations to Teachers Pedagogical Content Knowledge (PCK)*, (2010).
- [4] Kamin, D, *The use of tasks and examples in high school mathematics classroom: variance of purpose and employment*, (2010).
- [5] Goldenberg, P, Mason, J, *Shedding light on and with example spaces*, (2008).
- [6] Reiss, K, Renkl, A, *Learning to prove: the idea of heuristic examples*, (2002).
- [7] Tall, D, Vinner, S, *Concept image and concept definition in mathematics with particular reference*, (1981).
- [8] Zazkis, R, Leinkin, R, *Generating examples: from pedagogical tool to a research tool*, (2007).
- [9] Zodik, I, Zaslavsky O *Characteristics of teacher's choice of examples in mathematics classroom*, (2008).

رياضيات مالی



انتخاب فازی سهام با استفاده از الگوریتم رتبه بندی و وزن دهی

یحیی زارع مهرجردی
دانشگاه یزدزهرا جلیلی*
دانشگاه یزد

چکیده

نحوه انتخاب سهام در بورس اوراق بهادار، یکی از مهم‌ترین دغدغه‌های سرمایه‌گذاران در اینگونه بازارهاست. دستیابی به شیوه‌هایی که بتواند سرمایه‌گذاران را در انتخاب سهام در این بازارها یاری نماید، اهمیت بسزایی دارد. در پژوهش حاضر یک روش جدید تصمیم‌گیری چند معیاره در محیط فازی ارائه می‌شود و اهمیت و کاربرد روش‌های فازی را در مباحث مالی نشان می‌دهد. روش حاضر جهت انتخاب سهام در بازار بورس تهران مورد استفاده قرار گرفته شده و رتبه هر سهم و وزن هر معیار بر مبنای عبارات زبانی شرح داده شده و به کمک اعداد فازی مثلثی بیان می‌شوند. سپس بر اساس روش تاپسیس فازی تعمیم یافته ای سهام‌ها اولویت بندی، وزن دهی و در نهایت انتخاب می‌شوند. جهت انجام این پژوهش ۱۲ سهم به طور تصادفی از گروه‌های مختلف بورسی و با بازار کارایی متفاوت انتخاب شدند و با کمک دو تحلیل‌گر خبره بازار نسبت‌ها ارزیابی و با کمک نرم افزار MATLAB برنامه نویسی و محاسبات انجام گردید و در نهایت نتیجه اولویت بندی و وزن دهی سهام‌ها حاصل شد.

واژه‌های کلیدی: متغیرهای زبانی، اعداد مثلثی فازی، پرتفوی، رتبه بندی، وزن دهی

Mathematics Subject Classification [2010]: 13D45, 39B42

۱ مقدمه

انسان حتی در کوچکترین تصمیم شخصی در پی آن است که بین نیازها و اهدافش تعادل برقرار کند، و این ضرورت او را به استفاده از تصمیم‌گیری چند معیاره به عنوان یک راه حل نیازمند می‌کند. هنر تصمیم‌گیرندگان امروزی، استفاده از اهداف چندگانه و متضادی مانند کمینه کردن هزینه و بیشینه کردن کیفیت خدمات است. از این رو جهت بررسی شرکت‌های متفاوت در بازار بورس از طریق معیارهای چندگانه (نسبت ارزش بازاری به فروش خالص، نسبت قیمت جاری سهام به عایدی هر سهم و ...) لازم است از رویکرد معیارهای تصمیم‌گیری چندگانه (MCDM) برای رتبه بندی استفاده کرد. نظریه فازی نظریه‌ای است برای اقدام در شرایط عدم اطمینان که قادر است بسیاری از مفاهیم، متغیرها و سیستم‌هایی را که نادقیق و مبهم هستند به شکل ریاضی درآورده و زمینه را برای استدلال، استنتاج و کنترل و تصمیم‌گیری فراهم آورد. در تصمیم‌گیری فازی امکان تعریف نادقیق و تقریبی پارامترها، تابع مطلوبیت و محدودیت‌های مسئله وجود دارد. لذا در مواقعی که با توجه به کمبود دانش، تجربه یا اطلاعات نمی‌توان مسئله را بطور دقیق تعریف کرد استفاده از تصمیم‌گیری فازی بسیار کارا می‌باشد.

تعریف ۱.۱. اعداد فازی مثلثی با سه نقطه بصورت زیر تعریف می‌شوند [۳]:

$$A = (a_1, a_2, a_3)$$

* سخنران



تعریف ۲.۱. تابع عضویت مثلثی-اگر داشته باشیم [۳]:

$$x, a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}$$

$$A = (a_1, a_2, a_3)$$

تابع عضویت عدد فازی مثلثی بصورت زیر تعریف می گردد:

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 0 & x \leq a_1, \\ \frac{(x-a_1)}{(a_2-a_1)} & a_1 < x \leq a_2, \\ \frac{(a_2-x)}{(a_2-a_3)} & a_2 < x \leq a_3, \\ 0 & x \geq a_3 \end{cases}$$

تعریف ۳.۱. ماتریس تصمیم گیری چند معیاره بصورت زیر تعریف می شود:

$$\tilde{D} = \begin{bmatrix} \tilde{x}_{11} & \tilde{x}_{12} & \dots & \tilde{x}_{1n} \\ \tilde{x}_{21} & \tilde{x}_{22} & \dots & \tilde{x}_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \tilde{x}_{m1} & \tilde{x}_{m2} & \dots & \tilde{x}_{mn} \end{bmatrix}_{m \times n}$$

$$\tilde{W} = [\tilde{W}_1 \quad \tilde{W}_2 \quad \dots \quad \tilde{W}_n]_{1 \times n}$$

به طوری که \tilde{x}_{ij} ($i = 1, \dots, m; j = 1, \dots, n$) و \tilde{w}_j ($j = 1, \dots, n$) به ترتیب رتبه فازی گزینه A_i ($i = 1, \dots, m$) نسبت به معیار C_j ($j = 1, \dots, n$) و وزن معیار C_j ($j = 1, \dots, n$) می باشد.

این رتبه ها و وزن ها متغیرهای زبانی اند که توسط اعداد فازی مثلثی $\tilde{x}_{ij} = (a_{ij}, b_{ij}, c_{ij})$ و $\tilde{w}_j = (w_{j1}, w_{j2}, w_{j3})$ بر اساس موارد مطرح شده در [۳، ۴] توصیف می شوند. رتبه \tilde{x}_{ij} و میزان وزن \tilde{w}_j به صورت ذیل محاسبه می شوند:

$$\tilde{x}_{ij} = \frac{1}{k} [\tilde{x}_{ij}^1 (+) \tilde{x}_{ij}^2 (+) \dots (+) \tilde{x}_{ij}^k]$$

$$\tilde{w}_j = \frac{1}{k} [\tilde{w}_j^1 (+) \tilde{w}_j^2 (+) \dots (+) \tilde{w}_j^k]$$

به طوری که k تعداد تصمیم گیرنده ها (تحلیلگران) و \tilde{x}_{ij}^k و \tilde{w}_j^k بترتیب رتبه و میزان وزن تعیین شده توسط k امین تصمیم گیرنده می باشند. سپس، از مقیاس تبدیلات خطی جهت نرمال سازی استفاده می شود. این ماتریس با \tilde{R} نمایش داده می شود و به صورت زیر بدست می آید:

$$\tilde{R} = [\tilde{r}_{ij}]_{m \times n}$$

در اینجا B و C به ترتیب مجموعه ای از معیارهای سود و هزینه اند و داریم:



$$\tilde{r}_{ij} = \left(\frac{a_{ij}}{c_j^*}, \frac{b_{ij}}{c_j^*}, \frac{c_{ij}}{c_j^*} \right)$$

$$c_j^* = \max_i c_{ij}, j \in B$$

$$\tilde{r}_{ij} = \left(\frac{a_j^-}{c_{ij}}, \frac{a_j^-}{b_{ij}}, \frac{a_j^-}{a_{ij}} \right)$$

$$a_j^- = \min_j a_{ij}, j \in C$$

روش نرمال سازی ذکر شده در بالا جهت حفظ ویژگی های محدوده اعداد فازی مثلثی نرمالسازی شده متعلق به بازه $[0, 1]$ می باشد. برای رتبه بندی کردن گزینه های متفاوت A_1, \dots, A_m جهت کسب دقت بالا و نزدیک به حقیقت بودن تصمیم گیری لازم است از روش تاپسیس فازی تعمیم یافته مطرح شده در [۲]، استفاده کرد. در نهایت با بکارگیری این روش درجه ی عدم تسلط هر گزینه حاصل می شود که به صورت زیر است:

$$\eta^{ND}(A_i) = \min_{(j \in \Omega, j \neq i)} \{ 1 - e_{ij}^s \} = 1 - \max_{(j \in \Omega, j \neq i)} e_{ij}^s$$

که در آن e_{ij}^s درجه ای از تسلط محض گزینه A_i نسبت به گزینه ی A_j و Ω مجموعه ی گزینه ها می باشد. با به کارگیری الگوریتم ذکر شده در [۲]، رتبه بندی گزینه ها و وزن دهی مربوط به آن ها انجام می شود.

معیارهای بکار گرفته شده در این پژوهش شش مورد می باشد که به ترتیب عبارتند از:

(۱) نسبت ارزش بازار به سود قبل از کسر بهره و مالیات (۲) نسبت سود خالص به حقوق صاحبان سهام (ROE) (۳) نسبت بدهی جاری به کل دارایی (۴) نسبت دارایی جاری به بدهی جاری (۵) نسبت ارزش بازار به فروش خالص (۶) نسبت P/E .

ارزیابی این نسبت ها توسط دو تحلیلگر خبره بازار سهام انجام گردیده و در نهایت نتایج متغیرهای زبانی حاصل از ارزیابی آنان با کمک جدول گنجانده شده در [۲] به اعداد فازی مثلثی تبدیل گردید و وارد فرآیند محاسبات شد. محاسبات و برنامه نویسی مربوطه با کمک نرم افزار MATLAB انجام شد و نتایج رتبه بندی و وزن دهی مورد نظر حاصل گردید.

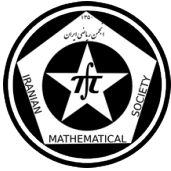
سهام های مورد بررسی در این پژوهش ، که بطور تصادفی از گروه های مختلف بازار بورس انتخاب گردیدند ۱۲ مورد می باشند و عبارتند از : شگل، شپترو، غشان، شبندر، ولیز، ساراب، شمال، شمکن، کپارس، کساوه، دیپارس، دسینا.

۲ نتایج اصلی

نتیجه حاصل از رتبه بندی با روش تاپسیس فازی تعمیم یافته عبارت است از:

شپترو (A_2)، دیپارس (A_{11})، ولیز (A_5)، شمکن (A_8)، دسینا (A_{12})، کپارس (A_9)، شمال (A_7)، کساوه (A_{10})، شبندر (A_4)، ساراب (A_6)، شگل (A_{11})، غشان (A_3)

و نتیجه حاصل از وزن دهی سهام ها با گرد کردن تا دو رقم اعشار در جدول زیر آورده شده است:



سهام	وزن دهی	سهام	وزن دهی	سهام	وزن دهی	سهام	وزن دهی
شپترو	۰,۲۲	ثمسکن	۰,۱۱	شمال	۰,۰۵	ساراب	۰,۰۴
دپارس	۰,۱۵	دسینا	۰,۰۷	کساوه	۰,۰۵	شگل	۰,۰۴
ولیز	۰,۱۳	کیارس	۰,۰۶	شبندر	۰,۰۵	غشان	۰,۰۳

مراجع

- [۱] عطائی، محمد، ، تصمیم‌گیری چند معیاره، انتشارات دانشگاه صنعتی شاهرود، شاهرود، ۱۳۹۳.
- [2] F. Tiryaki, M. Ahlatcioglu, *Fuzzy stock selection using a new fuzzy ranking and weighting algorithm*, Applied mathematics and computation, 170(2005), pp. 144-157.
- [3] C.T.Chen, *A fuzzy approach to select the location of distribution center*, Fuzzy Sets Syst, 118(2001), pp.65-73.
- [4] C.T.Chen, *Extensions of the TOPSIS for group decision-making under fuzzy environment*, Fuzzy Sets Syst, 118(2001), pp.65-73.

پست الکترونیکی: zahra.jalili@stu.yazd.ac.ir
پست الکترونیکی: yazm2000@yahoo.com



تحلیل ریسک صندوق‌های تأمین با استفاده از مدل مارکوف سویچینگ

شقایق جعفرلو*

دانشگاه علامه طباطبائی

نویده مدرسی

دانشگاه علامه طباطبائی

چکیده

مدل مارکوف رژیم سویچینگ که یکی از متداول‌ترین مدل‌های سری زمانی غیرخطی می‌باشد که شامل ساختار چندگانه‌ای است و می‌تواند رفتار سری زمانی را در رژیم‌های مختلف مشخص کند. با تغییر بین این ساختارها، مدل توانایی جذب الگوهای پیچیده و پویا را پیدا می‌کند. حال این مدل را برای بررسی رفتار نوسانی استراتژی‌های بازده ماهانه‌ی صندوق‌های تأمین که سرمایه‌گذاری‌های متناوبی‌اند و از منابع مالی و استراتژی‌های مختلف برای بدست آوردن بازدهی مناسب استفاده می‌کنند در دوره‌ی سالهای ۱۹۹۷ تا ۲۰۱۱ به کار می‌بریم. نتایج دو رژیم مختلف نشان می‌دهد که رژیم اول بیانگر یک نوسان بالا برای تمام استراتژی‌های بازدهی ماهانه‌ی صندوق‌های تأمین است و دومین رژیم نوسان پایین‌تر و بازدهی متوسط مثبت (به جز برای استراتژی‌های بازار نو ظهور) را مشخص می‌کند.

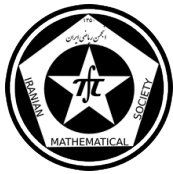
واژه‌های کلیدی: مارکوف رژیم سویچینگ، نوسان شرطی، صندوق تأمین

۱ مقدمه

یک صندوق تأمین، صندوقی است که می‌تواند هر دو موقعیت خرید و فروش^۱ را داشته باشد. با استفاده از آربیتراژ، خرید و فروش سهام‌های کم ارزش^۲ معاملات اختیارات و اوراق قرضه تقریباً در هر فرصتی در بازار سرمایه‌گذاری می‌کند و سود موثر در کاهش ریسک را پیش‌بینی می‌نماید. استراتژی صندوق‌های تأمین فوق العاده متنوع می‌باشد و در بسیاری از موارد در برابر رکود در بازار، تأمین مالی می‌کنند. هدف ابتدایی بیشتر صندوق‌های تأمین کاهش نوسانات و ریسک می‌باشد، در حالی که برای حفظ سرمایه و تحویل بازده مثبت، زیر تمام شرایط بازار تلاش می‌کنند. صندوق‌های تأمین خواص خاص بازده را ارائه می‌دهند، از جمله اینکه بازدهها توزیع غیر نرمال دارند و همچنین صندوق‌های تأمین ممکن است که استراتژی‌های خود را در زمان تغییر دهند و ارائه‌ی فاکتور ریسک آنها ممکن است که بسیار پویا باشد [۲]. از موارد دیگر آنکه بازدهی صندوق‌های تأمین به طور خطی مرتبط با شاخص مبادله‌ی سهام جهانی یا فاکتور ریسک نمی‌باشد [۳]. هدف این مقاله تحلیل رفتار غیرخطی بازده صندوق‌های تأمین در طول بحران‌های مالی می‌باشد. با توجه به اینکه مدل روند غیر خطی متغیرهای مالی مختلف، رفتاری بهتر از نوع خطی آن دارند مدل مارکوف رژیم سویچینگ را با این خاصیت که دینامیک چندین سری اطلاعات دارایی مالی را می‌گیرد معرفی می‌کنیم. این مدلها اغلب پرش یا شکست‌هایی را در رفتار آنها همراه با رخدادهایی مانند بحران‌های مالی یا تغییرات ناگهانی در سیاست‌های حکومت را نمایش می‌دهد. برای مثال بسیاری از دارایی‌های مالی یک گرایش آشکار به رفتار کاملاً متفاوت در طول رکود اقتصادی با توجه به تغییرات ناگهانی در اصول را نشان می‌دهد. این مقاله مدل مارکوف رژیم سویچینگ را گسترش می‌دهد و یک ارزیابی جامع از عملکرد و ریسک صندوق‌های تأمین ارائه می‌دهد.

* سخنران

^۱ long and short^۲ under value



۲ تعاریف و مفاهیم اولیه

تقریباً ۱۴ استراتژی سرمایه‌گذاری متمایز وجود دارد که به وسیله صندوق‌های سرمایه‌گذاری استفاده می‌شود و هر یک درجه‌ی متفاوتی از ریسک و بازده را ارائه می‌کنند. این استراتژی‌ها را به ۳ دسته تقسیم بندی می‌کنند. (۱) روند بازار^۳: این استراتژی‌ها، روندهای در سهام‌ها، نرخهای بهره یا قیمت‌های کالا در بازار را به کار می‌برند.

مثال ۱.۱.۲. اقتصاد کلان جهانی: هدف آن بدست آوردن سود از تغییرات در اقتصاد جهانی می‌باشد. به طوریکه به وسیله‌ی آن عمده روندهای اقتصادی و یا رخدادها تحت تأثیر قرار می‌گیرد و مقدار نوسانات مورد انتظارشان بسیار بالاست. بازارهای نو ظهور: در حق صاحبان شرکت یا بدهی بازارهای در حال ظهور سرمایه‌گذاری می‌کند و مقدار نوسانات مورد انتظار آنها نیز بسیار بالاست.

فروش استقرای: صندوق‌های تأمین در فروش استقرای اوراق بهادار با ارزش بالا مهارت دارند و این استراتژی‌ها منحصراً ریسکی هستند.

استراتژی تساوی حقوق صندوق^۴: در درجه‌ی اول موقعیت حق صاحبان شرکت و مشتقات اوراق بهادار حق صاحبان شرکت را حفظ می‌کنند و همچنین مدیران سعی می‌کنند سهام‌ها با ارزش بالا را برای فروش استقرای شناسایی کنند.

(۲) استراتژی آربیتراژ: این استراتژی‌ها اختلاف قیمت بین اوراق بهادار که ارتباط نزدیکی به یکدیگر دارند را به کار می‌برند.

مثال ۲.۲. بازار سهام خنثی^۵: به خنثی کردن اثرشدید ریسک حرکات عمومی بازار میل می‌کند و نوسان مورد انتظار آنها عموماً کم است.

آربیتراژ قابل تبدیل^۶: به دست آوردن پول از بازده اوراق قرضه اگر ارزش اوراق بالا رود و همچنین به دست آوردن پول از فروش استقرای اگر ارزش سهام پایین آید. این سرمایه‌گذاری ریسک بالایی دارد.

(۳) استراتژی رویداد محور: این استراتژی‌ها سعی بر به کار بردن رخداد‌های متمایز مانند ورشکستگی، ادغام^۷ و تصاحب^۸ را دارند.

مثال ۳.۲. استراتژی چندگانه: به طور معمول به صورت کمی هدایت می‌شود و شناسایی موقعیت‌های جذاب را دنبال می‌کند که گستره‌های^۹ شامل ترکیب درآمدهای ثابت، مشتقات، حق صاحبان شرکت و دارایی‌های واقعی و دیگر ابزار را بهره‌برداری کند. مدیران در چندین استراتژی صندوق‌های تأمین برای ترویج تنوع ریسک سرمایه‌گذاری می‌کنند.

شاخص صندوق به صندوق^{۱۰}: هدف این ترکیب استراتژی‌های مختلف و کلاس‌های دارایی آن، ارائه‌ی سطحی بالا از تنوع و بازده سرمایه‌گذاری طولانی مدت پایدارتر از هر یک از صندوق‌های فردی می‌باشد. بازده، ریسک و نوسان می‌توانند به وسیله‌ی ترکیب استراتژی‌های زمینه و صندوق کنترل شوند.

^۳Market trend

^۴Equity hedge strategies

^۵Equity market neutral

^۶convertible arbitrage

^۷mergers

^۸takeovers

^۹spread

^{۱۰}fund to fund index



۳ نتایج اصلی

مدل‌های مارکوف رژیم سویچینگ گارچ را برای تخمین نوسان بازده استراتژی‌های صندوق‌های تأمین اتخاذ می‌کنند. از مدل گارچ (اتورگرسیو شرطی ناپایدار تعمیم یافته) و انواع گوناگون آن برای مطالعه و تحلیل نوسان شرطی در زمان متفاوت استفاده می‌کنند که میانگین شرطی و واریانس مدل‌های گارچ برای سرتاسر دوره‌ی نمونه ثابت اند. ابتدا یک مدل رژیم سویچینگ با تغییر آرچ که در آن واریانس شرطی بین رژیم‌های مختلف تغییر می‌کند با توجه به متغیر حالتی که یک روند مارکوف را دنبال می‌کند پیشنهاد شد [۱]، [۵]. بعد از آن مدل تعمیم یافته‌ی مارکوف رژیم سویچینگ که بازده، میانگین شرطی و واریانس شرطی را به صورت زیر تعریف می‌کند، بیان گردید [۴]

$$r_t = \mu(s_t) + \varepsilon_t \quad (1)$$

$$\varepsilon_t \rightarrow \varepsilon_t \sqrt{h_t(s_t)}$$

$$h_t(s_t) = \alpha_0(s_t) + \alpha_1(\varepsilon_{t-1}^2 + \beta_1(s_t)h_{t-1})$$

که r_t ، s_t ، $\mu(s_t)$ و $h_t(s_t)$ به ترتیب بازده در زمان t ، میانگین شرطی و واریانس شرطی می‌باشند. هر دو اجازه دارند بین دو رژیم برای تأیید مثبت بودن واریانس شرطی در هر رژیم سویچ شوند. شرط ضروری با شرط لازم در مدل تک رژیم گارچ (۱، ۱) مشابه است. متغیر رژیم غیرقابل مشاهده s_t به وسیله‌ی زنجیر مارکوف مرتبه اول با احتمال انتقال ثابت داده شده هدایت می‌شود.

$$Pr(s_t = 0 | s_{t-1} = 0) = P_{00}, \quad Pr(s_t = 1 | s_{t-1} = 1) = P_{11} \quad (2)$$

$$Pr(s_t = 0 | s_{t-1} = 1) = P_{10} = 1 - P_{11}, \quad Pr(s_t = 1 | s_{t-1} = 0) = P_{01} = 1 - P_{00} \quad (3)$$

$$P = \begin{bmatrix} P_{00} & 1 - P_{11} \\ 1 - P_{00} & P_{11} \end{bmatrix} \quad \text{و در نماد ماتریسی}$$

سپس توزیع شرطی سری بازده r_t به یک ترکیب مدل توزیع تبدیل می‌شود که ترکیب متغیرهای احتمال پیشین^{۱۱} برابر است با

$$P_{it} = Pr(s_t = i | \pi_{t-1}) \quad \text{در این صورت}$$

$$r_t | \pi_{t-1} = \begin{cases} f(r_t | s_t = 0, \pi_{t-1}) & \text{با احتمال } P_{0t} \\ f(r_t | s_t = 1, \pi_{t-1}) & \text{با احتمال } P_{1t} = 1 - P_{0t} \end{cases}$$

که $f(r_t | s_t = 1, \pi_{t-1})$ یکی از توزیع‌های شرطی مفروض برای خطاها معنی می‌شود. π_{t-1} اطلاعات در زمان $t-1$ معنی می‌شود. P_{0t} احتمال پیشین از بودن در رژیم ۰ می‌باشد. تابع لگاریتم درست‌نمایی^{۱۲} برای مدل مارکوف رژیم سویچینگ-گارچ می‌تواند به صورت زیر نوشته شود

$$L = \sum_{t=0}^T \ln \left[\sum_{s_t=1}^2 f(r_t | s_t = 1, \pi_{t-1}) Pr(s_t | \pi_{t-1}) \right]$$

$$= \sum_{t=1}^T \ln [f(r_t | s_t = 0, \pi_{t-1}) P_{0t} + f(r_t | s_t = 1, \pi_{t-1}) P_{1t}]$$

^{۱۱}ex-ante^{۱۲}log-likelihood



احتمال رژیم در زمان t برپایه‌ی تمام اطلاعات تا زمان $t-1$ می‌باشد. در مدل‌های مارکوف رژیم سویچینگ-آرچ واریانس شرطی در زمان t به q باقیمانده مربع گذشته بستگی دارد و q متغیر رژیم گذشته (s_t, \dots, s_{t-q}) است. اگرچه در مدل مارکوف رژیم سویچینگ-گارچ، واریانس شرطی در زمان t به واریانس شرطی در زمان $t-1$ و متغیر رژیم (s_t) به زمان t بستگی دارد. در حالی که واریانس شرطی به زمان $t-1$ به واریانس شرطی در زمان $t-2$ و متغیر رژیم (s_{t-1}) به زمان $t-1$ بستگی دارد و به همین ترتیب. بنابراین واریانس شرطی در زمان t به کل رژیم‌ها تا زمان t بستگی دارد.

هدف این کار تجربی، ارزیابی میزان اثر صندوق‌های تأمین در تحرکات شرکت‌های بین‌داری‌های مالی و سرایت در بازار مالی مشاهده شده از سال ۱۹۹۰ می‌باشد. در حقیقت، استراتژی‌های متنوع و پویای بازار می‌تواند کانالی برای انتقال شوک‌ها بین بازارها باشد. همچنین، تخمین تست LR بیشتر از ارزش بحرانی برای تمام بازارها می‌باشد. از این رو ما می‌توانیم فرض صفر نداشتن تغییر رژیم در سطح تشخیص ۱٪ را رد کنیم. واضح است که استراتژی‌های صندوق‌های تأمین به وسیله‌ی یک مدل مارکوف رژیم سویچینگ-گارچ در مقایسه با یک مدل گارچ (۱, ۱) با یک رژیم بهتر توضیح داده شده است. دوره‌ی مورد مطالعه به وسیله‌ی چهار رخداد مشخص شده است. بحران‌های LTCM در سال ۱۹۹۸، بحران‌های حساب اینترنتی در سال ۲۰۰۰، بحران‌های وام‌های بی‌پشتوانه در سال ۲۰۰۷ و بحران مالی جهانی ۲۰۰۸ که این بحران به طور خاص به وسیله‌ی بحران وام‌های بی‌پشتوانه و سقوط برادران لمن مشخص شده است. اولین رژیم، یک بازده متوسط منفی با یک نوسان بسیار بالا را برای تمام بازارهای مورد مطالعه نشان می‌دهد. رژیم دوم، نوسان پایین‌تر و بازده متوسط مثبت را نشان می‌دهد.

۴ نتیجه‌گیری و کارهای آینده

با در نظر گرفتن صندوق‌های تأمین و نحوه‌ی عملکرد آنها، سرمایه‌گذاری صندوق‌های بازنشستگی در این صندوق‌ها می‌تواند به دست آوردن سود بیشتر برای صندوق‌های بازنشستگی منجر شود و با تأثیری که صندوق‌های تأمین بر عملکرد بازار دارند به بهتر شدن عملکرد بازار مزبور کمک خواهند کرد. البته این بستگی به کارکرد و داشتن ساختار درست بازار بورس و اقتصاد کشور دارد.

مراجع

- [1] Cia, J. (1994), *A Markov model of switching regime ARCH*, Journal of Business and Economic Statistics, 12, 309-316.
- [2] Fung, W., and Hsieh, D. (1997), *Empirical characteristics of dynamic trading strategies: the case of hedge funds*, Review of Financial Studies, 10(2), 275-302.
- [3] Fung, W., and Hsieh, D. (2011). *The risk in hedge fund strategies: Theory and evidence from Long/Short Equity hedge funds*. Journal of Empirical Finance, 18, 547-569.
- [4] Gray, S. (1996). *Modeling the conditional distribution of interest rates as a regime-switching process*. Journal of Financial Economics, 42, 27-62.
- [5] Hamilton, J.D., and Susmel, R. (1994) *Autoregressive conditional heteroscedasticity and changes in regime*, Journal of Econometrics, 70, 127-157.



مدل سازی بازارهای فصلی

محمد رامشگر
دانشگاه شاهرود

الهام دسترنج
استادیار دانشگاه شاهرود

سید حسن اسحقی*
دانشگاه شاهرود

چکیده

در هر بازار بورس معادله قیمت گذاری سهام، روند کلی و تلاطم بازار را مشخص می کند. بازارهایی که دارای روند نمایی و تلاطم غیر تصادفی هستند با فرآیند براونی هندسی مدل سازی شده اند. در این مقاله مدل تصادفی مناسبی برای بازارهای فصلی که دارای روندی تناوبی هستند به دست می آوریم. سپس تابع قیمت گذاری اختیار معامله را برای این مدل بررسی می کنیم.

واژه های کلیدی: بازار فصلی، تلاطم غیر تصادفی، تابع قیمت گذاری اختیار، روند تناوبی، مدل بلک-شولز

Mathematics Subject Classification [2010]: 13D45, 39B42

۱ مقدمه

در بازار برای قیمت گذاری کالاهایی که روندی نمایی (صعودی یا نزولی) دارند، مدل بلک-شولز مدل مناسبی است. در این مقاله بازارهای فصلی را که روند تناوبی دارند بررسی می کنیم و ادعا می کنیم معادله دیفرانسیل تصادفی زیر مدل مناسبی برای آن ها است.

$$dX_t = \alpha \sin(t)X_t dt + \sigma X_t dW_t.$$

در ریاضیات مالی یکی از اهداف مهم، ارائه یک مدل مناسب برای بازار است که یکی از شناخته شده ترین مدل ها مدل براونی هندسی است که در بازار به مدل بلک-شولز شهرت دارد. در این مدل فرض می شود قیمت کالای بدون ریسک در معادله دیفرانسیل عادی $dS_t = rS_t dt$ صدق کند که در آن عدد ثابت r ، نرخ بهره را مشخص می کند و قیمت کالای ریسکی با معادله دیفرانسیل تصادفی $dX_t = \alpha X_t dt + \sigma X_t dW_t$ توصیف می شود. W_t فرآیند براونی استاندارد روی فضای احتمال (Ω, \mathcal{F}, P) است. α و $\sigma > 0$ اعداد ثابت هستند و σ تلاطم بازار را نشان می دهد. از محاسن مدل بلک-شولز این است که برای بسیاری از اختیارات معادله می توان تابع قیمت اختیار معامله را به طور تحلیلی به دست آورد. اما شواهد تجربی نشان می دهد که این مدل در هم خوانی با واقعیت های بازار چندان موفق نیست. به همین علت در بسیاری از موارد تعمیم هایی از این مدل مورد استفاده قرار می گیرد [۲].

روشن است که روند مدل بلک-شولز که در حقیقت امید ریاضی X_t در معادله ی زیر است نمایی است. زیرا داریم

$$dX_t = \alpha X_t dt + \sigma X_t dW_t$$

$$\Rightarrow X_t = X_0 + \int_0^t \alpha X_s ds + \int_0^t \sigma X_s dW_s.$$

* سخنران



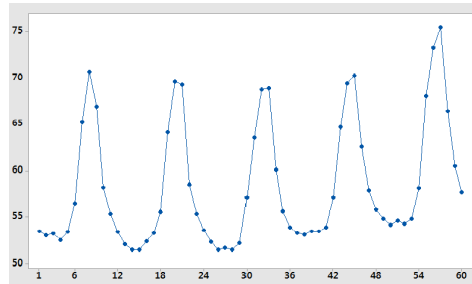
حال با گرفتن امید ریاضی از طرفین معادله فوق داریم

$$E(X_t) = E(X_0) + E\left(\int_0^t \alpha X_s ds\right) + E\left(\int_0^t \sigma X_s dW_s\right).$$

$$E(X_t) = e^{\alpha t}$$

و در نتیجه

پس در مدل بلک-شولز روند بازار نمایی است که با توجه به مقدار α صعودی یا نزولی است [۳، ۴]. گاه با بازارهایی مواجه می‌شویم که نه روند صعودی دارند و نه نزولی. در حقیقت روندی تناوبی دارند. بازارهای فصلی از این گونه‌اند. در این بازارها فرآیند قیمت مشابه شکل (۱ - ۱) ابتدا روندی صعودی داشته و در انتهای فصل روندی نزولی را طی می‌کند و این روند همواره تکرار می‌شود [۱].



شکل ۱-۱

در این مقاله به دنبال یافتن مدل مناسبی برای این گونه بازارها هستیم.

قضیه ۱.۱. یکی از مدل‌های تصادفی مناسب برای فرآیند قیمت سهام ریسکی در بازارهای فصلی به فرم زیر است.

$$dX_t = \alpha \sin(t) X_t dt + \sigma X_t dW_t. \quad (1)$$

اکنون روند کلی بازار را برای مدل مفروض بدست می‌آوریم. از (۱) داریم

$$X_t = X_0 + \int_0^t \alpha \sin(s) X_s ds + \int_0^t \sigma X_s dW_s.$$

با گرفتن امید ریاضی از طرفین معادله داریم

$$E(X_t) = E(X_0) + E\left(\int_0^t \alpha \sin(s) X_s ds\right) + E\left(\int_0^t \sigma X_s dW_s\right),$$

$$\Rightarrow E(X_t) = e^{-\alpha \cos(t)}.$$

بنابراین روند کلی بازار فصلی، تناوبی است.



قضیه ۲.۱. فرض کنید $\{X_u\}_{u \in [s,t]}$ جواب معادله دیفرانسیل تصادفی زیر باشد.

$$dX_t = \mu(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dW_t.$$

همچنین فرض کنید $p(s, y; t, x)$ تابع چگالی انتقال $\{X_u\}_u$ باشد. آنگاه p در معادله زیر که به معادله فوکر-پلانک معروف است صدق می‌کند [۳، ۵].

$$\begin{aligned} p_t(s, y; t, x) &= \mathcal{A}^* p(s, y; t, x), & (t, x) &\in (0, T) \times \mathbb{R} \\ p(s, y; t, x) &\rightarrow \delta_y, & t &\downarrow s \end{aligned} \quad (2)$$

در رابطه (۲) عملگر \mathcal{A}^* به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$(\mathcal{A}^* f)(t, x) = - \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} [\mu_i(t, x) f(t, x)] + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} [C_{ij}(t, x) f(t, x)].$$

با توجه به قضیه بالا، برای معادله دیفرانسیل تصادفی (۱) معادله فوکر-پلانک به صورت زیر خواهد بود.

$$\frac{\partial p}{\partial t}(s, y; t, x) = \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} [\sigma^2 x^2 p(s, y; t, x)] - \frac{\partial}{\partial x} [\alpha \sin(t) x p(s, y; t, x)].$$

در نتیجه

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \frac{1}{2} \sigma^2 x^2 \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + (\sigma^2 - \alpha \sin(t)) x \frac{\partial p}{\partial x} + (\sigma^2 - \alpha \sin(t)) p.$$

قضیه ۳.۱. فرض می‌کنیم بازار داده شده در مدل (۱) صدق کند. اگر بازار فاقد آربیتراژ باشد تابع قیمت‌گذاری اختیاری یعنی $F(t, S_t)$ جواب معادله زیر خواهد بود.

$$\begin{aligned} F_t(t, s) + F_s(t, s) + \frac{1}{2} s^2 \sigma^2(t, s) F_{ss}(t, s) - r F(t, s) &= 0 \\ F(T, S_T) &= \phi(s). \end{aligned}$$

در مساله مقدار مرزی بالا مقصود از r نرخ بهره دارایی بدون ریسک است.

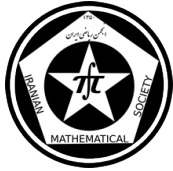
به موجب قضیه قبل با روش Feynman - kac می‌توان تابع قیمت‌گذاری را به صورت زیر بدست آورد.

$$F(t, s) = e^{-r(T-t)} E[\phi(s)]$$

$$\Rightarrow F(t, s) = e^{-r(T-t)} \int_{-\infty}^{\infty} \phi(se^z) f(z) dz.$$

در عبارت اخیر f تابع چگالی احتمال فرآیند نرمالایز شده قیمت سهام ریسکی (Z) است که از توزیع زیر پیروی می‌کند.

$$N[(r - \frac{1}{2} \sigma^2)(T - t), \sigma \sqrt{T - t}].$$



ص: ۴-۴

چهل و ششمین کنفرانس ریاضی ایران

۳-۶ شهریور ۱۳۹۴

دانشگاه یزد

مدل سازی بازارهای فصلی



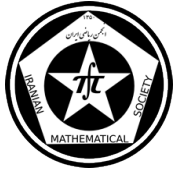
دانشگاه یزد

پوستر

مراجع

- [۱] خرمی، مصطفی و بزرگ‌نیا، ابوالقاسم، تجزیه و تحلیل سری‌های زمانی با نرم افزار *MiniTab* ۱۴، چاپ اول، انتشارات سخن گستر، ۱۳۸۶
- [۲] زرگری، بهناز، زمانی، شیوا، ظهوری زنگنه، بیژن و کنت، رامنا، استخراج فرمول قیمت‌گذاری اختیار معامله در مدل هستون، فرهنگ و اندیشه ریاضی، شماره ۴۴، ۱۳۸۹ صفحات ۱۱ تا ۲۸.
- [3] T. Bjork, *Arbitrage Theory in Continuous Time*, 3rd ed., Oxford University Press, 2009
- [4] S. Shreve, *Stochastic Calculus for Finance*, 1st ed., Springer Finance, 2004
- [5] I. Karatzas and S.E. Shreve, *Brownian Motion and Stochastic Calculus*, 2nd ed., Springer Verlag, 1991.

پست الکترونیکی: mali.eshaghi@shahroodut.ac.ir
پست الکترونیکی: dastranj.e@gmail.com
پست الکترونیکی: m-rameshgar@shahroodut.ac.ir



مدل سازی و ارزیابی معاوضه ی نکول اعتباری و ریسک طرف مقابل

شقایق جعفرلو

دانشگاه علامه طباطبایی

چکیده

هدف از این مقاله ارائه ی مدل قیمت گذاری استاندارد بازار برای مشخص کردن موقعیت معاوضه ی نکول اعتباری در بازار می باشد. با توضیح این مورد که چرا معاوضه ی نکول اعتباری (CDS) نیاز به یک مدل ارزیابی دارد شروع خواهیم نمود و سپس گسترده ترین مدل استاندارد مورد استفاده در بازار را بیان خواهیم کرد. همچنین ریسک نکول توام موسسات مالی را با استفاده از اطلاعات درباره ی ریسک طرف مقابل در معاوضه ی نکول اعتباری اندازه گیری می کنیم. نهایتاً، ارزیابی تصادفی هر دو نرخ بهره و شدت نکول در ابتدا مستقل به وسیله ی یک مدل یک عاملی و سیچک برای اوراق قرضه و مدل یک عاملی برای احتمال بدون نکول مطالعه می شود. سپس ترکیب اثر نرخ بهره ی تصادفی و شدت نکول برای محاسبه ی یک ارزش دقیق تر با یک مدل دو عاملی برای CDS بررسی می شود.

واژه های کلیدی: معاوضه ی نکول اعتباری، ریسک طرف مقابل، نرخ خطر

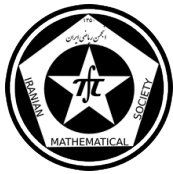
۱ مقدمه

در سال های اخیر مشتقات اعتباری در تمام بازارها رشد فراوانی داشته است. هدف آنها مدیریت و معامله ی ریسک اعتباری می باشد. به عنوان مثال، ریسکی که یک قرض گیرنده ممکن است، توانایی بازپرداخت وام در زمان را نداشته باشد. یک قرارداد معاوضه ی نکول اعتباری (CDS)^۱، بیمه ای را در برابر ریسک نکول یک شرکت خاص ارائه می دهد. این شرکت به عنوان نهاد مرجع شناخته می شود و نکول نهاد مرجع رخداد اعتباری نامیده می شود. در یک قرارداد CDS استاندارد یک طرف محافظت اعتباری را از طرف دیگر برای پوشش ضرر ارزش اسمی یک دارایی که یک رخداد اعتباری را دنبال می کند، خریداری می نماید. رخداد اعتباری که محرک یک نکول می باشد شامل: ورشکستگی، عدم پرداخت و بازسازی^۲ می باشد. خریدار محافظت جریان مرتبی از پرداخت ها را به فروشنده ی محافظت ایجاد می کند، که با عنوان پایه ی صرف (حق بیمه) شناخته می شود و معمولاً دوره ی این قراردادها ۵ ساله و پرداخت ها هر ۳ ماه یک بار صورت می گیرد. اندازه ی این پرداخت های صرف از گستره ی معاوضه ی نکول^۳ که روی ارزش اسمی محافظت پرداخت می شود، محاسبه می گردد. این پرداخت ها تا وقوع یک رخداد اعتباری یا تا سررسید (هر کدام که زودتر اتفاق افتد) ادامه می یابد. در رخداد نکول به وسیله ی نهاد مرجع، فروشنده متعهد می شود قرضه را با یک قیمت برابر با ارزش اسمی از خریدار محافظت خریداری نماید. شاید CDS ها مشابه با بیمه به نظر رسد اما نوعی بیمه نمی باشد. بلکه یک سرمایه گذاری (بیشتر شبیه به یک اختیار) می باشد که شرط می گذارد که یک رخداد اعتباری رخ می دهد یا خیر. CDS ها در اواسط ۱۹۹۰ به عنوان وسیله ای برای انتقال اعتبار در معرض وام های تجاری و آزاد کردن سرمایه ی تجاری در بانک ها ایجاد شد یا به عبارتی: CDS راهی برای بانک ها بود که خودشان را در برابر نکول وام های شرکتی بزرگ که برای مشتریان ایجاد می کردند محافظت کنند. در اواخر ۱۹۹۰، CDS ها روی قرضه ی شرکتی و شهرداری آغاز به فروخته شدن کرد. در سال ۲۰۰۰ بازار CDS تقریباً ۹۰۰ بیلیون دلار بود و پرداخت CDS مرتبط با اوراق قرضه ی انرون

^۱Credit Default Swaps

^۲restructure

^۳default swap spread



و ورلدکام بوده است. در اوایل ۲۰۰۰ از طریق گسترش بازار ثانویه اعضای جدیدی وارد بازار CDS شدند. احتکار در بازار حکم فرما شد به طوری که خریدار و فروشنده ی CDS دیگر صاحب دارایی زمینه (وام یا قرضه) نبودند اما فقط روی یک دارایی خاص شرط بندی می کردند. نتایج این بود که در انتهای ۲۰۰۷ بازار CDS یک ارزش اسمی ۴۵ تریلیون دلار داشت. اما اوراق شرکتی و شهرداری و بازار سرمایه گذاری ساختاری مجموعاً کمتر از ۲۰ تریلیون دلار داشت. هدف این مقاله، ارائه ی یک تفسیر عملی و کامل از مدل استاندارد بازار می باشد.

۲ محاسبه ی افزایش ارزش بازار

تعریف ۱.۲. برخلاف اوراق قرضه، سود یا ضرر از یک موقعیت (CDS) نمی تواند به سادگی به وسیله ی گرفتن تفاوت بین قیمت نقل شده ی جاری بازار به علاوه ی کوپن های دریافتی و قیمت خرید محاسبه شود. برای ارزش گذاری یک CDS ما نیاز به استفاده از یک روش ساختار از گستره ی معاوضه ی نکول، یک فرض نرخ بازبایی و یک مدل داریم. ارزش حال یک موقعیت اولیه ی معامله شده در زمان t_0 در یک گستره ی قراردادی $s(t_0, t_N)$ با سررسید t_N می باشد که با زمان ارزیابی t_v جا به جا می شود. با یک موقعیت معامله شده در گستره ی $s(t_v, t_N)$ داده می شود به وسیله ی

$$MTM(t_v, t_N) = \pm [S(t_v, t_N) - S(t_0, t_N)] \times RPV_0 \setminus (t_v, t_N)$$

که علامت مثبت برای یک موقعیت خرید محافظت و علامت منفی برای یک موقعیت فروش محافظت استفاده می شود. $RPV_0 \setminus (t_v, t_N)$ به عنوان $riskypv_0 \setminus$ ، ارزش حال در زمان t_v از $1bp$ جریان صرف که در زمان سررسید t_N یا نکول هر کدام زودتر اتفاق افتد، خاتمه می یابد شناخته می شود.

۳ مدل سازی اعتبار با استفاده از یک تقریب روش کاهش

تعریف ۱.۳. دنیای مدل سازی اعتبار به دو تقریب اساسی تقسیم می شود: الف) روش ساختاری^۴ ب) روش کاهش^۵ در روش ساختاری ایده این می باشد که نکول را به عنوان نتیجه ی برخی از رویدادهای شرکت توصیف کنیم. مانند ارزش دارایی که برای پوشش بازپرداخت بدهی ناکافی شود. مدل های ساختاری عموماً برای اینکه بگوییم در چه گستره ای قرضه ی شرکتی^۶ باید معامله شود برپایه ی ساختار داخلی شرکت استفاده می شود. بنابراین آنها اطلاعاتی را درباره ی ترازنامه ی شرکت نیاز دارند و این ترازنامه برای ایجاد پیوند بین قیمت گذاری در بازارهای سهام و بدهی استفاده می شود. اگرچه آنها در حداقل ۳ مورد محدودیت دارند: داده های داخلی شرکت برای سنجش تنها ۴ مرتبه در سال منتشر می شود. آنها عموماً برای سازگاری دقیق یک روش ساختاری داده شده از گستره ها عدم انعطاف پذیری دارند. به آسانی به قیمت مشتقات اعتباری بسط داده نمی شود. در روش کاهش روند رخداد اعتباری مستقیماً به وسیله ی مدل کردن احتمال خود رخداد اعتباری مدل سازی می شود. برپایه ی این تقریب با استفاده از یک مدل قیمت گذاری اوراق بهادار، این احتمال نکول می تواند از قیمت های بازار خارج شود.

مدل شکل کاهش عموماً برای بازسازی قیمت های ابزارهای متنوع اعتباری از سررسیدهای مختلف انعطاف پذیری دارد. گسترده ترین استفاده از روش کاهش برپایه ی کار turnbull and jarrow می باشد که یک رخداد اعتباری را به عنوان رخداد اول از یک روند شمارش پواسون که در زمان τ رخ می دهد مشخص نمودند.

$$Pr[\tau < t + dt | \tau \geq t] = \lambda(t)dt \quad (1)$$

^۴ structural

^۵ reduced-form

^۶ corporate bond



به طور مثال : احتمال یک رخداد نکول در فاصله ی زمانی $[t, t+dt]$ شرط روی بقا تا زمان t . برای تعدادی تابع وابسته به زمان $\lambda(t)$ که به عنوان نرخ خطر شناخته می شود. و طول فاصله ی زمانی dt . ما فرض ساده ای که فرآیند نرخ خطر قطعی^۷ می باشد را ایجاد می نماییم. این فرض همچنین دلالت بر این دارد که نرخ خطر مستقل از نرخ های بهره و نرخ بازایی می باشد. می توان این مدل را به دوره های زمان چندگانه نیز بسط داد.
می توان احتمال بقای زمان پیوسته را تا زمان T شرط روی بقا تا زمان t_v به وسیله ی در نظر گرفتن حد $dt \rightarrow 0$ محاسبه نمود. احتمال بقا داده می شود به وسیله ی :

$$Q(t_v, T) = \exp\left(-\int_{t_v}^T \lambda(s) ds\right) \quad (2)$$

۴ ارزیابی پایه ی صرف

تعریف ۱.۴. پایه ی صرف^۸ یک سری از پرداخت های گسترده ی معاوضه ی نکول می باشد که تا زمان سررسید یا تا زمان رخداد اعتباری هر کدام زودتر رخ دهد، ایجاد می شود. این همچنین شامل پرداخت سرک بدست آمده از تاریخ پرداخت صرف قبلی تا زمان رخداد اعتباری می باشد. فرض کنید که $n=1, 2, \dots, N$ تاریخ های پرداخت قرارداد t_1, \dots, t_N که تاریخ سررسید معاوضه ی نکول می باشد. t_N سررسید قراردادی گسترده ی معاوضه ی نکول به وسیله ی $S(t_0, t_N)$ می باشد. در حال حاضر سرک بدست آمده را نادیده می گیریم. ارزش حال پایه ی صرف از یک قرارداد موجود را به صورت زیر در نظر می گیریم:

$$PremiumLegPV(t_v, t_N) = S(t_0, t_N) \sum_{n=1}^N \Delta(t_{n-1}, t_n, B) Z(t_v, t_n) Q(t_v, t_n) \quad (3)$$

$\Delta(t_{n-1}, t_n, B)$: کسر تعداد روز بین تاریخ های صرف t_{n-1} و t_n در قرارداد پایه. $Q(t_v, t_n)$: احتمال بقای بدون آریترائز از نهاد مرجع از زمان ارزیابی t_v تا زمان پرداخت صرف t_n . $Z(t_v, t_n)$: فاکتور تنزیل (لایبور) از تاریخ ارزیابی تا تاریخ پرداخت صرف t_n . این معادله اثر سرک بدست آمده را رد می کند. ما باید پرداخت سرک بدست آمده ی مورد انتظار به وسیله ی در نظر گرفتن احتمال نکول در هر زمان بین دو تاریخ صرف را حساب کنیم. که به صورت زیر می باشد:

$$S(t_0, t_N) \sum_{n=1}^N \int_{t_{n-1}}^{t_n} \Delta(t_{n-1}, s, B) Z(t_v, s) Q(t_v, s) \lambda(s) ds$$

ارزش کامل پایه ی صرف داده می شود به وسیله ی :

$$S(t_0, t_N) \times RPV^{\circ 1} \quad (4)$$

که $riskypv^{\circ 1}$ تعریف می شود به صورت:

$$RPV^{\circ 1} = \sum_{n=1}^N \Delta(t_{n-1}, t_n, B) Z(t_v, t_n) \left[Q(t_v, t_n) + \frac{1}{\gamma} (Q(t_v, t_{n-1}) - Q(t_v, t_n)) \right] \quad (5)$$

که $1 \setminus PA = 1$ اگر قرارداد سرک بدست آمده تعیین کند و در غیر این صورت 0 می باشد.

^۷deterministic
^۸premium leg



۵ ارزیابی پایه‌ی محافظت

تعریف ۱.۵. پایه‌ی محافظت پرداخت مشروط روی $(R-10\%)$ ارزش اسمی یک محافظت که رخداد اعتباری را دنبال می‌کند می‌باشد. R -نرخ بازیابی مورد انتظار باید دقیق باشد. این قیمت مورد انتظار تعهد CDS نسبت به محافظت در زمان یک رخداد اعتباری می‌باشد. ممکن است یک تاخیر تا ۷۲ روز بین خبر رخداد اعتباری و واریز پرداخت پایه محافظت وجود داشته باشد. اما اساسا فرض می‌کنیم این پرداخت ها سریعا ایجاد می‌شود. بنابراین ارزش حال مورد انتظار از پرداخت ها:

$$(1 - R) \int_{t_v}^{t_N} Z(t_v, s) Q(t_v, s) \lambda(s) ds \quad (6)$$

۶ قرارداد CDC و ریسک طرف مقابل

تعریف ۱.۶. فروشنده‌ی محافظت ممکن است در طول دوره‌ی قرارداد CDS نکول کند و بنابراین ممکن است که توانایی برآورد تعهدات اشاره شده در قرارداد را نداشته باشد. در این مورد نگه دارنده‌ی مطالبه‌ی CDS همچنان می‌تواند قسمتی از پرداخت‌های مورد انتظار زیر قرارداد را بازیابی کند. در موردی که قرارداد با نکول فروشنده در اوایل خاتمه یابد ، فروشنده باید به خریدار برای هزینه‌ی جابه جایی قرارداد گرامت دهد. به طور مثال: هزینه‌ی شروع یک قرارداد بیمه‌ی جدید با دیگر فروشنده‌ی محافظت را پرداخت نماید. زمانی که فروشنده نکول کند و تا هنگامی که ریسک نکول نهاد مرجع پرش^۹ قابل ملاحظه‌ای نسبت به شرایط اولیه‌ی قرارداد نداشته باشد ، این مطالبه کوچک می‌باشد. اگر فروشنده نکول کند و تغییر بزرگ در گستره‌ی معاوضه‌ی نکول اعتباری از نهاد مرجع را داشته باشیم ، مطالبه‌ی بیشتر خریدار در برابر نکول طرف مقابل را در پی دارد. در موردی که نکول فروشنده به طور همزمان با نکول نهاد مرجع رخ دهد ، پرداخت تحت قرارداد برابر با پرداخت کامل بیمه می‌باشد.

۷ نتیجه

این مقاله مدل ارزیابی استاندارد اتخاذ شده به وسیله‌ی بازار مشتقات اعتباری برای ارزیابی معاوضه‌ی نکول اعتباری را بیان می‌کند. با وجود ساده بودن، مدل می‌تواند تمام ریسک بازار معاوضه‌ی نکول اعتباری را جذب کند. برای سادگی تعدادی فرض در نظر گرفته شده است. برای مثال، همبستگی نرخ بهره و نرخ خطر نادیده گرفته شده است. حساسیت نرخ بهره‌ی بسیار پایین از معاوضه‌ی نکول اعتباری به این معنی است که اثر این همبستگی اکثرا از مرتبه‌ی دوم می‌باشد و منطقا می‌تواند نادیده گرفته شود.

مراجع

- [1] Jarrow and Turnbull(1995), *Pricing Derivatives on Financial Securities Subject to Credit Risk*, Journal of Finance, Vol 50(1995),53-85.
- [2] O’Kane(2001), *credit Drivatives Explained*, Lehman Brothers, March 2001.
- [3] O’Kane and Turnbull (2003), *Valuation and Risk-Management of Credit Default Swaps*, Lehman Brothers, to be published spring 2003.
- [4] J.Hull and A. White, *Valuing Credit Swaps I: No Counterparty Default Risk*, Journal of Derivatives 8:29-40,2000.

هندسه



تعمیمی از نگاشت‌های کامل

محمدعلی سیاوشی*

مهرداد نامداری
دانشگاه شهید چمران اهواز

دانشگاه شهید چمران اهواز

چکیده

در این مقاله به مطالعه‌ی نگاشت‌های λ -کامل که تعمیمی از نگاشت‌های کامل (نگاشت‌هایی پیوسته و بسته با فیبرهای فشرده) می‌باشند پرداخته شده است. با استفاده از P_λ -فضاها و مفهوم λ -فشرده‌گی بعضی از نتایج کلاسیک مربوط به نگاشت‌های کامل تعمیم داده شده‌اند. به عنوان مثال نشان داده شده که اگر f و g دو تابع پیوسته باشند به طوری که ترکیب آنها نگاشتی λ -کامل باشد، آنگاه f و g به ترتیب α -کامل و β -کامل هستند که در آن $\alpha, \beta \leq \lambda$.

واژه‌های کلیدی: λ -فشرده، λ -کامل، P_λ -فضا

Mathematics Subject Classification [2010]: 54A25, 54C10

۱ مقدمه

نگاشت‌های کامل اولین بار برای فضا‌های متریک توسط وینشتاین در سال ۱۹۴۷ و همچنین برای فضا‌های موضعاً فشرده توسط لیرای در سال ۱۹۵۰ و بورباکی در سال ۱۹۵۱ معرفی شدند. در واقع نقش نگاشت‌های کامل در میان نگاشت‌های پیوسته، مانند نقش فضا‌های فشرده در میان فضا‌های توپولوژی است (توسط فرولیک و بورباکی). یک نگاشت کامل نوعی تابع پیوسته بین دو فضای توپولوژی است که بعضی از خواص توپولوژی مانند فشرده‌گی موضعی را که توابع پیوسته ممکن است حفظ نکنند، از فضایی به فضای دیگر پایا نگه می‌دارد. در این مقاله تعمیمی از تعریف نگاشت کامل را ارائه می‌دهیم که آن را نگاشت λ -کامل می‌نامیم. انگیزه‌ی معرفی این نگاشت از مفهوم فضای λ -فشرده وجود آمده است که در [۹] معرفی شده است.

تعریف ۱.۱. فضای توپولوژی X را λ -فشرده گوئیم هرگاه هر پوشش باز آن دارای زیر پوششی با کاردینال کوچکتر از λ باشد، که در آن λ کوچکترین عدد کاردینال نامتناهی با این خاصیت است. در این حالت گوئیم درجه فشرده‌گی X برابر با λ است و می‌نویسیم $d_c(X) = \lambda$.

لم ۲.۱. فرض کنیم X و Y دو فضای توپولوژی و $f: X \rightarrow Y$ تابعی پیوسته باشد. اگر A زیرمجموعه‌ای λ -فشرده از X باشد، آنگاه $d_c(f(A)) \leq \lambda$.

تعریف ۳.۱. اشتراک هر خانواده از مجموعه‌های باز با کاردینال کمتر از λ را G_λ -مجموعه می‌نامیم. توجه می‌کنیم که G_{\aleph_1} -مجموعه همان G_δ مجموعه است. همچنین فضای توپولوژی X را P_λ -فضا گوئیم هرگاه هر G_λ -مجموعه در آن باز باشد. بدیهی است که هر فضای دلخواهی، P_{\aleph_0} -فضا است و P_{\aleph_1} -فضا همان P -فضا است.

تعریف ۴.۱. فرض کنیم X و Y دو فضای توپولوژی و $f: X \rightarrow Y$ یک تابع پیوسته باشد. گوئیم f یک تابع λ -کامل است هرگاه f تابعی بسته و λ کوچکترین عدد کاردینال نامتناهی باشد که برای هر $y \in Y$ درجه فشرده‌گی $f^{-1}(y)$ کوچکتر یا مساوی λ است.

* سخنران



لم ۵.۱. اگر A یک زیرفضای β -فشرده از فضای توپولوژی X و y نقطه‌ای از $P_\lambda -$ فضای Y باشد به طوری که $\beta \leq \lambda$ ، آنگاه برای هر مجموعه‌ی باز W در $X \times Y$ که شامل $A \times \{y\}$ است مجموعه‌های باز $U \subseteq X$ و $V \subseteq Y$ وجود دارند به طوری که $A \times \{y\} \subseteq U \times V \subseteq W$.

قضیه ۶.۱. (تعمیم قضیه‌ی کراتوسکی) اگر λ یک کاردینال نامتناهی و X یک فضای توپولوژی باشد آنگاه شرایط زیر معادلند.

(الف) فضای X ، β -فشرده است که در آن $\beta \leq \lambda$.

(ب) اگر Y یک $P_\lambda -$ فضا باشد، آنگاه نگاشت تصویری $p : X \times Y \rightarrow Y$ بسته است.

(پ) اگر Y یک $P_\lambda -$ فضای T_1 باشد، آنگاه نگاشت تصویری $p : X \times Y \rightarrow Y$ بسته است.

اثبات. (الف) \Leftrightarrow (ب) فرض کنیم X یک فضای β -فشرده و F یک زیرفضای بسته‌ی $X \times Y$ باشد. نقطه‌ی $y \in Y \setminus p(F)$ را در نظر می‌گیریم. با توجه به این که $X \times \{y\} \subseteq (X \times Y) \setminus F$ و همچنین با توجه به لم قبل، نقطه‌ی y دارای یک همسایگی مانند V است به طوری که $(X \times Y) \cap F = \emptyset$. بنابراین $p(F) \cap V = \emptyset$ و این نتیجه می‌دهد که $p(F)$ زیرمجموعه‌ی بسته‌ی Y است.

(ب) \Leftrightarrow (پ) بدیهی است.

(پ) \Leftrightarrow (الف) فرض کنیم که خانواده‌ای از زیرمجموعه‌های بسته‌ی X با خاصیت λ -اشتراک مانند $\{F_s\}_{s \in S}$ وجود دارد که $\bigcap_{s \in S} F_s = \emptyset$. نقطه‌ی $y_0 \notin X$ را در نظر می‌گیریم و روی مجموعه‌ی $Y = X \cup \{y_0\}$ توپولوژی T را به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$T = \{\{y_0\} \cup (\bigcap_{i \in I} F_{s_i}) \cup K : s_i \in S, |I| < \beta, K \subseteq X\}$$

چون $\bigcap_{s \in S} F_s = \emptyset$ ، برای هر $x \in X$ عنصر $s_x \in S$ موجود است که $x \notin F_{s_x}$. توجه می‌کنیم که مجموعه‌ی $\{y_0\} \cup F_{s_x} \cup (X \setminus \{x\}) = Y \setminus \{x\}$ متعلق به T است و چون $X \in T$ ، $\{y_0\}$ بسته است. در نتیجه Y یک فضای T_1 است.

اگر A و B دو زیرمجموعه‌ی بسته و جدا از هم Y باشند، آنگاه حداقل یکی از آنها (به فرض A) شامل y_0 نمی‌باشد. بنابراین A و $Y \setminus A$ دو زیرمجموعه‌ی باز و جدا از هم Y هستند که به ترتیب شامل A و B می‌باشند. در نتیجه Y نرمال است. قرار می‌دهیم، $F = \overline{\{(x, x) : x \in X\}} \subseteq X \times Y$ ، بنا به فرض $p(F)$ در Y بسته است. به دلیل باز نبودن $\{y_0\}$ ، هر زیرمجموعه‌ی باز شامل $\{y_0\}$ از فضای Y را قطع می‌کند. یعنی، $\overline{X} = Y$. حال اگر $x \in X$ آنگاه $(x, x) \in F$ و بنابراین $x = p(x, x) \in p(F)$. در نتیجه $X \subseteq p(F)$. از این رو

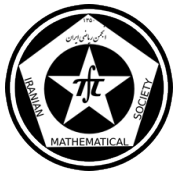
$$y_0 \in Y = \overline{X} \subseteq \overline{p(F)} = p(F)$$

پس $x_0 \in X$ موجود است که $(x_0, y_0) \in F$. اگر $U \subseteq X$ یک همسایگی از x_0 باشد و $s \in S$ ، مجموعه‌ی $U \times (\{y_0\} \cup F_s)$ در $X \times Y$ باز است. بنابراین

$$[U \times (\{y_0\} \cup F_s)] \cap \{(x, x) : x \in X\} \neq \emptyset$$

در نتیجه $U \cap F_s \neq \emptyset$ که نشان می‌دهد برای هر $s \in S$ مجموعه‌ی F_s شامل x_0 است. مطلب اخیر یک تناقض است زیرا $\bigcap_{s \in S} F_s = \emptyset$. \square

قضیه ۷.۱. اگر Y یک $P_\lambda -$ فضا و X یک فضای β -فشرده باشد به طوری که $\beta \leq \lambda$ ، آنگاه نگاشت تصویری $p : X \times Y \rightarrow Y$ یک نگاشت γ -کامل است که در آن، $\gamma \leq \beta$.



قضیه ۸.۱. فرض کنیم λ و β دو کاردینال منظم باشند. اگر $f : X \rightarrow Y$ یک نگاشت λ -کامل باشد آنگاه برای هر زیرفضای β -فشرده از Y مانند Z ، مجموعه‌ی $f^{-1}(Z)$ ، زیرفضایی μ -فشرده است که در آن $\mu \leq \max\{\lambda, \beta\}$.

اثبات. فرض کنیم $\{U_s\}_{s \in S}$ پوشش بازی برای $f^{-1}(Z)$ و K خانواده‌ی تمام زیرمجموعه‌هایی از S باشد که کاردینال هریک از آنها کوچکتر از λ است. برای هر $T \in K$ قرار می‌دهیم، $U_T = \bigcup_{s \in T} U_s$. برای هر $z \in Z$ با توجه به اینکه $d_c(f^{-1}(z)) \leq \lambda$ ، عضوی از K مانند T موجود است که $f^{-1}(z) \subseteq U_T$ و در نتیجه:

$$z \in Y \setminus f(X \setminus U_T) \Rightarrow Z \subseteq \bigcup_{T \in K} (Y \setminus f(X \setminus U_T))$$

به دلیل بسته بودن f مجموعه‌های $Y \setminus f(X \setminus U_T)$ باز هستند. بنابر این $I \subseteq K$ با $|I| < \beta$ موجود است که $Z \subseteq \bigcup_{T \in I} (Y \setminus f(X \setminus U_T))$. بنابراین:

$$f^{-1}(Z) \subseteq \bigcup_{T \in I} f^{-1}(Y \setminus f(X \setminus U_T)) = \bigcup_{T \in I} (X \setminus f^{-1}f(X \setminus U_T)) \subseteq$$

$$\bigcup_{T \in I} (X \setminus (X \setminus U_T)) = \bigcup_{T \in I} U_T = \bigcup_{s \in S_0} U_s,$$

که در آن $S_0 = \bigcup_{T \in I} T$.

توجه می‌کنیم که S_0 اجتماع خانواده‌ای با کاردینال کوچکتر از β از عناصر K می‌باشد. چون کاردینال عناصر K کوچکتر از λ و همچنین λ و β دو کاردینال منظم هستند داریم:

$$|S_0| < \max\{\lambda, \beta\}$$

□ پس $f^{-1}(Z)$ ، مجموعه‌ای μ -فشرده است که در آن $\mu \leq \max\{\lambda, \beta\}$.

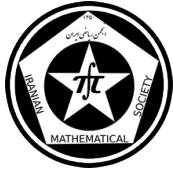
نتیجه ۹.۱. اگر $f : X \rightarrow Y$ یک نگاشت λ -کامل و پوشا باشد، آنگاه برای هر زیرفضای λ -فشرده مانند $Z \subseteq Y$ ، $f^{-1}(Z)$ نیز λ -فشرده است.

نتیجه ۱۰.۱. اگر $g : X \rightarrow Z$ یک نگاشت λ -کامل و $f : Z \rightarrow Y$ یک نگاشت β -کامل باشد آنگاه ترکیب $fg : X \rightarrow Y$ یک نگاشت γ -کامل می‌باشد، که در آن $\gamma \leq \max\{\lambda, \beta\}$.

لم ۱۱.۱. اگر X یک P_λ -فضای هاسدورف باشد، آنگاه نگاشت β -کامل $f : X \rightarrow Y$ با فرض $\beta \leq \lambda$ ، نمی‌تواند به طور پیوسته روی فضای هاسدورف Z که X را به عنوان یک زیرفضای محض و چگال دربر دارد توسعه یابد.

گزاره ۱۲.۱. اگر ترکیب دو تابع پیوسته‌ی $f : X \rightarrow Y$ و $g : Y \rightarrow Z$ یعنی gf ، λ -کامل باشد، آنگاه نگاشت‌های $g_f = g|_f(X)$ و f به ترتیب β -کامل و μ -کامل هستند که در آن $\mu, \beta \leq \lambda$.

اثبات. چون برای هر $z \in Z$ داریم $d_c((gf)^{-1}(z)) \leq \lambda$ ، از لم ۲.۱ نتیجه می‌گیریم که درجه‌ی فشردگی مجموعه‌ی $[f^{-1}(g^{-1}(z))] = f^{-1}(g^{-1}(z)) \cap f^{-1}(X) = f^{-1}[(gf)^{-1}(z)]$ بسته بودن نگاشت g_f از [۱]، گزاره ۳.۱.۲ نتیجه می‌شود. بنابر این g_f یک نگاشت μ -فشرده است که $\mu \leq \lambda$. توجه می‌کنیم که برای هر $y \in Y$ ، $d_c(f^{-1}(y)) \leq d_c(gf)^{-1}(g(y)) \leq \lambda$ می‌باشد بنابر این f یک نگاشت λ -کامل است. برای این منظور مجموعه‌ی بسته‌ی $F \subseteq X$ و نگاشت



$h = (gf)|_F : F \rightarrow Z$ را در نظر می‌گیریم. برای هر $z \in Z$ مجموعه‌ی $h^{-1}(z) = (gf)^{-1}(z) \cap F$ زیرمجموعه‌ی بسته‌ی $(gf)^{-1}(z)$ است. بنابراین خواهیم داشت:

$$d_c(h^{-1}(z)) \leq d_c((gf)^{-1}(z)) \leq \lambda$$

پس h ، یک نگاشت α -کامل است که در آن $\alpha \leq \lambda$. بنابراین طبق قسمت اول اثبات، تحدید g روی $f(F)$ یعنی $g|_{f(F)}$ یک نگاشت θ -کامل با $\theta \leq \alpha$ می‌باشد. به وضوح $g|_{f(F)}$ می‌تواند به طور پیوسته روی $\overline{f(F)}$ توسعه داده شود. (توجه می‌کنیم که تحدید g به $f(F)$ توسعه پیوسته‌ی $g|_{f(F)}$ روی $\overline{f(F)}$ است) از لم قبل نتیجه می‌گیریم که $f(F) = \overline{f(F)}$ و بنابراین این f یک نگاشت بسته است. \square

مراجع

- [1] R. Engelking, *General Topology*, Heldermann Verlag Berlin, 1989.
- [2] O. Frink, *Compactifications and Semi-Normal Spaces*, Amer. J. Math. **86**(3) (1964), 602–607.
- [3] L. Gillman, *Countably Generated Ideals in Rings of Continuous Functions*, Proc. Amer. Math. Soc. **11** (1961), 660–666.
- [4] L. Gillman, M. Henriksen, *Concerning rings of continuous functions*, Trans. Amer. Math. Soc. **77** (1954). 340–362.
- [5] L. Gillman, M. Jerison, *Rings of continuous functions*, Springer-Verlag, 1976.
- [6] L. Holá, R. A. McCoy, *Cardinal invariants in the topology of uniform convergence on compact sets on the space of minimal usco maps*, Rocky Mountain, J.Math. **37**(1) (2007), 229–246.
- [7] L. Juhász, *Cardinal functions in topology - Ten years later*, Mathematisch Centrum Amsterdam, 1980.
- [8] O. A. S. Karamzadeh, M. Motamedi, *a -Noetherian and Artinian modules*, Comm. Algebra **23** (1995), 3685–3703.
- [9] O. A. S. Karamzadeh, M. Namdari, M. A. Siavoshi, *On λ -compact spaces*, Mathematica Slovaca **63**(6) (2013), 1371–1380.
- [10] M. Namdari, M. A. Siavoshi, *A generalization of compact spaces*, JP Journal of Geometry and Topology, Pages 259-270. **11** (2011), 259–270.

پست الکترونیکی: m.sivoshi@scu.ac.ir
پست الکترونیکی: namdari@ipm.ir



دستگاه های مستوی کنترل ناوردای چپ روی برخی از جبرهای لی حل پذیر

فیروز پاشایی

سید محمد شهیدی*

دانشگاه مراغه

دانشگاه مراغه

چکیده

دستگاه های مستوی کنترل ناوردای چپ تشکیل یک رده کارآمد در بسیاری از فرایندهای کنترلی می دهند. در این مقاله، دستگاه های مستوی کنترل ناوردای چپ تمام رتبه را روی گروه های لی سه بعدی حل پذیر رده بندی می کنیم و با استفاده از آن، به رده بندی زیرفضاهای مستوی جبرهای لی وابسته می پردازیم. برای این منظور، کفایت زیرفضاهای مستوی روی جبرهای لی $\mathfrak{g}_{3,2}$ و $\mathfrak{g}_{3,3}$ را رده بندی کنیم. بعنوان یک نتیجه، سطوح تراز جبرهای لی مذکور تعیین می شوند که در آنها خودریختی های جبرهای لی بصورت متعددی عمل می کنند.

واژه های کلیدی: دستگاه های کنترل ناوردای چپ؛ زیرفضاهای مستوی؛ کلاف مماس؛ کنترل قابل قبول؛ دستگاه همگن.

Mathematics Subject Classification [2010]: 93A10, 93C10

۱ مقدمه

هر دستگاه کنترل (هموار) متشکل از یک چند-دستگاه^۱ دینامیکی (هموار) (M, \mathcal{X}) به همراه یک رده U از ورودی های قابل قبول می باشد. که M یک منیفلد (هموار) بعنوان فضای حالت $\mathcal{X} = (X_u)_{u \in U}$ خانواده ای از میدان های برداری روی M است. در چنین دستگاه کنترل هموار رده ای از توابع کنترل بصورت $I \rightarrow U$: $u(\cdot)$ مورد استفاده قرار می گیرد که U یک فضای متریک تفکیک پذیر می باشد و در اغلب موارد فضای اقلیدسی \mathbb{R}^l بعنوان مجموعه کنترلی U بکار گرفته می شود. (گاهی U را زیرمجموعه محدب و فشرده از \mathbb{R}^l نیز در نظر میگیرند). از بین دستگاه های مختلف کنترل، دستگاه های کنترل ناوردا روی گروه های لی بیشترین توجه را به خود جلب نموده است. دستگاه های کنترل ناوردا روی گروه های لی برای اولین بار (در سال ۱۹۷۲) [۱] و [۲] مطرح شده است. قاعده دینامیکی دستگاه های کنترل ناوردا بصورت $\Xi : G \times U \rightarrow TG$ نمایش داده می شود که G یک گروه لی حقیقی با بعد متناهی و U یک مجموعه کنترل مناسب است. همچنین TG را می توان بطور موضعی با $G \times \mathfrak{g}$ یکسان گرفت که $\mathfrak{g} = T_e G$ از جبرهای لی وابسته مشخص می شود. بطور معمول یک دستگاه کنترل را می توان بصورت زیر نمایش داد:

$$\dot{g} = \Xi(g, u), \quad g \in G, \quad u \in U$$

که $\Xi(g, u) = g\Xi(e, u) \in T_g G$. در این مقاله، فرض می کنیم U یک منیفلد هموار l -بعدی باشد. کنترل های قابل قبول بصورت نگاشت های U - مقدار که پیوستگی تکه ای داشته و روی بازه $[0, T]$ فشرده می باشند را در نظر می گیریم. گردایه $\mathcal{X} = (\Xi_u = \Xi(\cdot, u))_{u \in U}$ شامل میدان های برداری ناوردای چپ روی یک گروه لی G فرض می

* سخنران

polysystem



شود. نگاشت $\Xi(1, \cdot) : U \rightarrow \mathfrak{g}$ را یک نگاشت درونبری (نشاننده) در نظر می گیریم که \mathfrak{g} جبر لی وابسته به گروه لی G است. روشن است که مجموعه $\Gamma = \text{im}\Xi(1, \cdot)$ یک زیرمینفلد از \mathfrak{g} می باشد. به کمک میدان های برداری ناوردای چپ داریم: $\Xi(\cdot, u) \in \mathcal{X}^l(G)$ و $\Xi(1, u) \in \mathfrak{g}$ که $\Gamma = \{\Xi_u | u \in U\}$. یک مسیر برای یک کنترل قابل قبول $U \rightarrow [\cdot, T] : u(\cdot) \rightarrow G$ یک خم بطور مطلق پیوسته $g(\cdot) : [\cdot, T] \rightarrow G$ است که برابری $\dot{g}(t) = g(t)\Xi(1, u(t))$ تقریباً برای هر $t \in [\cdot, T]$ برقرار است. یک ویژگی جالب توجه یک دستگاه ناوردای چپ این است که، انتقال چپ هر مسیر، یک مسیر است. مجموعه تمام نقاط پایانی مسیرهای بصورت $g(\cdot) : [\cdot, T] \rightarrow G$ با نقطه شروع $e \in G$ را A نمایش می دهیم. یک دستگاه Σ کنترل پذیر نامیده می شود اگر برای هر $g_0, g_1 \in G$ ، یک $T \geq 0$ و یک مسیر $g(\cdot) : [\cdot, T] \rightarrow G$ با شرط $g(T) = g_1$ و $g(0) = g_0$ وجود داشته باشد. دستگاه Σ کنترل پذیر است اگر و فقط اگر $A = G$. از جمله شرایط لازم برای کنترل پذیری دستگاه Σ این است که G همبند باشد و جبر لی تولید شده توسط رد $\Gamma \subseteq \mathfrak{g}$ با خود \mathfrak{g} برابر باشد (یعنی دستگاه تمام رتبه باشد).

تعریف ۱.۱. اگر \mathfrak{g} یک جبر لی و \mathfrak{h} زیرجبر لی \mathfrak{g} که یک زیرفضای برداری بسته تحت جابه جاگر است، ایده آل می باشد اگر $x \in \mathfrak{g}$ و $y \in \mathfrak{h}$ پس $[x, y] \in \mathfrak{h}$.

۱. بزرگترین ایده آل حل پذیر جبر لی \mathfrak{g} را رادیکال \mathfrak{g} می نامند و با $r(\mathfrak{g})$ نمایش می دهند.
۲. اگر \mathfrak{g} یک جبر لی و $[\mathfrak{g}^j, \mathfrak{g}^j] = \mathfrak{g}^{j+1}$ باشد و $\mathfrak{g}^j = 0$ ، جبر لی \mathfrak{g} حل پذیر می باشد.
۳. اگر \mathfrak{g} یک جبر لی و $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}_j] = \mathfrak{g}_{j+1}$ باشد و $\mathfrak{g}_j = 0$ ، جبر لی \mathfrak{g} پوچ توان می باشد.

۲ نتایج اصلی

۱.۲ جبر لی سه بعدی $\mathfrak{g}_{3,2}$

جبر لی $\mathfrak{g}_{3,2}$ با پایه مرتب (E_1, E_2, E_3) و گروه

$$[E_1, E_2] = 0, [E_2, E_3] = E_1 - E_2, [E_3, E_1] = E_1$$

تعریف می شود. اعضای جبر لی $\mathfrak{g}_{3,2}$ بصورت ماتریس

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ y & z & 0 \\ x & -z & z \end{bmatrix}.$$

نمایش داده می شود که در آن $x, y, z \in \mathbb{R}$. گروه خودریختی های $\mathfrak{g}_{3,2}$ بصورت زیر می باشد:

$$\text{Aut}(\mathfrak{g}_{3,2}) = \left\{ \begin{bmatrix} u & x & y \\ 0 & u & z \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} : x, y, z, u \in \mathbb{R}, u \neq 0 \right\}.$$

گزاره ۱.۲ (یک بعدی ناهمگن). هر زیرفضای $(1,1)$ -مستوی از جبر لی $\mathfrak{g}_{3,2}$ دقیقاً با یکی از زیرفضاهای زیر ξ -هم ارز می باشد:

$$\Gamma_{2,\alpha} = \alpha E_3 + \langle E_2 \rangle, \Gamma_1 = E_2 + \langle E_3 \rangle.$$

قرار می دهیم $\alpha \neq 0$.



گزاره ۲.۲ (دو بعدی همگن). هر زیرفضای (\mathfrak{g}°) -مستوی از جبر لی $\mathfrak{g}_{3,2}$ با $\langle E_2, E_3 \rangle$ -هم ارز می باشد.
گزاره ۳.۲ (دو بعدی ناهمگن). هر زیرفضای (\mathfrak{g}°) -مستوی از جبر لی $\mathfrak{g}_{3,2}$ دقیقاً با یکی از زیرفضاهای زیر \mathfrak{g}° -هم ارز می باشد:

$$\Gamma_1 = E_2 + \langle E_1, E_3 \rangle \text{ و } \Gamma_2 = E_1 + \langle E_2, E_3 \rangle \text{ و } \Gamma_{3,\alpha} = \alpha E_3 + \langle E_1, E_2 \rangle$$

قرار می دهیم $\alpha \neq 0$.

اثبات. فرض می کنیم $\Gamma = A + \Gamma^{\circ}$ یک زیرفضای (\mathfrak{g}°) -مستوی از جبر لی $\mathfrak{g}_{3,2}$ باشد. ابتدا فرض می کنیم $E_1 \in \Gamma^{\circ}$ (پایه دوگان) باشد و $E_1 \in \Gamma^{\circ}$ پس

$$\Gamma = \sum_{i=1}^3 a_i E_i + \langle E_1, \sum_{i=1}^3 b_i E_i \rangle$$

و $b_3 \neq 0$. بنابراین

$$\Gamma = a'_4 E_2 + \langle E_1, b'_4 E_2 + E_3 \rangle$$

و $a'_4 \neq 0$. بنابراین

$$\psi = \begin{bmatrix} a'_4 & 0 & 0 \\ 0 & a'_4 & b'_4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

خودریختی جبر لی می باشد که $\psi \cdot \Gamma_1 = \Gamma$ می باشد. حال فرض می کنیم $E_1 \in \Gamma^{\circ}$ و $E_1 \in \Gamma^{\circ}$ موجود نباشد. پس می توان نوشت،

$$\Gamma = \sum_{i=1}^3 a_i E_i + \langle \sum_{i=1}^3 b_i E_i, \sum_{i=1}^3 c_i E_i \rangle$$

با $c_3 \neq 0$. بنابراین

$$\Gamma = a'_1 E_1 + a'_4 E_2 + \langle b'_1 E_1 + b'_4 E_2, c'_1 E_1 + c'_4 E_2 + E_3 \rangle$$

چنانچه $E_1 \in \Gamma^{\circ}$ موجود نباشد داریم $b'_4 \neq 0$. بنابراین

$$\Gamma = a''_1 E_1 + \langle b''_1 E_1 + E_2, c''_1 E_1 + E_3 \rangle$$

با $a''_1 \neq 0$. بنابراین

$$\psi = \begin{bmatrix} a''_1 & a''_1 b''_1 & c''_1 \\ 0 & a''_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

خودریختی جبر لی می باشد که $\psi \cdot \Gamma_2 = \Gamma$ می باشد. حال فرض می کنیم $E_1 \in \Gamma^{\circ}$ و $E_1 \in \Gamma^{\circ}$ موجود نباشد. پس $\Gamma = \alpha E_3 + \langle E_1, E_2 \rangle = \Gamma_{3,\alpha}$ و بنابراین $\Gamma = \alpha E_3 + \langle E_1, E_2 \rangle = \Gamma_{3,\alpha}$

در نتیجه این نشان می دهد که Γ_1 با Γ_2 و $\Gamma_{3,\alpha}$ نمیتوانند \mathfrak{g}° -هم ارز باشند. $\Gamma_{3,\alpha}$ و Γ_2 نمیتوانند \mathfrak{g}° -هم ارز باشند چنانچه $E_2 \in \Gamma_1$ باشد و $\langle E_1, E_2 \rangle$ یک زیرفضای ناوردای هر خودریختی ای باشد. و چنانچه $E_2 \in \Gamma_1$ برای هر خودریختی ψ ، نشان می دهد $\Gamma_{2,\alpha}$ و $\Gamma_{2,\alpha'}$ نمیتوانند \mathfrak{g}° -هم ارز باشند اگر و فقط اگر $\alpha = \alpha'$ باشد.

□



۲.۲ جبر لی سه بعدی $\mathfrak{g}_{3,3}$

جبر لی $\mathfrak{g}_{3,3}$ با پایه مرتب (E_1, E_2, E_3) و کروشه

$$[E_1, E_2] = 0, [E_2, E_3] = -E_2, [E_3, E_1] = E_1$$

تعریف می شود. اعضای جبر لی $\mathfrak{g}_{3,3}$ بصورت ماتریس

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ y & z & 0 \\ x & 0 & z \end{bmatrix}.$$

نمایش داده می شود که در آن $x, y, z \in \mathbb{R}$. گروه خودریختی های $\mathfrak{g}_{3,3}$ بصورت زیر می باشد:

$$\text{Aut}(\mathfrak{g}_{3,3}) = \left\{ \begin{bmatrix} x & y & z \\ u & v & w \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} : x, y, z, u, v, w \in \mathbb{R}, xv \neq yu \right\}.$$

گزاره ۴.۲. هیچ یک از زیرفضاهای مستوی یک بعدی و یا دو بعدی همگن از جبر لی $\mathfrak{g}_{3,3}$ تمام رتبه نمی باشند.

قضیه ۵.۲ (دو بعدی ناهمگن). هر زیرفضای مستوی از جبر لی $\mathfrak{g}_{3,3}$ دقیقاً با یکی از زیرفضاهای زیر ξ -هم ارز می باشد:

$$\Gamma_1 = E_2 + \langle E_1, E_3 \rangle$$

و

$$\Gamma_{2,\alpha} = \alpha E_3 + \langle E_1, E_2 \rangle.$$

قرار می دهیم $\alpha \neq 0$.

مراجع

- [1] R.W. Brockett, *System theory on group manifolds and coset spaces*, SIAM J. Control 10(2)(1972), 265-284.
- [2] V. Jurdjevic, H.J. Sussmann, *Control systems on Lie groups*, J. Differential Equations, 12 (1972), 313-329.
- [3] B. Jakubczyk, *Equivalence and invariants of nonlinear control systems*, Nonlinear controllability and optimal control, 177-218, Monogr. Textbooks Pure Appl. Math., 133, Dekker, New York, 1990.
- [4] R. Biggs, C.C. Remsing, *A category of control systems*, An. S_ttiint. Univ. "Ovidius" Constant_a Ser. Mat., 20 (2012), 355-367.



نگاشت همساز بین رویه ریمانی و گروه لی

مصطفی محمدحسن*
دانشگاه تربیت مدرس

چکیده

در این نوشته سعی شده است تا شرایط همساز^۱ بودن نگاشت‌ها بین رویه‌ی ریمانی و گروه‌های لی با استفاده از فرم کارتان را بررسی کنیم و در نهایت با استفاده از هموستار القایی بر کلاف برگردان f^*TG بر رویه ثابت می‌شود که شرط همساز بودن هم‌ارز صفر شدن دیورژانس^۲ فرم کارتان بر رویه خواهد بود.

واژه‌های کلیدی: رویه‌ی ریمانی، گروه لی، نگاشت همساز

۱ مقدمه

دو خمینه‌ی ریمانی (می‌توان شبه‌ریمانی در نظر گرفت) (M^m, g) و (N^n, h) را در نظر می‌گیریم. مختصات موضعی بر M را به صورت (x^1, \dots, x^m) و بر N را به صورت (y^1, \dots, y^n) مشخص می‌کنیم و ضرایب متریک بر M را با g_{ij} و بر N را با $h_{\alpha\beta}$ نشان می‌دهیم.

تعریف ۱.۱. نگاشت هموار $\varphi: M \rightarrow N$ را همساز نامیم هرگاه نقطه‌ی بحرانی در φ در φ^{-1} اول تابع انرژی دیریکله $E(\varphi) = \int_D \frac{1}{2} |\varphi|^2 d\mu_g$ باشد که در آن D دامنه‌ی فشرده‌ی φ و $d\mu_g$ عنصر حجم ریمانی بر M است. در عبارت بالا نرم هیلبرت برابر است با

$$|\varphi|^2 = \sum_{i,j=1}^m \sum_{\alpha,\beta=1}^n g^{ij} h_{\alpha\beta} \frac{\partial \varphi}{\partial x^i} \frac{\partial \varphi}{\partial x^j}$$

تعاریف اولیه

هموستار لوی-چویتا^۴ بر M را با ∇^M و بر N را با ∇^N نشان می‌دهیم. برای $X, Y \in \mathcal{X}(M)$ و $\omega \in \Omega^1(M)$ روی کلاف T^*M بر M هموستار لوی چویتای ∇^* با عمل $\nabla_X^* \omega(Y) = X\omega(Y) - \omega(\nabla_X Y)$ تعریف می‌کنیم. هموستار القایی بر کلاف برگردان φ^*TN به صورت ∇^* نشان می‌دهیم و به صورت

$$\varphi^* \nabla_X \frac{\partial}{\partial Y^i} \circ \varphi = \nabla_{d\varphi(X)} \frac{\partial}{\partial Y^i} \circ \varphi$$

* سخنران

^۱harmonic
^۲divergence
^۳variation
^۴Levi-Civita



تعریف می‌کنیم. با استفاده از این دو، هموستار ∇ را روی کلاف $T^*M \otimes \varphi^*TN$ به صورت $\nabla_X^{\omega \otimes W} = * \nabla_X^\omega \otimes W + \omega \otimes \varphi \nabla_X^W$ برای $X \in \Gamma(TM)$ ، $W \in \Gamma(\varphi^*TN)$ و $\omega \in \Gamma(T^*M)$ تعریف می‌کنیم.

لم و تعریف ۲.۱. فرض کنیم $\varphi : M \rightarrow N$ نگاشتی هموار و $X, Y \in \Gamma(TM)$ باشد. $\nabla d\varphi(X, Y) = \varphi \nabla_X^{d\varphi(Y)} - d\varphi(M \nabla_X^Y)$ را دومین فرم بنیادین φ می‌نامیم و داریم

$$\nabla d\varphi(X, Y) = \nabla d\varphi(Y, X)$$

تعریف ۳.۱. اگر $\{e_1, \dots, e_n\}$ میدان‌های کنجی در M باشد، میدان تنش $\tau(\varphi)$ را به صورت

$$\tau(\varphi) = \text{trace } \nabla d\varphi = \sum \varphi \nabla_{e_i}^{d\varphi(e_i)} - d\varphi(\nabla_{e_i}^{e_i}) \quad (1)$$

تعریف می‌کنیم. واضح است اگر کنج را در مختصات نرمال بگیریم دومین عبارت سمت راست صفر خواهد شد.

قضیه ۴.۱. اگر $F : M \times I \rightarrow N$ وردش هموار برای نگاشت هموار $\varphi : M \rightarrow N$ و M خمینه‌ای فشرده باشد. آنگاه:

$$\left. \frac{d}{dt} E(\varphi_t) \right|_{t=0} = - \int_M \langle V, \tau(\varphi) \rangle d\mu_g$$

که در آن $\varphi_t = F(x, t)$ برای t ثابت و $V = \left. \frac{d}{dt} \varphi_t \right|_{t=0}$ میدان برداری وردشی و $\langle \cdot \rangle$ متریک بر φ^*TN است.

نتیجه ۵.۱. $\tau(\varphi) = 0 \iff \varphi$ همساز است

مثال ۶.۱. اگر $M = \mathbb{R}$ (همچنین $M = \mathbb{S}^1$) آنگاه $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow N$ همساز است اگر و تنها اگر ژئودزیک (ژئودزیک بسته) باشد.

مثال ۷.۱. اگر $M = \mathbb{R}, N = \mathbb{R}$ همساز است اگر و تنها اگر $\Delta\varphi = 0$ که عملگر لاپلاس باشد.

مثال ۸.۱. اگر M و N هر دو خمینه‌های کیلر و φ تحلیلی مختلط باشد آنگاه φ همساز است.

لم و مثال ۹.۱. نگاشت $f : M \rightarrow N$ را تماماً ژئودزیک گوئیم هرگاه ترکیبش با ژئودزیک‌های M ژئودزیک N شود.

f تماماً ژئودزیک است اگر و تنها اگر دومین فرم بنیادین f صفر شود.

فرض کنیم $\varphi : M \rightarrow N$ فروری هموار و $f : N \rightarrow P$ تماماً ژئودزیک باشد. φ همساز است اگر و تنها اگر $f \circ \varphi$ همساز باشد.

رویه‌ی ریمانی M^2 ، خمینه‌ای دوبعدی جهت‌پذیر حقیقی با متریک همدیس $\rho^2(p)(dx^2 + dy^2)$ برای $p \in M^2$ است. حال اگر قرار دهیم $z = x + iy$ و تعریف می‌کنیم $\frac{\partial}{\partial z} = \left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right)$ و $\frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right)$. در مختصات مختلط متریک به صورت $g = \rho^2(z) dz \otimes d\bar{z}$ خواهد شد. در مختصات حقیقی و مختلط قبل $\tau(\varphi) = 0$ بترتیب به صورت

$$\varphi \nabla \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \varphi \nabla \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0$$

^۵tension field

^۶conformal



و به طور هم ارز

$$\varphi \nabla \frac{\partial \varphi}{\partial \bar{z}} = 0 \quad (2)$$

یا

$$\varphi \nabla \frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0 \quad (2')$$

خواهد بود.

نگاشت $\varphi : M \rightarrow N$ را همدیس گوئیم هرگاه در هر $p \in M$ و برای هر $X, Y \in T_p M$ داشته باشیم
 $h(d\varphi_p(X), d\varphi_p(Y)) = \lambda(p)g(x, y)$ برای تابع هموار $\lambda : M \rightarrow (0, \infty)$.

قضیه ۱۰.۱. نگاشت همدیس $\varphi : M \rightarrow N$ همساز است اگر و تنها اگر فروبری^۱ مینیمال باشد.

در صورتی که $\lambda : M \rightarrow [0, \infty)$ باشد و در زمانی که $\lambda(p) = 0$ شود p را نقطه‌ی شاخه‌ای نامیم و نگاشت φ را فروبری شاخه‌ای نامند.

گزاره ۱۱.۱. $\varphi : M^2 \rightarrow N$ همدیس است اگر و تنها اگر $\left| \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right| = \left| \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right|$ و $\left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right\rangle = 0$ به طور هم ارز اگر و تنها اگر $\left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial z}, \frac{\partial \varphi}{\partial \bar{z}} \right\rangle^{\mathbb{C}} = 0$ که در آن $\langle \cdot, \cdot \rangle^{\mathbb{C}}$ متریک بر $T^{\mathbb{C}}N$ است.

تعریف ۱۲.۱. G را گروه لی و \mathfrak{g} را جبر لی وابسته به آن بگیریم. ۱- فرم \mathfrak{g} -مقدار بر G را به صورت $\omega_G(v) = (L_{g^{-1}})_*(v)$ برای هر $v \in T_g G$ تعریف می‌کنیم. ω_G را فرم کارتانه بر G نامند.

لم ۱۳.۱. $X \in \mathcal{X}(G)$ ناوردای چپ است اگر و تنها اگر $\omega_G(X)$ ثابت باشد.

معادله‌ی مورر-کارتان^۲ برای ω_G به صورت $d\omega_G + \frac{1}{2}[\omega_G, \omega_G] = 0$ است که در آن
 $[\omega_G, \omega_G](X, Y) = [\omega_G(X), \omega_G(Y)]$

تعریف ۱۴.۱. فرض کنیم $f : M \rightarrow G$ نگاشت همواری باشد $\omega_f = f^*(\omega_G)$ را مشتق داریو برای f نامند و داریم
 $d\omega_f + \frac{1}{2}[\omega_f, \omega_f] = 0$.

گزاره ۱۵.۱. اگر $f_1, f_2 \in C^\infty(M, G)$ و داشته باشیم $\omega_{f_1} = \omega_{f_2}$ آنگاه برای $c \in G$ داریم $f_1 = c.f_2$.

قضیه ۱۶.۱ (قضیه کارتانه). اگر G گروه لی با جبر لی \mathfrak{g} و M خمینه‌ی هموار و θ ۱-فرم \mathfrak{g} -مقدار بر M باشد به طوری که
 $d\theta + \frac{1}{2}[\theta, \theta] = 0$ آنگاه: برای هر $p \in M$ باز U حول p و نگاشت هموار $f : U \rightarrow G$ چنان یافت می‌شود که
 $\theta|_U = \omega_f$.

^۱immersion
^۲Maurer-Cartan



۲ نتایج

قضیه ۱.۲. نگاشت هموار $f : M \rightarrow G$ همساز است اگر و تنها اگر $d^* f^*(\omega_G) = 0$.

اثبات. بدیهی سازی $\omega_G : TG \simeq G \times \mathfrak{g}$ را در نظر می‌گیریم. هموستار $+$ را بر G به صورت $D_X^+ s = ds + [s, \omega]$ داریم که در آن $s : G \rightarrow \mathfrak{g}$ و $X \in TG$. هموستار لوی-چویتا را بر G به صورت $D = d + \frac{1}{\nabla} \omega$ تعریف می‌کنیم حال اگر $f : M \rightarrow G$ هموار و $\theta = f^*(\omega_G)$ باشد با استفاده از بدیهی سازی $f^* TG \simeq M \times \mathfrak{g}$ را داریم همچنین می‌دانیم

$$d\theta + \frac{1}{\nabla} [\theta, \theta] = 0 \quad (3)$$

برگردان هموستار لوی چویتای G بر کلاف M $f^* TG \rightarrow M$ به صورت $f^* D = d + \frac{1}{\nabla} \theta$ خواهد بود

$$f^* D_X^S = X(S) + \frac{1}{\nabla} [\theta, S] \quad X \in T_p M \quad S : M \rightarrow \mathfrak{g}$$

حال برای محاسبه‌ی میدان تنش $\tau(f)$ در $p \in M$ در مختصات نرمال کنج $\{e_1, \dots, e_m\}$ را در نظر می‌گیریم

$$\tau(f) = \sum f^* D_{e_i}^{df(e_i)} = \sum \left(e_i(\theta(e_i)) + \frac{1}{\nabla} [\theta(e_i), \theta(e_i)] \right)$$

□

در این صورت $\tau(f) = 0$ اگر و تنها اگر $d^* \theta = 0$.

حال اگر $M = M^2$ رویه ریمانی با مختصات مختلط (z, U) باشد، می‌توان $\theta = f^*(\omega_G)$ را به صورت $\theta = \theta_z dz + \theta_{\bar{z}} d\bar{z}$ نوشت که در آن θ_z و $\theta_{\bar{z}}$ توابعی از U به مختلط سازی شده‌ی جبر لی G یعنی $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}} = \mathfrak{g} \otimes \mathbb{C}$ هستند. حال (۲) و (۳) هم‌ارزاند با $\frac{\partial \theta_z}{\partial \bar{z}} + \frac{\partial \theta_{\bar{z}}}{\partial z} = 0$ و $\frac{\partial \theta_z}{\partial z} - \frac{\partial \theta_{\bar{z}}}{\partial \bar{z}} + [\theta_z, \theta_z] = 0$. جفت معادلات قبل را می‌توان به صورت بسیار متقارن‌تر نوشت:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \theta_z}{\partial \bar{z}} + \frac{1}{\nabla} [\theta_{\bar{z}}, \theta_z] &= 0 \\ \frac{\partial \theta_{\bar{z}}}{\partial z} + \frac{1}{\nabla} [\theta_z, \theta_{\bar{z}}] &= 0 \end{aligned}$$

مراجع

- [1] Paul Baird; John C. Wood, *Harmonic morphisms between Riemannian manifold*, 2003.
- [2] J. Eells; J. Lemaire, *Another report on harmonic maps*, Bull. London Math, 1988.
- [3] J.C. Wood, *Explicit construction of harmonic map*, 2011.



مراکز همیلتونی نوع خطی از میدان های برداری چند جمله ای درجه ۳

مریم افشار نسب*
دانشگاه بیرجند

امیدریبعی مطلق
دانشگاه بیرجند

چکیده

ما یک فرم نرمال و فضای حالت از دیسک پوانکاره برای همه مراکز همیلتونی خطی از میدان برداری چند جمله ای درجه ۳ تهیه میکنیم، همچنین فضای حالت کلی برای میدانهای برداری چندجمله ای مسطح همیلتونی را مشخص مینماییم. برای این منظور از فشرده سازی پوانکاره از میدان های برداری چند جمله ای استفاده میکنیم.

واژه‌های کلیدی: مراکز همیلتونی نوع خطی، میدان برداری، فضای حالت

Mathematics Subject Classification [2010]: 34-00,34N99

۱ مقدمه

در بررسی کیفی دستگاه های مسطح خطی دو مسئله مهم وجود دارد که اولی پیدا کردن دوره های حدی و دومی تشخیص مراکز کانونی دستگاه است. پوانکاره یک میدان برداری روی سطح اصلی را به این صورت تعریف میکند: فرض میکنیم x یک نقطه تکین با همسایگی محذوف باشد که توسط مدارهای تناوبی پر شده است، در این صورت x را یک مرکز گوییم. مطالعه بر رومرکزها از سیستم های درجه دو با کارهای دولاک (Dulac) [۱۰]، کاپتین [۱۴، ۱۵] (Kaptayn) و باتین (Bautin) [۲] شروع شده است و نمودارهای انشعاب از همه سیستم های درجه ۲ دارای یک مرکز توسط اسچلموک (Schlomiuk) [۲۲]، وزولاک (Zoladek) [۲۵] انجام شده است. نتایج جزئی برای مراکز از سیستم های درجه ۲ و بزرگتر از درجه ۲ نیز وجود دارد. مالکین (Malkin) و ولپ (Vulpe)، سیبرسکی مشخص (Sibirsky) [۲۴] کردند مراکز از سیستم های دیفرانسیل پذیر خطی و همگن غیر خطی یک جفت مقدار ویژه به شکل $\pm wi$ دارند با اینحال آنها فضای حالت کلی از مراکز با مقادیر ویژه $\pm wi$ تهیه نکردند. در اینجا تصویری کلی از سیستم های که مراکز پوچ توان دارند را مشخص میکنیم. ابتدا به چند تعریف میپردازیم:

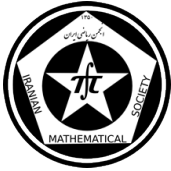
تعریف ۱.۱. دستگاه همیلتونی با درجه n آزادی

فرض کنید $E \in R^{2n}$ و $H(x, y) \in C^2(H)$ که در آن X, Y بردارهایی در R^n باشند هر دستگاه به صورت زیر را یک دستگاه به صورت زیر را یک دستگاه همیلتونی با n درجه آزادی می نامیم.

$$\begin{cases} X = \frac{dH}{dy} \\ Y = -\left(\frac{dH}{dx}\right) \end{cases}$$

تابع H را تابع همیلتونی دستگاه مینامیم.

* سخنران



تعریف ۲.۱. نقاط غیر مقدماتی وانواع آن:

یک نقطه تکین غیر مقدماتی هست اگر هر دو مقدار ویژه قسمت خطی از میدان برداری آن نقطه صفر باشد، در غیر این صورت مقدماتی نامیده میشود. یک نقطه غیر مقدماتی تکین نامیده میشود منحنی (degenerate) اگر قسمت خطی آن متحد باصفر باشد در غیر این صورت پوچ توان (nilpotent) نامیده میشود در مطابقت با این تعریف اگر یک سیستم تحلیلی یک مرکز داشته باشد پس بعد از یک تغییر آفین از متغیرها و بازنویسی به یکی از سه شکل زیر نوشته میشود

$$y = x + Q(x, y) \quad x' = -y + P(x, y)$$

نامیده میشود یک خطی نوع مرکز

$$y = Q(x, y) \quad x' = y + P(x, y)$$

نامیده میشود یک مرکز پوچ توان

$$y' = Q(x, y) \quad x = P(x, y)$$

نامیده میشود یک مرکز تباهیده که $P(x, y)$ و $Q(x, y)$ توابع تحلیلی اصلی بدون مقدار ثابت و جمله خطی تعریف شده در یک همسایگی محذوف از مبدا هستند.

قضیه ۳.۱. هر چند جمله ای مسطح همیلتونی نوع خطی از میدان برداری به همراه عبارت درجه ۳، یک مرکز از نوع خطی در مبدأ دارد اگر و تنها اگر بعد از یک تغییر خطی و یک باز نویسی از متغیر مستقل خودش به یکی از ۶ کلاس زیر تبدیل شود:

$$[۱] - x' = ax + by \quad y' = -\frac{a^2 + \beta^2}{b}x - ay + x^3$$

$$[۲] - x' = ax + by - x^3 \quad y' = -\frac{a^2 + \beta^2}{b}x - ay + 3x^2y$$

$$[۳] - x' = ax + by - 3x^2y + y^3 \quad y' = -\frac{a^2 + \beta^2}{b}x - ay + 3x^2y$$

$$[۴] - x' = ax + by - 3x^2y - y^3 \quad y' = -\frac{a^2 + \beta^2}{b}x - ay + 3x^2y$$

$$[۵] - x' = ax + by - 3\mu x^2y + y^3 \quad y' = -\frac{a^2 + \beta^2}{b}x - ay + 3\mu x^2y$$

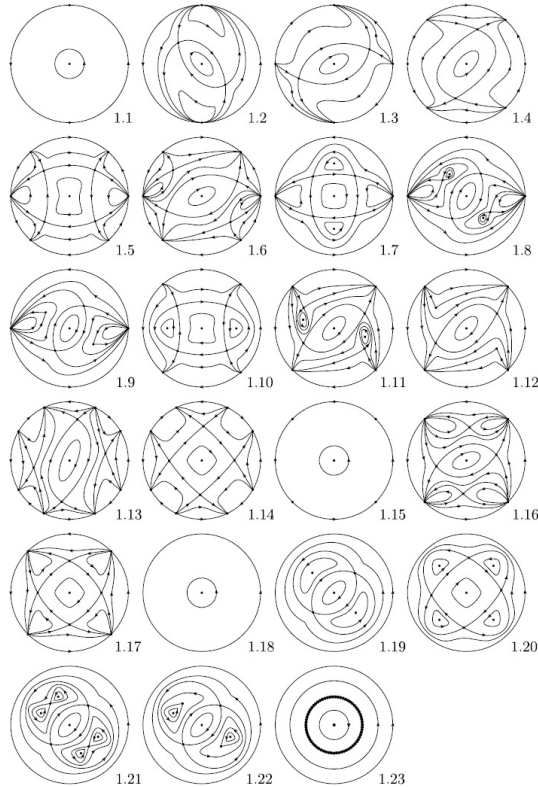
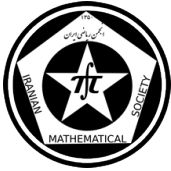
$$[۶] - x' = ax + by - 3x^2y + y^3 \quad y' = -\frac{a^2 + \beta^2}{b}x - ay + 3\mu x^2y$$

که $a, \beta, b, \mu \in R$ و $b \neq 0$ فضای حالت کلی از این ۶ سیستم در هم ارز توپولوژیکی در شکل ۱ است.

در این بخش از فشرده سازی پوانکاره برای فضای حالت کلی از سیستم همیلتونی استفاده میکنیم. اگر S^2 مجموعه ای از نقاط $(s_1, s_2, s_3 \in R)$ که $s_1 + s_2 + s_3 = 1$ یک گوی پوانکاره نامیده میشود. میدان برداری چند جمله ای

$$X = (x, y) = P(x, y), Q(x, y)$$

در R^2 مفروض است. میتواند به طور تحلیلی به گوی پوانکاره توسط تصویر کردن $(x_1, x_2, 1) \in R^3$ در R^2 $x \in R^2$ توسعه داد بروی گوی پوانکاره، خط گذرنده از x و مبدأ از R^3 استفاده میکنیم. دو کپی از x بدست می آید یکی روی نیم کره شمالی ($s > 0$) و دیگری روی نیم کره جنوبی ($s < 0$) $(s_1, s_2, s_3 \in S^2)$. خط استوا ($s = 0$) $S^1 = (s_1, s_2, s_3 \in S^2)$ در بینهایت از R^2 مطابقت دارد. مختصات موضعی زیر را برای انجام محاسبات روی گوی پوانکاره در نظر میگیریم:



شکل ۱: فضای حالت کلی از همه میدان های برداری مسطح همیلتونی به همراه عبارت همگن و خطی درجه ۳ که یک مرکز نوع خطی دارد. جداکننده ها ضخیم تر نشان داده شده اند.

$$V_i = s \in S^1 \quad s_i < 0 \quad U_i = s \in S^1 \quad s_i > 0$$

که $s = (s_1, s_2, s_3)$ و دو نگاشت موضعی مربوط به آنها:

$$\psi_i = (s) : V_i \rightarrow R^2 \quad \varphi_i = (s) : U_i \rightarrow R^2$$

به طوری که $\varphi_i(s) = -\psi_i(s) = \left(\frac{s_m}{s_i}, \frac{s_n}{s_i}\right)$ که میدان برداری مربوط به روی S^1 در مختصات موضعی U_1 به این صورت داده شده است.

$$w = v^d \left[-uP\left(\frac{1}{v}, \frac{u}{v}\right) + Q\left(\frac{1}{v}, \frac{u}{v}\right) \right] \quad v = -v^{d+1} P\left(\frac{1}{v}, \frac{u}{v}\right) \quad (1)$$

این عبارت برای U_2 به این صورت است:

$$w = v^d \left[P\left(\frac{1}{v}, \frac{u}{v}\right) - uQ\left(\frac{1}{v}, \frac{u}{v}\right) \right] \quad v = -v^{d+1} Q\left(\frac{1}{v}, \frac{u}{v}\right) \quad (2)$$

این عبارت برای U_3 به این صورت است:

$$w = P(u, v) \quad v = Q(u, v) \quad (3)$$



که d درجه میدان برداری است برای V_i ها نیز همینطور است. بنابراین برای مطالعه میدان برداری X کافی است فشرده سازی پوانکاره محدود به قطب شمال و S^1 را بررسی کنیم که دیسک پوانکاره می نامیم. برای کشیدن فضای حالت تصویری از دیسک پوانکاره را به داخل R^2 توسط $(s_1, s_2) = \pi(s_1, s_2, s_3)$ در نظر میگیریم.

نقاط تکین متناهی از X نقاط تکینی هستند از فشرده سازی که در $\frac{S^2}{S^1}$ هستند و برای مطالعه U_3 استفاده میشوند از سویی دیگر نقاط تکین نامتناهی نقاط تکینی از میدان برداری مربوطه هستند که روی دیسک S^1 قرار دارند. اگر $s \in S^1$ یک نقطه تکین نامتناهی باشد آنگاه $-s \in S^1$ یک نقطه تکین نامتناهی است.

قضیه ۴.۱. دو شار پیوسته در S^2 دارای نقاط تکین تنها هم ارز توپولوژیک هستند اگر و تنها اگر ساختار جدا ساز آنها هم ارز باشند.

این قضیه نتیجه میدهد یکبار دو جدا ساز از یک میدان برداری در گوی پوانکاره هستند و تعیین میکند فضای حالت از میدان برداری بدست آمده در بالا هم ارز توپولوژیک هستند.

۲ نتایج اصلی

با استفاده از این پژوهش میتوانیم بگوییم چه تعداد چرخه، انشعاب مدارهای تناوبی از مراکز همیلتونی نوع خطی از هر سیستم دیفرانسیل پذیر چند جمله ای درجه ۳ وجود دارد. برای سیستم های درجه ۲ به همین طریق می توانیم انجام دهیم و امیدواریم دسته بندی کامل از مرکز ها برای سیستم های دیفرانسیل پذیر درجه ۳ بدست آوریم.

مراجع

- [1] Ilker E.COLAK,JaumeLlibre,Claudia Valls *Hamiltonian linear type centers of linear plus cubic homogeneous polynomial*,J.Differential Equations, 259(2014) , pp. 655–687 spaces, Theoretical Computer Science, 328 (2004), pp. 221–244.
- [2] F.Dumortier,J.Llibre,J.C.Artes, *Qualitative Theory of Planar Differential Systems* , Universitex,Springer- Vriag,New York, 2006.
- [3] H.Poincare, *Memoire sur les courbes equation differentielles, Oeuveres de Henri Poincare* , Vol.1, Gauthier - Villars,Paris,1651

پست الکترونیکی: maryam.afshar3148@gmail.com

پست الکترونیکی: Birjand.ac.ir

آنالیز عددی



ارائه‌ی یک الگوریتم برای حل یک مساله‌ی معکوس با ماتریس متقارن مرکزی از مرتبه‌ی زوج

جعفر رحمانی

دانشگاه آزاد اسلامی واحد مشهد

سید احسان یثربی نائینی

دانشگاه تربت حیدریه

بهناز ضعیفی*

دانشگاه سیستان و بلوچستان

چکیده

در این مقاله، به بررسی حل یک مساله‌ی معکوس $AX = B$ می‌پردازیم که در آن A یک ماتریس متقارن مرکزی از مرتبه‌ی زوج است و ماتریس‌های $X, B \in R^{n \times m} (m \leq n)$ مفروض می‌باشند. شرط حل پذیری بیان می‌شود و الگوریتمی برای حل مساله معکوس ارائه می‌گردد. در نهایت الگوریتم روی یک مثال عددی پیاده سازی خواهد شد.

واژه‌های کلیدی: ماتریس متقارن مرکزی، مساله‌ی معکوس، تقریب بهینه، جواب کمترین مربعات

Mathematics Subject Classification [2010]: 13D45, 39B42

۱ مقدمه

بسیاری از مسائل علوم کاربردی و مهندسی را می‌توان به صورت دستگاه معادلات ماتریسی $AX = B$ فرمول بندی کرد که در آن $X, B \in R^{n \times m} (m \leq n)$ به کمک انجام آزمایشات و ثبت داده‌ها تعیین می‌شوند و هدف از حل مساله یافتن ماتریس مربعی A می‌باشد. در این دسته از مسائل که از آنها به مسائل معکوس^۱ یاد می‌کنند، مدل به کمک ثبت نتایج و داده‌های حاصل از آزمایشات بدست می‌آید، لذا به سختی می‌توان یک عملگر معکوس یافت که با اعمال آن بر روی داده‌های مساله به جواب قابل اطمینانی رسید. از جمله‌ی این مسائل می‌توان به حل مساله معکوس $AX = B$ با ماتریس متقارن مرکزی اشاره کرد که کاربردهای گسترده‌ای در آنالیز عددی دارند. با وجود اطلاعات ناکامل و انواع خطا که در حین آزمایشات، ثبت و اندازه‌گیری داده‌ها در این گونه از مسائل رخ می‌دهد و باعث ناپایداری مساله نیز می‌شوند، می‌توان از روش حداقل کردن مربعات خطا بهره گرفت تا این شکل بدو وضعی مساله تا حدی حل گردد و به تقریب بهینه رسید. در این حداقل کردن مربعات خطا ابتدا یک جواب کمترین توان‌های دوم بدست می‌آید سپس این جواب به بهترین تقریب تبدیل خواهد شد. نمادهایی که در این مقاله استفاده می‌شوند عبارت هستند از: $R^{n \times m}$ مجموعه‌ی تمام ماتریس‌های $n \times m$ $OR^{n \times n}$ مجموعه‌ی تمام ماتریس‌های متعامد $n \times n$ را معرفی می‌کنند. A^+ معکوس تعمیم یافته‌ی مور-پنرز و $rank(A)$ رتبه‌ی ماتریس A را نشان می‌دهند. همچنین نمادهای I_k ، $\|\cdot\|$ و (A, B) به ترتیب معرف ماتریس یکانی از مرتبه‌ی n ، نرم فروبنیوسی و حاصلضرب داخلی دو ماتریس A و B می‌باشند. فرض کنید e_i -مین ستون I_n و $J_n = (e_n, e_{n-1}, \dots, e_1)$ باشند. در این صورت روابط $J_n^T J_n = I$ و $J_n^T = J_n$ برقرار می‌باشند.

تعریف ۱.۱. $A = (a_{ij}) \in R^{n \times n}$ یک ماتریس متقارن مرکزی^۲ است، هرگاه $a_{ij} = a_{n+1-i, n+1-j}$ برقرار باشد.

* سخنران

^۱Inverse Problem^۲Centrosymmetric Matrix



دستگاه $AX = B$ ($X, B \in R^{n \times m}$ ($m \leq n$)) فرامعین است و معمولاً جواب ندارد، برای رفع این مشکل جواب کمترین توان‌های دوم خطی محاسبه می‌شود، اگر مساله با رتبه‌ی کامل باشد جواب $A = B(X^+) = B(X^T X)^{-1} X^T$ را دارد. اما اگر رتبه‌ی ناقص باشد مساله دارای جواب‌های بی‌شماری است که برای به دست آوردن آنها دو روش QR و SVD پیشنهاد شده است. هرچند که QR تکنیک دقیق‌تری است اما جوابی که به کمک SVD محاسبه می‌شود مطمئن‌تر می‌باشد. البته استفاده از این روش در هر دو حالت توصیه نمی‌شود زیرا با کمی اغماض می‌توان گفت تمام مسائل معکوس بدوضع می‌باشند و جواب نهایی تحت تاثیر خطاهایی از جمله خطای گردکردن قرار می‌گیرد لذا این روش حل از ناپایداری رنج می‌برد و به علت حجم زیاد محاسبات ضرب و معکوس ماتریس‌ها - نسبت به جمع و تفریق آنها- دشوار است و چندان به صرفه نیست، لذا بهتر است جواب‌های کمترین مربعات خطا برای حل این گونه از مسائل بررسی شود، برای این منظور احتیاج به حل سه مساله‌ی زیر داریم:

مساله ۱- $X, B \in R^{n \times m}$ ($m \leq n$) مفروض است. ماتریس متقارن مرکزی A را چنان بیابید که $AX = B$.
 مساله ۲- $X, B \in R^{n \times m}$ ($m \leq n$) مفروض می‌باشند. ماتریس متقارن مرکزی A را چنان بیابید که $\|AX - B\|$ یک تخمین اولیه \check{A} برای ماتریس مجهول A می‌تواند به کمک مشاهدات تجربی و توزیع‌های آماری اطلاعات آزمایشگاهی تعیین گردد اما به کمک حل مساله می‌توان تخمین بهینه A^* را برای ماتریس A بدست آورد که بهترین تقریب \check{A} می‌باشد.
 مساله ۳- $\check{A} \in R^{n \times n}$ مفروض است. $A^* \in S_E$ را چنان بیابید که $\|\check{A} - A^*\| = \inf_{A \in S_E} \|\check{A} - A\|$ اگر S_E ناتهی باشد آنگاه یک مجموعه‌ی محدب بسته است، لذا مساله‌ی متناظر ۳ یک جواب یکتا با تقریب بهینه دارد [۱].

۲ نتایج اصلی

لم ۱.۲. $A \in CSR^{n \times n}$ ($n = 2k$) را می‌توان به صورت $\begin{bmatrix} M & HJ_k \\ J_k H & J_k M J_k \end{bmatrix}$ بیان کرد که $M, H \in R^{k \times k}$ را داریم.

اثبات. به [۴] مراجعه کنید. □

لم ۲.۲. $n = 2k$ و $D = (1/\sqrt{2}) \begin{bmatrix} I_k & I_k \\ J_k & -J_k \end{bmatrix}$ مفروض است. (به وضوح D متعامد است.) آنگاه $A \in CSR^{n \times n}$ را می‌توان به صورت $D \begin{bmatrix} M+H & \\ \circ & M-H \end{bmatrix} D^T$ بیان کرد که در آن $M, H \in R^{k \times k}$.

اثبات. به کمک لم ۱.۲ به آسانی اثبات می‌شود. □

لم ۳.۲. $X \in R^{n \times n}$ ، اگر $J_n X = X$ و $n = 2k$ باشند، آنگاه X را می‌توان به صورت $X = \begin{bmatrix} X_1 & \\ J_k X_1 \end{bmatrix}$ بیان کرد.

اثبات. به [۳] مراجعه کنید. □

X را به صورت $X = \begin{bmatrix} X_1 & X_2 \\ J_k X_1 & -J_k X_2 \end{bmatrix}$ بیان می‌کنیم. فرض کنیم SVD ماتریس‌های X_1 و X_2 به صورت زیر باشد:

$$X_2 = P \begin{bmatrix} \Sigma_2 & \\ \circ & \circ \end{bmatrix} Q^T = P_1 \Sigma_2 Q_1^T \quad X_1 = U \begin{bmatrix} \Sigma_1 & \\ \circ & \circ \end{bmatrix} V^T = U_1 \Sigma_1 V_1^T$$



که در آن داریم:

$$U = (U_1, U_2) \in OR^{k \times k}, V = (v_1, v_2) \in OR^{m \times m}, U_1 \in R^{k \times r_1}, V_1 \in R^{m \times r_1}, r_1 = \text{rank}(X_1), \Sigma_1 = \text{diag}(\sigma_1, \dots, \sigma_{r_1}), \sigma_i > 0, 1 \leq i \leq r_1, P = (p_1, p_2) \in OR^{(n-k)(n-k)}, Q = (Q_1, Q_2) \in OR^{m \times m}, P_1 \in R^{(n-k) \times r_2}, Q_1 \in R^{m \times r_2}, r_2 = \text{rank}(X_2), \Sigma_2 = \text{diag}(\sigma_1, \dots, \sigma_{r_2}), \sigma_i > 0, 1 \leq i \leq r_2.$$

قضیه ۴.۲. $X, B \in R^{k \times m} (m \leq 2k)$ مفروض است. قرار می‌دهیم

$$D^T B = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} \quad B_1, B_2 \in R^{k \times m} \quad D^T X = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} \quad X_1, X_2 \in R^{k \times m}$$

مساله‌ی ۲ حل پذیر است و جواب عمومی آن عبارت است از:

$$A = A_0 + D \begin{bmatrix} G_1 U_1^T & \circ \\ \circ & G_2 P_1^T \end{bmatrix} D^T, G_1 \in R^{k(k-r_1)}, G_2 \in R^{k(k-r_2)}, A_0 = D \begin{bmatrix} B_1 X_1^+ & \circ \\ \circ & B_2^+ \end{bmatrix} D^T$$

اثبات. برای هر $A \in CSR^{k \times 2k}$ ، با توجه به لم ۲.۲، ماتریس‌های $M, H \in R^{k \times k}$ وجود دارند به طوری که

$$D^T A D = \begin{bmatrix} M + H & \circ \\ \circ & M - H \end{bmatrix}$$

داریم:

$$\begin{aligned} \|AX - B\|^2 &= \|D^T A D D^T X - D^T B\|^2 = \left\| \begin{bmatrix} M + H & \circ \\ \circ & M - H \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} \right\|^2 \\ &= \|(M + H)X_1 - B_1\|^2 + \|(M - H)X_2 - B_2\|^2 = \|U^T(M + H)U \begin{bmatrix} \Sigma_1 & \circ \\ \circ & \circ \end{bmatrix} - U^T B_1 V\|^2 \\ &+ \|P^T(M - H)P \begin{bmatrix} \Sigma_2 & \circ \\ \circ & \circ \end{bmatrix} - P^T B_2 Q\|^2 = \|U_1^T(M + H)U_1 \Sigma_1 - U_1^T B_1 V_1\|^2 + \|U_2^T(M + H)U_2 \Sigma_2 - U_2^T B_2 V_2\|^2 \\ &+ \|U_1^T(M + H)U_1 \Sigma_1 - U_1^T B_1 V_1\|^2 + \|-U_1^T B_1 V_1\|^2 + \|-U_2^T B_2 V_2\|^2 + \|P_1^T(M - H)P_1 \Sigma_1 - P_1^T B_2 Q_1\|^2 + \\ &\|P_2^T(M - H)P_2 \Sigma_2 - P_2^T B_2 Q_2\|^2 + \|-P_1^T B_2 Q_1\|^2 + \|-P_2^T B_2 Q_2\|^2 + \|-P_1^T B_2 Q_1\|^2 + \\ &\| - P_2^T B_2 Q_2\|^2 \end{aligned}$$

بنابراین $\|AX - B\| = \min_{A \in CSR^{k \times 2k}}$ اگر و تنها اگر

$$\begin{aligned} U_1^T(M + H)U_1 &= U_1^T B_1 V_1 \Sigma_1^{-1} & U_2^T(M + H)U_2 &= U_2^T B_2 V_2 \Sigma_2^{-1} \\ P_1^T(M - H)P_1 &= P_1^T B_2 Q_1 \Sigma_1^{-1} & P_2^T(M - H)P_2 &= P_2^T B_2 Q_2 \Sigma_2^{-1} \end{aligned}$$

قرار می‌دهیم $G_1 = U \begin{bmatrix} U_1^T(M + H)U_1 \\ U_2^T(M + H)U_2 \end{bmatrix} \in R^{k \times (k-r_1)}$ از آنجایی که

$$\begin{aligned} U^T(M + H)U &= \begin{bmatrix} U_1^T(M + H)U_1 & U_2^T(M + H)U_2 \\ U_1^T(M + H)U_1 & U_2^T(M + H)U_2 \end{bmatrix} \\ U \begin{bmatrix} U_1^T B_1 V_1 \Sigma_1^{-1} \\ U_2^T B_2 V_2 \Sigma_2^{-1} \end{bmatrix} &= B_1 V_1 \Sigma_1^{-1}, \quad X_1^+ = V_1 \Sigma_1^{-1} U_1^T \end{aligned}$$

نتیجه می‌گیریم $M - H = B_2 X_2^+ + G_2 U_2^T$ ، $G_2 \in R^{k \times (k-r_2)}$ و $M + H = B_1 X_1^+ + G_1 U_1^T$ داریم:

$$A = D \begin{bmatrix} B_1 X_1^+ & \circ \\ \circ & B_2 X_2^+ \end{bmatrix} D^T + D \begin{bmatrix} G_1 U_1^T & \circ \\ \circ & G_2 P_1^T \end{bmatrix} D^T.$$



نتیجه ۵.۲. $X, B \in R^{2k \times m} (m \leq 2k)$ ، $X_i, B_i (i = 1, 2)$ ، مطابق تعریف مفروض می‌باشند در این صورت مساله‌ی ۱ حل پذیر است اگر و تنها اگر $B_1 X_1^+ X_1 = B_1$ ، $B_2 X_2^+ X_2 = B_2$ و جواب عمومی عبارت است از:

$$A = D \begin{bmatrix} B_1 X_1^+ & \circ \\ \circ & B_2 X_2^+ \end{bmatrix} D^T + D \begin{bmatrix} G_1 U_1^T & \circ \\ \circ & G_2 P_2^T \end{bmatrix} D^T, G_1 \in R^{k(k-r_1)}, G_2 \in R^{k(k-r_2)}$$

□

اثبات. به [۲] مراجعه شود.

قضیه ۶.۲. $X, B \in R^{n \times n} (n = 2k)$ و \check{A} مفروض می‌باشند. نمادها و شرایط مطابق قضیه‌ی قبل در نظر گرفته می‌شوند، در این صورت اگر مساله‌ی ۲ حل پذیر باشد آنگاه مساله‌ی ۳ یک جواب یکتای $A^* \in S_E$ دارد که به صورت زیر بیان می‌شود:

$$A^* = A_0 + D \begin{bmatrix} \check{A}_{11} U_1 U_1^T & \circ \\ \circ & \check{A}_{22} P_2 P_2^T \end{bmatrix} D^T, \\ \check{A}_{22} = (1/2)[I_k, -J_k](\check{A} - A_0) \begin{pmatrix} I_k \\ -J_k \end{pmatrix} \quad \check{A}_{11} = (1/2)(I_k, J_k)(\check{A} - A_0) \begin{pmatrix} I_k \\ J_k \end{pmatrix},$$

الگوریتم

- ۱- ماتریس‌های X, B و \check{A} مفروض می‌باشند.
- ۲- ماتریس‌های $B_1, B_2, X_1, X_2, SVD(X_1), SVD(X_2), A_0, A_0, \check{A}_{11}, \check{A}_{22}$ را محاسبه کنید.
- ۳- ماتریس A^* را محاسبه کنید.

مثال ۷.۲. $X = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1/2 & 2/5 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 0.25 & -1.4 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & -4 & 1 \end{bmatrix}$ مفروضند، به کمک *MATLAB* ماتریس‌های

$A^+ = \check{A}$ و A^* به دست آمده است. (جواب حاصل از روش شبه معکوس، به عنوان تقریب اولیه در نظر گرفته شده است.)

$$A^* = \begin{bmatrix} -1.2849 & -0.4530 & 0.8573 & -1.1522 \\ 0.5896 & 1.0306 & -0.6048 & -0.6847 \\ -0.6847 & -0.6048 & 1.0306 & 0.5896 \\ -1.1522 & 0.8573 & -0.4530 & -1.2849 \end{bmatrix} \quad \check{A} = \begin{bmatrix} 0.4851 & 0.2493 & -0.1940 & -1.4985 \\ 0.2087 & 0.9378 & -0.6435 & -0.8756 \\ 0.0326 & -0.3256 & 0.7870 & 0.6513 \\ 0.1113 & 1.2874 & -1.6445 & -1.5748 \end{bmatrix}$$

مراجع

- [1] Zhang Lei, *Approximation in closed convex cones and its applications in numerical analysis*, Annual of human mathematics in chinese, 6 (2007), pp. 611-617.
- [2] Fu-Zhao Zhou, Lei Zhang, Xi-Yan Hu, *Least-Square solution for inverse problem of centrosymmetric matrices*, Computers and mathematics and applications, 45 (2003), pp. 1581-1589.
- [3] Fu-Zhao Zhou, Xi-Yan Hu, Lei Zhang, *The solvability conditions for the inverse eigenvalue problems of centrosymmetric matrices*, Linear algebra and its applications, 364 (2003), pp. 147-160.
- [4] Z.Xu, K.Y.Zhang, Q.Lu, *Fast algorithms of matrices of Toeplitz form*, Northwest industry university press 1999.

پست الکترونیکی: behnazaeefi@gmail.com
پست الکترونیکی: yasrebi77@gmail.com
پست الکترونیکی: jrahmani1983@yahoo.com



الگوریتمی برای جایابی قطب با استفاده از روش بس گیورا و روش آکرمن

حجت احسنی طهرانی

دانشگاه شاهرود

علیرضا قرنلی پور*

دانشگاه شاهرود

چکیده

در این مقاله مساله جایابی قطب با استفاده از مشتق حالت، که از روشهای جدید در جایابی قطب می باشد، رابا تعریف یک سیستم جدید به مساله جایابی قطب با پس خورد حالت تبدیل می کنیم و با استفاده از روش بس گیورا و روش آکرمن بردار بهره، سیستم منفرد رابه گونه ای محاسبه می کنیم که، ماتریس حلقه بسته سیستم اولیه دارای قطب مطلوب ما باشد. و در انتها با ذکر مثالی و نتایج شبیه سازی آن موثر بودن روش ارائه شده را نشان می دهیم.

واژه های کلیدی: سیستم خطی، جایابی قطب، پس خورد مشتق حالت، پایداری، پس خورد حالت

Mathematics Subject Classification [2010]: 93B52, 93B55

۱ مقدمه

از دیر باز یکی از مسائل مهم در کنترل، طراحی کنترل کننده های پس خورد است که قطب های حلقه بسته سیستم را در جایگاه مناسب قرار دهند، در این حیطه آثار تحقیقی متعددی ارائه شده است. مساله کنترل پس خورد حالت در چند ده اخیر بطور کامل مورد تحلیل و بررسی قرار گرفته است و محققان روشهای گسترده ای برای آن ارائه نموده اند [۲] [۳]. ولی در زمینه پس خورد مشتق حالت، گستردگی آنچنانی وجود ندارد [۴]. یکی از انگیزه های پیگیری این موضوع اهمیت ویژه نوسانات متغیر حالت می باشد.

۲ کنترل سیستم خطی پیوسته زمانی با استفاده از پس خورد مشتق حالت

یک سیستم خطی با زمان ثابت به صورت زیر در نظر بگیریم:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad (1)$$

که $x(t) \in R^n$ و $u(t) \in R$ به ترتیب بردار حالت و ورودی کنترل می باشند، که در آن $A \in R^{n \times n}$ و $B \in R^n$ به ترتیب ماتریس های سیستم و کنترل می باشند. فرض می کنیم $rank(A) = n$ و $rank(B) = m$ و $rank(A + Bk) = n$ هدف جایابی قطب برای سیستم با استفاده از پس خورد مشتق حالت است با تعریف قانون کنترل

$$u(t) = -k\dot{x}(t) \quad (2)$$

که پایداری سیستم را ایجاد کند. با جایگذاری (۲) در (۱) داریم:

$$\dot{x}(t) = (I + Bk)^{-1}Ax(t) \quad (3)$$

* سخنران



مساله، یافتن ماتریس بهره k است بطوری که ماتریس حلقه بسته $(I + Bk)^{-1}A$ مقادیر ویژه دلخواه مخالف صفر $\Lambda_1 = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$ را اختیار کند با توجه به اینکه ماتریس حلقه بسته مساله اصلی $(I + Bk)^{-1}A$ است داریم:

$$\left((I + Bk)^{-1}A\right)^{-1} = A^{-1}(I + Bk) = A^{-1} + A^{-1}Bk \quad (4)$$

که با اختیار $B_n = A^{-1}B$ و $A_n = A^{-1}$ داریم:

$$\left((I + Bk)^{-1}A\right)^{-1} = A_n + B_nk \quad (5)$$

معادله جدید

$$\dot{q}(t) = A_nq(t) + B_nw(t) \quad (6)$$

باقانون کنترل

$$w(t) = -kq(t) \quad (7)$$

در نظر می گیریم با جایگذاری (۷) در (۶) داریم: $\dot{q}(t) = (A_n - B_nk)q(t)$ ماتریس پس خوردحالت را به گونه ای تعیین می کنیم که مقادیر ویژه ماتریس حلقه بسته $A_n - B_nk$ متعلق به مجموعه $\Lambda_2 = \{\lambda_1^{-1}, \lambda_2^{-1}, \dots, \lambda_n^{-1}\}$ باشد آنگاه مقادیر ویژه ماتریس حلقه بسته سیستم (۳) متعلق به مجموعه Λ_1 می باشد.

۳ روشهای تعیین ماتریس پس خورد برای سیستم منفرد

در این قسمت مادوروش برای سیستم منفرد ارائه می دهیم: روش بس گیورا و روش آکرمن [۱]

۱.۳ روش بس گیورا برای تعیین ماتریس پس خورد

معادله (۶) را با قانون کنترل (۷) در نظر می گیریم معادله مشخصه A_n عبارت است از:

$$a(s) = \det(sI_n - A_n) = s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_0 \quad (8)$$

می باشد، در نظر می گیریم

$$a = [a_{n-1} a_{n-2} \dots a_0] \quad (9)$$

باشد. حال معادله چند جمله ای با قطب های دلخواه $\Lambda_2 = \{\lambda_1^{-1}, \lambda_2^{-1}, \dots, \lambda_n^{-1}\}$ بصورت:

$$\alpha(s) = (s - \lambda_1^{-1})(s - \lambda_2^{-1}) \dots (s - \lambda_n^{-1}) = s^n + \alpha_{n-1}s^{n-1} + \dots + \alpha_0 \quad (10)$$

می باشد، در نظر می گیریم

$$\alpha = [\alpha_{n-1} \alpha_{n-2} \dots \alpha_0] \quad (11)$$

برای محاسبه k قضیه زیر را داریم



قضیه ۱.۳. ماتریس پس خورد k برای سیستم (۶) را می توان تعیین کنیم که مقادیر ویژه ماتریس $A_n + B_n K$ متعلق به مجموعه دلخواه باشد اگر فقط اگر ماتریس قابلیت کنترل $[B_n, A_n B_n, \dots, A_n^{n-1} B_n]$ $\varphi_c =$ نامنفرد باشد و همچنین k بصورت $k = (\alpha - a) \Psi^{-1} \varphi_c^{-1}$ محاسبه می گردد که Ψ بصورت زیر است.

$$\Psi = \begin{bmatrix} 1 & a_{n-1} & a_{n-2} & \dots & \dots & a_1 \\ 0 & 1 & a_{n-1} & \dots & \dots & a_2 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & a_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

۲.۳ روش آکرمن برای تعیین ماتریس پس خورد

باتوجه به معادله (۶) وقانون کنترل (۷) وچند جمله ای (۱۰) آکرمن نشان داده است که k بصورت زیر محاسبه می گردد

$$k = q_n^T \alpha(A) \quad (12)$$

و $q_n^T = [0 \dots 0 \ 1] \varphi_c^{-1}$ که $\varphi_c = [B_n, A_n B_n, \dots, A_n^{n-1} B_n]$ ماتریس قابلیت کنترل می باشد

۴ مثال

مثال ۱.۴. سیستم خطی $\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$ که در آن $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -3 \\ 1 & 3 & -1 \\ 2 & 7 & -5 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ 13 \end{bmatrix}$ در نظر بگیرید مطلوب است محاسبه پس خورد مشتق حالت بطوریکه مقادیر ویژه سیستم حلقه بسته متعلق به مجموعه $\Lambda_1 = \{-1, \frac{-1}{3}, \frac{-1}{3}\}$ باشد.

حل. داریم $A_n = A^{-1} B$ و $B_n = A^{-1} B$ بنابراین $A_n = \begin{bmatrix} 1 & 6 & -3 \\ -1 & -1 & 1 \\ -2 & 2 & 0 \end{bmatrix}$ و $B_n = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ می شود.

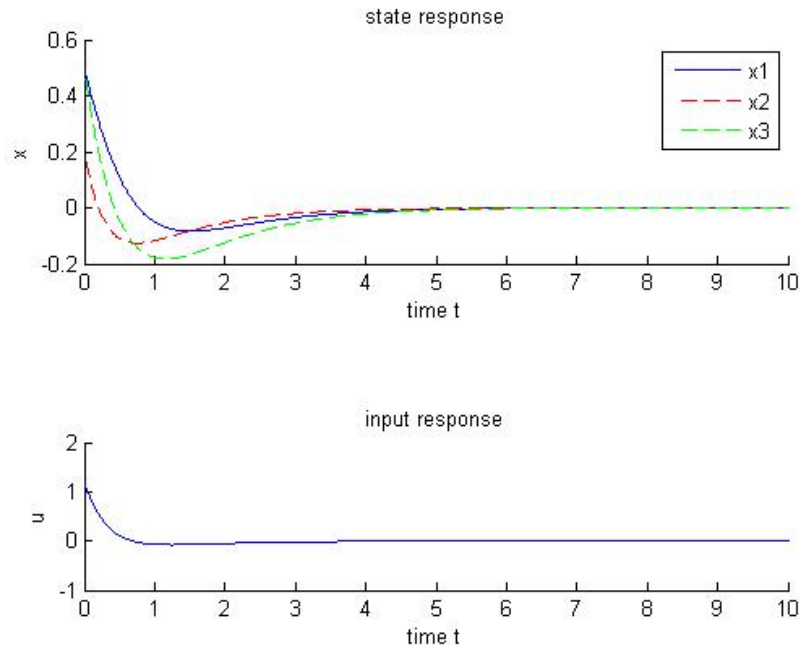
روش بس گیورا:

$\alpha(s) = \lambda^3 + 6\lambda^2 + 11\lambda + 6$ و $\alpha = [6 \ 11 \ 6]$ و $a = [0 \ -3 \ 2]$ بنابراین K بدست می آید
 $k = (\alpha - a) \Psi^{-1} \varphi_c^{-1} = [5 \ 6 \ -5]$
روش آکرمن: که $q_n^T = [0 \ 0 \ 1] \varphi_c^{-1} = [1028 \ 1111 \ -1389]$ بدست می آید
 $k = q_n^T \alpha(A) = [5 \ 6 \ -5]$

شکل ۱ مربوط به مثال ۱.۴. پایداری را نشان می دهد

۵ نتایج اصلی

در این مقاله روشی را برای حل مساله جایابی قطب با استفاده پس خورد مشتق حالت برای سیستم خطی زمان ثابت منفرد با استفاده از روشهای آکرمن و بس گیورا ارائه شده است و شرایط لازم و کافی برای جایابی قطب برای سیستم منفرد ذکر شده است و مثال ارائه شده کارایی این روش را نشان می دهد. در بعضی از کاربردهای نظری استفاده از فرمول آکرمن بجای فرمول بس گیورا راحت تر است. بطور کلی در سیستم های منفرد بردار بهره حالت، منحصر بفرد هستند.



شکل ۱: پاسخ حالت و ورودی

مراجع

- [۱] خاکی صدیق، علی اصول کنترل مدرن، انتشارات دانشگاه تهران، تهران، ۱۳۹۲.
- [2] W. G. Tuel, *On the transformation to (phase-variable) canonical form*, IEEE Trans. on Automatic Control, AC-11, 1966, p. 607.
- [3] M. Valasek, N. Olgac, *Pole Placement for Linear time-varying Non-lexicographically Fixed MIMO Systems*, Automatica, 1999, Vol. 35, No. 11, p. 101-108.
- [4] T.H.S. Abdelaziz and M. Valasek, *A direct algorithm for pole placement by state derivative feedback for single-input linear systems*, Acta Polytechnica 43 (2003), 6, 52-60.

پست الکترونیکی: aligharanlipour@gmail.com
پست الکترونیکی: hahsani@shahroodut.ac.ir



الگوریتم عددی برای شناسایی سیستم های غیر خطی بر پایه موجک هار

مهدی رضانی
دانشگاه تفرش

فاطمه محمدی*
دانشگاه تفرش

چکیده

در این مقاله، هدف روش برای شناسایی سیستم های پیچیده مهندسی با استفاده از موجک می باشد، چون تبدیل موجک یک روش آنالیز سیگنال در دو حوزه مقیاس و فرکانس می باشد و همین ویژگی امکان انجام آنالیزهای محلی را فراهم می سازد و این روش در سیستم های الکترو هیدرولیکی که لرزش مطرح است کاربرد دارند و این شناسایی سیستم، برای آزمایشات ساختگی، از سیگنالهای واقعی استفاده می کند.

واژه های کلیدی: شناسایی سیستم، موجک هار، تبدیل موجک و سیستم های پیچیده

Mathematics Subject Classification [2010]: 13D45, 39B42

۱ مقدمه

آنالیزها و تفاسیر سیگنالها توسط آزمایشاتی که با اندازه گیری مقادیر فیزیکی که توسط سنسورهای مختلف انجام می شود بدست می آید، اطلاعات مهم بدست آمده از آزمایشاتی که انجام شده، شبیه سازی رفتار سیستم را در طول انجام کار نشان می دهد و می تواند توسط روشهای دیگری نیز بدست آید که یکی از این روشها شناسایی سیستم می باشد که در این روش آزمایشات مدلسازی سیستم های دینامیکی مجاز می باشد اما نه در هر حوزه زمان و فرکانس با هم، چون ممکن است عامل تلفات اساسی در رفتار سیستم باشد، در [۱] بعضی از تأثیرات تبدیل موجک و شرح یک الگوریتم عددی که بتواند یک سیستم الکترو هیدرولیکی را بر پایه موجک مورلت شناسایی کند بیان می کند.

۲ آنالیز موجک

تابع مختلط ψ را که در شرایط زیر صدق می کند، در نظر بگیرید:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\psi(t)|^2 dt < \infty \quad ۱$$

$$C_\psi = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\Psi(w)|^2}{|w|} dw < \infty \quad ۲$$

که Ψ تبدیل فوریه ای از ψ می باشد که به ψ موجک مادر گفته می شود.

تبدیل موجک گسسته: در حوزه گسسته پارامترهای مقیاس و شیفت زمانی به صورت گسسته هستند بطوریکه $a = a_c^m$ و $b = nb_c a_c^m$ بصورت زیر است:

$$a = a_c^m \quad (۱)$$

* سخنران



$$b = nb_c a_c^m, \quad \psi_{m,n} = a_c^{-\frac{m}{2}} \psi\left(\frac{t - nb_c}{a_c^m}\right) \quad m, n \in Z \quad (2)$$

تبدیل موجک از سیگنال $x(t)$ و سیگنال اصلی بوسیله تبدیل موجک به صورت زیر بدست می آید:

$$Tx(m, n) = \int_{-\infty}^{\infty} \psi'_{m,n}(t)x(t)dt, \quad x(t) = k\psi \sum_m \sum_n Tx(m, n)\psi_{m,n}(t)$$

که ψ تابع مختلط می باشد [۲] و بیشترین مقداری که a_c می گیرد بصورت زیر است که v را نویز سیگنال گویند:

$$a_c = 2^{\frac{1}{v}} \quad v \in Z \quad (3)$$

۳ موجک هار

موجک هار اولین نوع از توابع موجک که تابع $\psi(t)$ را به صورت زیر تعریف می کنند:

$$\psi(t) = \begin{cases} 1 & \text{if } 0 < t \leq \frac{1}{2} \\ -1 & \text{if } \frac{1}{2} < t \leq 1 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad \psi(t) = \phi(2t) - \phi(2t - 1)$$

این تابع نسبت به انتقال و اتساع خودش اورتنال است که خانواده آن بصورت زیر است:

$$\psi_{m,n}(t) = 2^{-\frac{m}{2}} \psi(2^{-m}t - n) \quad m, n \in Z \quad (4)$$

[۲] و تابع تبدیل هار ماتریس حقیقی و اورتنال است که به صورت زیر بیان می شود:

$$y[n] = (n * g)[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]g[n - k], \quad y_{high}[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]g[2n - k] \quad (5)$$

x و y سیگنال ورودی و خروجی و g تابع تبدیل هار و پارامترهای مقیاس این موجک ها با فرکانس فوری f بصورت

$$a = \frac{f_c}{f} \quad (6)$$

است. شناسایی اساسی موجک به منظور استخراج اطلاعات از سیستم های پیشرفته ضروری می باشد، در [۱] طرحی از سیستم دینامیکی و زیر سیستم های m از آن و طرحی از سیگنالهای ورودی و خروجی برای همه زیر سیستم های m [۱] بیان شده است.

هدف الگوریتم هار برای شناسایی سیستم ها به صورت زیر است:

گام اول: تعیین قالب فوری برای سیگنال ورودی و خروجی فرض می کنیم که f_c کمترین کران حوزه فرکانس و f_s بیشترین کران باشد.

گام دوم: تعیین پارامتر اتساع m و پارامتر تغییر زمان n برای تبدیل موجک گسسته.

برقراری تعداد صداها، این تعداد صداها به فواصلی که به فاصله بین دو فرکانس تقسیم می شوند مربوط است و با v نشان داده می شوند که اولین مقدار v که با ورودی های مختلف تغییر می کند برابر ۱ است. تعیین مقدار پارامترهای اتساع، اینها نقاط محورهای فرکانس هستند که تبدیل موجک آن می بایست حساب شود و معادلات حساب کردن آن (۱)، (۳) و (۶) مقدار شروع توسط m تعیین می شود رابطه m_i مقدار ابتدایی و m_s مقدار پایانی می باشد و mm و mf که m موجک و m فوری به ترتیب هستند به صورت زیر بدست می آیند:



$$m_i = v \log_v \frac{f_c}{f_i}, \quad m_s = v \log_v \frac{f_c}{f_s}$$

$$mf = mm * sx, \quad sx = [1, \dots, NOMT - 1], \quad mm = \frac{ms}{i(NOMT)}$$

$NOMT$ عددی از سیستم است که به آن اضافه می شود و مقدار اولیه آن در این مقاله $NOMT = 101$ در نظر گرفته شده است. به منظور ارتباط بهتر بین مقدار فرکانس واقعی و پارامتر m ، در این الگوریتم مقدار f_c برابر ۱ هرتز ($\omega_c = 6.28 \text{ Rad}$) انتخاب می شود.

تعیین پارامترهای n : b_c اولین مقدار b که معادل فاصله گسستگی سیگنال است و برابر ۱ است اگر F_s تعداد نمونه برداری های هر سیگنال و سپس مقدار شروع برای n ، $n!$ و مقدار پایان آن ns باشد آنگاه:

$$n_i = \left(-\frac{F_s}{3}\right), \quad n_s = \left(\frac{3F_s}{3}\right)$$

گام سوم: برای هر مقدار پارامتر m و n موجک هار $\psi_{m,n}(t)$ محاسبه می شود معادلات (۲) (۴).

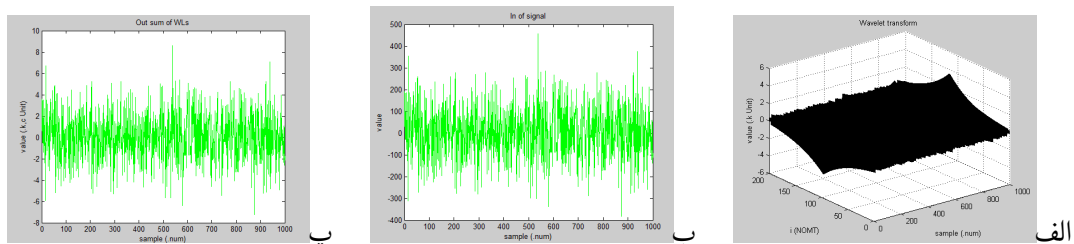
گام چهارم: ورودی و خروجی سیگنالها برای هر زیر سیستم m با استفاده از تبدیل موجک محاسبه می شود [۱] معادلات (۵) و $y(t) = \sum_m y_m(t)$ و $x(t) = \sum_m x_m(t)$ معادلات (۵).

گام پنجم: روش شناسایی کلاسیک برای هر زیر سیستم بکار می رود (بعنوان مثال کمترین مربعات) [۳، ۴]. گام ششم: نتایج اعتبارسنجی.

۴ نتایج عددی

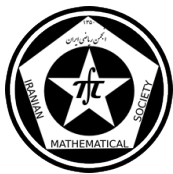
الگوریتم عددی که در بخش قبلی شرح داده شده برای شناسایی سیستم الکترو هیدرولیکی که راه اندازی آن با لرزش همراه است استفاده می شود. فهرست لرزش ها برای شبیه سازی یک زمین لرزه استفاده شده است و رفتار ساختمان را در طول زمین لرزه مورد آزمایش قرار می دهد، سیگنال خروجی مثل یک سیستم شبیه سازی شده زمین لرزه و سیگنال ورودی سیگنال برنامه نامیده می شود. نمودار شکل ۱ الف، تمام موجک های تولید شده در تبدیل را نشان می دهد که وابسته به نویز ورودی است و می تواند برای مقایسه روش در ورودی های متفاوت از آن استفاده کرد. در این نمودار چگالی نمودار مشخص کننده درصد واقعیت در تبدیل است و شکل موجک ها مشخص کننده درصد حدس سیستم است.

نمودارهای شکل ۱ ب و پ، در واقع رفتار سیستم هستند، این سیستم توسط یک نویز با ورودی تحریک سینوس مخدوش شده است با توجه به خطی نبودن، شباهت های این دو نمودار به معنای کارکرد دقیق تر روش است.

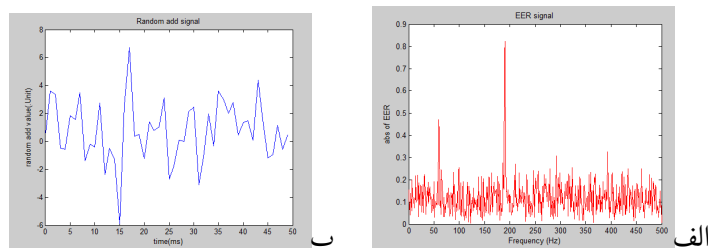


شکل ۱: نمودار تبدیل موجک ها و نمودار ورودی و خروجی سیستم

نمودار شکل ۲ الف، میزان خطای تشخیص داده شده با توجه به تبدیل فوریه و موجک است این خطا برای تشخیص نویز و تصحیح سیستم به کار می رود با توجه به اینکه نویز توسط تابع تصادفی تولید می شود پس می توان گفت که این نمودار



هم به تابع تصادفی وابسته است بنابراین این نمودار را می توان برای مقایسه بین موجک های تولید شده در شرایط تصادفی متفاوت استفاده کرد. نمودار شکل ۲ ب، سیگنال نویز در تبدیل فوریه است و می توان از آن برای مقایسه نویز تشخیص داده شده در شرایط تصادفی متفاوت استفاده کرد.



شکل ۲: نمودار خطای تشخیص داده شده و نمودار سیگنال نویز

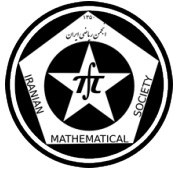
۵ نتیجه گیری

مقایسه حاضر روش جدیدی برای شناسایی سیستمهای پیچیده مطرح می کند. اهداف تکنیک مدل کردن این روش این است که بتواند نفوذ برخی از فرکانسهای مربوط با رفتار سیستم را افزایش دهد مقاله حاضر تأثیرات موجک و شرح یک الگوریتم عددی را که بتواند یک سیستم را شناسایی و از ابزارات ریاضی استفاده کند را مورد هدفش می باشد. این الگوریتم برای سیستم الکتروهایدرولیکی که در راه اندازی ها لرزش دارند مدل سازی شده است و همچنین در روش پیاده سازی آن از موجک هار استفاده شده است که از نظر عملکرد مشابه [۱] می باشد و اطلاعات حاصل از این پیاده سازی و تمام متغیرهای موقت در ماتریس های گسسته قرار داده می شوند و تمام تبدیل ها در قالب ماتریس انجام می شود.

مراجع

- [1] Elena Serban, *Numerical Algorithm fo non-linear system idenvtification based on wavelet transform*, Paper Journal(2007), 701-708.
- [2] D. T. L. Lee, and A. Yamamoto, *Wavelet analysis: Theory and application*, in Hewelett-packard Journal, 45(1994), No. 6, 44-54.
- [3] P. Eykoff, *System indentification*, Paramenterand state Estimation. Willey, London, 1974.
- [4] M. Tertisco, P. Stoica and T. Popescu, *Computer aided systems identification*, Ed. Tehnica, Bucuresti, 1987(in Romanian).

پست الکترونیکی: mohammadi.f6713@gmail.com
پست الکترونیکی: mehdiramezani.ir@gmail.com



بررسی خواص تجزیه مقدار تکین (SVD) با استفاده از پردازش تصویر

سپیده نیک‌نام
دانشگاه سیستان و بلوچستان

*مجتبی شکوه‌حاج‌عباسعلی‌خان
دانشگاه سیستان و بلوچستان

چکیده

در این مقاله به بررسی خواص ماتریس‌های به‌دست آمده از روش تجزیه مقدار تکین (Singular Value Decomposition) می‌پردازیم، در ابتدا ماتریس A متناظر با یک تصویر را به U ، Σ و V به صورت $A = U\Sigma V^T$ تبدیل کرده‌ایم و پس از آن ماتریس‌های به‌دست آمده از تجزیه مقدار تکین یک تصویر را با تصویر دیگری ترکیب می‌کنیم و نتایج این بررسی خود را بیان خواهیم کرد.

واژه‌های کلیدی: پردازش تصویر، تجزیه مقادیر تکین، ترکیب مقادیر تکین.

Mathematics Subject Classification [2010]: 13D45, 39B42

۱ تعاریف

تعریف ۱.۱. M_n را یک فضای ماتریس مختلط $n \times n$ در نظر می‌گیریم، بعضی از نویسندگان از نماد $\mathbb{C}^{n \times n}$ استفاده می‌کنند. اکنون فرض کنید که $A \in M_n$ و بردار غیر صفر $x \in \mathbb{C}^n$ بردار ویژه A باشد آنگاه λ را مقدار ویژه A می‌نامیم چنانچه

$$Ax = \lambda x$$

تعریف ۲.۱. فرض کنید $1 \leq p < \infty$ و x یک بردار باشد، آنگاه p -نرم به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

تعریف ۳.۱. فضای برداری $\mathbb{R}^{m \times n}$ به‌دست آمده از $R \in \mathbb{R}^{m \times n}$ و $S \in \mathbb{R}^{m \times n}$ را می‌توانیم با ضرب داخلی به صورت زیر تعریف کنیم

$$\langle R, S \rangle = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n r_{ij} s_{ij}. \quad (1)$$

برای فضای برداری $\mathbb{R}^{m \times n}$ نرم به‌دست آمده از ضرب داخلی را نرم فروبنیوس^۱ می‌نامیم و به صورت $\|\cdot\|_F$ نمایش می‌دهیم. بنابراین اگر $G \in \mathbb{R}^{m \times n}$ باشد آنگاه

$$\|G\|_F = \left(\langle G, G \rangle \right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n g_{ij}^2}.$$

*سخنران

^۱Frobenius norm

۲ SVD

تجزیه مقدار تکین مبنی بر دنباله ای از خواص قطری سازی معمولی است که می‌تواند برای ماتریس مستطیلی به کار برده شود. مقادیر تکین A مجذور ریشه های مقادیر ویژه $A^T A$ هستند و با $\sigma_1, \dots, \sigma_n$ نشان داده می‌شوند و به صورت نزولی مرتب می‌شوند این بدان معناست که مقادیر تکین A ، $\sigma_i = \sqrt{\lambda_i}$ برای $1 \leq i \leq n$ می‌باشد. تجزیه A به صورت $U \Sigma V^T$ تجزیه مقدار تکین می‌باشد که در آن U یک ماتریس متعامد $m \times m$ و V نیز یک ماتریس متعامد $n \times n$ و Σ یک ماتریس $m \times n$ است که عناصر خارج از قطر آن همگی صفر می‌باشد و عناصر روی قطر اصلی آن $\sigma_i = \sqrt{\lambda_i}$ برای $1 \leq i \leq n$ می‌باشد.

قضیه ۱.۲ (قضیه SVD). اگر A یک ماتریس $m \times n$ باشد، بنابراین A دارای تجزیه مقدار تکین می‌باشد.

□

اثبات. به [۱] مراجعه شود

۳ ترکیب مقادیر تکین

مقادیر تکین σ_i ها منحصر به فرد هستند، اما ماتریس های U و V منحصر به فرد نیستند منحصر به فرد بودن مقادیر تکین به طور طبیعی به این مهم معطوف می‌شود که SVD دارای خواص مهمی از ماتریس تصویر می‌باشد و می‌تواند برای شناخت تصویر استفاده شود. با این حال با آزمایش بر روی مبادله SVD از ۲ تصویر به نتیجه قابل توجهی دست می‌یابیم و نشان می‌دهد که بردار تکین (چپ و راست) برای بازسازی تصویر از تصویر اصلی بسیار مهم است. در آزمایش اول از تصویر دو فرد استفاده می‌کنیم و SVD ماتریس متناظر با دو تصویر را محاسبه می‌کنیم. برای مثال تصویر تکین اول از مجتبی (A_1) و تصویر دوم از امیر (A_2) را به U, V و Σ تجزیه می‌کنیم لذا خواهیم داشت:

$$A_1 = U_1 \Sigma_1 V_1$$

$$A_2 = U_2 \Sigma_2 V_2$$

ترکیب تصویر مجتبی و امیر در شکل ۱ نشان داده شده است



شکل ۴. $U_2 \times \Sigma_1 \times V_2$



شکل ۳. $U_2 \times \Sigma_2 \times V_2$



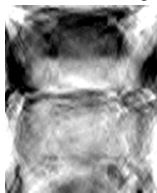
شکل ۲. $U_1 \times \Sigma_2 \times V_1$



شکل ۱. $U_1 \times \Sigma_1 \times V_1$



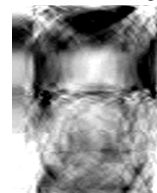
شکل ۸. $U_2 \times \Sigma_2 \times V_1$



شکل ۷. $U_2 \times \Sigma_1 \times V_1$

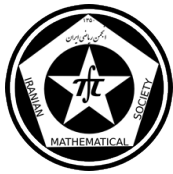


شکل ۶. $U_1 \times \Sigma_2 \times V_2$



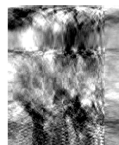
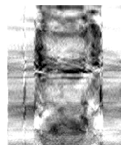
شکل ۵. $U_1 \times \Sigma_1 \times V_2$

شکل ۱: نتایج ترکیب مقادیر تکین تصویر مجتبی و امیر



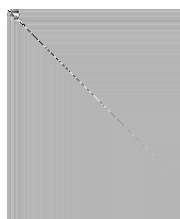
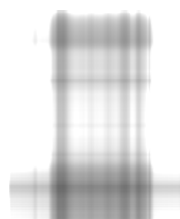
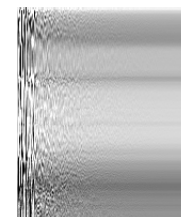
با بررسی تصاویر بازسازی شده از ترکیب تصویر مجتبی و امیر در شکل ۱ مشاهده می‌شود که ماتریس U و V از تجزیه مقادیر تکین حاوی اطلاعات اصلی تصویر می‌باشد به گونه‌ای که اگر U و V در ترکیب مربوط به یک تصویر باشد آن تصویر در تصویر بازسازی شده از ترکیب مقادیر تکین ظاهر می‌شود و بسته به تیره یا روشن تر بودن تصویر متناظر با Σ به دست آمده از تجزیه مقدار تکین که در آن ترکیب حضور دارد کمی تیره یا روشن می‌شود به قسمت ۲ و ۴ شکل ۱ نگاه کنید و وقتی که U و V از مقادیر تکین در ترکیب هر کدام مربوط تصویرای متفاوت باشد تصویر نامفهومی شبیه یک شبه ظاهر می‌شود به قسمت ۵، ۶، ۷ و ۸ شکل ۱ توجه کنید.

اکنون تصویر مجتبی (A_1) را با یک تصویر طبیعت (A_2) ترکیب می‌کنیم

شکل ۴. $U_2 \times \Sigma_1 \times V_2$ شکل ۳. $U_2 \times \Sigma_2 \times V_2$ شکل ۲. $U_1 \times \Sigma_2 \times V_1$ شکل ۱. $U_1 \times \Sigma_1 \times V_1$ شکل ۸. $U_2 \times \Sigma_2 \times V_1$ شکل ۷. $U_2 \times \Sigma_1 \times V_1$ شکل ۶. $U_1 \times \Sigma_2 \times V_2$ شکل ۵. $U_1 \times \Sigma_1 \times V_2$

شکل ۲: نتایج ترکیب مقادیر تکین تصویر مجتبی و پرند

نتایج به دست آمده از شکل ۲ مشابه نتایج شکل ۱ می‌باشد. در ادامه تصویر مجتبی را با استفاده از تجزیه مقدار تکین با یک تصویر سفید ترکیب می‌کنیم و تصاویر بازسازی شده از این ترکیب را در شکل ۳ نشان داده‌ایم.

شکل ۴. $U_2 \times \Sigma_1 \times V_2$ شکل ۲. $U_1 \times \Sigma_2 \times V_1$ شکل ۱. $U_1 \times \Sigma_1 \times V_1$ شکل ۸. $U_2 \times \Sigma_2 \times V_1$ شکل ۳. $U_2 \times \Sigma_2 \times V_2$ شکل ۷. $U_2 \times \Sigma_1 \times V_1$ شکل ۶. $U_1 \times \Sigma_2 \times V_2$ شکل ۵. $U_1 \times \Sigma_1 \times V_2$

شکل ۳: نتایج ترکیب مقادیر تکین تصویر مجتبی و تصویر سفید



نتایج مشاهده شده در شکل ۳ در نگاه اول متفاوت از شکل ۱ و ۲ می باشد ولی در واقع این گونه نیست و چون با یک تصویر سفید ترکیب شده است و طبق قیل اگر Σ_i از یک تصویر روشن تر به جای Σ_i یک تصویر تیره تر قرار می گرفت موجب روشن تر شدن تصویر تیره می شد و همین طور برعکس. در شکل ۳ نیز چون مقادیر تکین تصویر اول با مقادیر تکین یک تصویر کاملاً سفید ترکیب شده است در نتیجه تصویر را تا حد زیادی روشن کرده (در قسمت ۲ شکل ۳) که فقط قسمت هایی که خیلی تیره هستند هنوز مشخص است و در قسمت ۴ شکل ۳ تصویر به صورت قطری تیره تر شده است پس اگر در پردازش تصویر، مقادیر تکین به دست آمده از تجزیه ماتریس متناظر با یک تصویر را تغییر دهیم می توانیم تصویر را به صورت یکنواخت روشن یا تیره تر کنیم.

۴ نتایج اصلی

با بررسی نتایج به دست آمده از ترکیب مقادیر تکین به دست آمده از ماتریس متناظر ۲ تصویر نتیجه گرفتیم که:

- ۱- بردارهای تکین چپ و راست به دست آمده از تجزیه مقدار تکین حاوی اطلاعات اصلی یک ماتریس است.
- ۲- مقادیر تکین هر ماتریس در پردازش تصویر مانند وزن هستند که با تغییر آن ها کیفیت تصویر تغییر می کند اما شکل کلی تصویر ثابت است.
- ۳- با تغییر مقادیر تکین یک ماتریس متناظر با یک تصویر می توان به صورت یکنواخت آن تصویر را روشن یا تیره کرد همچنین در تصویرهای رنگی شدت رنگ خاصی را زیاد یا کم کرد.
- ۴- تعامد بردارهای تکین چپ و راست در شکل ۳ قسمت ۵ و ۷ به وضوح مشخص است.

مراجع

- [1] L. Cao, *Singular value decomposition applied to digital image processing*. Division of Computing Studies Arizona State University Poly-technic Campus, 1-15 (2009).
- [2] R.A. Horn, C.R. Johnson, *Topics in Matrix Analysis*. Cambridge University Press, Cambridge, 134-144 (1991).

پست الکترونیکی: mojtaba.shokoh@gmail.com
پست الکترونیکی: niknam.sepide@yahoo.com



بررسی روشهای ماتریسی در سیستم های پیشنهاددهنده

عفت گلپرابوکی*
دانشگاه قم

معصومه کياهی
دانشگاه قم

چکیده

با توجه به انبوه اطلاعات در شبکه جهانی اینترنت، وجود یک سیستم پیشنهاد دهنده که کالاها را به شکل خودکار و هوشمندانه به کاربران پیشنهاد دهد کاملاً ضروری به نظر می رسد. یکی از مشکلات چالش برانگیز در زمینه این نوع سیستم ها، تنگ بودن ماتریس کاربر-کالا است. روش های تجزیه ماتریسی ما را قادر می کنند که یک تقریب رتبه پایین به منظور مدیریت ماتریس های با اندازه های بزرگ محاسبه کنیم. در این مقاله بر آن هستیم تا چارچوبی جهت رفع مشکل یاد شده در سیستم های پیشنهاد دهنده براساس روش های تجزیه ماتریسی ارائه دهیم.

واژه های کلیدی: سیستم های پیشنهاد دهنده، پالایش مشارکتی، ماتریس کاربر-کالا، کاهش بعد

Mathematics Subject Classification [2010]: 15A23, 15A60, 15A18

۱ مقدمه

سیستم های پیشنهاد دهنده^۱ در اواسط ۱۹۹۰ به یکی از بحث های مهم تحقیقاتی تبدیل شدند [۱]. از مهم ترین وب سایتی که از سیستم های پیشنهاد دهنده استفاده می کند آمازون^۲ با بیش از صد میلیون کاربر است. انواع سیستم های پیشنهاد دهنده عبارتند از: سیستم پیشنهاد دهنده مبتنی بر پالایش مشارکتی^۳، سیستم پیشنهاد دهنده مبتنی بر محتوا^۴ و سیستم پیشنهاد دهنده ترکیبی^۵ که مهم ترین آن ها سیستم پیشنهاد دهنده مبتنی بر پالایش مشارکتی می باشد. فرض کنید m تعداد کاربران و n تعداد کالاهای^۶ موجود مانند کتاب، فیلم و رستوران و... می باشند، ماتریس کاربر-کالا^۷ R یک ماتریس $m \times n$ می باشد که درایه های این ماتریس امتیازی^۸ است که هر کاربر به کالای مورد نظر می دهد. امتیازها بین ۱ تا ۵ در نظر گرفته می شود، از آنجا که کاربرها به تعداد کمی از کالاها امتیاز می دهند R یک ماتریس تنگ^۹ است، الگوریتم های جبرخطی ابزار مناسبی برای کار با ماتریس های تنگ ارائه می دهند. در این مقاله ما ابتدا الگوریتم های روش پالایش مشارکتی را مورد بررسی قرار می دهیم، سپس برخی از انواع تجزیه های ماتریسی را معرفی می کنیم، در آخر روش پیشنهادی خود را بیان و پیاده سازی می کنیم.

* سخنران

^۱Recommender Systems

^۲<http://www.amazon.com>

^۳Collaborative Filtering

^۴Content based Filtering

^۵Hybrid Filtering

^۶Items

^۷Rate

^۸Sparse



۲ پالایش مشارکتی

الگوریتم های موجود در سیستم های مبتنی بر پالایش مشارکتی به دو دسته کلی تقسیم می شوند: الگوریتم های مبتنی بر حافظه^۹ که پیشنهادات را بر اساس نزدیکترین همسایگان ارائه می کنند و الگوریتم های مبتنی بر مدلسازی^{۱۰} که پیشنهادات را بر اساس مدلی که طبق پیشنهادات کاربران درست شده است، ارائه می دهد.

الگوریتم مبتنی بر حافظه: در این روش از الگوریتم k -نزدیک ترین همسایگی^{۱۱} استفاده می شود که شامل مراحل زیر است:

مرحله اول: در این مرحله شباهت پذیری بین کاربرهای u و v بر اساس یک معیار شباهت (کسینوس^{۱۲}، همبستگی پیرسون^{۱۳} و...) محاسبه می شود. ما از معیار شباهت همبستگی پیرسون استفاده کرده ایم که از فرمول زیر محاسبه می شود:

$$\mathbb{W}_{u,v} = \frac{\sum_{i \in I} (r_{u,i} - \bar{r}_u)(r_{v,i} - \bar{r}_v)}{\sqrt{\sum_{i \in I} (r_{u,i} - \bar{r}_u)^2} \sqrt{\sum_{i \in I} (r_{v,i} - \bar{r}_v)^2}} \quad (1)$$

که در فرمول بالا I مجموعه کالاهایی است که هر دو کاربر u و v امتیاز داده اند، $r_{u,i}$ و $r_{v,i}$ به ترتیب امتیاز کاربران u و v در کالای i و \bar{r}_u و \bar{r}_v میانگین امتیازهای این کاربرها می باشد.

مرحله دوم: در این مرحله به ازای تمامی کالاهای موجود در سیستم، معیاری برای پیشگویی^{۱۴} خانه های خالی ماتریس کاربر-کالا، محاسبه می شود.

$$\mathbb{P}_{v,i} = \bar{r}_v + \frac{\sum_{u \in U} (r_{u,i} - \bar{r}_u) \mathbb{W}_{v,u}}{\sum_{u \in U} |\mathbb{W}_{v,u}|} \quad (2)$$

که U مجموعه تمام همسایه های کاربر v است که به کالای i امتیاز داده اند.

مرحله سوم: در مرحله آخر، از بین تمامی کالاهای N کالایی که بیشترین مقدار پیشگویی را دارند به کاربر پیشنهاد داده می شوند[۳].

الگوریتم مبتنی بر مدل: الگوریتم های پالایش مشارکتی مبتنی بر مدل برای برطرف کردن کمبودهای الگوریتم های پالایش مشارکتی مبتنی بر حافظه مورد تحقیق قرار گرفته اند. به منظور کاهش زمان محاسبات و حافظه مورد نیاز از تجزیه های ماتریسی استفاده می کنیم.

۳ تجزیه های ماتریسی

فرض کنید $A \in R^{m \times n}$ دارای رتبه r باشد. در بحث تجزیه های ماتریسی، ماتریس داده شده A به صورت حاصلضرب $A = CF$ محاسبه می شود که $C \in R^{m \times p}$ و $F \in R^{p \times n}$ است. روش کاهش بعد^{۱۵} ساختارهای با بعد پایین را از داده های با بعد بالا استخراج می کند. در واقع تقریبی از A به صورت $A \simeq A_k = C_k F_k$ که $C_k \in R^{m \times k}$ و $F_k \in R^{k \times n}$ و $k \ll \text{rank}(A)$ ارائه میدهد. این حاصلضرب تقریب مناسبی برای فضاهای خالی ماتریس کاربر-کالا است. ماتریس

^۹Memory based Collaborative Filtering

^{۱۰}Model based Collaborative Filtering

^{۱۱}K Nearest Neighbor

^{۱۲}Cosine Similarity

^{۱۳}Pearson Correlation

^{۱۴}Prediction

^{۱۵}Dimensionality Reduction



C_k حاوی مفاهیمی در ارتباط با کاربرد و ماتریس F_k در ارتباط با کالاهاست. از بهترین انواع روش های تجزیه ماتریسی می توان به روش های تجزیه مقدار تکین^{۱۶} (SVD)، تجزیه نیمه گسسته^{۱۷} (SDD) و تجزیه نامنفی ماتریس^{۱۸} (NMF) اشاره کرد.

تجزیه مقدار تکین (SVD): ماتریس $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ با رتبه r را در نظر بگیرید. در این صورت A را می توان به سه ماتریس تجزیه کرد به طوری که $A = U \Sigma V^T$. U یک ماتریس متعامد^{۱۹} $m \times m$ ، V یک ماتریس متعامد $n \times n$ و Σ یک ماتریس قطری^{۲۰} $m \times n$ است.

هم چنین بهترین تقریب از رتبه حداکثر k ($k < r$) نسبت به نرم فروبنیوس^{۲۱} برای ماتریس A برابر $A_k = U_k \Sigma_k V_k^T$ می باشد [۲]. به عبارت دیگر:

$$\min_{\text{rank}(B) \leq k} \|A - B\| = \|A - A_k\| \quad (۳)$$

تجزیه نیمه گسسته (SDD): فرض کنید $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ باشد که $\text{rank}(A) = r$ و $k < r$. تجزیه SDD، ماتریس A را به صورت زیر تجزیه می کند:

$$A \simeq A_k = X_k D_k Y_k^T \quad (۴)$$

ماتریس های X_k و Y_k شامل اعداد مجموعه $\mathcal{S} = \{-1, 0, 1\}$ و D_k یک ماتریس قطری است [۴].

تجزیه نامنفی ماتریس (NMF): فرض کنید ماتریس $A \in \mathbb{R}_+^{m \times n}$ یک ماتریس نامنفی با رتبه r و $k < r$ داده شده است. NMF دو ماتریس نامنفی $W \in \mathbb{R}_+^{m \times k}$ و $H \in \mathbb{R}_+^{k \times n}$ را می یابد [۵]، به طوریکه

$$A \simeq A_k = W_k H_k \quad (۵)$$

۴ الگوریتم پیشنهادی و نتایج

در این مقاله پالایش مشارکتی مبتنی بر حافظه و پالایش مشارکتی مبتنی بر مدل را ترکیب می کنیم، به این شیوه که ابتدا با استفاده از روشهای کاهش بعد SVD، SDD و NMF تقریبی از ماتریس را به دست می آوریم سپس با بکارگیری روش مبتنی بر حافظه جاهای خالی ماتریس کاربر-کالا را پیشگویی می کنیم.

روش پیشنهادی را با استفاده از نرم افزار MATLAB روی داده های MovieLens به کار می بریم و نتایج را ارائه می دهیم. گام های روش پیشنهادی به شرح زیر می باشد:

گام اول: پر کردن و نرمال کردن ماتریس کاربر-کالا با کم کردن میانگین.

گام دوم: انجام روشهای کاهش بعد، (SVD، SDD، NMF)، روی ماتریس نرمال شده.

گام سوم: محاسبه شباهت پذیری بین کاربران u و v روی ماتریس کاهش بعد یافته با استفاده از فرمول (۱).

گام چهارم: محاسبه پیشگویی با استفاده از فرمول (۲).

گام پنجم: اضافه کردن میانگین به ماتریس پیشگویی و پیشنهاد دادن به کاربر [۶].

^{۱۶} Singular Value Decomposition

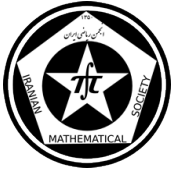
^{۱۷} Semi-Discrete Decomposition

^{۱۸} Nonnegative Matrix Factorization

^{۱۹} Orthogonal

^{۲۰} Diagonal

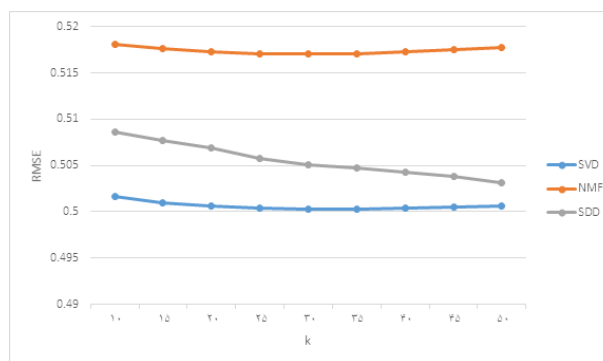
^{۲۱} Frobenius norm



مهمترین معیار ارزیابی سیستم های پیشنهاد دهنده خطای جذر میانگین مربعات^{۲۲} ($RMSE$) می باشد، که به صورت زیر تعریف می شود:

$$RMSE = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N (r_i - \hat{r}_i)^2}{N}} \quad (6)$$

r_i مقدار واقعی، \hat{r}_i مقدار پیشگویی و N تعداد پیشگویی ها است.
در ادامه نمودار مقایسه روشهای فوق را قرار داده ایم.



شکل ۱: مقایسه روش های مختلف کاهش بعد به ازای مقادیرهای مختلف k

تجزیه SVD با وجود اینکه بهترین تقریب کننده را به ما می دهد ولی به فضای ذخیره سازی بیشتری نیاز دارد، ولی تجزیه SDD به دلیل وجود درایه های $\{-1, 0, 1\}$ فضای ذخیره سازی کمتری احتیاج دارد. هم چنین در تجزیه SVD و SDD ممکن است درایه های منفی هم داشته باشیم ولی در تجزیه NMF همه عناصر ماتریس های تجزیه شده مثبت هستند.

مراجع

- [1] G. Adomavicius and et.al, *Toward the Next Generation of Recommender Systems: A Survey of the State-of-the-Art and Possible Extensions*, IEEE Transactions on Knowledge and Data Engineering, vol. 17, 2005, pages 734-749.
- [2] G. Golub and C. V. Loan, *Matrix Computation*, Johns-Hopkins, Baltimore, Soconded, 1989.
- [3] J. Herlocker, J. Konstan, A. Borchers, J. Riedl, *An Algorithmic Framework for Performing Collaborative Filtering*, In Proceedings of ACM SIGIR '99. ACM Press, (1999), pp. 230-237.
- [4] T. G. Kolda, *A Semi-Discrete Decomposition*, University of Maryland, (1981), pp. 43-53.
- [5] D. D. Lee and H. S. Seung, *Algorithms for Non-Negative Matrix Factorization*, Advance in Neural Information Processing Systems, 13, (2001), pp. 556-562.
- [6] S. Spiegel, *A Hybrid Approach to Recommender Systems based on Matrix Factorization*, Ph.D. Thesis, Technical University Berlin, 2010.

پست الکترونیکی: g.raboky@qom.ac.ir
پست الکترونیکی: raheabrisham416@gmail.com

^{۲۲}Root Mean Square Error



بررسی فرمول‌های مشتق‌گیری پس‌روی بلوکی پیوسته و تحلیل ناحیه پایداری آن‌ها

حجت‌الله سعیدی*

فارغ‌التحصیل کارشناسی ارشد ریاضی کاربردی دانشگاه شهرکرد

محمدشفیع دهاقین

راضیه استکی

استادیار گروه ریاضی کاربردی دانشگاه شهرکرد

دانشجوی کارشناسی ارشد ریاضی کاربردی دانشگاه شهرکرد

چکیده

فرمول‌های مشتق‌گیری پس‌روی بلوکی پیوسته برای حل دستگاه معادلات دیفرانسیل به کار می‌روند. این فرمول‌ها بازه جواب را به چندین قسمت یا بلوک تقسیم می‌کنند و با توجه به این که به طور همزمان در همه بلوک‌ها جواب معادله دیفرانسیل حساب می‌شود، دارای سرعت همگرایی بالایی هستند. در این مقاله فرمول‌های مرتبه ۴ و ۶ و ناحیه پایداری آن‌ها را مورد بررسی و تحلیل قرار دادیم و نتایج بدست آمده نشان می‌دهد که این فرمول‌ها دارای ناحیه پایداری مطلق زیاد و روش مناسبی برای حل دستگاه معادلات سخت هستند.

واژه‌های کلیدی: دستگاه معادلات دیفرانسیل سخت، فرمول مشتق‌گیری پس‌روی بلوکی پیوسته، ناحیه پایداری مطلق

۱ مقدمه

فرمول مشتق‌گیری پس‌رو (BDF)^۱ ابتدا بوسیله دانشمندانی مانند کورتیس^۲ و هریش فلدر^۳ برای حل سیستم‌های سخت استفاده شد [۳].

روش‌های بلوکی اولین بار بوسیله مایلن [۶] معرفی شدند. بعدها این روش‌ها بوسیله دانشمندان توسعه پیدا کردند [۵، ۲، ۷]. فرمول مشتق‌گیری پس‌روی بلوکی پیوسته ($CBBDF$)^۴ یک روش پس‌رو ضمنی برای حل دستگاه معادلات دیفرانسیل است و با توجه به این که این روش در هر مرحله به طور همزمان چندین جواب عددی برای معادله دیفرانسیل به دست می‌دهد، نسبت به روش‌های مرسوم که برای این‌گونه دستگاه معادلات به کار گرفته می‌شوند از نظر دقت و همگرایی کارایی بهتری دارند [۱].

طبق این روش جواب کلی معادله دیفرانسیل

$$y' = f(t, y), \quad t \in (t_0, T_n), \quad y(t_0) = y_0. \quad (1)$$

به صورت

$$\sum_{j=0}^k \alpha_j y_{n+j} = h \beta_k f_{n+k}, \quad (2)$$

* سخنران

^۱Backward differentiation formula

^۲Curtis

^۳Hirschfelder

^۴Continuous block backward differentiation formula



است که در آن h طول گام، $\alpha_k = 1$ و $k, j = 1, 2, \dots$ و β_k ثابت های مجهولی هستند و به گونه ای تعیین می شوند که فرمول (۲) از مرتبه k باشد.

در این مقاله $CBBDF$ مرتبه های ۴ و ۶ را برای حل معادله دیفرانسیل (۱) مورد بررسی قرار می دهیم و فرمول های مربوط به هر مرتبه را بدست می آوریم و ناحیه های پایداری مربوط را رسم می کنیم.

تعریف ۱.۱. یک روش بلوک به بلوک روشی است برای محاسبه دنباله بردارهای Y_0, Y_1, \dots با فرض این که ν تعداد نقاط در هر بلوک و

$$Y_\omega = (y_{n+1}, \dots, y_{n+\nu})^T, \quad n = m\nu, \quad m = 0, 1, \dots$$

و $F_\omega = (f_{n+1}, \dots, f_{n+\nu})^T$ باشد، آنگاه یک روش l بلوکی ν نقطه ای برای حل معادله دیفرانسیل (۱) به صورت زیر تعریف می شود:

$$Y_\omega = \sum_{i=1}^l A^{(i)} Y_{\omega-i} + h \sum_{i=0}^l B^{(i)} F_{\omega-i}, \quad (3)$$

که در آن $A^{(i)}, B^{(i)}, i = 0, \dots, l$ ماتریس های $\nu \times \nu$ هستند [۴].

طبق تعریف فوق یک روش بلوکی برای بدست آوردن جواب معادله دیفرانسیل از بیشتر از یک نقطه استفاده می کند. به این ترتیب روش دارای دقت بالاتری بوده و این یک برتری نسبت به سایر روش هاست. تعداد نقاط درون هر بلوک بستگی به ساختار روش بلوکی دارد و به کاربردن این روش سرعت همگرایی بالاتری را در پی دارد.

۲ محاسبه فرمول ها

در این قسمت، هدف بدست آوردن یک روش بلوکی به شکل معادله (۲) است. برای رسیدن به چنین شکلی یک جواب تقریبی برای $y(t)$ به صورت:

$$Y(t) = \sum_{j=0}^{q+r-1} m_j \phi_j(t), \quad t \in [t_0, T_n], \quad (4)$$

در نظر می گیریم.

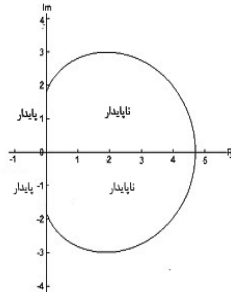
در اینجا m_j ضرایب ناشناخته و $\phi_j(t)$ چند جمله ای های پایه از درجه $q+r-1$ هستند که در آن q تعداد نقاط درون یابی و r تعداد نقاط هم مکانی طوری تعریف می شوند که: $q = k, r = 1$. عدد صحیح $k \geq 1$ تعداد گام های روش است. با تعریف $\phi_j(t) = t^j$ یک روش بلوکی مرتبه k را به صورت:

$$Y(t) = \frac{1}{h} \left(\sum_{j=0}^{q-1} \alpha_j(t) y_{n+j} + h \beta_k(t) f_{n+k} \right), \quad (5)$$

است که در آن ضرایب پیوسته هستند.

اما یک روش اضافی دیگر با محاسبه مشتق مرتبه اول (۵) در نقاط $t = t_{n+i}, i = 1, \dots, q-1$ به صورت زیر دست می آید:

$$Y'(t) = \frac{1}{h} \left(\sum_{j=0}^{q-1} \alpha'_j(t) y_{n+j} + h \beta'_k(t) f_{n+k} \right), \quad (6)$$



شکل ۱: ناحیه پایداری روش ۴ گامی

با ترکیب فرمول های (۶)، (۵) می توان روش های بلوکی از مرتبه های مختلف تولید کرد. بنابراین خواهیم داشت:

$k=4$:

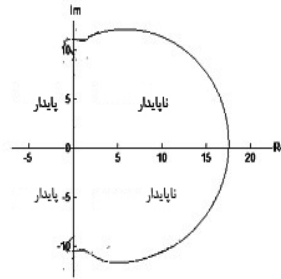
$$\begin{aligned} f_{n+1} &= \frac{1}{50h} [2hf_{n+4} - 13y_n - 39y_{n+1} + 69y_{n+2} - 17y_{n+3}], \\ f_{n+2} &= \frac{1}{75h} [-3hf_{n+4} + 7y_n - 54y_{n+1} + 9y_{n+2} + 38y_{n+3}], \\ f_{n+3} &= \frac{1}{150h} [18hf_{n+4} - 17y_n + 99y_{n+1} - 27y_{n+2} + 197y_{n+3}], \\ y_{n+4} &= \frac{1}{25} [12hf_{n+4} - 3y_n + 16y_{n+1} - 36y_{n+2} + 48y_{n+3}]. \end{aligned}$$

$k=6$:

$$\begin{aligned} f_{n+1} &= \frac{1}{1764h} [24hf_{n+6} - 298y_n - 2235y_{n+1} + 4320y_{n+2} - 2780y_{n+3} + 1290y_{n+4} - 297y_{n+5}], \\ f_{n+2} &= \frac{1}{2205h} [-15hf_{n+6} + 76y_n - 900y_{n+1} - 1230y_{n+2} + 2840y_{n+3} - 990y_{n+4} + 204y_{n+5}], \\ f_{n+3} &= \frac{1}{8820h} [60hf_{n+6} - 157y_n + 1395y_{n+1} - 6840y_{n+2} + 4000y_{n+3} + 6165y_{n+4} - 963y_{n+5}], \\ f_{n+4} &= \frac{1}{8820h} [-120hf_{n+6} + 167y_n - 1320y_{n+1} + 4860y_{n+2} - 12560y_{n+3} + 6045y_{n+4} + 2808y_{n+5}], \\ f_{n+5} &= \frac{1}{8820h} [600hf_{n+6} - 394y_n + 2925y_{n+1} - 9600y_{n+2} + 18700y_{n+3} - 26550y_{n+4} + 14919y_{n+5}], \\ y_{n+6} &= \frac{1}{74} [60hf_{n+6} - 10y_n + 72y_{n+1} - 225y_{n+2} + 400y_{n+3} - 450y_{n+4} + 360y_{n+5}]. \end{aligned} \quad (7)$$

۳ نتیجه گیری

همانطور که از شکل های ۱ و ۲ پیداست، فرمول های مشتق گیری پسروی بلوکی پیوسته مرتبه ۴ و ۶ دارای ناحیه پایداری مطلق زیادی هستند و همچنین ناحیه پایداری روش بلوکی ۴ گامی بیرون از ناحیه کران دار قرار می گیرد. بنابراین برای $k=4$ روش



شکل ۲: ناحیه پایداری روش ۶ گامی

$-A$ پایدار است، اما برای $k = ۶$ روش $-A$ پایدار نیست.

اما روش برای $k = ۶$ ، $-L$ پایدار است، زیرا

$$\max |R(z)| \leq ۱, \quad z \in R, \quad \lim_{z \rightarrow \infty} R(z) = ۰.$$

همچنین با توجه به ناحیه پایداری کم دستگاه معادلات دیفرانسیل سخت^۵ این فرمول ها روش مناسبی برای حل آن هاست.

مراجع

- [1] O. A. Akinfenwa , S. N. Jator, On the stability of continuous block backward differentiation formula for solving stiff ordinary differential equations, Journal of Modern Method in Numerical Mathematics, 2(2012) 50-58.
- [2] J.E. Bond, J.R. Cash, A Block method for the numerical integration of stiff systems of ODEs, BIT 19 (1979) 429-447.
- [3] C.F. Curtis, J.D. Hirschfelder, Integration of stiff equations, Proceedings of the National Academy of Sciences. 38 (1952) 235-243.
- [4] S.O. Fatunla, Block methods for second order IVPs, International Journal of Computer and Mathematics, 41 (1991) 55-63.
- [5] J.D. Lambert, Numerical Methods For Ordinary Differential Systems, The Initial Value Problem, Wiley, Chichester, New York, 1991.
- [6] W.E. Milne, Numerical Solution of Differential Equations, John Wiley and Sons, 1953.
- [7] D. Voss, S. Abbas, Block predictor-corrector schemes for the parallel solution of ODEs, Computers Mathematics with Applications, 33 (1997) 65-72.

پست الکترونیکی: aboueshaghi@gmail.com

پست الکترونیکی: raziyeesteki@gmail.com

پست الکترونیکی: msh-dahaghin@sci.sku.ac.ir

^۵Stiff systems



پایبندی میانگین مربعات در روش های تقریب عددی نیمه ضمنی برای معادلات دیفرانسیل تصادفی

بهشته پورا احمد*
دانشگاه شاهد

بهنام زریاک
دانشگاه شاهد

چکیده

معادله دیفرانسیل تصادفی، مدل زمان پیوسته مناسبی در مسایل فیزیک، مالی و زیست شناسی است. در این مقاله تقریب عددی نیمه ضمنی روی روش های اویلر و ملشتین بر معادله ضربی بلاک-شولز و شرط پایبندی و حوزه ی آن روش ها مورد نقد و بررسی قرار گرفته شده است. در حوزه پایبندی روش ها اطمینان داریم که همگرایی میانگین مربعات آنها قطعی است و تقریب های عددی موجودند.

واژه های کلیدی: معادله دیفرانسیل تصادفی-معادله بلاک شولز-روش اویلر-روش ملشتین-همگرایی میانگین مربعات
Mathematics Subject Classification [2010]: 60H10 , 65U05 , 65C20 , 65L20

۱ مقدمه

معادلات دیفرانسیل تصادفی، معادلات دیفرانسیلی هستند که بر فرآیندهای تصادفی زمان پیوسته ایجاد می شوند و منظور از حل یک معادله دیفرانسیل تصادفی تولید اعداد تصادفی از این فرآیند تصادفی است. اما حل تحلیلی تنها برای معادلات بلاک-شولز امکان پذیر است و از همین رو این معادله را معادله آزمون نامند. شکل کلی یک معادله دیفرانسیل تصادفی بصورت زیر است

$$dX_t = a(t, X_t)dt + b(t, X_t)dW_t \quad X_0 = x_0 \quad (1)$$

که در آن W_t فرآیند وینر دارای میانگین صفر و واریانس $\sigma^2 t$ است. فرآیند تصادفی X_t جواب این معادله است که باید تولید شود و برای این منظور ابتدا W_t را شبیه سازی می کنیم. معادله آزمون بلاک شولز بصورت زیر است

$$dX_t = aX_t dt + bX_t dW_t \quad (2)$$

که دارای جواب تحلیلی زیر است (برای اثبات به [۱] مراجعه کنید)

$$X_t = X_0 \exp\left[\left(a - \frac{b^2}{2}\right)t + bW(t)\right] \quad (3)$$

اما برای معادله آزمون روش های تقریب عددی اویلر و ملشتین معروف هستند [۲] در این مقاله تقریب عددی نیمه ضمنی بر معادله آزمون توضیح داده می شود و شرایط پایبندی و حوزه آن معرفی می گردد. این پایبندی را پایبندی میانگین مربعات نامیده می شود که اولین بار توسط سایتو و میتسویی [۳] توضیح داده شده است. در بخش دوم روش نیمه ضمنی توضیح داده می شود و در بخش بعدی شرط پایبندی و یافتن حوزه تعریف روش ها شرح داده می شود و سپس با ذکر یک مثال عددی و نتیجه گیری مقاله خاتمه می یابد.

* سخنران



۲ تقریب عددی نیمه ضمنی

اگر بسط تیلور تصادفی را در نظر بگیریم می توان تقریب عددی اویلر را داشته باشیم

$$Y_{n+1} = Y_n + a_n h + b_n \Delta W_n \quad (۴)$$

که در آن $Y_n = Y_{t_n}$ و $a_n = a(X_n)$, $b_n = b(x_n)$ تقریب عددی در زمان t_n و $t_{n+1} - t_n = h$ فاصله مساوی زمانی و $\Delta W_n = W_{t_{n+1}} - W_{t_n}$ نمو فرآیند وینر در زمان t_n است. اگر بسط تیلور تصادفی را در یک جمله بالاتر در نظر بگیریم تقریب عددی ملشتین بدست می آید یعنی

$$Y_{n+1} = Y_n + a_n h + b_n \Delta W_n + \frac{1}{2} (bb')_n [(\Delta W_n)^2 - h] \quad (۵)$$

این تقریب های عددی رامی توان برای معادله آزمون بلاک- شولز نوشت یعنی

$$Y_{n+1} = Y_n + a Y_n h + b Y_n \Delta W_n \quad (۶)$$

$$Y_{n+1} = Y_n + a Y_n h + b Y_n \Delta W_n + \frac{1}{2} (b^2)_n [(\Delta W_n)^2 - h] \quad (۷)$$

که در آن $a_n = a Y_n$ و $b_n = b Y_n$ می باشد.

اکنون ترکیبی محدب روی ضریب h می سازیم تا تقریب عددی نیمه ضمنی بدست آید یعنی

$$Y_{n+1} = Y_n + a [\alpha Y_{n+1} + (1 - \alpha) Y_n] h + b Y_n \Delta W_n \quad (۸)$$

$$Y_{n+1} = Y_n + a [\alpha Y_{n+1} + (1 - \alpha) Y_n] h + b Y_n \Delta W_n + \frac{1}{2} b^2 Y_n [(\Delta W_n)^2 - h] \quad (۹)$$

در حالتیکه $\alpha = 0$ همان تقریب عددی اویلر و ملشتین حاصل می شود و در حالتیکه $\alpha = \frac{1}{2}$ تقریب عددی اویلر و ملشتین دوزنقه ای به ترتیب بصورت زیر بدست می آید

$$Y_{n+1} = \frac{1 + \frac{ah}{2} + b \Delta W_n}{1 - \frac{ah}{2}} Y_n \quad (۱۰)$$

$$Y_{n+1} = \frac{1 + \frac{ah}{2} + b \Delta W_n + \frac{1}{2} b^2 [(\Delta W_n)^2 - h]}{1 - \frac{ah}{2}} Y_n \quad (۱۱)$$

و در حالتیکه $\alpha = 1$ تقریب عددی اویلر و ملشتین پسر و به ترتیب به صورت زیر حاصل می شود

$$Y_{n+1} = \frac{1 + b \Delta W_n}{1 - ah} Y_n \quad (۱۲)$$

$$Y_{n+1} = \frac{1 + b \Delta W_n + \frac{1}{2} b^2 [(\Delta W_n)^2 - h]}{1 - ah} Y_n \quad (۱۳)$$

۳ پایبندی میانگین مربعات

تعریف ۱.۳. اگر جواب معادله دیفرانسیل تصادفی X_t در شرط $\lim_{n \rightarrow \infty} \|X_t\| = 0$ که در آن $\|X\| = (E|X|^2)$ است، صدق نماید آنگاه فرآیند تصادفی X_t را پایدار میانگین مربعات نامند.



تعریف ۲.۳. دنباله ای از تقریب های عددی $\{Y_n\}$ را پایبندی میانگین مربعات نامند هرگاه $\lim_{n \rightarrow \infty} \|Y_n\| = 0$ در آن $\|Y_n\| = (E|Y_n|^2)^{\frac{1}{2}}$

قضیه ۳.۳. شرط پایبندی میانگین مربعات معادله آزمون بلاک - شولز برابر با $0 < 2a + b^2$ است.

اثبات. جواب تحلیلی ۴ را به توان دو رسانده و امید ریاضی می گیریم

$$\begin{aligned} X_t^2 &= \exp[(2a - b^2)t + 2bW_t] \\ E[X_t^2] &= \exp[(2a - b^2)t] E[e^{2bW_t}] \\ E[e^{2bW_t}] &= M_{W_t}(2b) = \exp\left(\frac{-2b^2}{2t}\right) = \exp\left(\frac{-2b^2}{t}\right) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0. \end{aligned}$$

که از آن $0 < 2a - b^2$ حاصل می شود.

تعریف ۴.۳. \bar{Y}_n متناظر با Y_n را اینگونه تعریف می کنیم $\bar{Y}_n = E\|Y_n\|^2$ و خواهیم داشت

$$\bar{Y}_{n+1} = R(\bar{h}, k)\bar{Y}_n \quad (14)$$

که در آن $\bar{h} = ah, k = \frac{-b^2}{a}$

تعریف ۵.۳. $R(\bar{h}, k)$ تابع پایبندی روش حل عددی گفته می شود. واضح است که $\lim_{n \rightarrow \infty} \bar{Y}_n = 0$ اگر و فقط اگر $|R(\bar{h}, k)| < 1$

تعریف ۶.۳. ناحیه پایبندی روش تقریب عددی بصورت زیر تعریف می شود

$$R = \{(\bar{h}, k) : |R(\bar{h}, k)| < 1\}$$

قضیه ۷.۳. تابع پایبندی روش عددی اویلر، اویلر دوزنقه ای و اویلر پسر و به ترتیب به صورت زیر می باشد

$$R(\bar{h}, k) = |1 + \bar{h}|^2 + |k\bar{h}| \quad (15)$$

$$R(\bar{h}, k) = \frac{|1 + \frac{1}{2}\bar{h}|^2 + |k\bar{h}|}{|1 - \frac{1}{2}\bar{h}|^2} \quad (16)$$

$$R(\bar{h}, k) = \frac{1 + |k\bar{h}|}{|1 - \bar{h}|} \quad (17)$$

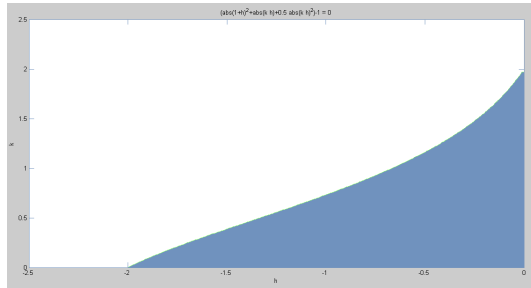
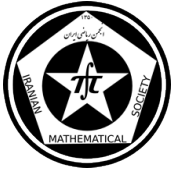
قضیه ۸.۳. تابع پایبندی تقریب عددی روش ملشتین، ملشتین دوزنقه ای و و ملشتین پسر و به صورت زیر می باشد

$$R(\bar{h}, k) = |1 + \bar{h}|^2 + |k\bar{h}| + \frac{1}{4}|k\bar{h}|^2 \quad (18)$$

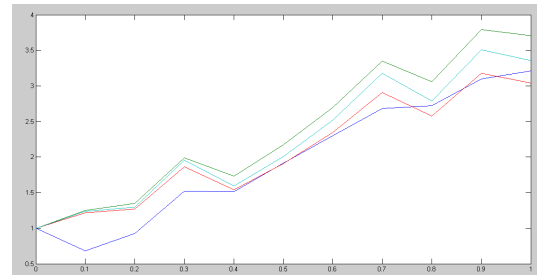
$$R(\bar{h}, k) = \frac{|1 + \frac{1}{2}\bar{h}|^2 + |k\bar{h}| + \frac{1}{4}|k\bar{h}|^2}{|1 - \frac{1}{2}\bar{h}|^2} \quad (19)$$

$$R(\bar{h}, k) = \frac{|1 + k\bar{h}| + \frac{1}{4}|k\bar{h}|^2}{|1 - \bar{h}|^2} \quad (20)$$

مثال ۹.۳. بفرض $X_t = X_t dt + 1.5X_t dW_t$ و $h = 0.1$ در شکل (آ) نمودار روشهای ملشتین، ملشتین دوزنقه ای و پسر و و جواب دقیق دیده میشود و در جدول (۱) خطهای این روش ها و در شکل (ب) ناحیه پایبندی فرمول (۱۸) نشان داده شده است.



(ب) ناحیه پایبندی ملشتین



(آ) نمودار ملشتین بلاک-شولز

جدول ۱: جدول خطاهای روش ملشتین

انواع خطا	روش ملشتین	روش دوزنقه ای	روش پسرو
خطای قدر مطلق	۰/۴۵۰۶	۰/۱۹۱۴	۰/۲۸۵۵
خطای میانگین	۲۳/۶۲۳۸	۲۳/۹۱۹۳	۲۳/۷۷۳۹

۴ نتیجه گیری

این مقاله برداشتی آزاد از مقاله میتسوئی [۳] بوده است و نتایج و کارهای وی مورد بررسی قرار گرفته است. در این مقاله روش تقریب عددی نیمه ضمنی، دوزنقه ای و پسرو برای دو روش مهم و اساسی اویلر و ملشتین نشان داده شده است. برای این تقریب عددی تابع و ناحیه پایبندی در حالت خاص معادله آزمون بلاک شولز ارائه شده است. از جمله کارهایی که می توان در ادامه انجام داد تعریف پایبندی مجانبی، T -پایبندی و پایبندی نمایی است و ارتباط این نوع پایبندی ها با پایبندی میانگین مربعات است.

سپاس گزاری

مولفان این مقاله بخاطر فرصت کار روی این موضوع از دانشگاه شاهد تشکر و قدر دانی می نمایند.

مراجع

- [1] B.Oksendal , *Stochastic Differential Equations* , Springer 1999
- [2] P.E.Kloeden , E.Platten , H.Schurtz, *Numerical Solution of SDE Through Computer Experiments* , Springer, 1994
- [3] Y.Saito, T.Mitsu, *Stability Analysis Schemes for Stochastic Differential Equations* , *Siam.J.Numer . Anal*, Vol 33 N 6.pp 2254, December 1996

پست الکترونیکی: b.porahmad@yahoo.com
پست الکترونیکی: zarpak@shahed.ac.ir



تقریب‌گیری با استفاده از انتگرال‌گیری عددی از دو عملگر شبه-درونیاب در یک فضای همسان بر روی یک شبکه‌ی چهار سویه

محمد احمدی بلوطکی
دانشگاه آزاد اسلامی واحد نجف آباد

فرهاد خاکسار حقانی دهکردی
دانشگاه آزاد اسلامی واحد شهرکرد

پریسا احمدی بلوطکی*
دانشگاه آزاد اسلامی واحد ایذه

چکیده

نظریه‌ی شبه-درونیابی در مطالعه‌ی نظریه‌ی تقریب‌گیری و کاربردهای آن بسیار مهم است. در این مقاله ما یک طرح شبه-درونیابی بر اساس توابع پایه‌ی بی-اسپلاین در فضای اسپلاین درجه چهارم را به کار می‌بریم و سپس همان بی-اسپلاین را برای طرح شبه-درونیابی چندسطحی در همان فضا مورد استفاده قرار می‌دهیم و با استفاده از انتگرال‌گیری عددی انتگرال‌های دو-بعدی هر دو عملگر را با هم مقایسه می‌کنیم. نتایج عددی نشان می‌دهند که عملگر شبه-درونیابی دو-سطحی دارای مرتبه‌ی تقریب‌گیری بهتری نسبت به عملگر شبه-درونیابی اصلی در همان فضا است.

واژه‌های کلیدی: عملگرهای شبه-درونیابی، فضای اسپلاین درجه چهارم، شبکه‌ی چهار سویه، انتگرال‌گیری عددی
Mathematics Subject Classification [2010]: 13D45, 39B42

۱ مقدمه

عملگرهای شبه-درونیابی برای حل عددی معادلات دیفرانسیل، تقریب‌گیری داده‌های پراکنده، انتگرال‌گیری عددی و به طور گسترده در مکانیک، محاسبات علمی و مهندسی با موفقیت به کار رفته‌اند، برای مشاهده‌ی برخی نتایج به دست آمده به مراجع [۱, ۲] مراجعه کنید. هدف این مقاله ارائه‌ی برخی نتایج اخیر به دست آمده در مورد فضای اسپلاین درجه چهارم است. در این مقاله دو نوع عملگر شبه-درونیابی در این فضا مورد بررسی قرار می‌گیرد و با استفاده از انتگرال‌گیری عددی دو-بعدی برای این دو عملگر نشان می‌دهیم که عملگر معرفی شده‌ی دو-سطحی در این فضا مرتبه‌ی تقریب بهتری از عملگر اصلی در این فضا به ما می‌دهد. هر دو عملگر شبه-درونیابی در فضای اسپلاین درجه چهارم روی مثلث‌بندی هم‌شکل نوع-دو تعریف می‌شوند و همچنین هر دو عملگر برای انتگرال‌گیری عددی دو-بعدی به کار برده می‌شوند. فرض کنید $D = [0, 1] \times [0, 1]$ و فرض کنید $(\Delta_{mn}^{(2)})$ یک افراز شبکه‌ی هم‌شکل در دامنه‌ی D با یک شبکه‌ی چهار سویه با استفاده از خطوط شبکه‌ی زیر تعریف شده است:

$$mx - i = 0, ny - i = 0, ny - mx - i = 0, ny + mx - i = 0$$

که $i = \dots, -1, 0, 1, \dots$ و m, n اعداد صحیح داده شده هستند. این خطوط شبکه نه تنها یک مثلث‌بندی در دامنه‌ی D را ارائه می‌دهند بلکه این افراز را به صفحه‌ی \mathbb{R}^2 نیز بسط می‌دهند. همچنین فرض کنید $S_{\mathcal{P}}^4$ فضای تمام توابع در $C^2(D)$ است که تحدیدهای این توابع نسبت به هر خانه‌ی مثلثی از افراز Δ در دامنه‌ی D ، چندجمله‌ای‌هایی حداکثر از درجه ۴ هستند. برای یادآوری فضای اسپلاین درجه چهارم و ویژگی‌های این فضا به مرجع [۳] مراجعه کنید. اثبات شده که تمام اسپلاین‌های پشتیبانی شده‌ی موضعی تنها می‌توانند یک زیرفضای حقیقی از $S_{\mathcal{P}}^4(\Delta_{mn}^{(2)})$ را تولید کنند. در واقع، زیر فضای حقیقی $S_{\mathcal{P}}^{4,3}(\Delta_{mn}^{(2)})$ را تولید

* سخنران



می‌کنند [۴]. زیرا دارای تقارن خوبی است و با توجه به تقارن هزینه محاسبات را در استفاده‌ی عملی تا حد زیادی کاهش می‌دهد.

اسپلاین $s \in S_{\varphi}^{2,3}(\Delta_{mn}^{(2)})$ یک چندجمله‌ای قطعه‌ای حداکثر از درجه ۴ با دو شرط پیوسته زیر است:

$$(1) \quad s \in C^2 \text{ بر روی بخش‌های مثلثی (مستطیلی) شبکه زیر است:}$$

$$x - i = 0, \quad y - i = 0,$$

$$(2) \quad s \in C^3 \text{ بر روی بخش‌های قطری شبکه زیر است:}$$

$$x - y - i = 0, \quad x + y - i = 0,$$

که $i = \dots, -1, 0, 1, \dots$

فرض کنید توابع پایه B -اسپلاین در دامنه‌ی D به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$B_{ij}(x, y) = B(mx - i, ny - j), \quad i, j = \dots, -1, 0, 1, \dots$$

که $(x_i, y_j) = (\frac{i}{m}, \frac{j}{n})$ مرکز محمل $B_{ij}(x, y)$ است. همچنین فرض کنید $B, B(x, y)$ -اسپلاین پشتیبانی شده روی محمل G با مرکز $(0, 0)$ روی خانه‌های $1, \dots, 7$ است که در شکل ۱ نشان داده شده است. اکنون، عملگرهای تغییرات نزولی اسپلاین دومتغیره را به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$Wf : C(D) \mapsto S_{\varphi}^{2,3}(\Delta_{mn}^{(2)})$$

که به وسیله‌ی رابطه‌ی زیر تعریف می‌شود:

$$Wf(x, y) = \sum_{i=-1}^{m+1} \sum_{j=-1}^{n+1} f(x_i, y_j) B_{ij}(x, y).$$

حال، عملگر شبه-درونیابی دو-سطحی را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$W_R f(x, y) = W_{\overline{\Gamma}} f(x, y) + W_{\Gamma} \varepsilon(x, y).$$

که

$$W_{\overline{\Gamma}} f(x, y) = \sum_{i=-1}^{\frac{m}{2}+1} \sum_{j=-1}^{\frac{n}{2}+1} f(\overline{x}_i, \overline{y}_j) \overline{B}_{ij}(x, y),$$

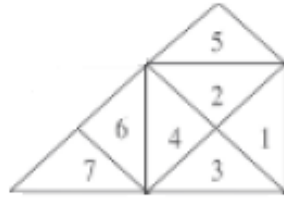
و

$$W_{\Gamma} \varepsilon(x, y) = \sum_{i=-1}^{m+1} \sum_{j=-1}^{n+1} \varepsilon(x_i, y_j) B_{ij}(x, y).$$

قضیه ۱.۱. برای تمام $(x, y) \in D$ ، اگر $f(x, y) \in \{1, x, y\}$ ، در این صورت داریم

$$W_R f(x, y) = f(x, y).$$

به عبارت دیگر، $W_R f(x, y)$ در ویژگی تابع چندجمله‌ای خطی صدق می‌کند.

شکل ۱: محمل $B(x, y)$

اثبات. اگر $f(x, y) \in \{1, x, y\}$ ، در این صورت با استفاده از مرجع [۴] نتیجه می‌شود که

$$W_{\overline{\Gamma}} f(x, y) = f(x, y)$$

و با توجه به آن که $\varepsilon(x, y) = f(x, y) - W_{\overline{\Gamma}} f(x, y)$ در این صورت $\varepsilon(x, y) = 0$ و $W_{\overline{\Gamma}} \varepsilon(x, y) = 0$. بنابراین،

$$W_R f(x, y) = W_{\overline{\Gamma}} f(x, y) = f(x, y).$$

□

قضیه ۲.۱. اگر $f \in C^k(D)$ ، $k = 1, 2$ ، در این صورت $W_R f(x, y)$ حداقل دارای یک برآورد خطا به صورت زیر است:

$$\|f - W_R f\|_D = O(\delta_{mn}^k), \quad k = 1, 2.$$

اثبات. اگر $f \in C^k(D)$ ، $k = 1, 2$ ، در این صورت داریم

$$\begin{aligned} \|f(x, y) - W_R f(x, y)\|_D &= \|f(x, y) - W_{\overline{\Gamma}} f(x, y) - W_{\overline{\Gamma}} \varepsilon(x, y)\|_D \\ &= \|f(x, y) - W_{\overline{\Gamma}} f(x, y) - (W_{\overline{\Gamma}} f(x, y) - W_{\overline{\Gamma}} f(x, y))\|_D \\ &\leq (1 + \|W_{\overline{\Gamma}}\|) \|f - W_{\overline{\Gamma}} f\|_D = O(\delta_{mn}^k), \quad k = 1, 2. \end{aligned}$$

□

که $\|W_{\overline{\Gamma}}\|$ یک نرم از عملگر شبه-درونیابی $W_{\overline{\Gamma}}$ است.

۲ نتایج اصلی

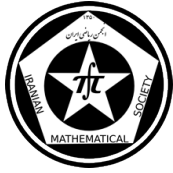
ارزیابی عددی انتگرال دو-بعدی برای عملگر دو-سطحی را به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$\bar{I}_{mn}(f) = \sum_{i=-1}^{\frac{m}{2}+1} \sum_{j=-1}^{\frac{n}{2}+1} f(\bar{x}_i, \bar{y}_j) \bar{\rho}_{ij} + \sum_{i=-1}^{m+1} \sum_{j=-1}^{n+1} \varepsilon(x_i, y_j) \rho_{ij}$$

که

$$\bar{\rho}_{ij} = \int \int_D \bar{B}_{ij}(x, y) dx dy, \quad \rho_{ij} = \int \int_D B_{ij}(x, y) dx dy.$$

به دلیل تقارن اسپلاین $B_{ij}(x, y)$ و تعریف انتگرال معین، نتایج زیر به آسانی به دست می‌آیند: برای $m, n \geq 4$ ، $i = -1, 0, 1, 2$ ، $j = -1, \dots, i$ ، ρ_{ij} را می‌توان محاسبه کرد، برای مشاهدهی مقادیر ρ_{ij} و همچنین جزئیات بیشتر به مرجع [۵] مراجعه کنید.



قضیه ۱.۲. فرض کنید $f \in C(D)$. در این صورت هنگامی که $m, n \rightarrow \infty$ آنگاه $I(f)$ به $\bar{I}_{mn}(f)$ میل می‌کند. به علاوه، اگر $f \in C^k(D)$, $k = 1, 2$ ، در این صورت با توجه به برآورد خطای عملگر شبه-درونیابی $W_R(f)$ ، فرمول انتگرال‌گیری $\bar{I}_{mn}(f)$ دارای حداقل برآورد خطای زیر است:

$$|E_{mn}(f)| = |I(f) - \bar{I}_{mn}(f)| = O(\delta_{mn}^k), \quad k = 1, 2.$$

حال، تابع آزمون را به صورت زیر معرفی می‌کنیم:

$$f(x, y) = |x^3 + y^3|,$$

در این صورت می‌توانیم ارزیابی انتگرالی تابع آزمون را به صورت زیر در نظر بگیریم:

$$I(f) = \int_0^1 \int_0^1 |x^3 + y^3| dx dy.$$

اکنون، برآورد خطای ماکزیمم تابع آزمون را برای هر دو عملگر تعریف شده در فضای درجه چهارم، در جدول ۱ نشان می‌دهیم. با توجه به آزمایشات عددی، عملگر دو-سطحی $W_R f$ دارای مرتبه تقریب بهتری در مقایسه با عملگر اصلی $W f$ است. جهت مشاهده فرمول انتگرال‌گیری $I_{mn}(f)$ به مرجع [۵] مراجعه کنید.

نتایج نشان می‌دهند که مرتبه تقریب‌گیری برای $\bar{I}_{mn}(f)$ حداقل ۳ و حال آن‌که مرتبه تقریب‌گیری برای $I_{mn}(f)$ حداقل ۱ است.

جدول ۱: برآورد خطاها برای $I(f)$.

(m, n)	$(8, 6)$	$(10, 10)$	$(20, 20)$	$(40, 30)$
$I_{mn}(f)$	$2.17(-2)$	$1.00(-2)$	$2.50(-3)$	$8.68(-4)$
$\bar{I}_{mn}(f)$	$9.63(-4)$	$5.43(-4)$	$1.93(-4)$	$9.63(-5)$

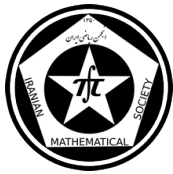
مراجع

- [1] P. Sablonniere, *Recent progress on univariate and multivariate polynomial and spline quasi-interpolants*, in: M.G. de Bruijn, D.H. Mache, J. Szabados (Eds.), *Trends and Applications in Constructive Approximation*, ISNM, vol. 151, Birkhauser, pp. 229-245, 2005.
- [2] M.-J. Lai, L.L. Schumaker, *Spline functions on triangulations*, Cambridge University Press, Cambridge, 2007.
- [3] C.K. Chui, T.X. He, and R.H. Wang, *The C^x quartic spline space on a four-directional mesh*, *Approx, Theor, Appl*, 3 (1987), 32-36.
- [4] R.H. Wang, C.J. Li, *Bivariate quartic spline spaces and quasi-interpolation operators*, *J. Comput, Appl, Math*, 190 (2006), 325-338.
- [5] R.H. Wang, X.L. Zhang, *Numerical integration based on bivariate quartic quasi-interpolation operators*, *Numer, Math, -J. Chin, Univ*, 16 (2007), 226-232.

پست الکترونیکی: parisaahmadi.ac1886@yahoo.com

پست الکترونیکی: haghani1351@yahoo.com

پست الکترونیکی: ahmadi1991.ac@gmail.com



جواب های چند جمله ای تیلور معادلات انتگرال ترکیبی ولترا-فردهلم غیرخطی

محمد امین آزموده دست *

دانشگاه سیستان و بلوچستان، دانشکده ریاضی، گروه ریاضی

رسول کبیری

باشگاه پژوهشگران جوان و نخبگان، واحد علی آباد کتول، دانشگاه آزاد اسلامی، علی آباد کتول، ایران

مجیب الرحمن آزموده دست

دانشگاه فرهنگیان، پردیس شهید مطهری زاهدان، گروه ریاضی

چکیده

در این مقاله روش کانوال^۱ و لیو^۲ که اولین بار برای حل معادلات انتگرال فردهلم^۳ بکار رفته است. را جهت حل معادلات انتگرال ولترا^۴-فردهلم غیر خطی بکار می بریم. سپس این روش توسط سزر^۵ برای معادلات ولترا و همچنین برای معادلات دیفرانسیل مرتبه دوم به کار گرفته شد. روش کانوال و لیو که همان روش کالوکیشن با استفاده از سری تیلور است را با مثال هایی شرح خواهیم داد تا ویژگی ها و چگونگی بدست آوردن جواب معادلات انتگرال ولترا-فردهلم نشان داده شوند.

واژه های کلیدی: روش هم محلی، سری تیلور، معادلات انتگرال ولترا-فردهلم غیر خطی

۱ مقدمه

در این تحقیق ما به حل معادلات انتگرال ولترا-فردهلم به فرم

$$y(x) = f(x) + \lambda_1 \int_a^x k_1(x, t)[y(t)]^p dt + \lambda_2 \int_a^b k_2(x, t)[y(t)]^q dt, \quad (1)$$

که p یک عدد صحیح مثبت است و $q = 1$. $f(x)$ ، $k_1(x, t)$ و $k_2(x, t)$ توابعی دارای مشتق n ام در بازه $a \leq x, t \leq b$ و λ_1 و λ_2 اعداد ثابتی هستند. با استفاده از روش کانوال و لیو می پردازیم. روش کانوال و لیو یک تکنیک جبری برای حل معادلات انتگرال است [۱]. در این روش ابتدا n بار از طرفین معادله انتگرال مشتق می گیریم. سپس سری های تیلور را جایگزین توابع مجهول نتیجه شده در معادله می کنیم. نهایتاً به یک سیستم جبری غیرخطی تبدیل

* سخنران

^۱Kanwal

^۲Liu

^۳Fredholm

^۴Volterra

^۵Sezer



می شود که می توان آن را با یک تقریب مناسب بدست آورد [۳]. در واقع روش کانوال و لیو استفاده از روش کالوکیشن به کمک سری تیلور است. جواب عددی معادله انتگرال در روش کانوال و لیو به صورت زیر است:

$$y(x) = \sum_{n=0}^N \frac{1}{n!} y^{(n)}(c)(x-c)^n, \quad a \leq x, c \leq b. \quad (2)$$

که چندجمله ای تیلور از درجه N در $x=c$ است و $y^{(n)}(c)$, $(n=0, 1, \dots, N)$ ضرایبی هستند که باید تعیین شوند.

۲ روش حل معادلات انتگرال ترکیبی ولترا-فردهلم غیرخطی

برای بدست آوردن جواب معادله (۱) در فرم بسته (۲) ابتدا از (۱) بار نسبت به x مشتق می گیریم:

$$y^n(x) = f^n(x) + \lambda_1 \frac{d^n}{dx^n} \int_a^x k_1(x,t)[y(t)]^p dt + \lambda_2 \int_a^b \frac{\partial^n k_2(x,t)}{\partial x^n} y(t) dt, \quad (3)$$

با فرض $Y(t) = [y(t)]^p$ و بکارگیری قاعده لایب نیتز و سپس جایگزینی بسط تیلور $y(t)$ و $Y(t)$ در $t=c$ در معادله (۳) داریم:

$$y^{(n)}(c) = f^{(n)}(c) + \lambda_1 \left\{ \sum_{m=0}^{n-1} (H_{nm} + T_{nm}) Y^{(m)}(c) + \sum_{m=n}^N T_{nm} Y^{(m)}(c) \right\} + \lambda_2 \sum_{m=0}^N k_{nm} y^{(m)}(c). \quad (4)$$

که برای $n=1, 2, 3, \dots$ و $n=1, 2, \dots, n-1$ و $m=0, 1, \dots, n-1$ $(n > m)$: [۲]:

$$H_{nm} = \sum_{i=0}^{n-m-1} \binom{n-i-1}{m} h_i^{(n-m-i-1)}(c), \quad h_i(x) = \frac{\partial^i k(x,t)}{\partial x^i} \Big|_{x=t}. \quad (5)$$

برای $n \leq m$, $H_{nm} = 0$ و برای $n, m=0, 1, 2, \dots$ داریم:

$$T_{nm} = \frac{1}{m!} \int_a^c \frac{\partial^{(n)} k_1(x,t)}{\partial x^n} (t-c)^m dt, \quad (6)$$

$$K_{nm} = \frac{1}{m!} \int_a^b \frac{\partial^{(n)} k_2(x,t)}{\partial x^n} (t-c)^m dt. \quad (7)$$

مقدار کوانتومی $Y^{(m)}(c)$ که $(m=0, 1, 2, \dots)$ در معادله (۴) می تواند از رابطه جایگشتی زیر بدست آید:

$$Y^{(m)}(c) = [y^{(p)}(c)]^m = \sum_{t_1+t_2+\dots+t_p=m} \frac{m!}{t_1!t_2!\dots t_p!} y^{(t_1)}(c)y^{(t_2)}(c)\dots y^{(t_p)}(c). \quad (8)$$

دستگاه معادلات غیرخطی (۴) می تواند به فرم ماتریسی زیر نیز نوشته شود:



$$\begin{aligned}
 & \begin{bmatrix} 1 - \lambda_1 k_{00} & -\lambda_2 k_{01} & -\lambda_2 k_{02} & \dots & -\lambda_2 k_{0N} \\ -\lambda_2 k_{10} & 1 - \lambda_2 k_{11} & -\lambda_2 k_{12} & \dots & -\lambda_2 k_{1N} \\ -\lambda_2 k_{20} & -\lambda_2 k_{21} & 1 - \lambda_2 k_{22} & \dots & -\lambda_2 k_{2N} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\lambda_2 k_{N0} & -\lambda_2 k_{N1} & -\lambda_2 k_{N2} & \dots & 1 - \lambda_2 k_{NN} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y^{(0)}(c) \\ y^{(1)}(c) \\ y^{(2)}(c) \\ \vdots \\ y^{(N)}(c) \end{bmatrix} \\
 - & \begin{bmatrix} \lambda_1 T_{00} & \lambda_1 T_{01} & \lambda_1 T_{02} & \dots & \lambda_1 T_{0N} \\ \lambda_1 (H_{10} + T_{10}) & \lambda_1 T_{11} & \lambda_1 T_{12} & \dots & \lambda_1 T_{1N} \\ \lambda_1 (H_{20} + T_{20}) & \lambda_1 (H_{21} + T_{21}) & \lambda_1 T_{22} & \dots & \lambda_1 T_{2N} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_1 (H_{N0} + T_{N0}) & \lambda_1 (H_{N1} + T_{N1}) & \lambda_1 (H_{N2} + T_{N2}) & \dots & \lambda_1 T_{NN} \end{bmatrix} \\
 \times & \begin{bmatrix} Y^{(0)}(c) \\ Y^{(1)}(c) \\ Y^{(2)}(c) \\ \vdots \\ Y^{(N)}(c) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f^{(0)}(c) \\ f^{(1)}(c) \\ f^{(2)}(c) \\ \vdots \\ f^{(N)}(c) \end{bmatrix}. \tag{9}
 \end{aligned}$$

که یک دستگاه جبری با $N + 1$ معادله غیر خطی و $N + 1$ مجهول $y_c^{(0)}, y_c^{(1)}, \dots, y_c^{(N)}$ است و می توان آن را با روش های استاندارد عددی حل نمود. در نهایت ضرایب مجهول تیلور یعنی $y_c^{(n)}$, ($n = 0, 1, \dots, N$) تعیین می شوند و در (۲) جایگزین می شوند.

۳ نتیجه عددی

مثال ۱.۳. معادله انتگرال

$$y(x) = -\frac{1}{12}x^6 + x^4 - 32x^3 - \frac{384}{\gamma} + \int_0^x x^4 t^3 [y(t)]^2 dt + \int_0^2 (\delta x^3 + 3t^2)y(t) dt.$$

را در نظر می گیریم که دارای جواب $y(x) = x^4$ است. بنابراین داریم: بطوری که:

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 1, a = -1, c = 0, b = 1, N = 4.$$

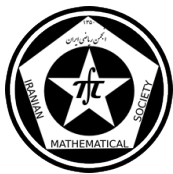
$$f(x) = -\frac{1}{30}x^6 + \frac{1}{3}x^4 - x^2 + \frac{5}{3}x - \frac{5}{4}, \quad k_1(x, t) = x - t, \quad k_2(x, t) = x + t.$$

ابتدا ضرایب H_{nm} را از (۵) و ضرایب T_{nm} را از (۶) و ضرایب K_{nm} را از (۷) بدست می آوریم که عبارتند از: $H_{nm} = 0$ برای $n, m = 0, 1, 2, 3, 4$ و چون $a = c$ بنابراین برای $n, m = 0, 1, 2, 3, 4$ هم چنین داریم:

$$K_{00} = 8, \quad K_{01} = 12, \quad K_{02} = \frac{48}{5}, \quad K_{03} = \frac{16}{3}, \quad K_{04} = \frac{16}{\gamma}, \quad K_{30} = 6, \quad K_{31} = 60, \quad K_{32} = 40, \quad K_{33} = 20, \quad K_{34} = 8.$$

سپس مقادیر مشتق تابع $f(x)$ در $x = 0$ را بدست می آوریم که عبارتند از:

$$f^{(0)}(0) = -\frac{384}{\gamma}, \quad f^{(1)}(0) = 0, \quad f^{(2)}(0) = 0, \quad f^{(3)}(0) = -192, \quad f^{(4)}(0) = 24.$$



برای $N = 4$ ، معادله ماتریسی (۹) به صورت زیر است:

$$\begin{bmatrix} -7 & -12 & -\frac{48}{5} & -\frac{16}{3} & -\frac{16}{7} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -60 & -60 & -40 & -19 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y^{(0)}(0) \\ y^{(1)}(0) \\ y^{(2)}(0) \\ y^{(3)}(0) \\ y^{(4)}(0) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y^{(0)}(0) \\ Y^{(1)}(0) \\ Y^{(2)}(0) \\ Y^{(3)}(0) \\ Y^{(4)}(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 384 \\ -7 \\ 0 \\ -192 \\ 24 \end{bmatrix} \quad (10)$$

با بکارگیری رابطه (۸) و همچنین با حل دستگاه خطی (۱۰) ضرایب چند جمله ای تیلور را به صورت زیر داریم:

$$y^{(0)}(0) = 0, y^{(1)}(0) = 0, y^{(2)}(0) = 0, y^{(3)}(0) = 0, y^{(4)}(0) = 24.$$

بنابراین طبق (۲) جواب $y(x) = x^4$ است، که جوابی دقیق است.

نتیجه گیری

حل تحلیلی معادلات انتگرال غیر خطی معمولاً مشکل است. در بسیاری موارد نیاز است جواب های تقریبی بدست آوریم. برای این منظور روش حاضر پیشنهاد می شود. همانطور که در مثال ها مشاهده کردیم روش کالوکیشن تیلور، روشی قوی برای حل معادلات انتگرال غیر خطی می باشد. یک مزیت قابل توجه از این روش اینست که جواب به صورت سری تیلور برشی بیان می شود. بعلاوه بعد از محاسبه ضرایب سری، جواب $y(x)$ می تواند به راحتی با محاسبات کم بدست آید. برای بدست آوردن بهترین جواب تقریبی معادله، ما باید جملات بیشتری از بسط تیلور توابع را در نظر بگیریم. یعنی N باید به اندازه کافی بزرگ انتخاب شود. همچنین اگر $a = c$ انتخاب شود، ضرایب $T_{nm} = 0$ می گردند در نتیجه حجم محاسبات کمتر می شود.

مراجع

- [1] R. P. Kanwal, K.C. Liu, *A Taylor expansion approach for solving integral equations*, Int. J. Math. Educ. Sci. Technol. 20 (3) 411, 1989
- [2] M. Sezer, *Taylor polynomial solution of Volterra integral equations*, Int. J. Math. Educ. Sci. Technol. 25 (5) 625, 1994.
- [3] S. Yalsinbas, *Taylor polynomial solution of nonlinear Volterra-Fredholm integral equations*, Appl. Math. Comput. 127, 195-206, 2002.

پست الکترونیکی: aminda928@gmail.com

پست الکترونیکی: rasoldimsar65@yahoo.com

پست الکترونیکی: aminda928@gmail.com



حل سیستم دینامیکی لورنز با استفاده از روش تقریبی گراند-والد

محمد حسین درخشان
دانشگاه شهرکردمهدي قاسمي
دانشگاه شهرکردرضا خوش سیر
دانشگاه شهرکردفرشاد همتي*
دانشگاه شهرکرد

چکیده

در این مقاله، یک سیستم دینامیکی شامل مشتق کسری ریمان لیوویل را معرفی و جوابهای تقریبی این سیستم را با استفاده از روش عددی گراند-والد تقریب می‌زنیم. پایداری این سیستم را نیز مورد بررسی قرار می‌دهیم و در پایان، کارایی روش ارائه شده را به کمک حل عددی بررسی می‌کنیم.

واژه‌های کلیدی: مشتق کسری ریمان لیوویل، پایداری، سیستم دینامیکی لورنز

Mathematics Subject Classification [2010]: 65K10, 26A33, 49K15

۱ مقدمه

سیستم های دینامیکی کاربرد فراوانی در رشته های مهندسی و علوم پایه دارد که یکی از کاربردهای این مسئله را در زمینه هوافضا و مکانیک می‌توان بیان کرد ([۱]، [۲]). در این بخش برخی از مفاهیم و تعاریفی که در بخش های بعدی مورد استفاده قرار می‌گیرد را بیان می‌کنیم. مشتق کسری ریمان لیوویل برای $\lambda(t)$ به صورت زیر بیان می‌شود:

$${}_t D_{t_f}^{\alpha_1} \lambda(t) = \frac{(-1)^n}{\Gamma(n - \alpha_1)} \frac{d^n}{dt^n} \int_t^{t_f} (\tau - t)^{n - \alpha_1 - 1} \lambda(\tau) d\tau. \quad (1)$$

و همچنین می‌توان مشتق کسری ریمان لیوویل را با استفاده از تفاضلات پسرو و پیشرو به صورت رابطه (۲) و (۳) بیان کرد که این روابط منجر به تعریف مشتق کسری گراند-والد^۱ می‌شود. مشتق کسری چپ و راست گراند-والد برای $x(t)$ به ترتیب به صورت زیر بیان می‌شوند ([۳]، [۴]):

$${}_a D_t^\alpha x(t) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{\sum_{j=0}^{\lfloor \frac{t-a}{h} \rfloor} (-1)^j \binom{\alpha}{j} y(t - jh)}{h^\alpha}, \quad (2)$$

$${}_t D_b^\alpha x(t) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{\sum_{j=0}^{\lfloor \frac{b-t}{h} \rfloor} (-1)^j \binom{\alpha}{j} y(t + jh)}{h^\alpha}, \quad (3)$$

که α یک عدد حقیقی در بازه $[0, 1]$ است. حال بازه $[a, b]$ را به $N + 1$ زیر بازه مساوی که طول بازه $\frac{b-a}{N}$ است تقسیم می‌کنیم و مقادیر روابط (۲) و (۳) را در i گره محاسبه می‌کنیم که منجر به روابط زیر می‌شود:

*فرشاد همتي
Grand-Wald¹



$${}_a D_t^\alpha y(t_i) = \frac{1}{h^\alpha} \sum_{j=0}^i \zeta_j^\alpha y_{i-j}, i = 0, 1, \dots, N, \quad (4)$$

$${}_a D_t^\alpha y(t_i) = \frac{1}{h^\alpha} \sum_{j=0}^{N-i} \zeta_j^\alpha y_{i+j}, i = N, N-1, \dots, 0, \quad (5)$$

که

$$\zeta_j^\alpha = (-1)^j \binom{\alpha}{j}.$$

۲ سیستم دینامیکی لورنز

در این بخش، نمونه ای از سیستم های دینامیکی متناهی البعد مطرح می شود، بیشتر این سیستم ها پر آوازه بوده و به عنوان ستارگان سیستم های دینامیکی نامیده می شود که یکی از این سیستم ها، سیستم دینامیکی لورنز می باشد و این سیستم یکی از نمونه های آشوب است و سیستم لورنز برای مدل کردن حرکت دینامیکی یک سیال جوی استفاده شده است و معادلات دینامیکی این سیستم به صورت زیر نوشته می شود:

$$\begin{aligned} {}_0 D_t^\alpha x(t) &= a(y - x), \\ {}_0 D_t^\alpha y(t) &= cx - xz - y, \\ {}_0 D_t^\alpha z(t) &= xy - bz. \end{aligned} \quad (6)$$

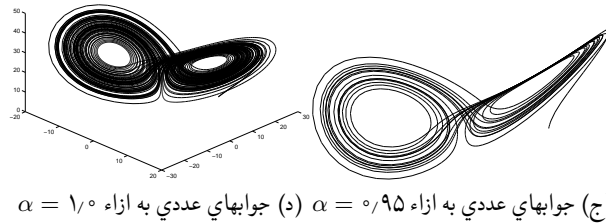
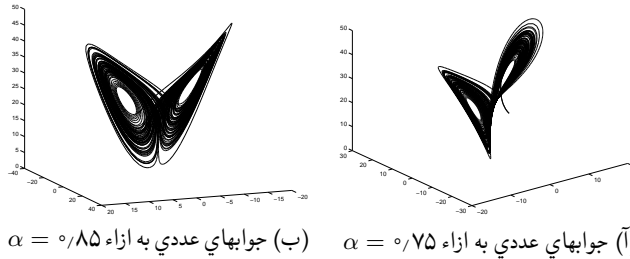
که در این سیستم $a = 10$, $b = \frac{8}{3}$, $c = 28$ در نظر گرفته شده است. حال اگر روابط (۴) و (۵) را در دستگاه معادلات (۶) جایگذاری کنیم به یک دستگاه معادلات غیر خطی می رسیم که به ازاء مقادیر مختلف α مجموعه جوابها در شکلهای ۱ رسم شده است. در شکل ۱ مدار $(x(t), y(t), z(t))$ را ملاحظه می کنید که به طور عددی با استفاده از روش تقریبی گراند-والد محاسبه شده اند که این مدارها دارای رفتار آشوبناک هستند به این معنی که در آن ها حساسیت نسبت به شرط اولیه مشاهده می شود همچنین این مجموعه به عنوان فرکتالی از بعدی به طور اکید بین ۱ و ۲ اندازه گیری شده است. اگر محدود α را خارج از بازه مورد نظر انتخاب کنیم یعنی $\alpha > 1$ در این صورت سیستم دینامیکی مورد بحث در این مقاله ناپایدار است که مجموعه جوابهای این سیستم در حالت ناپایداری در شکل ۲ نشان داده شده است.

۳ پایداری سیستم دینامیکی

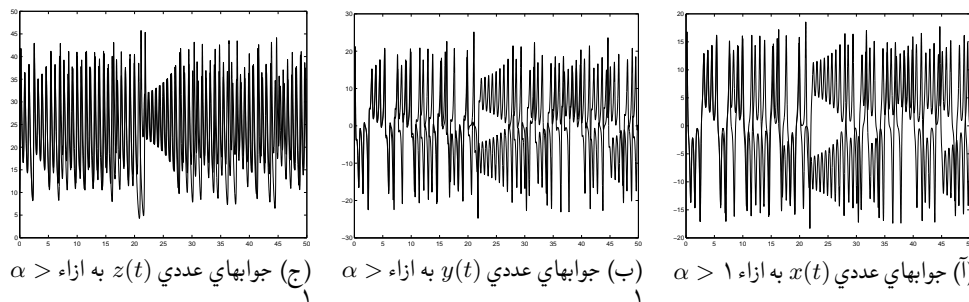
در این بخش با بیان قضایای پایداری یک سیستم دینامیکی شامل مشتق کسری ریمان لیوویل را بیان می کنیم. این قضایا کاربرد مهمی در در پایداری و ناپایداری یک سیستم را دارد به عبارت دیگر شرایطی را روی یک سیستم در نظر می گیرد که با استفاده از این شرایط یک سیستم پایدار یا به طور مجانبی پایدار می شود از طرفی یکی از کاربردهای قضیه نگاشت انقباضی باناخ را در روند اثبات این قضایا استفاده می کنیم. در این بخش ما معادله دیفرانسیل سیستم کسری زیر را در نظر می گیریم:

$${}_a D_t^\alpha x(t) = Ax(t); \quad 0 < \alpha < 1, \quad (7)$$

با شرایط اولیه $x(t) = x_{k-1}$, $k = 1, 2$ که $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ یک ماتریس غیر صفر می باشد.



شکل ۱: جوابهای عددی سیستم دینامیکی لورنز به ازاء α های مختلف



شکل ۲: جوابهای عددی سیستم دینامیکی لورنز به ازاء $\alpha > 1$

قضیه ۱.۳. سیستم دینامیکی (۷) با شرایط اولیه، به طور مجانبی پایدار است اگر و تنها اگر $|\arg(\text{spec}(A))| > \frac{\alpha\pi}{4}$ و همچنین این سیستم پایدار است اگر و تنها به طور مجانبی پایدار باشد و مقادیر ویژه ماتریس A در $|\arg(\text{spec}(A))| = \frac{\alpha\pi}{4}$ صدق کند.

حال سیستم دینامیکی (۷) را به صورت زیر در نظر بگیرید:

$${}_a D_t^\alpha x(t) = Ax(t) + f(t, x(t)); \quad {}_a D_t^{\alpha-k} x(t) = x_{k-1}, \quad k = 1, 2, \quad 0 < \alpha < 1, \quad (8)$$

که $x \in \mathbb{R}^{n \times n}$ و A یک ماتریس غیر صفر و تابع $f(t, x(t))$ یک تابع پیوسته و $f(t, 0) = 0$ می باشد.

قضیه ۲.۳. فرض کنید ماتریس A به گونه ای باشد به طوری که $|\text{spec}(A)| \neq 0$ و $|\arg(\text{spec}(A))| \geq \frac{\alpha\pi}{4}$ و مقادیر ویژه ماتریس A در $|\arg(\text{spec}(A))| = \frac{\alpha\pi}{4}$ صدق کند. در این صورت اگر تابع مثبت $g(t)$ وجود داشته باشد به طوری که:

$$\int_a^\infty g(t) < \infty, \quad \|f(t, x(t))\| \leq g(t) \|x(t)\|,$$



آنگاه جواب های صفر (۸) پایدار می باشد.

قضیه ۳.۳. فرض کنید ماتریس A به گونه ای باشد به طوری که $0 \neq \text{spec}(A)$ ، $|\arg(\text{spec}(A))| > \frac{\alpha\pi}{4}$ و $1 < \frac{1}{\|A\|} + \alpha$ باشد. در این صورت اگر تابع $g(t)$ ای وجود داشته باشد به طوری که:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\|f(t, x(t))\|}{\|x(t)\|} = 0, \quad t \in [a, \infty)$$

آنگاه جواب های صفر (۸) به طور مجانبی پایدار می باشد.

مثال ۴.۳. سیستم دینامیکی چن^۳ را به ازاء مقادیر مختلف α به صورت زیر بیان می کنیم:

$$\begin{aligned} D_t^\alpha x_1(t) &= 35(x_1(t) - x_2(t)) \\ D_t^{\alpha_2} x_2(t) &= -7x_1(t) - x_1(t)x_2(t) \\ D_t^\alpha x_3(t) &= x_1(t)x_2(t) - 3x_3(t) \end{aligned} \quad (9)$$

این سیستم دارای نقاط تعادل $(-7.94, -7.94, 21)$ ، $(0, 0, 0)$ می باشد و ریشه معادله مشخصه دارای ریشه $\lambda_1 = 1.2928 + 0.2032i$ و $\lambda_2 = 1.2928 - 0.2032i$ و $|\arg(\lambda_{1,2})| = 0.156^\circ$ می باشد. با استفاده از قضیه ۳.۳ به این نتیجه می رسیم که این سیستم ناپایدار است.

۴ نتیجه گیری

از روش عددی به کار گرفته شده در این مقاله به این نتیجه می رسیم که وقتی α به سمت یک میل می کند جوابهای تقریبی بدست آمده به جواب دقیق مسئله همگرا می شود.

مراجع

- [1] S. G. Samko, A. A. Kilbas, and O. I. Marichev, *Fractional Integrals and Derivatives*, Gordon and Breach, Science Publishers, Yverdon, Switzerland, 1993.
- [2] C. P. Li and Z. G. Zhao, *Numerical approximation of nonlinear fractional differential equations with subdiffusion and Ssuperdiffusion*, Computers and Mathematics with Applications. In press.
- [3] C. P. Li and F. R. Zhang, *A survey on the stability of fractional differential equations*, The European Physical Journal Special Topics, 193(2011), pp.27-47.
- [4] O.P. Agrawal, D. Baleanu, *A Hamiltonian formulation and a direct numerical scheme, for fractional optimal control problems*, J. Vib. Control 13 (2007), 1269-1281.

پست الکترونیکی: Farshad.hemati@gmail.com

پست الکترونیکی: Rkshosiar@gmail.com

پست الکترونیکی: Meh-ghasemi@yahoo.com

پست الکترونیکی: Analiz.Derakhshan.2009@gmail.com

Chen^۳



حل عددی معادلات جابجایی- نفوذ با میدان سرعت غیرخطی با روش دوگان جابجایی المانهای مرزی

رباب شفارودی*
دانشگاه آزاد اسلامی واحد علوم و تحقیقات تهران

مجید قدسی حسن آباد
دانشگاه آزاد اسلامی واحد علوم و تحقیقات تهران ‡

چکیده

روش دوگان جابجایی المانهای مرزی روشی مناسب برای تبدیل معادلات شبه پواسون به دستگاهی از معادلات برای حل عددی می باشد. معادله نفوذ- جابجایی معادله ای شبه پواسون است. این معادله با روش دوگان جابجایی حل شده و دستگاه معادلات آن در شرایطی که میدان سرعت غیر خطی است بدست آمده است. براساس این روش یک مسئله غیر خطی حل شده و نتایج در دو حالت با حل تحلیلی مقایسه شده است.

واژه‌های کلیدی: دوگان جابجایی - نفوذ و جابجایی - المانهای مرزی میدان سرعت غیرخطی

Mathematics Subject Classification [2010]: 35H30,65N38

۱ مقدمه

روش دوگان جابجایی^۱ یکی از روشهای عددی است که براساس المانهای مرزی استوار است و به این دلیل ایجاد شده که انتگرال روی ناحیه جواب را به انتگرال روی مرز تبدیل نماید. [۲] معادله جابجایی-نفوذ مستقل از زمان به صورت زیر می باشد:

$$\vec{V} \cdot \nabla \phi = \left(\frac{D}{\rho} \right) \nabla^2 \phi + S \quad (1)$$

که در آن ϕ تابع کمیت مورد بررسی، S تابع چشمه یا چاه که مقادیر مورد نظر را به سیستم اضافه یا از آن کم می کند، ρ چگالی سیال D ضریب پخش و \vec{V} بردار سرعت است. در حالت کلی سرعت و منبع خطی نیستند. شرایط مرزی به صورت دیریکله و نیومن در نظر گرفته می شود. برای تبدیل معادله به فرم دوگان جابجایی ابتدا ضریب

$$k = \frac{D}{\rho} \quad (2)$$

را تعریف می کنیم. این ضریب در پایداری حل نقش اساسی دارد. روشی که معمولا برای تبدیل معادله به دوگان جابجایی در نظر گرفته می شود این است که میدان سرعت خطی در نظر گرفته می شود و در نتیجه با یک بار تقریب زدن توابع بر روی مرز با توابع شعاعی معادله به یک معادله همگن تبدیل می گردد. ما در اینجا فرض خطی بودن را در نظر نمی گیریم و بنابراین

* سخنران
† دانشجوی کارشناسی ارشد ریاضی
‡ دکترای مکانیک، عضو هیئت علمی دانشگاه

^۱DRM Dual Reciprocity Method



مجبور خواهیم شد که دو بار توابع را روی مرز تقریب کنیم و دوسری ضریب مجهول را حل نماییم. با مرتب کردن معادله ۱ به صورت معادله زیر:

$$\nabla^2 \phi = k^{-1} \left(v_x \frac{\partial \phi}{\partial x} + v_y \frac{\partial \phi}{\partial y} + v_z \frac{\partial \phi}{\partial z} - S \right) \quad (3)$$

معادله به شبه پواسون تبدیل می شود. سمت راست این معادله را به صورت زیر با توابع شعاعی تقریب می کنیم.

$$k^{-1} \left(v_x \frac{\partial \phi}{\partial x} + v_y \frac{\partial \phi}{\partial y} + v_z \frac{\partial \phi}{\partial z} - S \right) \approx \sum_{j=1}^{M\alpha} \alpha_j f_j(X) \quad (4)$$

توابع f_j در معادله زیر صدق می کنند:

$$f_j(X) = \nabla^2 \psi_j \quad (5)$$

تابع ϕ روی مرز نیز با توابع g_i به صورت زیر تقریب می گردد:

$$\phi \approx \sum_{j=1}^{M\beta} \beta_j g_j(X) \quad (6)$$

با جایگذاری توابع تقریبی در معادله ۳ و نوشتن معادلات برای N نقطه روی مرز و تعریف P_i به صورت زیر :

$$P_j(X_i) = k^{-1} \left(v_x(X_i) \frac{\partial g_j(X_i)}{\partial x} + v_y(X_i) \frac{\partial g_j(X_i)}{\partial y} + v_z(X_i) \frac{\partial g_j(X_i)}{\partial z} \right) \quad (7)$$

اولین گروه معادلات برای نقطه i بدست می آید:

$$\sum_{j=1}^{M\beta} \beta_j P_j(X_i) - k^{-1} S(X_i) = \sum_{j=1}^{M\alpha} \alpha_j f_j(X_i), i = 1..N \quad (8)$$

گروه دوم از معادلات با استفاده از روش المانهای مرزی حاصل می شود. با استفاده از تعریف f برحسب ψ معادله ۳ به یک معادله لاپلاس به صورت زیر تبدیل می شود:

$$\nabla^2 \left(\phi - \sum_{j=1}^{M\alpha} \alpha_j \psi_j(X) \right) = 0 \quad (9)$$

با استفاده از صورت بندی المانهای مرزی برای معادله لاپلاس [۱] گروه دوم معادلات براساس فرم دوگان جابجایی برای هر نقطه i به صورت زیر بدست می آید:

$$(10)$$

$$\sum_{j=1}^{M\beta} \beta_j c_j g_j(X_i) - \sum_{j=1}^{M\alpha} \alpha_j c_j \psi_j(X_i) = \sum_{j=1}^{M\beta} \beta_j \int_{\Gamma} \frac{\partial \phi_i^*}{\partial n} g_j(X) - \sum_{j=1}^{M\alpha} \alpha_j \int_{\Gamma} \frac{\partial \phi_i^*}{\partial n} \psi_j(X) - \sum_{j=1}^{M\beta} \beta_j \int_{\Gamma} \frac{\partial g_j(X)}{\partial n} \phi_i^* + \sum_{j=1}^{M\alpha} \alpha_j \int_{\Gamma} \frac{\partial \psi_j(X)}{\partial n} \phi_i^*$$



پوستر حل عددی معادلات جابجایی- نفوذ با میدان سرعت غیرخطی با روش دوگان جابجایی المانهای مرزی: ص: ۳-۴

در معادله فوق ϕ_i^* حل اساسی [۳] است که در R^2 به صورت $-\frac{1}{\sqrt{\pi}} \ln(r)$ و در R^3 به صورت $\frac{1}{\sqrt{\pi r}}$ می باشد. با تعریف ماتریسهای $[A_{ij}]_{N,M\alpha}$ و $[B_{ij}]_{N,M\beta}$ به صورت:

$$[A_{ij}]_{N,M\alpha} = \left[c_i \psi_j(X_i) - \int_{\Gamma} \frac{\partial \phi_i^*}{\partial n} \psi_j(X) + \int_{\Gamma} \frac{\partial \psi_j(X)}{\partial n} \phi_i^* \right]_{N,M\alpha} \quad (11)$$

$$[B_{ij}]_{N,M\beta} = \left[c_i g_j(X_i) - \int_{\Gamma} \frac{\partial \phi_i^*}{\partial n} g_j(X) + \int_{\Gamma} \frac{\partial g_j(X)}{\partial n} \phi_i^* \right]_{N,M\beta} \quad (12)$$

و تعریف ماتریسهایی بر اساس ماتریسهای فوق [۱] به صورت:

$$[D]_{3N,3N} \triangleq \begin{bmatrix} [g_j(X_{i1})]_{N1,2N} & \{^\circ\}_{N1,N} \\ [\frac{\partial g_j(X_{i2})}{\partial n}]_{N-N1,2N} & \{^\circ\}_{N-N1,N} \\ [B_{ij}]_{N,2N} & -[A_{ij}]_{N,N} \\ [P_j(X_i)]_{N,2N} & -[f_j(X_i)]_{N,N} \end{bmatrix}_{3N,3N} \quad (13)$$

$$\{\eta\}_{3N,1} \triangleq \begin{bmatrix} \{\beta_j\}_{2N,1} \\ \{\alpha_j\}_{N,1} \end{bmatrix}_{3N,1} \quad (14)$$

$$\{\lambda\}_{3N,1} \triangleq \begin{bmatrix} \{\bar{\Psi}(X_{i1})\}_{N1,1} \\ \{\frac{\partial \bar{\Psi}(X_{i2})}{\partial n}\}_{N-N1,1} \\ \{^\circ\}_{N,1} \\ \{^\circ\}_{N,1} \end{bmatrix}_{3N,1} \quad (15)$$

و جمع آوری کلیه معادلات برای نقاط روی مرز و این فرض که $N1$ نقطه شرط دیریکله و $N2$ نقطه شرط نیومن را دارد. یک دستگاه معادلات خطی به صورت زیر حاصل می شود:

$$[D]_{3N,3N} \{\eta\}_{3N,1} = \{\lambda\}_{3N,1} \quad (16)$$

با حل دستگاه فوق ضرایب α و β بدست آمده و توابع تقریب زنده تعیین می گردد. با تعیین ضرایب و با استفاده از فرم المانهای مرزی [۴] مقادیر ϕ روی مرز و داخل ناحیه قابل محاسبه است.

۲ نتایج اصلی

برای بررسی روش ، یک دایره به مرکز مبدا و شعاع واحد در نظر گرفته می شود که میدان غیر خطی سرعت

$$\vec{V}(x + 2y, x^2 - y) \quad (17)$$

و چشمه با معادله :

$$S = -((2+k)y^2 + x^3 + kx^2)e^{-xy} \quad (18)$$

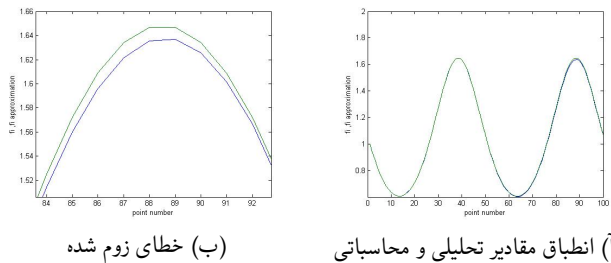


پوستر حل عددی معادلات جابجایی- نفوذ با میدان سرعت غیرخطی با روش دوگان جابجایی المانهای مرزی ص: ۴-۴

برآن حاکم است. شرایط مرزی بر نیمی از دایره Γ به صورت $\phi_\Gamma = e^{-xy}$ و نیمه دوم به صورت $\frac{\partial \phi_\Gamma}{\partial \vec{n}} = (-y, -x) \cdot \vec{n}$ تعریف می گردد. این معادله دارای حل تحلیلی به صورت :

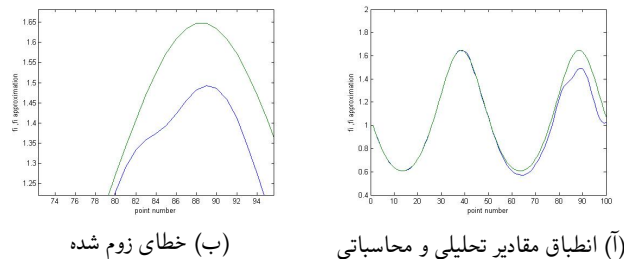
$$\phi = e^{-xy} \quad (19)$$

است. باروش فوق معادله به ازای دو مقدار k و برای 10° نقطه روی مرز حل با کمک نرم افزار MATLAB حل شده است. به ازای نیمه اول که شرط دیریکله برقرار است بدیهی است که جواب تقریبی بر جواب تحلیلی منطبق باشد. به ازای $k = 0.001$ مقدار خطای تابع کمتر از 0.8 درصد است. شکل ۱. با 10° برابر شدن k مقدار خطای ماکزیمم زیاد می شود و



شکل ۱: مقایسه مقادیر تحلیلی و تقریبی $k=0.001$

به ۱۶ درصد افزایش می یابد ولی هنوز تطابق برای نقاط دیگر برقرار است. شکل ۲. با توجه به نتایج فوق می بینیم این



شکل ۲: مقایسه مقادیر تحلیلی و تقریبی $k=0.01$

روش برای حالتی که جابجایی بر نفوذ برتری دارد جوابهای دقیق تری بدست می دهد.

مراجع

[۱] شفارودی فرمول بندی معادله کوانتومی شرودینگر مستقل از زمان با روش المانهای مرزی دوگان جابجایی، دومین همایش ملی ریاضی و کاربردهای آن ، ملایر دانشگاه ملایر، ۱۳۹۴.

[2] C. E. Chen, Recent developments in the dual reciprocity method using compactly supported radial basis functions, Las Vegas, 2010

[3] C. A. W. Brebbia, Boundary Element Techniques in engineering, London, 1980

[4] C. A. W. Brebbia, the Boundary Method For Engineers, New York, 1978

پست الکترونیکی: shafaroudi@live.com



حل عددی معادله انتگرالی فردهلم نوع دوم توسط موجک های لژاندر

نسیم عرب جزوی

چکیده

در این مقاله یک روش عددی برای حل معادله انتگرالی فردهلم نوع دوم ارائه شده است. این روش بر مبنای تقریب موجک های لژاندر می باشد. در ابتدا مشخصات موجک های لژاندر بیان شده و سپس با استفاده از ماتریس عملیاتی و بیان تابع انتگرالی، معادله انتگرالی فردهلم نوع دوم به دستگاهی از معادلات جبری توسط موجک های لژاندر تبدیل می شود. از حل دستگاه معادلات جبری، جواب تقریبی معادله انتگرالی فردهلم حاصل می شود.

۱ مقدمه

روش موجک های لژاندر برای حل معادلات انتگرالی فردهلم نوع دوم مزایایی دارد به طوری که عبارت انتگرالی می تواند به دلخواه به تعدادی سری افزاز شده و با به کار بردن مشخصه های بسیار خوب موجک های لژاندر، الگوریتمی کلی برای حل این معادله انتگرالی نتیجه شود. به طور کلی، با استفاده از ماتریس عملیاتی انتگرال گیری و بیان تابع انتگرالی، معادله انتگرالی فردهلم نوع دوم به یک دستگاه معادلات جبری توسط موجک های لژاندر تبدیل شده و سپس جواب های تقریبی معادله انتگرالی فردهلم نوع دوم نتیجه می شود.

۲ تقریب تابع

تابع برداری $f(t)$ روی فاصله $[a, b]$ به صورت زیر بیان می شود

$$f(t) \simeq \sum_{k=1}^N \sum_{m=0}^{M-1} f_{km} \psi_{km}(t), \quad (1)$$

به طوری که $\psi_{km}(t)$ موجک های عمومی لژاندر می باشند که روی فاصله $[a, b]$ به صورت زیر تعریف می شوند

$$\psi_{km}(t) = \begin{cases} [(2m+1)d_k^{-1}]^{\frac{1}{2}} L_m(d_k^{-1}(2t - t_{k-1} - t_k)), & t_{k-1} \leq t < t_k, \\ 0, & \text{در غیر این صورت} \end{cases} \quad (2)$$

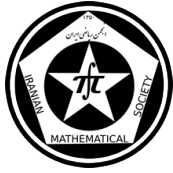
و f_{km} از رابطه زیر به دست می آید [۲]

$$f_{km} = [(2m+1)d_k]^{-\frac{1}{2}} \int_{-1}^1 f(2^{-1}(d_k t + t_{k-1} + t_k)) L_m(t) dt.$$

حال $f(t)$ را به صورت زیر بازنویسی می کنیم

$$f(t) \simeq \sum_{k=1}^N F_k \Psi_k(t) = F \Psi(t), \quad (3)$$

به طوری که



$$F_k = [f_{k^0}, \dots, f_{k, M-1}], \quad F = [F_1, \dots, F_N],$$

$$\Psi_k(t) = [\psi_{k^0}(t), \dots, \psi_{k, M-1}(t)]^T, \quad \Psi(t) = [\Psi_1^T(t), \dots, \Psi_N^T(t)]^T.$$

۳ بیان تابع انتگرالی

فرض می‌کنیم که $M(t)$ تابع ماتریسی متناظر با تابع برداری $f(t)$ باشد. $M(t)$ و $f(t)$ را به ترتیب به صورت زیر بیان می‌کنیم

$$M(t) \simeq \sum_{k=1}^N \sum_{m=0}^{M-1} M_{km} \psi_{km}(t), \quad f(t) \simeq \sum_{k=1}^N \sum_{m=0}^{M-1} f_{km} \psi_{km}(t).$$

در این صورت داریم

$$M(t)f(t) \simeq \sum_{k=1}^N \sum_{i=0}^{M-1} \sum_{j=0}^{M-1} M_{ki} f_{kj} \psi_{ki}(t) \psi_{kj}(t).$$

از رابطه

$$\psi_{ki}(t) \psi_{kj}(t) \simeq \sum_{m=0}^{M-1} d_{km}^{(ij)} \psi_{km}(t),$$

که در آن $d_{km}^{(ij)}$ به صورت زیر می‌باشد

$$d_{km}^{(ij)} = \left[(\nu_i + 1) (\nu_j + 1) (\nu_m + 1) d_k^{-1} \right]^{\frac{1}{\nu}} \nu^{-1} \int_{-1}^1 L_i(t) L_j(t) L_m(t) dt,$$

رابطه

$$M(t)f(t) \simeq \sum_{k=1}^N \sum_{m=0}^{M-1} \tilde{M}_{km} \psi_{km}(t) = \sum_{k=1}^N \hat{M}_k \Psi_k(t), \quad (4)$$

را به دست می‌آوریم به طوری که

$$\tilde{M}_{km} = \hat{M}_{km} \hat{F}_k, \quad \hat{F}_k = [f_{k^0}^T, \dots, f_{k, M-1}^T]^T, \quad \hat{M}_k = \hat{M}_k \hat{F}_k,$$

$$\hat{M}_k = [\hat{M}_{k^0}^T, \dots, \hat{M}_{k, M-1}^T]^T, \quad \hat{M}_k = [\hat{M}_{k^0}^T, \dots, \hat{M}_{k, M-1}^T]^T,$$

$$\hat{M}_{km} = \left[\sum_{i=0}^{M-1} d_{km}^{(i^0)} M_{ki}, \dots, \sum_{i=0}^{M-1} d_{km}^{(i, M-1)} M_{ki} \right].$$

بنابراین

$$K(s, t) f(t) \simeq \sum_{k=1}^N \sum_{m=0}^{M-1} \tilde{K}_{km}(s) \psi_{km}(t), \quad (5)$$

که

$$\tilde{K}_{km}(s) = \hat{K}_{km}(s) \hat{F}_k, \quad \hat{K}_{km}(s) = \left[\sum_{i=0}^{M-1} d_{km}^{(i^0)} K_{ki}(s), \dots, \sum_{i=0}^{M-1} d_{km}^{(i, M-1)} K_{ki}(s) \right],$$



$$K_{ki}(s) = [(2i+1)d_k]^{\frac{1}{2}} 2^{-i} \int_{-1}^1 K(s, 2^{-i}(d_k t + t_{k-1} + t_k)) L_i(t) dt.$$

فرض می‌کنیم

$$g(t) = \int_a^b K(t, s) f(s) ds \simeq \sum_{k=1}^N \sum_{m=0}^{M-1} g_{km} \psi_{km}(t), \quad (6)$$

$$\hat{K}_{km}(t) \simeq \sum_{j=1}^N \sum_{l=0}^{M-1} \hat{K}_{km}^{(jl)} \psi_{jl}(t),$$

که

$$\hat{K}_{km}^{(jl)} = \left[\sum_{i=0}^{M-1} d_{km}^{(i^*)} K_{ki}^{(jl)}, \dots, \sum_{i=0}^{M-1} d_{km}^{(i, M-1)} K_{ki}^{(jl)} \right],$$

$$K_{ki}^{(jl)} = [(2l+1)d_j]^{\frac{1}{2}} 2^{-l} \int_{-1}^1 K_{ki}(2^{-l}(d_j t + t_{j-1} + t_j)) L_l(t) dt.$$

توسط معادله (۵) داریم

$$g(t) \simeq \sum_{j=1}^N \sum_{l=0}^{M-1} \sum_{k=1}^N \sum_{m=0}^{M-1} K_{km}^{(jl)} \left(\int_{t_{k-1}}^{t_k} \psi_{km}(t) dt \right) \hat{F}_k \psi_{jl}(t).$$

بنابراین

$$\hat{G} = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N E_{ij}^{(N)} \otimes \sqrt{d_j} \hat{K}_j^{(i)} \hat{F}, \quad (7)$$

که \hat{G} از نظر مفهومی مشابه با \hat{F} می‌باشد، $E_{ij}^{(N)}$ یک ماتریس $N \times N$ است که درایه (i, j) آن ۱ و بقیه درایه‌های آن ۰ می‌باشد، \otimes حاصل ضرب کرونگر را نشان می‌دهد و

$$\hat{K}_j^{(i)} = \left[\hat{K}_{j^*}^{(i^*)T}, \dots, \hat{K}_{j^*}^{(i, M-1)T} \right]^T.$$

۴ تحلیل معادله انتگرالی فردهلم نوع دوم

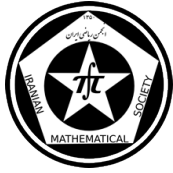
حال معادله انتگرالی فردهلم نوع دوم زیر را در نظر می‌گیریم

$$A(t)x(t) = \lambda \int_a^b K(t, s)x(s)ds + B(t)u(t), \quad t \in [a, b], \quad (8)$$

که $x(t)$ یک تابع l -بعدی مجهول و $u(t)$ یک تابع r -بعدی معلوم می‌باشد. $A(t)$ ، $K(t, s)$ و $B(t)$ توابع ماتریسی معلوم با ابعاد مناسب و λ یک ثابت معلوم می‌باشد. فرض می‌کنیم معادله (۸) جواب یکتا دارد. $A(t)$ ، $x(t)$ ، $B(t)$ و $u(t)$ را به ترتیب بیان می‌کنیم، همان طوری که توسط معادلات (۴) و (۵) داریم

$$A(t)x(t) = \sum_{k=1}^N \sum_{m=0}^{M-1} \tilde{A}_{km} \psi_{km}(t), \quad B(t)u(t) \simeq \sum_{k=1}^N \sum_{m=0}^{M-1} \tilde{B}_{km} \psi_{km}(t),$$

$$\int_a^b K(t, s)x(s)ds \simeq \sum_{k=1}^N \sum_{m=0}^{M-1} g_{km} \psi_{km}(t).$$



با جایگزین کردن معادلات بالا در معادله (۸) داریم

$$[\tilde{A}_1, \dots, \tilde{A}_N] = \lambda [G_1, \dots, G_N] + [\tilde{B}_1, \dots, \tilde{B}_N].$$

معادله بالا را به صورت زیر بازنویسی می‌کنیم

$$[\hat{A}_1^T, \dots, \hat{A}_N^T]^T = \lambda [\tilde{G}_1^T, \dots, \tilde{G}_N^T]^T + [\hat{B}_1^T, \dots, \hat{B}_N^T]^T,$$

که

$$\hat{A}_k = [\hat{A}_{k^0}^T, \dots, \hat{A}_{k, M-1}^T]^T,$$

\hat{B}_N و \hat{G}_N از نظر مفهومی مشابه با \hat{A}_N می‌باشند. بنابراین

$$[(\hat{A}_1 \hat{X}_1)^T, \dots, (\hat{A}_N \hat{X}_N)^T]^T = \lambda \hat{G} + [(\hat{B}_1 \hat{U}_1)^T, \dots, (\hat{B}_N \hat{U}_N)^T]^T.$$

با استفاده از ضرب کرونکر \otimes داریم

$$\hat{X} = \left[\sum_{k=1}^N (E_{kk}^{(N)} \otimes \hat{A}_k) - \lambda \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N E_{ij}^{(N)} \otimes \sqrt{d_j} \hat{K}_j^{(i)} \right]^{-1} \sum_{k=1}^N (E_{kk}^{(N)} \otimes \hat{B}_k) \hat{U}. \quad (9)$$

که با استفاده از روش ارائه شده در [۱] می‌توان خطا را برآورد کرد. فرض می‌کنیم $\hat{x}_N^M(t)$ جواب موجک‌های لژاندر معادله (۸) باشد. در این صورت $\hat{x}_N^M(t)$ در معادله زیر صدق می‌کند

$$A(t) \hat{x}_N^M(t) = \lambda \int_a^b K(t, s) \hat{x}_N^M(s) ds + B(t) u(t) + r_N^M(t), \quad t \in [a, b], \quad (10)$$

که در آن $r_N^M(t)$ به صورت زیر می‌باشد

$$r_N^M(t) = A(t) \hat{x}_N^M(t) - \lambda \int_a^b K(t, s) \hat{x}_N^M(s) ds - B(t) u(t).$$

با ترکیب دو معادله (۸) و (۱۰) داریم

$$A(t)[x(t) - \hat{x}_N^M(t)] = \lambda \int_a^b K(t, s)[x(s) - \hat{x}_N^M(s)] ds - r_N^M(t), \quad t \in [a, b]. \quad (11)$$

معادله (۱۱) را می‌توان به عنوان تخمین تابع خطا برای این روش موجک‌های عمومی لژاندر حل کرد.

مراجع

- [1] K. Maleknejad, Y. Mahoudi, *Numerical solution of linear Fredholm integral equation by using hybrid Taylor and block-pulse functions*, Applied Mathematics and Computation, Vol. 149, pp. 799-806, 2004.
- [2] X. T. Wang, Y. M. Li, *Numerical solution of Fredholm integral equation of the second kind by general Legendre wavelets*, Int. J. Innovative Computing, Information and Control, Vol. 8, pp. 799-805, 2012.



حل عددی معادلات با مشتقات جزئی سهموی با روش تفاضلات متناهی ضمنی

فریا فتحی*

دانشگاه آزاد اسلامی واحد دزفول

چکیده

در این مقاله روش های حل عددی معادلات با مشتقات جزئی سهموی با استفاده از ترکیب سری پاده، سری تیلور و عملگر های تفاضلی مورد بحث قرار می گیرد و دقت و پایداری این روش بررسی می گردد. د نتیجه این محاسبات دقت جدیدی حاصل می گردد که شامل پنج تراز زمانی است. محاسبات با نرم افزار MATLAB انجام شده است.

واژه های کلیدی: معادلات سهموی، فرم های تفاضلی، پایداری

Mathematics Subject Classification [2010]: 35kxx

۱ مقدمه

فرض می کنیم که $\frac{\partial u}{\partial t} = L^*u$ باشد که L^*u عملگر خطی در u است. ساده ترین مثال از این نوع معادله معادله انتقال گرمایی زیر است.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

که $a < x < b$ و t متغیر زمان و مثبت می باشد. این مسأله را همراه با شرایط اولیه و مقدار مرزی در نظر می گیریم. نقاط گره با $x_k = x_0 + kh$ و $t_m = mkx$ مشخص می شود که $k = 0, 1, \dots, N$. به اختصار $u(x_m, t_m)$ را با نماد u_m^n مشخص می کنیم. اگر عملگر تفاضلی زیر را در نظر بگیریم

$$\nabla f(x_j) = f(x_j) - f(x_{j-1}) = (1 - E^{-1})f(x_j)$$

با استفاده از سری تیلور می توان نوشت:

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2} f''(x) + \dots = f(x) + h\nabla f(x) + \frac{h^2}{2} \nabla^2 f(x) + \dots = (1 + h\nabla + \frac{h^2}{2} \nabla^2 + \dots) f(x)$$

یعنی

$$Ef(x) = e^{hD} f(x)$$

پس $E = e^{hD}$ و از آنجا

* سخنران



$$E^{-1} = e^{-hD} = (1 - \nabla) \\ \Rightarrow -hD = \ln(1 - \nabla) \quad \text{or} \quad D = -\frac{\ln(1 - \nabla)}{h}$$

یعنی با انتخاب سری تیلور تابع $\ln(1-x)$ از مرتبه های مختلف می توان دقت های مختلف و فرمول های متفاوت به دست آورد.

با به کار بردن روش فوق می توان نوشت:

$$L^*u(x, t_{n+1}) = -k^{-1} \ln(1 - \nabla_t)u(x, t_{n+1})$$

از طرفی تقریب پاده را می توان به صورت زیر در نظر گرفت:

اگر $f = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$ سری تیلور تابع f باشد، تقریب پاده $[\frac{m}{n}]$ به صورت زیر است:

$$[\frac{m}{n}] = \frac{a_0 + a_1 x + \dots + a_m x^m}{1 + b_1 x + \dots + b_n x^n} = c_0 + c_1 x + \dots + c_{(m+n)} x^{(m+n)}$$

که مقادیر a_0, \dots, a_m و b_1, \dots, b_n در مقایسه با سری تیلور f و با حل یک دستگاه معادلات خطی حاصل می شوند.

۲ نتایج اصلی

با ترکیب دو بحث فوق می توان راه حل های عددی متفاوت را برای حل معادلات با مشتقات جزئی سهموی نتیجه گرفت. در ساده ترین حالت تقریب پاده به فرم $[1/0] = x$ حاصل می شود که با جایگذاری ∇_t به جای x می توان نوشت:

$$\nabla_t u_m^{n+1} = r \delta_x^2 u_m^n$$

با ادامه این روند و در نظر گرفتن شرط های لازم می توان روش های متفاوتی ایجاد کرد.

با افزایش m و n محاسبات پیچیده تر می شوند، که این محاسبات را با نرم افزار MATLAB انجام داده ایم و نتایج زیر را بدست آورده ایم.

اگر $f(x) = \ln(1-x)$

$$[4/4] = \frac{x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{24}x^4}{1 - 2x + \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{24}x^4}$$

پس می توان نوشت:

$$F(\nabla_t) = \frac{(\nabla_t - \frac{1}{2}\nabla_t^2 + \frac{1}{6}\nabla_t^3 + \frac{1}{24}\nabla_t^4)u_m^{n+1}}{1 - 2\nabla_t + \frac{3}{2}\nabla_t^2 - \frac{1}{2}\nabla_t^3 + \frac{1}{24}\nabla_t^4} = r(1 + \sigma\delta_x^2)^{-1}u_m^{n+1}$$

که با بسط و محاسبه ی نتیجه ی عملگر های فوق رابطه ی پنج ترازوی زیر حاصل می شود:

$$(\frac{37}{35}r - \frac{13}{84}\sigma)u_{m+1}^{n+1} + (\frac{-281}{35}r - \frac{13}{42}\sigma)u_m^{n+1} + (\frac{37}{35}r - \frac{13}{84}\sigma)u_{m-1}^{n+1}$$

$$- \frac{192}{35}ru_{m+1}^n + (\frac{42}{5}r - 2\sigma)u_m^n - \frac{132}{35}ru_{m-1}^n + (\frac{18}{35}r - \frac{4}{7}\sigma)u_{m+1}^{n-1}$$



$$\begin{aligned} & + \left(-\frac{36}{35}r - \frac{9}{14} - \frac{8}{7}\sigma\right)u_{m-1}^{n-1} + \left(\frac{63}{35}r - \frac{4}{7}\sigma\right)u_{m-1}^{n-1} \\ & \left(-\frac{12}{35}r + \frac{47}{42}\sigma\right)u_{m+1}^{n-2} + \left(-\frac{26}{35}r - \frac{16}{7}\sigma\right)u_m^{n-2} \\ & \left(\frac{8}{35}r + \frac{16}{7}\sigma\right)u_{m-1}^{n-2} + \frac{1}{70}ru_{m+1}^{n-2} + \left(-\frac{1}{35}r - \frac{1}{28}\right)u_m^{n-2} \\ & + \frac{r}{70}u_{m-1}^{n-2} = 0 \end{aligned}$$

ناحیه پایداری روش فوق با روش وان نیومن و ساده کردن و حل معادلات مربوطه با نرم افزار MATLAB در صورتی که مقادیر Γ و σ معلوم باشد به صورت زیر حاصل می گردد که با شرط $|J| < 1$ پایدار است.

$$\begin{aligned} & \left[\left(\frac{37}{35}r - \frac{13}{84}\sigma\right)^2 \cos i\beta h\right]J^4 + \left[\left(-\frac{281}{35}r - \frac{13}{42}\sigma\right)e^{i\beta h} - \frac{192}{35}re^{i\beta h}\right. \\ & \left. - \frac{132}{35}re^{i\beta h}\right]J^3 + \left[\left(\frac{18}{35}r - \frac{4}{7}\sigma\right)e^{i\beta h} + \left(-\frac{36}{35}r - \frac{9}{14} - \frac{8}{7}\sigma\right)\right. \\ & \left.\left(\frac{63}{35}r - \frac{4}{7}\sigma\right)e^{-i\beta h}\right]J^2 + \left[\left(\frac{71}{35}r + \frac{12}{7}\sigma\right)e^{i\beta h} + \left(-\frac{12}{35}r + \frac{47}{42}\sigma\right)\right. \\ & \left.\left(-\frac{26}{35}r - \frac{16}{7}\sigma\right)e^{-i\beta h}\right]J + \left[-\frac{1}{35}r - \frac{1}{28} + \frac{r}{70}\right] = 0 \end{aligned}$$

سپاس‌گزاری

از استاد ارجمندم جناب آقای دکتر جلیل رشیدی نیا که ایده کارپیشنهاد ایشان است کمال تشکر را دارم.

مراجع

[۱] رشیدی نیا، جلیل، ، حل عددی معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی، انتشارات انتخاب برتر، ۱۳۹۳.

[2] M. K.Jain, *Numerical solution of differential equations*, Wiley Eastern Limited,1984.

پست الکترونیکی: ferya.fathi@gmail.com



حل مساله مقدار ویژه معکوس ماتریس مجاورت گراف کامل و k -منتظم با استفاده از ماتریس تصادفی دوگانه

اکرم پورمیر*
دانشگاه آزاد اسلامی واحد زاهدان

سید مرتضی احمدی
دانشگاه آزاد اسلامی واحد زاهدان

مسعود مشرقی
دانشگاه حکیم سبزواری

در این مقاله ابتدا نشان می دهیم که ماتریس مجاورت گراف کامل به ازای $k \geq 1$ تصادفی دوگانه متقارن k -تعمیم یافته می باشد و سپس نشان می دهیم ماتریس مجاورت گراف 1 -منتظم تصادفی دوگانه متقارن است و سپس با مشخص کردن همه ماتریس های تصادفی دوگانه متقارن که توسط طیف شان در Δ_n^s مشخص می شوند، ماتریس مجاورت گراف های منتظم را به دست می آوریم و در انتها نتایج به دست آمده را بیان می کنیم.

واژه های کلیدی: مساله مقدار ویژه معکوس، ماتریس تصادفی دوگانه، گراف کامل، گراف k -منتظم، ماتریس مجاورت

Mathematics Subject Classification [2010]: 13D45, 39B42

۱ مقدمه

ماتریس مجاورت گراف ساده G را با $A(G)$ نمایش می دهیم که ماتریس $(0,1)$ -متقارن نامنفی است و مقادیر ویژه $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ که طیف G می باشد را $\sigma(G)$ می نامیم و $\sigma(G) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$ گراف G صحیح نامیده می شود اگر تمام مقادیر ویژه آن اعداد صحیح باشند و اگر $A(G)$ دوری باشد آنگاه دوری نامیده می شود. در مجموع گراف G ، k -منتظم نامیده می شود اگر درجه هر راس آن k باشد. گراف اکیدا منتظم G با پارامترهای $(\nu, \kappa, \lambda, \mu)$ ، k -منتظم است که کامل نمی باشد و در دو شرط زیر صدق می کند:

۱. برای هر زوج از رئوس مجاور، λ رئوس مجاور در هر دو وجود داشته باشد.

۲. برای هر زوج از رئوس غیرمجاور، μ رئوس مجاور در هر دو وجود داشته باشند.

گراف کامل روی n راس که هر راس به رئوس دیگر متصل است را با K_n نشان می دهیم. علاوه بر این در گراف کامل دو قسمتی K_{n_1, n_2} ، رئوس به دو زیر مجموعه v_1 و v_2 از هر یک از عناصر n_1 و n_2 تقسیم می شود و دو راس مجاور هستند اگر و تنها اگر یکی در v_1 باشد و دیگری در v_2 باشد. دوگراف ایزومرفیک گفته می شود اگر و تنها اگر ماتریس مجاورت آنها به طور جایگشتی متشابه باشد. دوگراف هم طیف گفته می شود اگر طیف مشابه داشته باشند و گراف G ، DS گفته می شود اگر هر گراف H که هم طیف G است ایزومرفیک G باشد. در کل مساله مشخص کردن این که آیا گراف G ، DS هست یا نه، هنوز باز است. در این مقاله به بحث درباره اینکه گراف منتظم DS است یا نه، با توجه به رابطه آن با مسئله مشخص کردن همه ماتریس های تصادفی دوگانه متقارن که DS در Δ_n^s است، می پردازیم. اما ابتدا یادآوری می کنیم که اگر G گراف k -منتظم روی n راس باشد آنگاه شعاع طیفی $A(G)$ مساوی K مقدار ویژه G مربوط به بردار ویژه واحد (e_n) برابر k است.

* سخنران



۲ رابطه بین ماتریس مجاورت گراف و ماتریس تصادفی دوگانه

تعریف ۱.۲. فرض کنید $\Omega_n^s(k)$ مجموعه همه ماتریس های متقارن نامنفی از مرتبه $n \times n$ باشد که مجموع هر سطر و ستون آن مساوی k باشد و $\Lambda_n(k)$ نمایش زیر مجموعه $\Omega_n^s(k)$ متشکل از همه ماتریس های $(0,1)$ - که k ، 1 در هر سطر و ستون دارد و $\Lambda_n^\circ(k)$ مجموعه عناصر $\Lambda_n(k)$ می باشد که اثر صفر دارد.

قضیه ۲.۲. هر ماتریس مجاورت گراف کامل k_n ، $(n \geq 2)$ تصادفی دوگانه n - تعمیم یافته می باشد.

قضیه ۳.۲. هر ماتریس مجاورت گراف 1 - منتظم تصادفی دوگانه است.

قضیه ۴.۲. $A \in \lambda_n^\circ(k)$ اگر و تنها اگر A ماتریس مجاورت گراف های k - منتظم که n راس و k یال دارد، می باشد.

اثبات. ابتدا فرض کنید A ماتریس مجاورت گراف منتظم که n راس و k یال دارد، باشد. آنگاه واضح است که A ماتریس متقارن نامنفی از مرتبه $n \times n$ می باشد. اگر مجموع هر سطر و ستون آن مساوی k است و دارای اثر صفر می باشد پس $A \in \lambda_n^\circ(k)$. برعکس فرض کنید $A \in \lambda_n^\circ(k)$ آنگاه A ماتریس مجاورت گراف منتظم که n راس و n یال دارد، می باشد. \square

قضیه ۵.۲. $A \in \lambda_n^s(k)$ اگر و تنها اگر $\frac{1}{k}A$ عنصر Δ_n^s باشد.

نتیجه ۶.۲. $A \in \lambda_n(k)$ در DS ، $\Omega_n^s(k)$ است اگر و تنها اگر $\frac{1}{k}A$ در DS ، Δ_n^s است.

۳ حل مساله مقدار ویژه معکوس ماتریس مجاورت با استفاده از ماتریس تصادفی دوگانه

قضیه ۱.۳. گراف های 1 - منتظم DS هستند.

اثبات. فرض کنید A ماتریس مجاورت گراف 1 - منتظم باشد آنگاه چون A ماتریس جایگشتی تحویل ناپذیر است، به ازای ماتریس معکوس پذیر X داریم $X^{-1}AX = B$ و B تصادفی دوگانه است و همچنین B تحویل ناپذیر می باشد و همه مقادیر ویژه آن قدر مطلق 1 دارند بنابراین A و B هم طیف می باشند و همچنین به طور جایگشتی مشابه هستند و لذا A و B ایزومرفیک بوده و بنابراین A ، DC می باشد. \square

مثال ۲.۳. طیف $\{1, -1\}$ گراف 1 - منتظم مرتبه 2 را مشخص می کند و همچنین $\{1, 1, -1, -1\}$ گراف 1 - منتظم مرتبه 4 را مشخص می کند.

قضیه ۳.۳. هر گراف کامل k_n ، DS است.

اثبات. داریم $\frac{1}{k}A(k_n) = c_n$ آنگاه چون

$$c_n = \frac{n}{n-1}J_n - \frac{1}{n-1}I_n$$

و برای هر ماتریس وارون پذیر X به طوری که $X^{-1}C_nX$ تصادفی دوگانه متقارن باشد، ما به دست می آوریم

$$X^{-1}C_nX + \frac{1}{n-1}I_n = \frac{n}{n-1}X^{-1}J_nX$$



که سمت چپ ماتریس نامنفی است که مجموع سطر و ستون مساوی $\frac{1}{n-1} + 1$ می باشد بنابراین

$$X^{-1} J_n X = \frac{n-1}{n} (X^{-1} C_n X + \frac{1}{n-1} I_n)$$

تصادفی دوگانه متقارن است و چون $X^{-1} J_n X = J_n$ لذا $A(k_n)$ در DS است. □

مثال ۴.۳. طیف $\{-1, \dots, -1, (n-1)\}$ گراف کامل K_n را مشخص می کند.

قضیه ۵.۳. ناحیه غیرمشترک گرافهای کامل DS است.

اثبات. داریم $\frac{1}{k} A(k_n) = c_n$ به استقرا اثبات می کنیم ابتدا نشان می دهیم $c_n \oplus c_n$ در DS، Δ_{2n} است. اگر $z \in \Delta_{2n}$ متشابه $c_n \oplus c_n$ باشد آن گاه به وضوح طیف z برابر $(1, 1, \frac{-1}{n-1}, \dots, \frac{-1}{n-1})$ می باشد چون z تحویل ناپذیر است و مقدار ویژه ۱ دوبار تکرار می شود آن گاه z به طور جایگشتی متشابه مجموع مستقیم دو ماتریس تصادفی دوگانه B و C است اما اثرهای B و C صفر هستند به طوری که در صورت لزوم طیف B و C مشابه و مساوی $(1, \frac{-1}{n-1}, \dots, \frac{-1}{n-1})$ می باشد با توجه به این که اگر $B = X^{-1} J_n X$ تصادفی دوگانه باشد آن گاه وجود دارد $Y \in \Delta_n$ به طوری که $B = Y^{-1} J_n Y$ و از اینرو $B = C = C_n$ و بنابراین این براساس استقرا روی n برای هر عدد صحیح مثبت n_1, \dots, n_k ماتریس $c_{n_1} \oplus \dots \oplus c_{n_k}$ در $\Delta_{n_1+\dots+n_k}$ DS است. □

۴ نتایج اصلی

۱. $k_{n,n}$ ، DS هست.

اثبات. نتیجه قضیه (۲.۲)، (۱.۳):

ابتدا ثابت می کنیم که I و J در Δ_{2n} ، DS هستند اگر وجود داشته باشد $Z \in \Delta_{2n}$ که متشابه J هست، آنگاه بوضوح طیف Z برابر $(1, 0, \dots, 0, -1) \in R^{2n}$ آنگاه Z بطور جایگشتی متشابه ماتریس به شکل $\begin{bmatrix} D & \\ & D^T \end{bmatrix}$ $D \in \Delta_n$ می باشد به طوری که $DD^T \in \Delta_n^s$ و مقادیر ویژه آن $(1, 0, \dots, 0)$ و بنابراین DD^T متشابه J_n است آنگاه، $DD^T = J_n$ و چون

$$\text{rank}(D) = \text{rank}(DD^T) = \text{rank}(J_n) = 1$$

آنگاه $D = J_n$ و بنابراین $Z = J$ حالا فرض می کنیم که $S \in \Delta_{2n}$ متشابه I است آنگاه S طیف $(1, \dots, 1, -1, \dots, -1)$ را دارد و بنابراین S بطور جایگشتی متشابه $c_2 \oplus \dots \oplus c_2$ (n مرتبه) می باشد و لذا I و S بطور جایگشتی متشابه هستند چون $C = \frac{n}{n-1} J - \frac{1}{n-1} I$ آنگاه C در Δ_{2n} ، DS می باشد □

۲. با استفاده از گراف های منظم هم طیف ه ایزومرفیک نیستند می توان ماتریس تصادفی دو گانه که در Δ_n^s ، DS نیستند را به دست آورد.

۳. اگر G گراف k -منظم باشد که DS می باشد آنگاه $\frac{1}{k} A(G)$ ، DS می باشد.



چهل و ششمین کنفرانس ریاضی ایران
۳-۶ شهریور ۱۳۹۴
دانشگاه یزد



پوستر حل مساله مقدارویژه معکوس ماتریس مجاورت گراف کامل و k -منتظم با استفاده از ماتریس ... ص: ۴-۴

مراجع

- [1] RB. Bapat, *Graphs and matrices*, New York (N,Y), Springer, 2010.
- [2] AE. Brouwer, WH. Haemers, *Spectra of graphs*, New York (N,Y), Springer, 2011.
- [3] D. Cvetkovic, P. Rowlinson, S. Simic *An Introduction to the theory of graph spectra*, Cambridge:Cambridge University Press, 2010.
- [4] ER. Vandam, WH. Haemersl, *Which graphs are determined by their spectra*, Linear Algebra Appl, 373 (2003), pp. 241-272.
- [5] LG. Wang ,H. Sun *Infinitely many pairs of cospectral integral regular graphs*, Appl. Math, 26 (2011), pp. 280-286.

پست الکترونیکی: purmirakram@yahoo.com
پست الکترونیکی: math.ahmadi67@yahoo.com
پست الکترونیکی: Massoud.mashreghi@gmail.com



حل معادلات انتگرال دیفرانسیل تفاضلی فردهلم نوع دوم با ضرایب متغیر با استفاده از پایه دلخواه

فریبا زره پوش*
دانشگاه باهنر کرمان

عظیم ریواز
دانشگاه باهنر کرمان

چکیده

در این مقاله یک روش عددی برای حل معادلات انتگرال دیفرانسیل تفاضلی فردهلم نوع دوم با ضرایب متغیر ارائه شده است. در ابتدا فرم ماتریسی توابع و مشتقات آن با استفاده از ماتریس های انتقال، در پایه استاندارد محاسبه می شود و سپس به کمک آن روشی آرایه می گردد که با استفاده از هر پایه دلخواه، می توان معادله را به فرم گسسته و معادلات ماتریسی تبدیل کرد و تقریبی مناسب برای تابع مجهول بدست آورد. برای حل با روش ارائه شده نیاز به محاسبات پیچیده ای نیست و محاسبات به راحتی اجرا می شوند.

واژه های کلیدی: معادلات انتگرال دیفرانسیل تفاضلی، ماتریس انتقال، پایه دلخواه
Mathematics Subject Classification [2010]: 45Bxx, 45Jxx

۱ مقدمه

معادلات انتگرال دیفرانسیل به عنوان ابزاری قوی در حل بسیاری از مسائل رشته های گوناگون مانند فیزیک، مکانیک، شیمی، ... به کار می رود. با توجه به کاربرد این نوع معادلات در یاری رساندن به درک و توجه پدیده های علمی حل این دسته از معادلات جایگاه خاصی پیدا کرده است و چون حل آنها به روش تحلیلی معمولاً دشوار است از این رو حل عددی اهمیت ویژه ای پیدا می کند. روش های عددی مبتنی بر توابع متعامد و یا توابع ترکیبی مانند بلوک پالس توابع [۱] با چند جمله ای-های لژاندر [۲] یا چبیشف [۶] یا توابع موجکی [۴] برای حل آنها به کار بسته می شود. نوعی از معادلات انتگرال، معادلات انتگرال دیفرانسیل تفاضلی است. این نوع معادلات شامل انتقال هایی از یک تابع مجهول و مشتقاتش است. در این مقاله، روشی ارائه می دهیم که بتوان با استفاده از هر پایه مستقل خطی دلخواهی، تقریبی مناسب از تابع مجهول بدست آورد. ابتدا، به بیان برخی از نمادها و قضایای مورد نیاز در مقاله می پردازیم.

نماد $X(x)$ پایه استاندارد و a_n بردار ضرایب پایه می باشند همچنین نمادهای μ و η که در ادامه مورد استفاده قرار می گیرند ماتریس هایی هستند که به صورت زیر تعریف می شوند:

$$a_n = [a_0, \dots, a_n], \quad X(x) = [1, x, \dots, x^n]^T,$$

$$\eta = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}, \quad \mu = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}.$$

* سخنران



پوستر حل معادلات انتگرال دیفرانسیل تفاضلی فردهم نوع دوم با ضرایب متغیر با استفاده از پایه دلخواه ص: ۴-۲

قضیه ۱.۱. [۳، ۵]. اگر $U_n(x) = \underline{a}_n X(x)$ و $p(X) = \underline{p}X(x)$ و $q(x) = \underline{q}X(x)$ چند جمله ای هایی از درجه n باشند، آنگاه

$$\forall r \in \mathbb{N}; \quad \frac{d^r}{dx^r} U_n(x) = \underline{a}_n \eta^r X(x), \quad x^r U_n(x) = \underline{a}_n \mu^r X(x), \quad ۱$$

$$p(x)q(x) = \underline{p}q(\mu)X(x) = \underline{q}p(\mu)X(x), \quad ۲$$

$$\Pi = \sum_{i=0}^{\nu} \eta^i p_i(\mu) \quad \sum_{i=0}^{\nu} p_i(x)U^{(i)}(x) = \underline{a}_n \Pi X(x), \quad ۳$$

۲ ماتریس های عملگر مشتق و انتگرال

برای حل معادلات انتگرال دیفرانسیل تفاضلی به فرم زیر

$$\sum_{i=0}^{\nu} p_i(x)U^{(i)}(x) + \sum_{i=0}^{\nu^*} p_i^*(x)U^{(i)}(x-\tau) = f(x) + \int_a^b K(x,t)U(t-\tau)dt,$$

نیاز است انتقال های $U(x)$ و مشتقات آن را بدست آوریم، تا بتوان معادله را گسسته و تبدیل به فرم ماتریسی کرد. در اینصورت:

$$X(x-\tau) = HX(x), \quad U(x-\tau) = \underline{a}_n HX(x),$$

بطوریکه τ عدد حقیقی و $X(x)$ پایه استاندارد و a_n بردار ضرایب و H ماتریس انتقال می باشد، که به صورت زیر محاسبه می شوند:

$$H = [h_{ij}], \quad h_{ij} = \begin{cases} (-1)^{i+j} \binom{i}{j}, & i \geq j \\ 0, & i < j \end{cases} \quad (۱)$$

بنابراین فرم ماتریسی مشتقات انتقال $U(x)$ در پایه استاندارد به صورت زیر بدست می آید:

$$U^{(i)}(x-\tau) = \underline{a}_n H \eta^i X(x).$$

با توجه به قضیه ۱.۱ و روابط فوق داریم:

$$\sum_{i=0}^{\nu^*} p_i^*(x)U^{(i)}(x-\tau) = \underline{a}_n H \Pi^* X(x), \quad \Pi^* = \sum_{i=0}^{\nu^*} \eta^i p_i^*(\mu). \quad (۲)$$

حال اگر تابع $U(x)$ بر حسب پایه دلخواه $\tilde{X}(x)$ تقریب زده شود، داریم:

$$U_n(x) = \underline{b}_n \tilde{X}(x),$$

که در آن

$$\underline{b}_n = [b_0, \dots, b_n], \quad \tilde{X}(x) = [\tilde{X}_0(x), \dots, \tilde{X}_n(x)]^T,$$

که $\tilde{X}_i(x)$ ها توابع چند جمله ای های پایه ای دلخواه، برای $i = 0, \dots, n$ و \underline{b}_n بردار ضرایب در پایه $\tilde{X}(x)$ می باشند. هر پایه دلخواه $\tilde{X}(x)$ را می توان بوسیله ماتریس های تبدیل پایه، در پایه استاندارد نوشت. داریم:

$$\tilde{X}(x) = GX(x),$$



که در آن $G = [g_{ij}]_{(n+1) \times (n+1)}$ و $i, j = 0, \dots, n$ $g_{ij} = \frac{d^j \tilde{X}_i(x)}{j! dx^j} \Big|_{(0)}$ ؛ بنابراین داریم:

$$\begin{aligned} U_n(x) &= \underline{b}_n G X(x), & K(x, t) &= X^T(x) G^T K G X(t), \\ \sum_{i=0}^{\nu} p_i(x) U^{(i)}(x) &= \underline{b}_n G \Pi X(x), & \Pi &= \sum_{i=0}^{\nu} \eta^i p_i(\mu), \\ U_n(x - \tau) &= \underline{b}_n \tilde{X}(x - \tau) = \underline{b}_n G H X(x), \\ \sum_{i=0}^{\nu^*} p_i^*(x) U^{(i)}(x) &= \underline{b}_n G H \Pi^* X(x), & \Pi^* &= \sum_{i=0}^{\nu^*} \eta^i P_i^*(\mu). \end{aligned}$$

۳ حل معادلات انتگرال دیفرانسیل تفاضلی فردهم

معادلات انتگرال دیفرانسیل تفاضلی با شرایط اولیه زیر مفروض است:

$$\sum_{i=0}^{\nu} p_i(x) U^{(i)}(x) + \sum_{i=0}^{\nu^*} p_i^*(x) U^{(i)}(x - \tau) = f(x) + \int_a^b K(x, t) U(t - \tau) dt, \quad (3)$$

با شرایط اولیه که $c \in [a, b]$

$$\sum_{k=0}^{s-1} [\alpha_{ik} U^{(k)}(a) + \beta_{ik} U^{(k)}(b) + \gamma_{ik} U^{(k)}(c)] = \lambda_i, \quad i = 0, \dots, s-1$$

در این روش ابتدا تابع تقریب جواب یعنی $U_n(x)$ و بقیه توابع در (۳) را به فرم ماتریسی تبدیل کرده و سپس، نمایش ماتریسی عبارت انتگرال به صورت زیر بدست می آید:

$$\begin{aligned} \int_a^b K(x, t) U(t - \tau) dt &= \int_a^b X^T(x) G^T K G X(t) X^T(t) H^T G^T \underline{b}_n^T dt, \\ &= X^T(x) G^T K G \int_a^b X(t) X^T(t) dt H^T G^T \underline{b}_n^T, \\ &= \underline{b}_n G H B^T G^T K^T G X(x), \end{aligned}$$

که در آن

$$B = \int_a^b X(t) X^T(t) dt.$$

به همین ترتیب فرم ماتریسی (۳) به صورت زیر بدست می آید:

$$\underline{b}_n (G \Pi + G H \Pi^* - G H B^T G^T K^T G) = \underline{F} G$$

همچنین با در نظر گرفتن شرایط اولیه و معادله بدست آمده از بالا به دستگاه معادلات زیر می رسم:

$$\underline{b}_n \hat{W} = \hat{F}, \quad (4)$$

اگر ماتریس \hat{W} معکوس پذیر باشد، با حل دستگاه، ضرایب مجهول b_0, \dots, b_n بدست می آید. در نتیجه جواب تقریبی $U_n(x)$ در پایه دلخواه محاسبه می شود.



۴ مثال عددی

معادله انتگرال دیفرانسیل تفاضلی زیر را در نظر بگیرید:

$$xU(x) + (x^2 + 1)U'(x) - U'(x-1) - xu''(x-1) = f(x) + \int_{-1}^1 xU(t-1)dt,$$

که در آن

$$f(x) = x \cos(x+1) - x^2 \sin(x+1) - \sin(x+1) + \sin x + x \cos x - 2x \sin(1)$$

با شرایط اولیه $U(1) = \cos(2)$. جواب های تقریبی در جدول زیر آورده شده است و جهت مقایسه، جواب دقیق معادله $\cos(x+1)$ است.

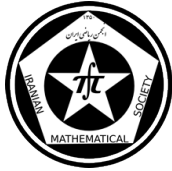
جدول ۱: نتایج عددی با پایه های استاندارد و چبیشف با در نظر گرفتن $n = 5$

x	جواب دقیق	پایه استاندارد	پایه چبیشف	خطا
-۱	۱	۱/۰۰۸۳	۱/۰۰۸۳	۰/۰۰۸۳
-۰/۹	۰/۹۹۵۰	۰/۹۹۵۸	۰/۹۹۵۸	۰/۰۰۰۸
-۰/۸	۰/۹۸۰۱	۰/۹۷۳۲	۰/۹۷۳۲	۰/۰۰۶۹
-۰/۷	۰/۹۵۵۳	۰/۹۴۰۵	۰/۹۴۰۵	۰/۰۱۴۸

مراجع

- [1] A. Deb, G. Sarkar, S. K. Sen, *Block pulse functions, the most fundamental of all piecewise constant basis functions*, Int. J. Syst. Sci., 25(2), 351-363 (1994).
- [2] H. R. Marzban, M. Razzaghi, *Optimal control of linear delay systems via hybrid of block-pulse and Legendre polynomials*, J. Franklin Inst., 341, 279-293 (2004).
- [3] E. L. Ortiz, H. Samara, *An Operational Approach to the Tau Method for the Numerical Solution of Non-Linear Differential Equations*, London, Computing 27, 15-25 (1981).
- [4] K. R. Palanisamy, G. P. Rao, *Optimal control of linear systems with delays in state and control via Walsh function*, Proc. Inst. Electr. Eng., 130, 300-312 (1983).
- [5] M. Y. Rahimi, S. Shahmorad, F. Talati, A. Tari, *An operational method for the numerical solution of two dimensional linear fredholm integral equations with an error estimation*, Bulletin of the Iranian Mathematical Society Vol. 36 No. 2 (2010), pp 119-132.
- [6] M. Razzaghi, H. R. Marzban, *Direct method for variational problems via hybrid of block-pulse and Chebyshev functions*, Math. Probl. Eng., 6, 85-97 (2000).

پست الکترونیکی: fariba.zerehpoosh@gmail.com
پست الکترونیکی: arivaz@uk.ac.ir



حل معادله Camassa-Holm با استفاده از توابع پایه شعاعی بر اساس روش تفاضلات متناهی

الهه هادی ورنامخواستی*
دانشگاه آزاد شهرکرد

سید محمد حسینی هرات - فرهاد خاکسار حقانی
دانشگاه آزاد شهرکرد

چکیده

در این پژوهش، توابع پایه شعاعی و روش تفاضلات متناهی برای حل معادلات غیرخطی Camassa-Holm به کار برده شده است. این روش، معادله Camassa-Holm را به یک دستگاه جبری غیرخطی تبدیل می‌کند که با استفاده از نرم افزار Matlab حل شده است. نتایج عددی ارائه شده نشان می‌دهد که این روش برای حل این دسته از معادلات موثر می‌باشد.

واژه‌های کلیدی:

Camassa-Holm equation, Radial Basic function, finite differential method, compact finite differential method

Mathematics Subject Classification [2010]: 65M06

۱ مقدمه

معادله C-H را به فرم زیر در نظر بگیرید [۴]:

$$u_t - u_{xxt} + 3u^2 u_x = 2u_x u_{xx} + uu_{xxx},$$

این معادله را می‌توان به عنوان یک معادله‌ی مجانبی برای امواج سطحی آب‌های کم عمق در نظر گرفت که دارای ساختار دو همپلوتونی انتگرال‌پذیر است. در سال‌های اخیر نیز تلاش‌هایی برای حل عددی این معادله انجام گرفته شده است. در بخش ۲، معادله‌ی C-H را به روش تفاضلات متناهی کرانک نیکلسون جداسازی نموده و سپس با استفاده از توابع پایه شعاعی به حل عددی آن خواهیم پرداخت. در بخش ۳ نیز با ارائه مثال عددی، روش عددی را در بوته‌ی آزمایش قرار خواهیم داد.

۲ نتایج اصلی

ساختار روش عددی: معادله‌ی C-H با فرم

$$u_t - u_{xxt} + 3u^2 u_x = 2u_x u_{xx} + uu_{xxx}, \quad (1)$$

با شرایط اولیه

$$u(x, 0) = f(x), \quad x \in \bar{\Omega} = [a, b],$$

* سخنران



و شرایط مرزی

$$u(a, t) = g_a(t), \quad u(b, t) = g_b(t), \quad t \geq 0,$$

در نظر می‌گیریم، که در آن $f(x)$ و $g_a(t)$ و $g_b(t)$ ، توابعی معلوم هستند.

ابتدا با استفاده از روش کلاسیک تفاضلات متناهی کرانک نیکلسون [۱]، معادله C-H را در دو زمان n و $n+1$ به صورت زیر جداسازی می‌کنیم

$$\frac{u^{n+1} - u^n}{k} - \frac{(u_{xx}^{n+1} - u_{xx}^n)}{k} + \frac{3}{2} \left(\frac{(u^2 u_x)^{n+1} + (u^2 u_x)^n}{2} \right) = \frac{2}{2} \left(\frac{(u_x u_{xx})^{n+1} + (u_x u_{xx})^n}{2} \right) + \left(\frac{(u u_{xxx})^{n+1} + (u u_{xxx})^n}{2} \right), \quad (2)$$

$$u^n = u(x, t^n), \quad t^n = t^{n+1} + k,$$

که در آن k ، گام زمانی می‌باشد. با استفاده از بسط تیلور با ضرب طرفین در k و جدا کردن جملات n و $n+1$ معادله نهایی زیر را داریم

$$\begin{aligned} & u^{n+1} - (u_{xx})^{n+1} + \frac{3k}{2} ((u^2)^n (u_x)^{n+1} + 2(u^n)(u_x)^n u^{n+1}) \\ & - k((u_x)^n (u_{xx})^{n+1} + (u_{xx})^n (u_x)^{n+1}) - \frac{k}{2} (u^n (u_{xxx})^{n+1} + (u_{xxx})^n u^{n+1}) \\ & = u^n - u_{xx}^n + \frac{3k}{2} (u^2 u_x)^n. \end{aligned} \quad (3)$$

اکنون مجموعه‌ی نقاط $x_i : i = 1, \dots, N$ روی $\bar{\Omega}$ را طوری انتخاب می‌کنیم که نقاط x_2, \dots, x_{N-1} درونی و x_1, x_N نقاط مرزی شبکه می‌باشد.

تقریب زیر را در نظر می‌گیریم $u(x, t^n) = u^n(x) \simeq \sum_{j=1}^n \lambda_j^n \Phi_j(x)$ که در آن λ_j^n ها ضرایب مجهول و $\Phi_j(x) = \varphi(\|x - x_j\|)$ و $\varphi(x)$ نمایش تابع گوسی [۲]، $\varphi(r) = e^{-(cr)^2}$ ، C پارامتر شکلی توابع پایه شعاعی می‌باشد که $\|\cdot\|$ بیانگر نرم اقلیدسی است. اینک برای هر نقطه‌ی x_i داریم

$$u^n(x_i) = \sum_{j=1}^n \lambda_j^n \Phi_j(x_i). \quad (4)$$

با نمایش ماتریسی

$$\begin{aligned} u^n &= A \lambda^n \\ A &= [\Phi_j(x_i) : i = 1, \dots, N \quad j = 1, \dots, N]_{N \times N} \\ \lambda^n &= [\lambda_1^n, \dots, \lambda_N^n]^T \end{aligned} \quad (5)$$

اکنون ماتریس A را به دو زیر ماتریس A_d و A_b که به ترتیب به $N-2$ نقطه‌ی داخلی شبکه و دو نقطه‌ی مرزی مربوط می‌شوند جدا کرده و خواهیم داشت $A = A_d + A_b$ ، که در آن

$$A_d = \begin{cases} \Phi_j(x_i), & 2 \leq i \leq N-1, \quad 1 \leq j \leq N, \\ 0, & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$



و

$$A_b = \begin{cases} \Phi_j(x_i), & i = 1, 2, \dots, N, \\ \circ, & \text{در غیر این صورت} \end{cases} \quad 1 \leq j \leq N,$$

حال با جایگذاری رابطه‌ی (۴) در معادله‌ی (۳) و همچنین شرایط مرزی و استفاده از نقاط شبکه‌ای، شکل ماتریسی آن به صورت زیر است:

$$\begin{aligned} M\lambda^n &= R \quad M = A - Ad_1 + \frac{3k}{4}(B + C) - k(E + D) - \frac{k}{4}(F + G), \\ R &= (Ad - Ad_1 + \frac{3k}{4}B)\lambda^n + H^{n+1}, \\ B &= ((Ad.\lambda^n)^T * Ad_1), \quad D = ((Ad_1.\lambda^n) * Ad), \\ C &= (2(Ad.\lambda^n) * (Ad_1).\lambda^n) * Ad, \quad F = ((Ad.\lambda^n) * (Ad_1)), \\ E &= ((Ad_1.\lambda^n) * (Ad)), \quad G = ((Ad_1.\lambda^n) * (Ad)), \\ H &= [g_a^{n+1}, \circ, \dots, \circ, g_b^{n+1}], \\ Ad_1 &= \begin{cases} \Phi'_j(x_i), & 2 \leq i \leq N-1, \quad j = 1, \dots, N, \\ \circ, & \text{در غیر این صورت} \end{cases} \\ Ad_2 &= \begin{cases} \Phi'_j(x_i), & 2 \leq i \leq N-1, \quad j = 1, \dots, N, \\ \circ, & \text{در غیر این صورت} \end{cases} \\ Ad_3 &= \begin{cases} \Phi''_j(x_i), & 2 \leq i \leq N-1, \quad j = 1, \dots, N, \\ \circ, & \text{در غیر این صورت} \end{cases} \end{aligned} \quad (6)$$

که * به معنی ضرب مولفه‌ی بردار در سطر نظیر ماتریس است.

نتایج عددی:

نرم بی نهایت خطا توسط فرمول زیر محاسبه می‌شود | تقریبی $u(i)$ - دقیق $u(i)$ | $L_\infty = \max_{1 \leq i \leq N} |u(i) - u(i)|$. همان طور که می‌دانیم جواب دقیق معادله‌ی C-H به صورت $u(x, t) = -2 \operatorname{sech}^2 \frac{1}{4}(x - 2t)$ با شرایط اولیه $u(x, 0) = -2 \operatorname{sech}^2 \frac{1}{4}x$ می‌باشد. شرایط مرزی را نیز از جواب دقیق می‌توان به دست آورد. در جدول نتایج عددی روش پیشنهاد شده در این مقاله با جواب دقیق آن به ازای مقادیر N و k های متفاوتی مقایسه شده‌اند که در آن $c = 0.2$ است.

$N = 51$			
k	L_∞	N	L_∞
0.01	2.263×10^{-5}	21	2.9×10^{-2}
0.001	5.162×10^{-7}	41	1.269×10^{-6}
0.0001	5.162×10^{-7}	61	2.264×10^{-7}
0.00001	5.162×10^{-7}	81	3.342×10^{-4}



در جدول زیر نرم بینهایت خطا به ازای E های متفاوت گزارش شده است.

$N = 61$	
c	L_∞
1	2.143×10^{-7}
2	4.358×10^{-6}
5	2.85×10^{-1}
10	3.012×10^{-1}

مراجع

- [1] K. Bajoo, M. K. A. wasthi, *a numerical method based on crank-nicolson scheme for Burgers' equation*, j. comput. Appl. Math, 3 (2006), pp. 1430–1442.
- [2] A. Golbabai, D. Ahmadian, M. Mariyan, *Radial basis function with application to finance: American put option under jump diffusion*, Math comput Model, 55 (2012), pp. 1354–63
- [3] M. Tatri, M. Dehghan, *A method for solving partial differential equations via redial basis functions application to the heat equation*, Eng. Anal Bound elem., 34 (2010), pp. 206–12
- [4] J. Zhou, L. Tian, *Blow-up of solution of an initial boundary value problem for a generalized Camassa-Holm equation*, physics letters A. 327 (2008), pp. 3659–3666.

پست الکترونیکی: elahehadi@yahoo.com
پست الکترونیکی: haghani1351@yahoo.com
پست الکترونیکی: smhosseini86@gmail.com



روش تقریب کمترین مربعات برای حل معادلات انتگرال ولترای خطی

مریم جوادی نژاد*
دانشگاه سیستان و بلوچستان

مریم عرب عامری
دانشگاه سیستان و بلوچستان

چکیده

این مقاله روش عددی کارآمدی برای بدست آوردن تقریبی از جواب معادلات انتگرال ولترای خطی را معرفی می‌کند. در این مقاله جواب معادله انتگرال به صورت یک چندجمله‌ای درجه n در نظر گرفته شده و این چند جمله‌ای درجه n به روش تقریب کمترین مربعات محاسبه می‌شود. در نهایت دقت و کارایی روش تقریب کمترین مربعات، توسط مثال عددی نشان داده شده است.

واژه‌های کلیدی: روش تقریب کمترین مربعات، معادلات انتگرال ولترای خطی، فضای خطی

Mathematics Subject Classification [2010]: 45 D05

۱ مقدمه

معادلات انتگرال ابزار اصلی در زمینه‌های مختلفی چون، ریاضیات کاربردی، فیزیک و مهندسی می‌باشند، از این رو پژوهش‌های وسیعی بر معادلات انتگرال و کاربردهای آن صورت گرفته است. در این مقاله به دنبال معرفی روشی برای تقریب جواب معادله انتگرال ولترای خطی به فرم:

$$A(x)y(x) = f(x) + \lambda \int_a^{h(x)} \kappa(x, t)y(t)dt \quad (1)$$

هستیم که در آن $f(x)$ ، $h(x)$ ، $A(x)$ ، $\kappa(x, t)$ ، توابعی معلوم روی بازه $[a, b]$ و a, b ثابت هستند. $y(x)$ تابعی پیوسته در نظر گرفته شده و $\lambda \in R$ ، علاوه بر این $\kappa(x, t)$ هسته انتگرال به صورت $\kappa(x, t) = \sum_{i=0}^n Q_i(x)P_i(t)$ در نظر گرفته می‌شود. همچنین روشهای عددی بسیاری چون، روش تجزیه آدومیان، روش بسط سری‌های تیلور و روش تبدیل دیفرانسیل برای حل معادلات انتگرال ولترای خطی معرفی شده اند [۱-۳]. در این مقاله، به معرفی روش عددی دیگری به نام روش تقریب کمترین مربعات می‌پردازیم.

۲ روش تقریب کمترین مربعات

فرض کنید $A(x)$ و $\kappa(x, t)$ شرط وجود و منحصر بفردی جواب معادله (۱) را داشته باشند. ابتدا عملگر $T(x, y(x))$ را به فرم:

$$T(x, y(x)) = A(x)y(x) - f(x) - \lambda \int_a^{h(x)} \kappa(x, t)y(t)dt \quad (2)$$

* سخنران



تعریف می‌کنیم. فرض کنید برای n های صحیح مثبت، $\varphi_0(x), \varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x)$ توابع مستقل خطی روی بازه $[a, b]$ و فضای خطی تولید شده توسط $\{\varphi_0(x), \varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x)\}$ باشد.

فرض کنید $y_n(x) \in \Phi_n$ ، بنابراین ضرایب c_0, c_1, \dots, c_n وجود دارند، به طوری که

$$y_n(x) = \sum_{i=0}^n c_i \varphi_i(x) \quad (۳)$$

با جایگذاری ۳ در رابطه ۲ خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} T(x, y_n(x)) &= A(x)y_n(x) - f(x) - \lambda \int_a^{h(x)} \kappa(x, t)y_n(t)dt \\ &= \sum_{i=0}^n c_i [A(x)\varphi_i(x) - \lambda \int_a^{h(x)} \kappa(x, t)\varphi_i(t)dt] - f(x) \\ &= \sum_{i=0}^n c_i \alpha_i(x) - f(x) \end{aligned} \quad (۴)$$

که به ازای $i = 0, 1, \dots, n$ و $\alpha_i(x) = A(x)\varphi_i(x) - \lambda \int_a^{h(x)} \kappa(x, t)\varphi_i(t)dt$ به ازای هر $x \in [a, b]$ باقیمانده به صورت،

$$\begin{aligned} R_n(x) &= T(x, y_n(x)) - T(x, y(x)) \\ &= A(x)(y_n(x) - y(x)) - \lambda \int_a^{h(x)} \kappa(x, t)(y_n(t) - y(t))dt \end{aligned}$$

قابل تعریف است.

ملاحظه ۱.۲. اگر $R_n(x) = 0$ آنگاه $y(x) = y_n(x)$ و اگر $R_n(x) = 0$ آنگاه $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n(x) = y(x)$.

ملاحظه ۲.۲. به ازای هر $x \in [a, b]$ اگر $R_n(x) = 0$ آنگاه، جواب دقیق معادله (۱)، و اگر $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0$ آنگاه $y_n(x)$ همگرا به جواب دقیق معادله (۱) است.

در ادامه فرض کنید:

$$I(c_0, c_1, \dots, c_n) = \int_a^{h(x)} T^2(x, y_n(x))dx \quad (۵)$$

هدف در این قسمت پیدا کردن ضرایب حقیقی c_0, c_1, \dots, c_n است. این هدف با مینیمم سازی I محقق خواهد شد، شرط لازم برای مینیمم سازی I این است که:

$$\frac{\partial I}{\partial c_i} = 0$$



برای هر $i = 0, 1, \dots, n$ از رابطه (۵) داریم:

$$\begin{aligned} \frac{\partial I}{\partial c_i} &= 2 \int_a^b T(x, y_n(x)) \cdot \frac{\partial T(x, y_n(x))}{\partial c_i} dx \\ &= 2 \int_a^b \left\{ \sum_{j=0}^n [A(x)\varphi_j(x) - \lambda \int_a^{h(x)} \kappa(x, t)\varphi_j(t) dt] \cdot c_j - f(x) \right\} \\ &\quad [A(x)\varphi_i(x) - \lambda \int_a^{h(x)} \kappa(x, t)\varphi_i(t) dt] dx \\ &= 2 \left[\int_a^b \sum_{j=0}^n c_j \alpha_j(x) \cdot \alpha_i(x) dx - \int_a^b f(x) \alpha_i(x) dx \right] \\ &= 0 \end{aligned}$$

بنابراین برای $i = 0, 1, \dots, n$ داریم:

$$\sum_{j=0}^n c_j \int_a^b \alpha_j(x) \cdot \alpha_i(x) dx = \int_a^b f(x) \alpha_i(x) dx \quad (6)$$

حال برای بدست آوردن y_n دستگاه $(n+1)$ معادله $(n+1)$ مجهولی زیر را خواهیم داشت:

$$G_n \cdot C = F \quad (7)$$

که در آن $G_n = [G_{ij}]_{n \times n}$ به طوری که، $G_{ij} = \int_a^b \alpha_j(x) \cdot \alpha_i(x) dx$ برای هر $i, j = 0, 1, \dots, n$ ، $F = [F_0, F_1, \dots, F_n]^T$ و $C = [c_0, c_1, \dots, c_n]^T$ که برای هر $i = 0, 1, \dots, n$

$$F_i = \int_a^b f(x) \alpha_i(x) dx.$$

۳ همگرایی و خطا

قضیه ۱.۳. [۴] فرض کنید $y(x)$ یک جواب دقیق تعریف شده روی $[a, b]$ و $y_n(x)$ تقریب جواب رابطه (۱) باشند. اگر $\exists P_n(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i$ و $a_i \in R$ به طوری که $\forall x \in [a, b], \lim_{n \rightarrow \infty} P_n(x) = y(x)$ ، آنگاه

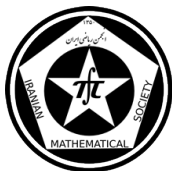
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b T^2(x, y_n(x)) dx = 0$$

گزاره ۲.۳. در این مقاله خطا را با استفاده از δ_n محاسبه می‌کنیم که در آن، $\delta_n \approx \left[\int_a^b e_n^2(x) dx \right]^{\frac{1}{2}}$ به طوری که e_n به فرم:

$$e_n(x) = y(x) - y_n(x)$$

تعریف می‌شود.

همچنین برای راحتی محاسبات، فرض کنید $\Phi_n = \text{span}\{\varphi_0(x), \varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x)\}$ توابع چندجمله‌ای از درجه n باشند.



۴ نتیجه عددی

معادله انتگرال ولترای خطی زیر را در نظر بگیرید:

$$y(x) = f(x) + \int_0^x (x-t)y(t) dt \quad f(x) = 1 - x - \frac{x^2}{2}$$

که جواب دقیق معادله انتگرال، برای هر $x \in [0, 1]$ $y(x) = (1 - \sinh(x))$ است. به عنوان مثال برای $x = 0.5$ مقادیر خطا در جدول ۱ آورده شده است.

جدول ۱: مقایسه خطا برای مثال عددی

n	δ_n
۶	$1.69e - 8$
۷	$2.46e - 10$
۸	$1.47e - 11$

نتیجه گیری

روش کمترین مربعات روش عددی کارآمدی برای حل معادلات انتگرال ولترای خطی است. که در آن جواب معادله انتگرال به فرم چندجمله‌ای در نظر گرفته شده و به روش تقریب کمترین مربعات حل می‌شود. مثال عددی نشان می‌دهد که روش پیشنهادی می‌تواند یک روش قدرتمند برای محاسبه تقریب جواب معادله انتگرال ولترا باشد.

مراجع

- [1] S. Abbasbandy, *Numerical solutions of the integral equations: homotopy perturbation method and Adomian's decomposition method*, Appl. Math. Comput, 173(2006), pp. 493-500.
- [2] K. Maleknejad, N. Aghazadeh, *Numerical solution of Volterra integral equations of the second kind with convolution kernel by using Taylor-series expansion method*, Appl. Math. Comput, vol. 161(2005), pp. 915-922.
- [3] Zaid M. Odibat, *Differential transform method for solving Volterra integral equation with separable kernels*, Math. Comput. Modelling, 48 (2008), pp. 1144-1149.
- [4] Q.Wang, K. wang, S. chen, *Least Squares approximation method for the solution of Volterra-Fredholm integral equations*, Comput. Appl. Math, 272 (2001), pp. 141-147.

پست الکترونیکی: arabameri@math.usb.ac.ir

پست الکترونیکی: maryam_jn@pgs.usb.ac.ir



روش جواب‌های خاص تقریبی برای حل معادله‌های مشتق پاره‌ای مستقل از زمان مرتبه ۴

مهرنوش عبدوس

دانشگاه تفرش

چکیده

یکی از روش‌ها برای حل معادله با مشتق پاره‌ای، روش جواب‌های خاص تقریبی MAPS است. در این روش از توابع پایه‌ای شعاعی چندمربعی و مخروطی استفاده می‌شود. در پردازش جواب، عملگر لاپلاس در طرف چپ به عنوان عملگر اصلی نگه داشته می‌شود. بقیه جمله‌ها به سمت راست برده می‌شود. مزیت این روش آن است که روش یک مرحله‌ای و همچنین بی‌نیاز از شبکه و مشکل‌های ناشی از آن است. در روش جدید، فرم بسته جواب ویژه برای انواع مختلف توابع پایه‌ای شعاعی به آسانی به دست می‌آید. روش جدید در پیاده سازی بسیار دقیق و آسان است.

واژه‌های کلیدی: تابع پایه شعاعی، روش بی‌نیاز از شبکه، جواب خاص، معادله مشتق پاره‌ای بیضوی

۱ مقدمه

یکی از چالش‌های مهم و بزرگ در مسائل مهندسی، تولید یک شبکه‌ی مناسب است. برای غلبه بر این مسأله در سه دهه‌ی گذشته تعدادی راه کار عددی معروف به روش‌های بی‌نیاز از شبکه ارائه شده‌اند که ایده‌ی تولید یک شبکه برای گسسته‌سازی مکانی PDE حاکم را در برخی موارد به دور انداخته‌اند. این روش‌ها انواع گوناگونی دارند، یکی از شناخته شده‌ترین و پرکاربردترین این روش‌ها، روش توابع پایه‌ای شعاعی است. در سه دهه گذشته استفاده از توابع پایه‌ای شعاعی (RBFs) به عنوان یک روش بدون شبکه‌بندی، در علوم مختلف، به طور چشمگیری افزایش یافته است. کاربرد توابع پایه شعاعی در نقشه‌برداری، ژئوفیزیک، نقشه‌کشی و علم هواشناسی بوده است و البته با گذشت زمان این روش در زمینه‌های دیگری از قبیل حل عددی PDE ها، هوش مصنوعی، نظریه یادگیری، شبکه‌های عصبی، نظریه پردازش سیگنال، آمارو بهینه‌سازی به کاربرده شدند. روش توابع پایه شعاعی در واقع تعمیم روش چندمربعی یا به اختصار MQ که در سال ۱۹۶۸ توسط زمین‌شناسی به نام هاردی ارائه شده است. استفاده از توابع پایه‌ای شعاعی RBFs به عنوان یک روش بی‌نیاز از شبکه برای حل PDE ها مزیت‌هایی دارد، این روش بی‌نیاز از شبکه و مستقل از بعد فضا است و علاوه بر این برخی توابع پایه‌ای شعاعی در زمینه‌ی درونیابی داده‌های پراکنده مرتبه‌ی همگرایی طیفی دارند [۴]. دربخش اول مقاله الگوریتم روش جواب‌های خاص تقریبی و دربخش دوم یک مسئله همراه با نتایج اصلی و درنهایت نتیجه‌گیری جمع بندی می‌گردد.

بخش ۱: الگوریتم روش MAPS

معادله با مشتق‌های پاره‌ای بیضوی مرتبه چهار را در بعد دو در نظر بگیرید:

$$\Delta^2 u(x, y) + \alpha(x, y) \frac{\partial u(x, y)}{\partial x} + \beta(x, y) \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} + \gamma(x, y) u(x, y) = f(x, y), \quad (x, y) \in \Omega \quad (1)$$



با شرط مرزی دیریکله

$$u(x, y) = g(x, y), \quad (x, y) \in \partial\Omega \quad (۲)$$

یا شرط مرزی لاپلاس

$$\Delta u(x, y) = g(x, y), \quad (x, y) \in \partial\Omega \quad (۳)$$

و شرط مرزی نیومن

$$\frac{\partial u(x, y)}{\partial \mathbf{n}} = h_1(x, y), \quad (x, y) \in \partial\Omega \quad (۴)$$

و برای PDE مرتبه چهار رابطه‌ی (۱) به صورت

$$\Delta^2 u(x, y) = R(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}), \quad (x, y) \in \Omega$$

بازنویسی شوند به طوری که

$$R(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}) = -\alpha(x, y) \frac{\partial u(x, y)}{\partial x} - \beta(x, y) \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} - \gamma(x, y) u(x, y) + f(x, y).$$

پس از به دست آوردن جواب ویژه، جواب دقیق به شکل زیر تقریب زده می‌شود ایده‌ی اصلی در روش جواب‌های خاص تقریبی، تقریب جواب u توسط یک ترکیب خطی از توابع پایه شعاعی است:

(۵)

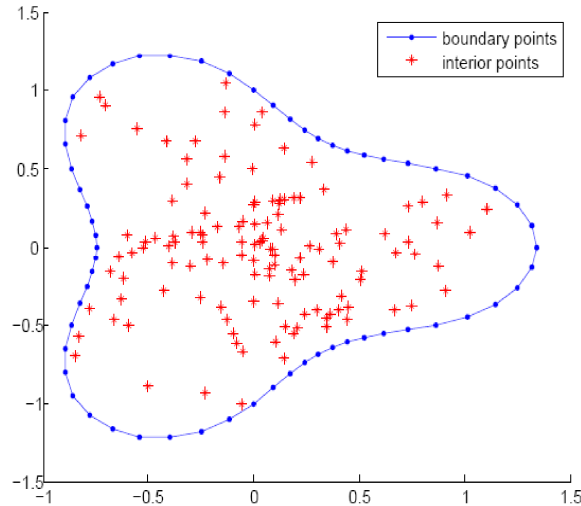
$$\hat{u}(x, y) = \sum_{j=1}^n a_j \Phi(r_j), \quad \Delta \Phi(r) = \phi(r), \quad \phi_j(r) = \sqrt{r_j^2 + c^2}, \quad r_j = \sqrt{(x - x_j)^2 + (y - y_j)^2},$$

و $\{a_j\}_{j=1}^n$ ضریب‌های مجهولی هستند که باید به دست آورده شوند. c پارامتر شکل بهینه است. با توجه به (۵) دستگاه معادله‌های (۱)، (۲)، (۳) به صورت زیر نوشته می‌شود

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n a_j (\Delta^2 \phi_j + \alpha \frac{\partial \phi_j}{\partial x} + \beta \frac{\partial \phi_j}{\partial y} + \gamma \phi_j)(r_i) &= f(x_i, y_i), & i = 1, 2, \dots, n_i \\ \sum_{j=1}^n a_j \Phi_j(r_i) &= g(x_i, y_i), & i = n_i + 1, \dots, n \\ \sum_{j=1}^n a_j \Delta \Phi_j(r_i) &= h_1(x_i, y_i), & i = n_i + 1, \dots, n. \end{aligned} \quad (۶)$$

و به‌طور خلاصه‌تر می‌توان معادله‌های فوق را به صورت زیر نوشت:

$$\begin{bmatrix} \Delta^2 \phi + \alpha \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \beta \frac{\partial \Phi}{\partial y} + \gamma \Phi \\ \Phi \\ \Delta \Phi \end{bmatrix} a = \begin{bmatrix} f \\ g \\ h_1 \end{bmatrix} \quad (۷)$$



شکل ۱: دامنه‌ی محاسباتی مسئله

می‌توان نوشت. مراحل بالا برای عملگر مشتق دوهم‌ساز با شرط مرزی نیومن یعنی برای (۴) می‌تواند با یک دستگاه خطی به شکل زیر نشان داده شود

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n a_j \left(\phi_j + \alpha \frac{\partial \Phi_j}{\partial x} + \beta \frac{\partial \Phi_j}{\partial y} + \gamma \Phi_j \right) (r_i) &= f(x_i, y_i), & i = 1, 2, \dots, n_i \\ \sum_{j=1}^n a_j \Phi_j(r_i) &= g(x_i, y_i), & i = n_i + 1, \dots, n \\ \sum_{j=1}^n a_j \frac{\partial \Phi_j}{\partial \mathbf{n}} &= h_1(x_i, y_i) \cdot \mathbf{n}, & i = n_i + 1, \dots, n \end{aligned} \quad (8)$$

و با حل دستگاه (۹)، $\{a_j\}_{j=1}^n$ به دست آورده می‌شوند.

$$\begin{bmatrix} \phi + \alpha \Phi_x + \beta \Phi_y + \gamma \Phi \\ \Phi \\ \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{n}} \end{bmatrix} a = \begin{bmatrix} f \\ g \\ h_1 \cdot \mathbf{n} \end{bmatrix}. \quad (9)$$

با توجه به آنچه بیان شد در این حالت به ماتریس دستگاه (۹) یک بلوک دیگر اضافه می‌شود.

بخش ۲: مسئله

۱- معادله با مشتق‌های پاره‌ای

$$k \Delta^\nu u(x, y) + x^\nu y^\nu u(x, y) + y \cos(y) \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) + \sinh(x) \frac{\partial u}{\partial y} = f(x, y), \quad (x, y) \in \Omega$$



با شرایط مرزی دیریکله

$$u(x, y) = \sin(\pi x) \cosh(y) - \cos(\pi x) \sinh(y), \quad (x, y) \in \partial\Omega$$

و شرایط مرزی نرمال (نیومن)

$$\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}(x, y) = g(x, y) \cdot \mathbf{n}, \quad (x, y) \in \partial\Omega.$$

را در نظر بگیرید خطاهای $RMSE$ و $RMSE_x$ برای شرایط مرزی نرمال در جدول زیر آورده شده است.

k	c	RMSE	RMSE _x
۰.۰۰۰۱	۲.۶۸	$۱.۰۸۴E - ۰۶$	$۳.۳۸E - ۰۴$
۰.۰۰۱	۲.۰۵	$۷.۳۵E - ۰۶$	$۱.۶۰E - ۰۳$
۰.۰۱	۲.۱۶	$۱.۰۱۶E - ۰۷$	$۹.۸۱E - ۰۵$
۱	۱.۰۵	$۵.۵۶E - ۰۶$	$۱.۶۴E - ۰۲$
۱۰	۱.۱۷	$۱.۵۹E - ۰۶$	$۲.۴۰E - ۰۳$
۱۰۰	۱.۰۷	$۱.۶۵E - ۰۵$	$۶.۷۰E - ۰۳$
۱,۰۰۰	۰.۶۵	$۱.۱۴E - ۰۵$	$۳.۷۷E - ۰۲$

جدول ۱: شکل پارامتر بهینه از MQ، RMSE و RMSE_x به ترتیب برای k مختلف

نتیجه‌گیری

روش جدید مشکلات ناشی از شبکه‌بندی را ندارد و حجم پیاده‌سازی نسبت به دیگر روش‌های شبکه‌بندی بسیار کم است. علاوه بر این عموماً، k کوچک برای شبیه‌سازی عددی خیلی سخت است. ولی روش گسترش یافته برای مقادیر مختلف تفاضل کمتری را ارائه می‌کند. از این رو طرح بی‌نیاز از شبکه گسترش یافته برای گروه بزرگی از مقادیر k پایدارتر است. همچنین روش گسترش یافته نتایج خوبی برای مرتبه‌ی چهار نیز ارائه می‌کند.

مراجع

- [1] Chen, C.S.; Fan, C.M.; Wen, P.H. The method approximate particular solutions for solving elliptic problem with variable coefficient. *Int. J. Comput. Meth.* 8, (2011), PP 545-559
- [2] Fox, L.; Henrici, P.; Moler, C.B. Approximations and bounds for eigenvalues of elliptic operators. *SIAM J Numer. Anal.*, 4(1967), PP 89-102.
- [3] Fairweather, G.; Karageorghis, A. The method of fundamental solutions for elliptic boundary value problems. *Adv. Comput. Math.* 9, (1989), PP 69-95.
- [4] ZHANG, X.; SONG, K.Z.; LU, M.W.; LIU, X. Meshless method based on collocation with radial basis functions. *Comput. Mech.* 26, (2000), PP 333-343.

پست الکترونیکی: mehrnosh.abdous@gmail.com



روش گالرکین ناپیوسته با نقاط گاوس-رادو برای قوانین بقای هذلولوی

هدی دالیه دزفولی
دانشگاه صنعتی سهند

جواد فرضی*
دانشگاه صنعتی سهند

چکیده

در این مقاله روش گالرکین ناپیوسته مبتنی بر نقاط گاوس-رادو برای معادلات هذلولوی حاصل از قوانین بقای هذلولوی مطرح می شود. برای گسسته سازی مکان از روش گالرکین ناپیوسته، می توان سه عملگر تصویر متفاوت تعریف کرد و برای گسسته سازی زمان از روش رونگه کوتای مرتبه سوم حافظ پایداری قوی استفاده می شود. نتایج عددی برای حالت قوانین بقای خطی ارائه شده است.

واژه‌های کلیدی: روش گالرکین ناپیوسته، قوانین بقا، نقاط گاوس-رادو

Mathematics Subject Classification [2010]: 65M60

۱ مقدمه

روش های گالرکین ناپیوسته برای اولین بار توسط ریید^۱ و هیل^۲ در سال ۱۹۷۳ برای انتقال خطی نوترون مطرح شد [۱]. مطالعه این روش ها برای معادله هذلولوی خطی اسکالر توسط جانسون^۳ و پیتکارانتا^۴ صورت گرفت و تخمین خطایی در نرم L^p نیز ارائه دادند [۲]. در ادامه کوکبورن^۵ و همکارانش روش های گالرکین ناپیوسته رونگه کوتا را در یک سری از مقالات قوانین بقای هذلولوی غیرخطی بررسی و ارائه کردند. کارهای زیادی برای مطالعه نرخ همگرایی، تخمین خطا، استفاده از پایه های مختلف از جمله پایه های مبتنی بر مد (توابع پایه) و پایه های نقطه محور تحت عنوان گالرکین ناپیوسته نقطه ای توسعه پیدا کرد که در مراجع به بخشی از آن ها اشاره شده است [۳]. از جمله مراجع اصلی در این زمینه می توان به کتاب گالرکین ناپیوسته نقطه ای هستاوتون^۶ و واربرتون^۷ اشاره کرد که بطور مفصل به نحوه ی پیاده سازی این روش ها نیز پرداخته شده است و نیز می توان به کتاب کوکبورن، کاردنیاداکیس^۸ و شو^۹ مراجعه کرد [۴،۵]. این روش ها که برای معادلات بقای غیرخطی بسیار مناسب هستند بر خلاف روش های اجزاء محدود از شرط پیوستگی در مرز المان ها استفاده نمی کنند. به عبارت دیگر جواب در مرز المان ها ناپیوسته در نظر گرفته می شود و برای حفظ پایداری عددی و خصوصیات پایستگی مساله فیزیکی از شار عددی در مرز المان ها استفاده می شود. در این مقاله روش گالرکین ناپیوسته با نقاط گاوس-رادو با شار بالادست

*استاد راهنما

^۱Reed

^۲Hill

^۳Johnson

^۴Pitkaranta

^۵Cockburn

^۶Jan S. Hesthaven

^۷Tim Warburton

^۸Karniadakis

^۹Shu



^{۱۰} برای معادله بقای هذلولوی خطی اسکالر یک بعدی با روش رونگه کوتای مرتبه سوم مطرح می شود. این نقاط توسط یانگ و شو ^{۱۱} برای اثبات همگرایی سریع روش های گالرکین ناپیوسته برای این معادلات مورد استفاده قرار گرفته اند [۶].

۲ روش های گالرکین ناپیوسته

مساله

$$u_t + u_x = 0, \quad (x, t) \in [0, 2\pi] \times (0, T],$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad x \in R,$$

را با شرایط مرزی متناوب در نظر می گیریم. دامنه محاسباتی $\Omega = [0, 2\pi]$ به N سلول افراز می شود:

$$0 = x_{\frac{1}{N}} < x_{\frac{2}{N}} < \dots < x_{\frac{N+1}{N}} = 2\pi$$

که:

$$I_j = (x_{j-\frac{1}{N}}, x_{j+\frac{1}{N}}), \quad x_j = \frac{1}{N}(x_{j-\frac{1}{N}} + x_{j+\frac{1}{N}})$$

به ترتیب سلول و مرکز سلول j ام هستند. طول هر سلول را با h نشان می دهیم و $h_{\max} = \max_j h_j$, $h_{\min} = \min_j h_j$ به ترتیب طول کوچکترین و بزرگترین سلول ها هستند. برای فرمول بندی روش گالرکین ناپیوسته فضای اجزاء محدود

$$V_h = \left\{ \nu : \nu|_{I_j} \in P^k(I_j), j = 1, \dots, N \right\}$$

تعریف می کنیم که در آن فضای چندجمله ای های در حداکثر از مرتبه k در سلول I_j را نشان می دهد. علاوه بر آن فضای سوبولف زیر را در نظر می گیریم:

$$H_h^1 = \left\{ \phi : \phi|_{I_j} \in H^1(I_j) \forall j \right\}.$$

روش گالرکین ناپیوسته با شار بالادست تابع $u_h \in V_h$ را از رابطه زیر چنان محاسبه می کند که داشته باشیم:

$$((u_h)_t, \nu_h)_j = (u_h, (\nu_h)_x)_j - u_h^- \nu_h^-|_{j+\frac{1}{N}} + u_h^- \nu_h^+|_{j-\frac{1}{N}}, \quad \nu_h \in V_h$$

$(w, \nu)_j = \int_{I_j} w \nu dx$ و $\nu_h^-|_{j+\frac{1}{N}} = \nu_h(x_{j+\frac{1}{N}}^-)$ نشاندهنده ی حد چپ تابع ν_h در $x_{j+\frac{1}{N}}$ است. به طور مشابه ν_h^+

هم تعریف می شود. برای $k \geq 1$ می توان $P_- u$ که تصویر گاوس-رادو u در V_h می باشد را به صورت زیر نوشت:

$$(P_-(u), \nu)_j = (u, \nu)_j \quad \forall \nu \in P^{k-1}(I_j), \quad P_-(u)(x_{j+\frac{1}{N}}^-) = u(x_{j+\frac{1}{N}}^-).$$

همچنین تصویر گاوس-رادو $P_+ u$ روی I_j عبارتست از:

$$(P_+(u), \nu)_j = (u, \nu)_j \quad \forall \nu \in P^{k-1}(I_j), \quad P_+(u)(x_{j-\frac{1}{N}}^+) = u(x_{j-\frac{1}{N}}^+).$$

در هر سلول تفاوت P_+ , P_- در انتهای بازه ها است. همچنین تصویر استاندارد L^2 تابع u عبارتست از:

$$(P_k(u), \nu)_j = (u, \nu)_j \quad \forall \nu \in P^k(I_j).$$

جواب عددی با این تصویر خاص، نسبت به جواب دقیق، نزدیکتر است [۷]. $P_h^\perp = I - P_h$ عملگر خطای تصویر می باشد که P_h یکی از سه تصاویر و I عملگرهمانی است. در لم های زیر دقت تصویرها و همگرایی سریع ارائه می شود [۶].

^{۱۰} upwind^{۱۱} Yang Yang and Chi-Wang Shu



لم ۱.۲. فرض کنیم $u(x) \in C^{k+1}(I_j)$ باشد. سپس ثابت مثبت C وجود دارد که وابسته به hu نیست بطوریکه:

$$\|P_h^\perp u\|_{I_j} \leq Ch_j^{k+1} |u|_{k+1, I_j}, \quad \|P_h^\perp u\|_{\infty, I_j} \leq Ch_j^{k+1} |u|_{\infty, k+1, I_j}.$$

لم ۲.۲. فرض کنیم $u(x) \in C^{k+2}(I_j)$ و x_j نقاط رادو در سلول I_j باشد، آنگاه

$$|(u - P_- u)(x_j)| \leq Ch_j^{k+2} |u|_{k+2, \infty, I_j}.$$

لم ۳.۲. فرض کنیم $u(x)$ تابعی کراندار باشد، آنگاه

$$\|P_h u\|_{\infty, I_j} \leq C \|u\|_{\infty, I_j}, \quad \|P_h^\perp u\|_{\infty, I_j} \leq C \|u\|_{\infty, I_j}.$$

۳ گسسته سازی زمان

برای گسسته سازی زمان از روش رونگه کوتای حافظ پایداری قوی استفاده می شود:

$$\begin{aligned} u^{(1)} &= u^n + \Delta t L(u^n), \\ u^{(2)} &= \frac{3}{4} u^n + \frac{1}{4} u^{(1)} + \frac{1}{4} \Delta t L(u^{(1)}), \\ u^{(n+1)} &= \frac{1}{4} u^n + \frac{3}{4} u^{(2)} + \frac{1}{4} \Delta t L(u^{(2)}), \end{aligned}$$

این روش دارای خاصیت تغییرات کلی کاهشی (TVD) یا به عبارت دیگر حافظ پایداری قوی می باشد. لذا، استفاده از این روش از نوسانات احتمالی که به صورت غیرفیزیکی ممکن است در جواب ظاهر شوند جلوگیری می کند [۸].

۴ نتایج عددی

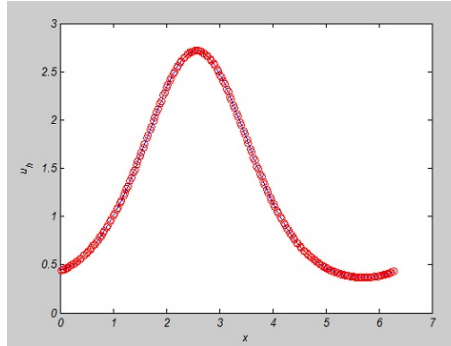
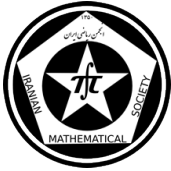
مثال ۱.۴. برای نمایش نتایج عددی مسئله مقدار اولیه مرزی زیر با شرایط مرزی متناوب را در نظر می گیریم:

$$\begin{cases} u_t + u_x = 0, \\ u(x, 0) = e^{\sin(x)}, \\ u(0, t) = u(2\pi, t). \end{cases} \quad (1)$$

جواب با استفاده از نقاط گاوس-رادو $\frac{1}{4}$ و 1 در جدول ارائه شده است.

جدول ۱: خطا در نقاط گاوس-رادو برای (۱) هنگامی که از چندجمله ای مرتبه اول استفاده می شود.

N	h	خطا
۵۰	۰٫۱۲۵۷	$1,10E-03$
۱۰۰	۰٫۰۶۲۸	$2,6163E-04$
۲۰۰	۰٫۰۳۱۴	$6,2689E-05$



شکل ۱: تخمین جواب عددی (۱) در نقاط گاوس-رادو برای $N = 100$

مراجع

- [1] W. H. Reed and T. R. Hill, Triangular mesh for the neutron transport equation, Los Alamos Scientific Laboratory Report LA-UR-73-479, Los Alamos, NM, 1973.
- [2] C. Johnson and J. Pitkaranta, An analysis of the discontinuous Galerkin method for a scalar hyperbolic equation, Math. Comp., 46 (1986), pp. 1–26.
- [3] S. Adjerid and M. Baccouch, Asymptotically exact a posteriori error estimates for a one-dimensional linear hyperbolic problem, Appl. Numer. Math., 60 (2010), pp. 903–914.
- [4] J.-S. Hesthaven, T. Warburton, Nodal discontinuous Galerkin methods, Springer., Island, Texas, 2008.
- [5] B. Cockburn, G. Karniadakis and C.-W. Shu, discontinuous Galerkin method, Springer., Berlin, New York, 2000.
- [6] Y. Yang and C.-W. Shu, Analysis of optimal superconvergence of discontinuous Galerkin method for linear hyperbolic equations, SIAM Journal on Numerical Analysis, 50 (2012), 3110–3133.
- [7] Y. Cheng and C.-W. Shu, Superconvergence of discontinuous Galerkin and local discontinuous Galerkin schemes for linear hyperbolic and convection-diffusion equations in one space dimension, SIAM J. Numer. Anal., 47 (2010), pp. 4044–4072.
- [8] S. Gottlieb, C.-W. Shu, and E. Tadmor, Strong stability-preserving high-order time discretization methods, SIAM Rev., 43 (2001), pp. 89–112.



روش های عددی انتگرال گیری نیوتن - کاتس مبتنی بر مشتق

سید شهریار عزیزی
دانشگاه صنعتی ارومیهاحمد رضا حقیقی*
گروه ریاضی دانشگاه صنعتی ارومیه

چکیده

در این مقاله برای روش انتگرال گیری نیوتن - کاتس، قواعد و فرمول های جدیدی با استفاده از مشتق بدست می آید که بسیار دقیق تر از فرمول های استاندارد نیوتن - کاتس هستند. در این روش از مقدار تابع و مقدار مشتق تابع روی بازه ی یکنواخت استفاده می شود. استفاده از مشتق اول در تمام نقاط بازه درجه ی دقت را تا $2n+2$ افزایش می دهد؛ استفاده از مشتق اول فقط در نقاط پایانی بازه (ابتدا و انتهای بازه) از نظر دقت بین روش بالایی و روش استاندارد نیوتن - کاتس قرار می گیرد. استفاده از مشتق مراتب بالاتر از درجه ی دقت بالاتری برخوردار است؛ در انتها بامثالی نشان می دهیم چه تعداد محاسبه لازم است تا مقدار خطا از حد معینی کمتر شود.

واژه های کلیدی: انتگرال عددی، نیوتن - کاتس بسته، نقاط پایانی^۱ و مبتنی بر مشتق^۲

Mathematics Subject Classification [2010]: 65D30, 65D32

۱ مقدمه

فرمول انتگرال گیری کلی به صورت زیر است:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=0}^n w_i f(x_i) \quad (1)$$

که x_0, x_1, \dots, x_n ، $n+1$ نقطه مشخص انتگرال گیری روی بازه ی $[a, b]$ هستند و w_i ها مجهولات هستند که باید تعیین گردند. با فرض این که نقاط انتگرال گیری به طور یکنواخت روی بازه توزیع شده باشند داریم: $x_i = a + ih$ به طوری که $h = \frac{b-a}{n}$. با بدست آوردن بهترین مقدار ها برای w_i ها در فرمول (۱) می توان به بیشترین دقت برای این گونه فرمول ها دست یافت. مرسوم ترین روش برای تعیین w_i ها این است که در نظر بگیریم فرمول (۱) برای یک جمله ای x^k ($k = 0, 1, \dots, p$) دقیق باشد، در این صورت با نوشتن فرمول (۱) برای x^0, x^1, \dots, x^p و بسط \sum یک دستگاه معادلات با $p+1$ مجهول داریم، که با حل این دستگاه w_i ها تعیین می شوند و فرمول نیوتن-کاتس به ازای n های مختلف به دست می آید. در زیر چند نمونه ذکر شده است. [۱]

با فرض $n = p$ و به ازای $n = 1$ داریم:

قاعده ذوزنقه:

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x)dx = \frac{h}{2}(f(x_0) + f(x_1)) - \frac{h^3}{12}f''(\xi), \quad \xi \in (x_0, x_1)$$

* سخنران
endpoint^۱
Derivative-based^۲



به ازای $n = 2$ قاعده ی سیمپسون را داریم:

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x) dx = \frac{h}{3} (f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)) - \frac{h^5}{90} f^{(4)}(\xi), \xi \in (x_0, x_2)$$

به ازای $n = 3$ قاعده ی $\frac{3}{8}$ سیمپسون را داریم:

$$\int_{x_0}^{x_3} f(x) dx = \frac{3h}{8} (f(x_0) + 3f(x_1) + 3f(x_2) + f(x_3)) - \frac{3h^5}{80} f^{(4)}(\xi), \xi \in (x_0, x_3)$$

این فرمول ها برای n های بزرگ با استفاده از نرم افزارهای ریاضی تعیین می گردند. این فرمول ها در مقایسه با روش انتگرال گیری گاوس (مثلاً گاوس- لژاندر) از دقت کمتری برخوردارند. ولی پارامترهایی که در روش گاوس باید تعیین شود، تقریباً دوبرابر روش نیوتن - کاتس است، چون در روش انتگرال گیری گاوس علاوه بر w_i ها، x_i ها نیز مجهول هستند؛ در هر صورت روشی که برای تعیین ضرایب و یا تعیین مجهولات به کار رفته مشابه کارهایی است که در دهه اخیر توسط دکتردهقان و سایرین انجام شده است؛ مانند به کارگیری این روش در کوادراتور گاوس - لژاندر [۲]، انتگرال گیری گاوس - جیبیشف [۳]، انتگرال گیری نیوتن - کاتس بسته [۴].

انتگرال گیری نیوتن - کاتس بسته مبتنی بر مشتق این ها روش های دقیق تری هستند که در سه بخش متفاوت مورد بررسی قرار می دهیم: الف) استفاده از مشتق اول در تمام نقاط بازه: در این روش علاوه بر تعیین مقدار تابع در نقاط بازه، مقدار مشتق اول تابع را در تمام نقاط بازه تعیین می کنیم؛ با این کار فرمول دقیق تری نسبت به فرمول نیوتن - کاتس پایه بدست می آید. در این حالت می توان مقدار انتگرال را به طور تقریبی به صورت زیر نوشت: [۱]

$$\int_{x_0}^{x_n} f(x) dx \approx \sum_{i=0}^n a_i f(x_i) + \sum_{i=0}^n b_i f'(x_i) \cdot h \quad (2)$$

هدف پیدا کردن بهترین مقادیر برای a_i ها و b_i ها است؛ برای این کار با جایگزین کردن x^k به جای $f(x)$ و فرض این که فرمول (۲) به ازای $k = 0$ تا $k = 2n + 1$ دقیق است، یک دستگاه $2n + 2$ معادله ای تشکیل می شود که با حل این دستگاه ضرایب تعیین می شوند.

به ازای $n=1$ قاعده ی دوزنقه ی تصحیح یافته بدست می آید، یعنی داریم:

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x) dx = \frac{h}{2} (f(x_0) + f(x_1)) + \frac{h^2}{12} (f'(x_0) - f'(x_1)) + \frac{h^5}{720} f^{(4)}(\xi), \xi \in (x_0, x_1)$$

به ازای $n=2$ فرمول زیر بدست می آید:

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x) dx = \frac{h}{15} (7f(x_0) + 16f(x_1) + 7f(x_2)) + \frac{h^2}{15} (f'(x_0) - f'(x_2)) + \frac{h^4}{4725} f^{(4)}(\xi)$$

جالب است که در حالت مرکب فقط محاسبه ی دو مشتق لازم است. (فقط ابتدا و انتهای بازه). به ازای $n=3$ فرمول زیر بدست می آید:

$$\int_{x_0}^{x_3} f(x) dx = \frac{h}{224} (93f(x_0) + 243f(x_1) + 243f(x_2) + 93f(x_3)) + \frac{h^2}{1120} (57f'(x_0) - 81f'(x_1) + 81f'(x_2) - 57f'(x_3)) + \frac{9h^4}{313600} f^{(4)}(\xi)$$



(ب) استفاده از مشتق اول فقط در نقاط ابتدا و انتهای بازه : این روش مانند قسمت (الف) است، باین تفاوت که فقط مشتق را در نقاط ابتدا و انتهای بازه مورد استفاده قرار می دهیم. مزیت این روش نسبت به روش قبلی ساده تر بودن آن، مخصوصاً در حالت مرکب است. هرچند دقت این روش نسبت به روش قبلی کمتر است ولی هنوز نسبت به روش نیوتن-کاتس استاندارد دقیق تراست. [۴] فرمول های بدست آمده در این روش به ازای $n=1$ و $n=2$ باروش قبلی هیچ تفاوتی ندارد و به ازای $n=3$ داریم:

$$\int_{x_0}^{x_3} f(x) dx = \frac{3h}{8} (13f(x_0) + 27f(x_1) + 27f(x_2) + 13f(x_3)) + \frac{3h^2}{4} (f'(x_0) - f'(x_3)) + \frac{9h^4}{1120} f^{(4)}(\xi)$$

(ج) مشتقات مرتبه بالاتر روی یک بازه ی تنها : در این روش می توان مشتقات مرتبه بالاتر را روی یک بازه ی تنها به صورت زیر بکار برد:

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x) dx \approx \sum_{j=0}^D (w_{0j} f^{(j)}(x_0) + w_{1j} f^{(j)}(x_1))$$

که در آن D ماکزیم مرتبه ی مشتق بکاررفته است. این طرح تا چند جمله ی درجه ی $2D+1$ دقیق است. فرمول به ازای $D=2$ به صورت:

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x) dx = \frac{h}{4} (f(x_0) + f(x_1)) + \frac{h^2}{10} (f'(x_0) - f'(x_1)) + \frac{h^3}{120} (f''(x_0) + f''(x_1)) - \frac{h^4}{10080} f^{(4)}(\xi)$$

و به ازای $D=3$ به فرم زیر است:

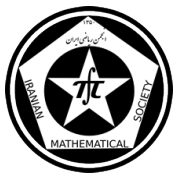
$$\int_{x_0}^{x_1} f(x) dx = \frac{h}{4} (f(x_0) + f(x_1)) + \frac{3h^2}{28} (f'(x_0) - f'(x_1)) + \frac{h^3}{84} (f''(x_0) + f''(x_1)) + \frac{h^4}{1680} (f'''(x_0) - f'''(x_1)) + \frac{h^5}{25200} f^{(4)}(\xi)$$

نتیجه ۱.۱. در جدول (۱) با یک مثال مشخص می شود که مقدار انتگرال بدست آمده با استفاده از روش مشتقات مرتبه بالاتر ، به سرعت به جواب انتگرال همگراست.

نتیجه ۲.۱. در جدول (۲) تعداد محاسبه ی مقادیر تابع و مشتق مورد نیاز برای رسیدن به خطای کمتر از 10^{-12} در روش های مختلف نیوتن - کاتس برای انتگرال $\int_0^1 e^{-x^2} dx$ آمده است.

۲ نتایج اصلی

نوع جدیدی از فرمول انتگرال گیری عددی نیوتن - کاتس ارائه شد که شامل استفاده از مشتق مرتبه ی اول در تمام نقاط بازه (قسمت الف) ، فقط در نقاط انتهایی بازه (قسمت ب) و استفاده از مشتقات مرتبه بالاتر در یک بازه ی تنها (قسمت ج) می باشد. وقتی مشتق اول را در تمام نقاط بازه استفاده می کنیم درجه ی دقت $2n+2$ است که n تعداد زیر بازه های $[a, b]$ است؛ وقتی از مشتق اول در نقاط انتهایی بازه استفاده می شود برای n فرد ، درجه ی دقت $n+3$ و برای n زوج ، درجه ی دقت $n+4$ است. وقتی از مشتقات مرتبه بالاتر در یک بازه استفاده می کنیم ، درجه ی دقت $2D+2$ است. (D مرتبه ی مشتق است) ضمناً می دانیم درجه دقت در روش نیوتن-کاتس استاندارد $n+1$ است. با یک مثال در جدول



(۲) تعداد عملیات مورد نیاز برای رسیدن به یک دقت مشخص در روش های مختلف نشان داده شد. با توجه به تمامی موارد فوق مشخص شد که روش انتگرال گیری نیوتن-کاتس مبتنی بر مشتق بسیار دقیق تر از روش انتگرال گیری نیوتن-کاتس استاندارد است.

جدول ۱

مرتبۀ مشتق	$\int_0^1 e^{-x^n} = e - 1 \approx 0,746824132812$
۰	$\frac{e+1}{2} \approx 0,683939720586$
۱	$\frac{2e}{3e+4} \approx 0,745252960781$
۲	$\frac{6e}{29e+43} \approx 0,746980266173$
۳	$\frac{10e}{200e+309} \approx 0,746844636481$

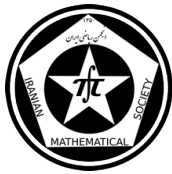
جدول ۲

فرمول ها	تعداد بازه ها	تعداد مقدار تابع	تعداد مقدار مشتق تابع	تعداد کل
قاعده دوزنقه $n = 1$	۱۱۵۴۷۰۱	۱۱۵۴۷۰۲	۰	۱۱۵۴۷۰۲
قاعده سیمپسون $n = 2$	۱۲۱۰	۱۲۱۱	۰	۱۲۱۱
قاعده $3/8$ سیمپسون $n = 3$	۱۴۸۲	۱۴۸۳	۰	۱۴۸۳
قاعده مبتنی بر مشتق اول $n = 1$	۸۵۵	۸۵۶	۰	۸۵۸
قاعده مبتنی بر مشتق اول $n = 2$	۱۱۰	۱۱۱	۲	۱۱۳
قاعده مبتنی بر مشتق اول $n = 3$	۴۲	۴۳	۱۳۰	۷۳
قاعده مبتنی بر مشتق در نقاط انتهایی $n = 3$	۱۲۹	۱۳۰	۲	۱۳۲
قاعده مبتنی بر مشتق مرتبه بالاتر $D = 2$	۷۴	۷۵	۲	۱۵۲
قاعده مبتنی بر مشتق مرتبه بالاتر $D = 3$	۲۱	۲۲	۲	۴۸

مراجع

- [1] C.O.E.Burg, *Derivative-based closed Newton-cotes numerical quadrature*, Appl.Math.Comput, 218 (2012), pp. 7052-7065.
- [2] E. Babliian, M.Masjed-Jamei, M.R.Eslahchi, *On numerical improvement of Gauss-Legendre quadrature rules*, Appl.Math.Comput, 160 (2005), pp. 779-789.
- [3] M.R.Eslahchi, M.Deaghan, M.Masjed-Jamei, *On numerical improvement of the first kind Gauss-Chebyshev quadrature rules*, Appl.Math.Comput, 165 (2005), pp. 5-21.
- [4] M.Deaghan, M.Masjed-Jamei, M.R.Eslahchi, *On numerical improvement of closed Newton-Cotes quadrature rules*, Appl.Math.Comput, 165 (2005), pp. 251-260.

پست الکترونیکی: ah.haghighi@gmail.com
پست الکترونیکی: shahriar-azizi@yahoo.com



کنترل سیستم‌های خطی پیوسته زمانی کسری مثبت با تأخیر زمانی

حجت احسنی طهرانی

دانشگاه شاهرود

مرضیه سپهر*

دانشگاه شاهرود

چکیده

در این مقاله کنترل و پایداری سیستم‌های خطی پیوسته زمانی مثبت کسری با تأخیر، با استفاده از پس‌خورد حالت بررسی می‌شود. در ابتدا ما یک ماتریس پس‌خورد حالت که مقادیر ویژه صفر را به سیستم اختصاص می‌دهد را به دست می‌آوریم، و سپس با استفاده از عملیات تشابهی، ماتریس افزوده پس‌خورد حالت را طوری تعیین می‌کنیم که صفرهای چندجمله‌ای حلقه بسته در زاویه از پیش تعیین شده در سمت چپ صفحه مختلط قرار بگیرند.

واژه‌های کلیدی: سیستم خطی مثبت، ماتریس پس‌خورد حالت، تأخیر زمانی، کسری، پایداری

Mathematics Subject Classification [2010]: 93C05, 93D15

۱ مقدمه

در سیستم‌های مثبت متغیرهای ورودی، حالت و خروجی را با مقادیر نامنفی در نظر می‌گیرند. نمونه‌ای از سیستم‌های مثبت فرآیندهای صنعتی مربوط به راکتورهای شیمیایی، مبدل‌های حرارتی، ستون تقطیر ستون‌های آب و آلودگی هواست. تعریف اول از مشتق کسری توسط لیوویل و ریمان^۱ در پایان قرن ۱۹ معرفی شد. برخی دیگر از برنامه‌های کاربردی سیستم‌های کسری را می‌توان در [۵] یافت. پایداری سیستم‌های پیوسته زمانی کسری با تأخیر در [۱] مطرح شده است. مفهوم سیستم‌های خطی پیوسته زمانی مثبت کسری در [۳] معرفی شد.

۲ پایداری سیستم‌های خطی کسری مثبت با تأخیر

سیستم خطی پیوسته زمانی مثبت کسری با q تأخیر در حالت و ورودی را به صورت زیر در نظر بگیرید:

$$\frac{d^\alpha x(t)}{dt^\alpha} = \sum_{k=0}^q [A_k x(t - d_k) + B_k u(t - d_k)] \quad 0 < \alpha \leq 1 \quad (1)$$

که در آن $x(t) \in \mathbb{R}_+^n$ ، $u(t) \in \mathbb{R}_+^m$ و $y(t) \in \mathbb{R}_+^p$ به ترتیب بردارهای حالت، ورودی و خروجی هستند و $A_k \in \mathbb{R}_+^{n \times m}$ ، $B_k \in \mathbb{R}_+^{n \times m}$ ($k = 0, 1, \dots, q$) ماتریس‌های حقیقی مثبت هستند.

* سخنران

^۱Liouville and Riemann



قضیه ۱.۲. [۴] سیستم مثبت با تأخیر

$$\frac{d^\alpha x(t)}{dt} = \sum_{k=0}^q A_k x(t - d_k)$$

پایدار مجانبی است اگر و تنها اگر سیستم مثبت بدون تأخیر

$$\dot{x}(t) = Ax(t), \quad A = \sum_{k=0}^q A_k \in \mathbb{M}_n$$

پایدار مجانبی باشد.

از این قضیه نتیجه می‌گیریم که بررسی پایداری مجانبی سیستم‌های مثبت با تأخیر را می‌توان به بررسی پایداری سیستم‌های مثبت بدون تأخیر کاهش داد.

سیستم (۱) با $rank(B) = m$ و پس‌خورد حالت

$$u(t) = Kx(t) \quad (2)$$

که $K \in \mathbb{R}^{m \times n}$ است را در نظر می‌گیریم. با جایگذاری رابطه (۲) در (۱) داریم:

$$\frac{d^\alpha x(t)}{dt^\alpha} = \sum_{k=0}^q (A_k + B_k K)(t - d_k) \quad 0 < \alpha \leq 1 \quad (3)$$

سیستم حلقه بسته را با Γ نشان می‌دهیم. به عبارتی $(\Gamma = \sum_{k=0}^q (A_k + B_k K))$. سیستم مثبت با تأخیر (۳) پایدار مجانبی است اگر و تنها اگر سیستم مثبت بدون تأخیر

$$\frac{d^\alpha x(t)}{dt^\alpha} = \sum_{k=0}^q (A_k + B_k K)x(t), \quad A = \sum_{k=1}^q A_k, \quad B = \sum_{k=1}^q B_k$$

پایدار مجانبی باشد. در واقع پایداری سیستم‌های پیوسته زمانی مثبت با تأخیر، مستقل از تعداد و مقادیر تأخیری است.

چندجمله‌ای مشخصه سیستم (۳) به صورت

$$\det[I_n s^\alpha - (A + BK)] = (s^\alpha)^n + \bar{a}_{n-1} (s^\alpha)^{n-1} + \dots + \bar{a}_1 s^\alpha + \bar{a}_0 \quad (4)$$

است، حال با جایگذاری

$$\lambda = s^\alpha \quad (5)$$

در رابطه (۴) داریم:

$$\det[I_n \lambda - (A + BK)] = \lambda^n + \bar{a}_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + \bar{a}_1 \lambda + \bar{a}_0 \quad (6)$$

حال با فرض $\arg s = \phi$ و $\arg \lambda = \varphi$ از رابطه (۵) داریم:

$$\varphi = \alpha \phi \quad (7)$$

از رابطه‌های (۴)، (۶) و (۷) به ازای $\varphi = \frac{\pi}{\alpha}$ نتیجه زیر را داریم.

نتیجه ۲.۲. [۴] اگر صفرهای چندجمله‌ای مشخصه (۴) در نیمه سمت چپ صفحه مختلط قرار داشته باشند، آنگاه صفرهای چندجمله‌ای مشخصه (۶) در زاویه^۲ مشخص $\phi = \frac{\pi}{\alpha}$ در سمت چپ صفحه مختلط واقع می‌شوند.

^۲Argoman



قضیه ۳.۲. [۴] سیستم حلقه بسته (۳) مثبت است و صفرهای چندجمله‌ای مشخصه (۴) در $\phi = \frac{\pi}{\sqrt{\alpha}}$ قرار دارند اگر و تنها اگر یک ماتریس قطری^۲

$$G = \text{diag}[\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n], \quad \lambda_k > 0, \quad k = 1, 2, \dots, n$$

و ماتریس حقیقی $D \in \mathbb{R}^{m \times n}$ وجود داشته باشند که در شرایط زیر صدق کنند:

$$AG + BD \in M_n$$

$$(AG + BD)I_n < 0$$

و بنابراین ماتریس پس خورد K برابر است با:

$$K = DG^{-1}$$

۳ مسأله اصلی

در واقع ما به دنبال ماتریس پس خورد K هستیم به طوری که طیف (مجموعه مقادیر ویژه) سیستم حلقه بسته که با $\Lambda(\Gamma)$ نشان می‌دهیم در زاویه $\phi = \frac{\pi}{\sqrt{\alpha}}$ ، در سمت چپ صفحه مختلط قرار بگیرد، آنگاه گوییم که Γ پایدار مجانبی است. انتقال حالت زیر را در نظر بگیرید:

$$x(t) = T\tilde{x}(t)$$

که ماتریس T را می‌توان با عملیات تشابهی مقدماتی که در [۲] شرح داده شد، به دست آورد. در این روش

$$\tilde{A} = T^{-1}AT, \quad \tilde{B} = T^{-1}B$$

فرم همدم برداری ماتریس‌های A و B هستند که به صورت زیر تعریف می‌شوند.

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} G_0 & \\ I_{n-m} & O_{n-m \times m} \end{bmatrix}, \quad \tilde{B} = \begin{bmatrix} B_0 \\ O_{n-m \times m} \end{bmatrix}$$

که G_0 یک ماتریس $m \times n$ و B_0 یک ماتریس $m \times m$ بالا مثلثی است. اگر ناوردهای کرونگر زوج (B, A) منظم باشند آنگاه \tilde{A} و \tilde{B} به فرم فوق هستند [۲]، و در غیر این صورت اگر ناوردهای کرونگر نامنظم باشند بعضی از سطرهای I_{n-m} از \tilde{A} پخش می‌شوند. ماتریس پس خورد حالت برای زوج (\tilde{B}, \tilde{A}) که مقادیر ویژه صفر را به سیستم اختصاص می‌دهد برابر است با:

$$u = -B_0^{-1}G_0\tilde{x} = \tilde{F}\tilde{x}.$$

در نتیجه ماتریس پس خورد اولیه برای زوج (B, A) به صورت $F_p = \tilde{F}T^{-1}$ تعریف می‌شود. بنابراین ماتریس حلقه بسته همدم برداری $\tilde{\Gamma}_0 = \tilde{A} + \tilde{B}\tilde{F}$ به فرم جردن که همه مقادیر ویژه آن صفر است به دست می‌آید.

قضیه ۱.۳. فرض کنید D یک ماتریس قطری به صورت $D = \text{diag}[D_1, D_2, \dots, D_k]$ تعریف شود، که هر D_j ،

($j = 1, 2, \dots, k$) به ازای مقادیر ویژه مزدوج مختلط $\alpha_j + i\beta_j$ به صورت:

$$D_j = \begin{bmatrix} \alpha_j & \beta_j \\ -\beta_j & \alpha_j \end{bmatrix}$$

و به ازای مقادیر ویژه حقیقی به صورت $D_j = [d_j]$ باشد.

حال تعریف می‌کنیم $D + \tilde{\Gamma}_0 = A_\lambda$ و آن را به فرم همدم برداری G_λ تبدیل می‌کنیم، آنگاه مقادیر ویژه ماتریس حاصل، مقادیر ویژه در طیف است.

^۲Diagonal matrix



قضیه ۲.۳. ماتریس پس‌خورد حالت $\tilde{K} = B_o^{-1}(-G_o + G_\lambda)$ مقادیر ویژه ماتریس حلقه بسته $\tilde{\Gamma} = \tilde{A} + \tilde{B}\tilde{K}$ را در زاویه از پیش تعیین شده $\phi = \frac{\pi}{4\alpha}$ در سمت چپ صفحه مختلط قرار می‌دهد، اگر فرض کنیم که α_j و β_j به صورت زیر انتخاب شوند،

$$\alpha_j = -k \cdot \text{random}(\circ, 1) + a, \quad k \in \mathbb{N}$$

$$\beta_j = |\alpha_j - a| \tan(\theta) \cdot \text{random}(\circ, 1)$$

و برای هر تخصیص مقادیر ویژه حقیقی در بخش از پیش تعیین شده، d_j را به صورت زیر انتخاب می‌کنیم:

$$d_j = -k \cdot \text{random}(\circ, 1) + a \quad k \in \mathbb{N}$$

ملاحظه ۳.۳. توجه داشته باشید که برای تعیین مقادیر ویژه ماتریس حلقه بسته در طیف $\Lambda = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$ فرض می‌کنیم که:

$$D_j = \lambda_j, \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

۴ نتیجه‌گیری

در اینجا یک روش برای تخصیص مقادیر ویژه در زاویه مشخص شده از صفحه مختلط، با استفاده از پس‌خورد حالت مطرح شده است. این روش طبق خواص همدم برداری به دست آمده است. مزیت این روش این است که می‌توان با استفاده از عملیات تشابهی مقدماتی محاسبات را بسیار ساده‌تر از روش‌های دیگر انجام داد. هم‌چنین این روش می‌تواند برای سیستم‌های کنترل خطی گسسته زمانی با مقیاس بزرگ‌تر نیز استفاده شود.

مراجع

- [1] M. Busłowicz, *Stability of linear continuous-time fractional order systems with delays of the retarded type*, Bull. Pol. Acad. Sci. Techn, Vol. 56 (4), pp. 319-324, 2008 (a).
- [2] S.M. Karbassi and D.J. Bell, *Parametric time-optimal control of linear discrete-time systems by state feedback-Part 1: Regular Kronecker invariants*, International Journal of Control, Vol. 57, pp. 817-830, 1993.
- [3] T. Kaczorek, *Fractional positive continuous-time linear systems and their reachability*, Int. J. Appl. Math. Comput. Sci, Vol. 18 (2), pp. 223-228, 2008 (c).
- [4] T. Kaczorek, *Stabilization of fractional positive continuous-time linear systems with delays in sectors of left half complex plane by state-feedbacks*, Poland, Vol. 39, 2010.
- [5] D. Sierociuk, *Estimation and control of discrete-time fractional systems described by state equations*, PhD thesis, Warsaw University of Technology, Warsaw (in Polish), 2007.



مقایسه روش های آدومیان نوین و خطی سازی برای مسأله مقدار اولیه منفرد لن-امدن

محمد علی پرتانیان
دانشگاه حکیم سبزواری

جاسم محمدی چاه دادخدا*
دانشگاه حکیم سبزواری

چکیده

در این مقاله حل مسأله مقدار اولیه منفرد لن-امدن^۱ خطی، غیر خطی، همگن و ناهمگن؛ با روش های آدومیان نوین و خطی سازی را مورد بررسی قرار می دهیم. به روش عددی با ارائه یک مثال و استفاده از نرم افزار *maple* سرعت و دقت روش ها؛ با یکدیگر مقایسه می گردد. سپس نشان خواهیم داد که سرعت و دقت روش آدومیان نوین نسبت به روش دیگر بیشتر است. ویژگی مقاله حاضر در این است که تاکنون چنین مقایسه ای با جزئیات و دقت، پیرامون روش های مذکور صورت نپذیرفته و کاری جدید و کاربردی در حل مسائل و برنامه نویسی و الگوریتم ها بشمار می آید.

واژه‌های کلیدی: روش آدومیان نوین، روش خطی سازی، همگرایی

مقدمه

اکثر تحقیقات علمی توسط ریاضی دانان و فیزیک دانان با مدل سازی و فرمول بندی (از جمله نظریه ی ساختار ستاره ای در رفتار گرمایی توده ای کروی از گازها ی هم دما و نظریه ی جریان ترمودینامیک [۱، ۲]) به معادلات دیفرانسیل مقدار اولیه منفرد منجر می گردد. از جمله این معادلات معادله لن-امدن است که در $x = 0$ رفتار منفردی دارند که در روش آدومیان نوین [۳، ۴] جواب به فرم سری همگرا که توسط آدومیان ارائه شده است می باشد. در روش خطی سازی [۵]، اساس کار خطی کردن معادلات دیفرانسیل معمولی برای هر دو متغیر مستقل و وابسته بوده و برای بدست آوردن جواب های تحلیلی در زیر بازه و جواب های کلی در بازه داده شده می باشند. به عنوان مثال مسأله مقدار اولیه منفرد غیر خطی ناهمگن

$$\begin{aligned} y'' + \frac{2}{x}y' + f(x, y) &= g(x) \\ y(0) &= A, \quad y'(0) = B \\ 0 < x &\leq 1 \end{aligned} \quad (1)$$

که A و B ثابت هایی هستند را مورد بررسی قرار می دهیم [۳]. به طور کلی در روش آدومیان با توجه به بالاترین مرتبه مشتق موجود در مسأله عملگری ارائه می دهیم.

* سخنران

¹Lane-Emden



۱ حل مسأله ی لن-امدن به روش نوین

معادله ی (۱) را بصورت

$$Ly = -f(x, y) + g(x). \quad (2)$$

نوشته و عملگر L و L^{-1} بصورت $L^{-1} = \int_0^x x^{-2} \int_0^x x^\lambda dx dx$ و $L = x^{-2} \frac{d}{dx} (x^2 \frac{d}{dx})$ تعریف کرده و L^{-1} را بر (۲) اثر داده و خواهیم داشت

$$\begin{aligned} y(x) &= A + L^{-1}g(x) - L^{-1}f(x, y) \\ y(0) &= A \end{aligned} \quad (3)$$

بنا به روش تجزیه ی آدومیان، $y(x)$ و تابع غیر خطی $f(x, y)$ را بصورت

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} y_n, \quad f(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n(y_0, y_1, y_2, \dots, y_n). \quad (4)$$

تعریف کرده [۳]. که در آن A_n ها چند جمله ای های آدومیان و بر طبق الگوریتم خاصی براساس روش تجزیه ی آدومیان بطور بازگشتی ساخته می شوند. پس از جایگزین کردن (۴) در (۳) داریم

$$\sum_{n=0}^{\infty} y_n = A + L^{-1}g(x) - L^{-1}\left(\sum_{n=0}^{\infty} A_n(y_0, y_1, y_2, \dots, y_n)\right)$$

و روابط بازگشتی

$$\begin{cases} y_0 = A + L^{-1}g(x) \\ y_{n+1} = -L^{-1}(A_n) \\ n \geq 0 \end{cases}$$

نتیجه خواهد شد. که برای A_n ها برای تابع غیر خطی $f(x, y)$ با توجه به رابطه

$$A_n = \frac{1}{n!} \frac{d^n}{d\lambda^n} (F(\sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n y_n))$$

حاصل خواهد شد. پس از محاسبه مشتق های موجود، λ را برابر صفر قرار می دهیم.

۲ حل مسأله مقدار اولیه به روش خطی سازی

مسأله مقدار اولیه ی (۱) را در نظر بگیرید قرار می دهیم

$$\begin{cases} y'' = f(x, y, y') \\ y(0) = y_0, \quad y'(0) = y'_0 \end{cases} \quad (5)$$

که x متغیر مستقل، y متغیر وابسته و $f(x, y, y')$ تابع غیر خطی می باشد. که ممکن است در $x = 0$ منفرد باشد. بازه ی مورد نظر $(0, L)$ را به زیر بازه های $[x_n, x_{n+1}]$ افراز کرده و $x_0 = 0$. تابع غیر خطی $f(x, y, y')$ را می توان در هر



زیر بازه خطی کرد. اگر $f(x, y, y')$ تابع منفرد باشد؛ آنگاه f را می توان با اولین سه جمله ای از بسط سری تیلور حول (x_n, y_n, y'_n) تقریب زد [۵]. پس تقریب معادله (۵) بصورت زیر در خواهد آمد

$$\begin{cases} y'' = f_n + H_n(y - y_n) + G_n(y' - y'_n) + L_n(x - x_{n+1}), & x_n < x \leq x_{n+1} \\ f_n = f(x_n, y_n, y'_n) \\ H_n = \frac{\partial f}{\partial y}(x_{n+1}, y_n, y'_n) \\ G_n = \frac{\partial f}{\partial y'}(x_{n+1}, y_n, y'_n) \\ L_n = \frac{\partial f}{\partial x}(x_{n+1}, y_n, y'_n). \end{cases} \quad (6)$$

معادله ی دیفرانسیل معمولی بدست آمده در (۶) دارای جواب تحلیلی است. با فرض $H_n \neq 0$ و $R_n = (\frac{G_n}{\psi}) + H_n > 0$ جواب آن بصورت زیر نوشته می شود

$$y(t) = A_n \exp(\lambda^+(x - x_{n+1})) + B_n \exp(\lambda^-(x - x_{n+1})) + C_n(x - x_{n+1}) + D_n, \quad x_n < x \leq x_{n+1} \quad (7)$$

که D_n, C_n, λ_n^\pm بصورت $D_n = -G_n C_n + f_n - H_n y_n - G_n y'_n$ بصورت $C_n = -\frac{L_n}{H_n}$ و $\lambda^\pm = \frac{G_n}{\psi} \pm \sqrt{R_n}$ هستند. ثابت های A_n و B_n از معادله (۷) بصورت

$$\begin{cases} A_n = \frac{\exp(\lambda_n^+ \Delta x_n)}{\lambda_n^+ - \lambda_n^-} (y'_n - C_n - \lambda_n^- (C_n \Delta x_n - D_n)) \\ B_n = \frac{\exp(\lambda_n^- \Delta x_n)}{\lambda_n^+ - \lambda_n^-} (\lambda_n^+ (y'_n - C_n \Delta x_n - D_n) - (y'_n - C_n)) \\ \Delta x_n = x_{n+1} - x_n \end{cases}$$

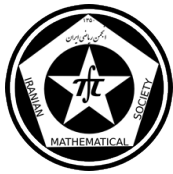
بدست می آیند. لذا رابطه بازگشتی زیر را خواهیم داشت

$$\begin{cases} y_{n+1} = A_n + B_n + D_n \\ y'_{n+1} = \lambda_n^+ A_n + \lambda_n^- B_n + C_n. \end{cases}$$

مثال ۱.۲. مسأله مقدار اولیه منفرد همگن غیر خطی زیر را در نظر بگیرید.

$$\begin{cases} y'' + \frac{2}{x} y' + 4(2e^y + e^{\frac{y}{2}}) = 0 \\ y(0) = 0, \quad y'(0) = 0. \end{cases}$$

در مثال فوق دو روش را از نظر عددی بررسی و نتایج بدست آمده در جدول (۱) و (۲) آورده شده است. در جدول (۱) جواب و اختلاف جواب ها برای هر دو روش آورده شده است که قابل بررسی و مقایسه می باشند. همچنین از آنجا که روش آدومیان نوین در بازه مورد نظر دقیقاً همان جواب واقعی می باشد. لذا نیازی به مقایسه در جدول نمی باشد. در جدول (۲) خطا و خطای نسبی با توجه به جواب واقعی محاسبه شده است. خطای نسبی روش آدومیان نوین در بازه ی مورد نظر صفر می باشد. لذا روش آدومیان نوین در مقایسه با روش خطی سازی از خطای کمتر و سرعت بالاتری برخوردار است. با توجه به روش فوق و اینکه جملات را می توان در هر مرحله اضافه کرد لذا فقط تا مرحله پنجم جملات را در روش آدومیان نوین بدست آورده و سپس مقادیر را تا تقریب مرحله پنجم محاسبه نموده ایم.



جدول ۱: جواب ها و اختلاف جواب ها

گره	جواب آدومیان نوین	جواب خطی سازی	جواب واقعی	اختلاف خطی سازی ونوین
۰/۰۱	-۰/۰۰۰۲۰۰	-۰/۰۰۰۳۴۰۶	-۰/۰۰۰۲۰۰	۰/۰۰۰۱۴۱
۰/۰۲	-۰/۰۰۰۸۰۰	-۰/۰۰۰۷۰۸	-۰/۰۰۰۸۰۰	۰/۰۰۰۰۹۲
۰/۰۳	-۰/۰۰۰۱۷۹۹	-۰/۰۰۰۱۰۷۷	-۰/۰۰۰۱۷۹۹	۰/۰۰۰۰۷۲۲
۰/۰۴	-۰/۰۰۰۳۱۹۷	-۰/۰۰۰۱۴۶	-۰/۰۰۰۳۱۹۷	۰/۰۰۰۱۷۳۸
۰/۰۵	-۰/۰۰۰۴۹۹۴	-۰/۰۰۰۱۸۴۷	-۰/۰۰۰۴۹۹۴	۰/۰۰۰۳۱۵۷
۰/۰۶	-۰/۰۰۰۷۱۸۷	-۰/۰۰۰۲۲۳۵	-۰/۰۰۰۷۱۸۷	۰/۰۰۰۴۹۵۲۰
۰/۰۷	-۰/۰۰۰۹۷۷۶	-۰/۰۰۰۲۶۲۳	-۰/۰۰۰۹۷۷۶	۰/۰۰۰۷۱۵۳
۰/۰۸	-۰/۰۰۱۲۷۵۹	-۰/۰۰۰۳۰۰۹	-۰/۰۰۱۲۷۵۹	۰/۰۰۰۹۷۵۰
۰/۰۹	-۰/۰۰۱۶۱۳۵	-۰/۰۰۰۳۳۹۲	-۰/۰۰۱۶۱۳۵	۰/۰۰۱۲۷۴۲
۰/۱	-۰/۰۰۱۹۹۰۱	-۰/۰۰۰۳۷۷۳	-۰/۰۰۱۹۹۰۱	۰/۰۰۱۶۱۲۸

جدول ۲: خطا و خطای نسبی

گره	خطای آدومیان نوین	خطای خطی سازی	جواب واقعی	خطای نسبی خطی سازی	خطای نسبی آدومیان نوین
۰/۰۱	۰	۰/۰۰۰۱۴۱	-۰/۰۰۰۲۰۰	۰/۷۰۲۹۶۶	۰
۰/۰۲	۰	۰/۰۰۰۰۹۲	-۰/۰۰۰۸۰۰	۰/۱۱۴۸۲۳	۰
۰/۰۳	۰	۰/۰۰۰۰۷۲۳	-۰/۰۰۰۱۷۹۹	۰/۴۰۱۶۲۰	۰
۰/۰۴	۰	۰/۰۰۰۱۷۳۸	-۰/۰۰۰۳۱۹۷	۰/۵۴۴۳۹۱	۰
۰/۰۵	۰	۰/۰۰۰۳۱۵۷	-۰/۰۰۰۴۹۹۴	۰/۶۳۰۱۷۸	۰
۰/۰۶	۰	۰/۰۰۰۴۹۵۲	-۰/۰۰۰۷۱۸۷	۰/۶۸۹۰۲۸	۰
۰/۰۷	۰	۰/۰۰۰۷۱۵۳	-۰/۰۰۰۹۷۷۶	۰/۷۳۱۷۲۴	۰
۰/۰۸	۰	۰/۰۰۰۹۷۵۰	-۰/۰۰۱۲۷۵۹	۰/۷۶۴۱۸۷	۰
۰/۰۹	۰	۰/۰۰۱۲۷۴۲	-۰/۰۰۱۶۱۳۵	۰/۷۸۹۷۴۳	۰
۰/۱	۰	۰/۰۰۱۶۱۲۸	-۰/۰۰۱۹۹۰۱	۰/۸۱۰۴۱۷	۰

۳ نتایج اصلی

روش آدومیان نوین نسبت به خطی سازی دقیق تر و همگرایی سریعی دارد چون خطای نسبی روش آدومیان نوین تقریباً صفر است. در این مقاله برای محاسبه y_i ها طول گام $h=0.1$ را به جهت اینکه در خطی سازی با خطا های بزرگ مواجه نشویم در نظر گرفته ایم. ملاحظه می کنیم که خطای نسبی در روش آدومیان نوین نسبت به روش خطی سازی بسیار ناچیز است و نشان دهنده ای این است که سرعت و همگرایی روش خطی سازی نسبت به روش آدومیان نوین کمتر است. یکی دیگر از معایب روش خطی سازی این است اگر طول گام را بزرگ و تعداد نقاط زیاد انتخاب شوند این روش واگرا خواهد شد.

مراجع

- [1] S. Chandrasekhar, Introduction to the Study of Stellar Structure, Dover, New York, 1967.
- [2] O.U. Richardson, The Emission of Electricity from Hot Bodies, London, 1921.
- [3] A. M. Wazwaz, A new method for solving singular initial value problems in the second-order ordinary differential equations, Appl. Math. Comput. 128 (2002) 45-57.
- [4] A. M. Wazwaz, A new algorithm for solving differential equations of Lane-Emden type, Appl. Math. Comput. 118 (2001) 287-310.
- [5] J. I. Ramos, Linearization techniques for singular initial-value problems of ordinary differential equations. Appl. Math. Comput. 161 (2005) 525-542.

پست الکترونیکی: partanian@hsu.ac.ir, mpartanian@gmail.com
پست الکترونیکی: mohammadijasem1368@gmail.com



مقایسه روش های آدومیان و آدومیان اصلاح شده برای حل معادلات انتگرال-دیفرانسیل غیرخطی

محمد علی پرتانیان*
دانشگاه حکیم سبزواری

زهرا صحرائی
دانشگاه حکیم سبزواری

چکیده

در این مقاله روش حل معادله انتگرال-دیفرانسیل فردهلم-ولترای غیرخطی؛ بادو روش تجزیه ی آدومیان و آدومیان اصلاح شده [۱] را مورد بررسی قرار داده و به روش عددی با ارائه یک مثال و استفاده از نرم افزار matlab سرعت و دقت روش ها را بایکدیگر مقایسه و سپس سرعت و دقت دوروش را بررسی می کنیم. اعتبار و درستی را با ارائه یک مثال مورد بررسی قرار می دهیم. ویژگی مقاله حاضر در این است که تاکنون حل یک مثال باروش تجزیه ومقایسه ی آن ها، صورت نپذیرفته و کاری جدید و کاربردی در حل مسائل و برنامه نویسی و الگوریتم ها بطور وسیع می باشد.

واژه های کلیدی: معادله انتگرال-دیفرانسیل، معادله ولترا، معادله فردهلم، روش آدومیان، روش آدومیان اصلاح شده

مقدمه

اکثر تحقیقات علمی توسط ریاضی دانان و فیزیک دانان با مدل سازی و فرمول بندی (از جمله ویسکودینامیک اجسام سیال و قضیه ی کشسانی فنر)، به معادلات انتگرال-دیفرانسیل (ولترا یا فردهلم) منجر می گردد؛ با استفاده از ایده های اصلی آدومیان در [۲] به حل معادله ی انتگرال-دیفرانسیل ولترا-فردهلم غیرخطی زیرمی پردازیم:

$$\sum_{k=0}^m p_k(x)y^{(k)}(x) = f(x) + \lambda_1 \int_a^x \sum_{i=0}^r A_i(x,t)F_i(y(t)) dt + \lambda_2 \int_a^b \sum_{j=0}^s B_j(x,t)G_j(y(t)) dt \quad (1)$$

$$y^{(l)}(0) = \alpha_l \quad l = 0, 1, 2, \dots, k-1 \quad (2)$$

که $f(x)$ و $(j = 0, 1, \dots, s)$ ، $B_j(x, t)$ و $(i = 0, 1, \dots, r)$ ، $A_i(x, t)$ و $(k = 0, 1, 2, \dots, m)$ ، $p_k(x)$ که توابعی معلوم اند. $y^{(k)}(x)$ نشان دهنده ی مشتق مرتبه k -ام تابع مجهول $y(x)$ می باشد و $F_i(y(x))$ و $G_j(y(x))$ توابعی غیر خطی هستند. به طور کلی در روش آدومیان و آدومیان اصلاح شده با توجه به بالاترین مرتبه مشتق موجود در مسأله عملگری ارائه می دهیم. عملگر $L^m = \frac{d^m}{dx^m}$ و $L^{-m}(\cdot) = \int_0^x (\cdot)$ و توابع غیر خطی $F_i(y(x))$ و $G_j(y(x))$ و جواب $y(x)$ ، به ترتیب به صورت سریهای $(C_i)_n$ و $F_i(y(x)) = \sum_{n=0}^{\infty} (D_j)_n$ و $G_j(y(x)) = \sum_{n=0}^{\infty} y_n(x)$ و $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} y_n(x)$ می شوند. که در آن $(D_j)_n$ و $(C_i)_n$ ها چند جمله ای های آدومیان اند و همچنین E_n که $L^m y = \sum_{n=0}^{\infty} E_n$ ها چند جمله

* سخنران



ایهای آدومیان مربوط به مشتق مرتبه ی m - m تابع $y(x)$ اند که همگی طبق الگوریتم خاصی براساس روش آدومیان [۳] بطور بازگشتی ساخته می شوند. در این صورت می توان نوشت:

$$L^m y = \frac{-1}{p_m(x)} \sum_{k=0}^{m-1} p_k(x) L^{m-1} y + f(x) + \lambda_1 \int_a^x \sum_{i=0}^r A_i(x, t) F_i(y(t)) dt + \lambda_2 \int_a^b \sum_{j=0}^s B_j(x, t) G_j(y(t)) dt \quad (3)$$

با اثر دادن عملگر L^{-m} روی رابطه (۳) داریم:

$$y(x) = \sum_{l=0}^{m-1} \alpha_l \frac{1}{l!} x^l - L^{-m} \left[\frac{1}{p_m(x)} \sum_{k=0}^{m-1} p_k(x) L^{m-1} y \right] + L^{-m} f(x) + L^{-m} \left[\lambda_1 \int_a^x \sum_{i=0}^r A_i(x, t) F_i(y(t)) dt + \lambda_2 \int_a^b \sum_{j=0}^s B_j(x, t) G_j(y(t)) dt \right] \quad (4)$$

جایگزینی مفروضات فوق در رابطه (۴)

$$\sum_{n=0}^{\infty} y_n(x) = \sum_{l=0}^{m-1} \alpha_l \frac{1}{l!} x^l - L^{-m} \left[\frac{1}{p_m(x)} \sum_{k=0}^{m-1} p_k(x) \sum_{n=0}^{\infty} E_n \right] + L^{-m} f(x) + L^{-m} \left[\lambda_1 \int_a^x \sum_{i=0}^r A_i(x, t) \sum_{n=0}^{\infty} (C_i)_n dt + \lambda_2 \int_a^b \sum_{j=0}^s B_j(x, t) \sum_{n=0}^{\infty} (D_j)_n dt \right] \quad (5)$$

لذا برای یافتن $y_n(x)$ ها رابطه ی بازگشتی زیر را معرفی می کنیم:

$$y_0(x) = \sum_{l=0}^{m-1} \alpha_l \frac{1}{l!} x^l + L^{-m} f(x) \quad (6)$$

$$y_{k+1}(x) = -L^{-m} \left[\frac{1}{p_m(x)} \sum_{k=0}^{m-1} p_k E_k \right] + L^{-m} \left[\lambda_1 \int_a^x \sum_{i=0}^r A_i(x, t) (C_i)_k dt + \lambda_2 \int_a^b \sum_{j=0}^s B_j(x, t) (D_j)_k dt \right]; \quad k \geq 0$$

بنابراین روش تجزیه آدومیان، بار رابطه (۶) برای حل معادلات انتگرال-دیفرانسیل غیرخطی (۱)، ارائه شد.

حل معادله انتگرال-دیفرانسیل غیر خطی به روش تجزیه ی آدومیان اصلاح شده

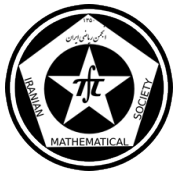
این روش نیز رابطه ی بازگشتی آدومیان را براساس [۴] اصلاح می کند، یعنی اگر امکان این وجود داشته باشد که سمت راست رابطه ی $y_0(x)$ را در معادله (۶) به دو قسمت تقسیم کنیم، آن گاه یکی از دو قسمت را به $y_0(x)$ واگذار می کنیم در حالی که قسمت دوم $y_0(x)$ در (۶) به جمله ی $y_1(x)$ در مرحله ی بعدی واگذار می گردد. بنابراین ما یک فرمول بازگشتی که با روش دیگری ساخته شد را در زیر مشاهده می کنیم:

$$y_0 = \alpha_0$$

$$y_1 = \sum_{l=1}^{m-1} \alpha_l \frac{1}{l!} x^l + L^{-m} f(x) - L^{-m} \left[\lambda_1 \int_a^x \sum_{i=0}^r A_i(x, t) (C_i)_0 dt + \lambda_2 \int_a^b \sum_{j=0}^s B_j(x, t) (D_j)_0 dt \right]$$

$$y_{k+1}(x) = L^{-m} \left[\lambda_1 \int_a^x \sum_{i=0}^r A_i(x, t) (C_i)_k dt + \lambda_2 \int_a^b \sum_{j=0}^s B_j(x, t) (D_j)_k dt \right]; \quad k \geq 1 \quad (7)$$

با این انتخاب وقتی $y_0(x)$ ، شامل تعداد جمله ی کمتری باشد، محاسبه ی جواب معادلات غیرخطی که حل آن ها پیچیده است، راحت تر می شود. روش اصلاح شده در بسیاری موارد، از محاسبات غیر ضروری به خصوص در محاسبه ی چند جمله



ایهای آدومیان، اجتناب می کند؛ به علاوه اگر هم گاهی اوقات مجبور شویم (مثلا چندمین چند جمله ای آدومیان) و یا تمام چند جمله ایهای آدومیان را مورد بررسی قرار دهیم، استفاده از این روش؛ محاسبات عددی ما را به طور قابل ملاحظه ای کاهش می دهد. مثال ۱. معادله ی انتگرال-دیفرانسیل ولترا-فردهلم غیر خطی زیر را در نظر می گیریم:

$$y'(x) + \lambda xy(x) = f(x) + \int_0^x (x+t)y^{(3)}(t) dt + \int_0^1 (x-t)y(t) dt$$

$$f(x) = \left(-\frac{2}{3}x + \frac{1}{9}\right)e^{3x} + (2x + 1)e^x + \left(\frac{4}{3} - e\right)x + \frac{1}{9}$$

با شرط $y(0) = 1$.

در مثال فوق دو روش را از نظر عددی بررسی کرده ایم که نتایج بدست آمده در جدول (۱) و (۲) آورده شده است. در جدول (۱) جواب و اختلاف جواب ها برای هر دو روش آورده شده است و به راحتی قابل بررسی و مقایسه می باشند. همچنین از آنجا که روش سری تیلردقیقاً همان جواب واقعی می باشد [۵] لذا نیازی به مقایسه در جدول نمی باشد. در جدول (۲) خطا و خطای نسبی با توجه به جواب واقعی بدست آورده شده است. با توجه به روش فوق و اینکه جملات را می توان در هر

جدول ۱: جواب ها و اختلاف جواب ها

گره	جواب آدومیان	جواب آدومیان اصلاح شده	جواب واقعی	اختلاف جواب واقعی و آدومیان	اختلاف جواب واقعی و اصلاح شده	اختلاف آدومیان و آدومیان اصلاح شده
۰/۱	۱/۱۲۰۱۵	۱/۰۹۵۶۱	۱/۱۰۵۱۷	۰/۰۱۴۹۸	۰/۰۰۹۵۶	۰/۰۲۴۵۴
۰/۲	۱/۲۲۰۳۴	۱/۲۰۸۲۲	۱/۲۲۱۴۰	۰/۰۰۱۰۶	۰/۰۱۳۱۸	۰/۰۱۲۱۲
۰/۳	۱/۳۶۷۰۳	۱/۳۴۴۶۸	۱/۳۴۹۸۶	۰/۰۱۷۱۷	۰/۰۰۵۱۸	۰/۰۲۲۳۵
۰/۴	۱/۸۱۴۲۹	۱/۵۱۳۸۴	۱/۴۹۱۸۲	۰/۳۲۲۴۷	۰/۰۲۲۰۲	۰/۳۰۰۴۵

جدول ۲: خطا و خطای نسبی

گره	خطای آدومیان	خطای آدومیان اصلاح شده	جواب واقعی	خطای نسبی آدومیان	خطای نسبی آدومیان اصلاح شده
۰/۱	۰/۰۱۴۹۸	۰/۰۰۹۵۶	۱/۱۰۵۱۷	۰/۰۱۳۵۵	۰/۰۰۸۶۵
۰/۲	۰/۰۰۱۰۶	۰/۰۱۳۱۸	۱/۲۲۱۴۰	۰/۰۰۰۸۶	۰/۰۱۰۷۹
۰/۳	۰/۰۱۷۱۷	۰/۰۰۵۱۸	۱/۳۴۹۸۶	۰/۰۱۲۷۱	۰/۰۰۳۸۳
۰/۴	۰/۳۲۲۴۷	۰/۰۲۲۰۲	۱/۴۹۱۸۲	۰/۲۱۶۱۵	۰/۰۰۲۷۶

مرحله اضافه کرد لذا فقط تا مرحله پنجم جملات را بدست آورده و سپس مقادیر را تا تقریب مرحله پنجم محاسبه می نمایم.

نتایج

با توجه به اینکه در طول گام کوچک ۰/۱ خطای نسبی روش اصلاح شده نسبت به روش آدومیان کمتر بوده ولی مقادیر جدول نشان دهنده ای این است که اگر طول گام افزایش یابد خطای نسبی روش آدومیان اصلاح شده کاهش و روش آدومیان افزایش یافته؛ لذا روش آدومیان در مقایسه با روش اصلاح شده دارای خطای بیشتر و سرعت کمتری است.

مراجع

- [1] KhamelAl-khaled, Fahi A. Decomposition method for solving nonlinear integro-differential equations, Appl. Math. Computing Vol. 19(2005), No. 1 - 2, pp. 415 - 425
- [2] G. Adomian. Solving frontier problems of physics: The composition method, kluwer. Academic publishers, Boston, (1994)



چهل و ششمین کنفرانس ریاضی ایران
۳-۶ شهریور ۱۳۹۴
دانشگاه یزد



مقایسه روش های آدومیان و آدومیان اصلاح شده برای حل معادلات انتگرال-دیفرانسیل غیرخطی ص: ۴-۴ پوستر

- [3] Adomian.A Review of the Decomposition Method in Applied Mathematics, J. Math.Anal. Appl. 135 (1988), 501-544
- [4] Wazwaz.A reliable amodification of Adomian decomposition method, Appl. Math.Comput. 102 (1999), 77-86
- [5] K.Maleknejad and Y.Mahmoudi.Taylor polynomial solution of high-order nonlinear Volterra-Fredholm integral-differential equations, Appl. Math Comput.145(2-3), 25 December2003, Pages 641-653

پست الکترونیکی: zsahraye@gmail.com
پست الکترونیکی: partanian@hsu.ac.ir



یک روش عددی بر اساس درونیابی‌های متوالی برای معادلات انتگرال هم‌رشتاین تابعی

ابوالفضل تاری
دانشگاه شاهد

فاطمه زرین*
دانشگاه شاهد

چکیده

در این مقاله یک روش عددی جدید برای حل معادلات انتگرال هم‌رشتاین تابعی پیشنهاد و همگرایی و پایداری عددی روش ثابت شده است.

واژه‌های کلیدی: معادلات انتگرال هم‌رشتاین تابعی، روش عددی، درونیابی

Mathematics Subject Classification [2010]: 65R20, 45G99

۱ مقدمه

برای حل عددی معادلات انتگرال هم‌رشتاین و فردهلم، روش‌های موجود عموماً بر پایه روش‌های از نوع نیستروم، روش‌های تکراری و روش‌های تصویری است که شامل روش مشهور هم‌مکانی و روش‌های گلرکین می‌باشد [۲، ۳، ۴]. در این مقاله یک روش عددی جدید برای حل معادله انتگرال هم‌رشتاین تابعی نوع دوم زیر ارائه می‌دهیم [۱]:

$$x(t) = g(t) + \int_a^b H(t, s) \cdot f(s, x(s), x(\varphi(s))) ds, t \in [a, b] \quad (1)$$

که $a, b \in \mathbb{R}$ و $a < b$ و نیز $H : [a, b] \times [a, b] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ بوده و همچنین $\varphi \in [a, b] : \forall t \in [a, b]$ است و بالاخره φ و g و H پیوسته‌اند.

در اینجا یک روش عددی جدید برای معادله مذکور می‌سازیم که تکنیک نقطه ثابت را با قواعد کوادراتیک دوزنقه‌ای و درونیابی اسپلاین مکعبی طبیعی ترکیب می‌کند. همگرایی و پایداری عددی روش تنها با استفاده از شرایط لیپشیتز، اثبات می‌شود.

۲ مقدمات ریاضی

شرایط زیر را در نظر بگیرید:

۱. $H \in C([a, b] \times [a, b] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R})$ و $f \in C([a, b] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R})$ و $\forall t \in [a, b] : a \leq \varphi(t) \leq b$ و $\varphi, g \in C[a, b]$

۲. وجود دارد $\alpha > 0$ و $\beta > 0$ به شرطی که: $|f(s, u, v) - f(s, u', v')| \leq \alpha|u - u'| + \beta|v - v'|$ برای هر $(u, v), (u', v') \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ و $s \in [a, b]$

* سخنران



۳. $b - a < \frac{1}{\alpha + \beta}$ که در آن $k \geq 0$ به گونه‌ای است که $|H(t, s)| \leq k$ برای همه $(t, s) \in [a, b] \times [a, b]$.

۴. وجود دارد γ و δ و μ و ρ و λ مثبت به‌طوری‌که

$$|H(t, s) - H(t', s')| \leq \delta|t - t'| + \lambda|s - s'|$$

$$|f(s, u, v) - f(s', u, v)| \leq \gamma|s - s'|$$

$$|\varphi(t) - \varphi(t')| \leq \mu|t - t'|$$

$$|g(t) - g(t')| \leq \rho|t - t'|$$

فرض کنید $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ و $f_0(s) = f(s, g(s), g(\varphi(s)))$. از آنجا که f و φ و g پیوسته‌اند، f روی مجموعه فشرد $[a, b]$ پیوسته‌است و بنابراین وجود دارد M به‌طوری‌که $|f_0(s)| \leq M$ برای هر $s \in [a, b]$. تحت شرایط یک تا سه فوق، با به‌کارگیری تکنیک پیکارد - باناخ وجود و یکتایی جواب معادله به‌دست می‌آید. فرض کنید $x^* \in C[a, b]$ جواب معادله (۱) باشد و دنباله تقریبات متوالی به‌صورت زیر باشد:

$$x_0(t) = g(t), \forall t \in [a, b] \quad (2)$$

$$x_m(t) = g(t) + \int_a^b H(t, s) \cdot f(s, x_{m-1}(s), x_{m-1}(\varphi(s))) ds, \forall t \in [a, b], m \in \mathbb{N} \quad (3)$$

۳ الگوریتم عددی

$$x_0(t_i) = g(t_i), i = 0, \dots, n$$

$$x_1(t_i) = g(t_i) + \frac{b-a}{\Upsilon n} \cdot \sum_{j=1}^n [H(t_i, t_{j-1}) \cdot f(t_{j-1}, g(t_{j-1}), g(\varphi(t_{j-1})))$$

$$+ H(t_i, t_j) \cdot f(t_j, g(t_j), g(\varphi(t_j)))] + R_{1,i} = \overline{x_1(t_i)} + R_{1,i}, i = 0, \dots, n,$$

$$x_2(t_i) = g(t_i) + \frac{b-a}{\Upsilon n} \cdot \sum_{j=1}^n [H(t_i, t_{j-1}) \cdot f(t_{j-1}, \overline{x_1(t_{j-1})} + R_{1,j-1}, x_1(\varphi(t_{j-1})))$$

$$+ H(t_i, t_j) \cdot f(t_j, \overline{x_1(t_j)} + R_{1,j}, x_1(\varphi(t_j)))] + R_{2,i} = g(t_i) + \frac{(b-a)}{\Upsilon n}$$

$$\cdot \sum_{j=1}^n [H(t_i, t_{j-1}) \cdot f(t_{j-1}, \overline{x_1(t_{j-1})} + R_{1,j-1}, s_1(\varphi(t_{j-1}))) + H(t_i, t_j) \cdot f(t_j, \overline{x_1(t_j)} + R_{1,j}, s_1(\varphi(t_j)))]$$

$$+ \overline{R_{2,i}} = \overline{x_2(t_i)} + \overline{R_{2,i}}, i = 0, \dots, n \quad (4)$$

که در آن $s_1: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ، درونیاب اسپلاین مکعبی با شرایط مرزی طبیعی است [۱] که مقادیر $\overline{x_1(t_i)}, i = 0, \dots, n$ را درونیابی می‌کند (برای مشاهده شرح کامل درونیابی به [۱] مراجعه کنید).



به استقرا برای $m \geq 3$ به دست می‌آوریم:

$$\begin{aligned} x_m(t_i) &= g(t_i) + \frac{b-a}{\sqrt[n]{n}} \cdot \sum_{j=1}^n [H(t_i, t_{j-1}) \cdot f(t_{j-1}, \overline{x_{m-1}(t_{j-1})} + \overline{R_{m-1, j-1}}, x_{m-1}(\varphi(t_j))) \\ &+ H(t_i, t_j) \cdot f(t_j, \overline{x_{m-1}(t_j)} + \overline{R_{m-1, j}}, x_{m-1}(\varphi(t_j)))] + R_{m, i} = g(t_i) \\ &+ \frac{b-a}{\sqrt[n]{n}} \cdot \sum_{j=1}^n [H(t_i, t_{j-1}) \cdot f(t_{j-1}, \overline{x_{m-1}(t_{j-1})}, s_{m-1}(\varphi(t_{j-1}))) \\ &+ H(t_i, t_j) \cdot f(t_j, \overline{x_{m-1}(t_j)}, s_{m-1}(\varphi(t_j)))] + \overline{R_{m, i}} = \overline{x_m(t_i)} + \overline{R_{m, i}}, \forall i = 0, \dots, n \quad (5) \end{aligned}$$

که در آن $s_{m-1} : [0, a] \rightarrow \mathbb{R}$ ، درونیاب اسپلین مکعبی با شرایط مرزی طبیعی است [۱] که مقادیر $i = 0, \dots, n$ را درونیابی می‌کند [۱].

۴ آنالیز همگرایی

قضیه ۱.۴. تحت مفروضات (۱) - (۴) دنباله $(\overline{x_m(t_i)})$ جواب $x^*(t_i)$ را روی گره‌های $t_i = a + \frac{i(b-a)}{n}, i = 0, \dots, n$ تقریب می‌کند و یک برآورد خطا به صورت زیر است:

$$\begin{aligned} |x^*(t_i) - x_m(t_i)| &\leq \frac{(b-a)^m (k(\alpha + \beta))^m}{1 - k(b-a)(\alpha + \beta)} \cdot kM_0(b-a) \\ &+ \frac{L(b-a)^2}{\sqrt[n]{n}[1 - k(b-a)(\alpha + \beta)]} + \frac{\sqrt[n]{\beta(b-a)\omega(V_{m-1}, h)}}{\sqrt[n]{1 - k(b-a)(\alpha + \beta)}}, i = 0, \dots, n \quad (6) \end{aligned}$$

که V_m به صورت زیر تعریف شده است:

$$V_m(t) = x_m(t) + [\overline{x_m(t_i)} - x_m(t_i)] \cdot \frac{t - t_{i-1}}{h} + [\overline{x_m(t_{i-1})} - x_m(t_{i-1})] \cdot \frac{t_i - t}{h}.$$

اثبات. برای اثبات [۱] را ببینید. □

ملاحظه ۲.۴. در رابطه برآورد خطای فوق از آنجا که $\lim_{h \rightarrow 0} \omega(V_{m-1}, h) = 0$ و $m \rightarrow \infty$ و $n \rightarrow \infty$ نتیجه می‌شود $|x^*(t_i) - \overline{x_m(t_i)}| \rightarrow 0$ برای هر $i = 0, \dots, n$ که در واقع همگرایی روش پیشنهاد شده است.

قضیه ۳.۴. تحت مفروضات قضیه یک، روش عددی و الگوریتم آن به طور عددی پایدارند.

اثبات. برای اثبات [۱] را ببینید. □

مثال ۴.۴. معادله زیر را در نظر بگیرید

$$x(t) = \frac{\sqrt[4]{t}}{\pi} \cdot (1 + \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\pi^2}{32}) + \frac{\sqrt[4]{\pi/4 - t}}{\pi} - \int_0^{\pi/4} \sqrt[4]{G(t, s)} \cdot [1 + 2(1 + \frac{s^2}{8}) \cdot \cos(\frac{s}{4}) - 2 \cos(\frac{s}{4})] \cdot x(\frac{s}{4}) ds$$



حل. $G : [0, \frac{\pi}{4}] \times [0, \frac{\pi}{4}] \rightarrow \mathbb{R}$ و $t \in [0, \frac{\pi}{4}]$ به صورت زیر داده شده است:

$$G(t, s) = \begin{cases} (\frac{4}{\pi})s(\frac{\pi}{4} - t), & s \leq t \\ (\frac{4}{\pi})t(\frac{\pi}{4} - t), & s \geq t \end{cases}$$

جواب دقیق $x^* = \frac{t^2}{4} + \sin t + 1$ است. این معادله انتگرال معادل است با مساله مقدار مرزی دو نقطه‌ای زیر:

$$\begin{cases} x''(t) = 1 + 2(1 + t^2/8) \cdot \cos(t/2) - 2\cos(t/2) \cdot x(t/2) \\ x(0) = 1, x(\pi/4) = 1 + \sqrt{2}/2 + \pi^2/32 \end{cases}$$

G و تابع گرین است. با به‌کارگیری روش برای $n = 100$ نتایج در جدول خلاصه شده است. تقریب‌های جواب در گره‌ها در تکرار نهایی در ستون سوم بیان شده و ستون چهارم شامل خطای مؤثر $e_i = |x^*(t_i) - x_{100}(t_i)|, i = 0, \dots, 100$ است.

جدول ۱: نتایج مثال

t_i	$x^*(t_i)$	$x_{100}(t_i)$	e_i
۰	۱	۱	۰
۰٫۳۹۲۷	۱٫۴۵۹۷۸۹۷۱۶۷۴۸۶۰۰	۱٫۴۵۹۷۸۹۸۸۱۶۰۶۳۶۸	$۱٫۶۴۸۵۷۸e - ۰۰۷$
۰٫۷۸۵۴	۲٫۰۱۵۵۳۱۹۱۸۷۲۰۵۹۰	۲٫۰۱۵۵۳۱۹۱۸۷۲۰۵۹۰	۰

مراجع

- [1] A.M. Bica, M. Curila, S. Curila, About a numerical method of successive interpolations for functional Hammerstein integral equations, 236 (2012), 2005–2024.
- [2] C.T. Kelley, A fast two-grid method for matrix H-equations, Transport Theory Statist. Phys. 18 (1989), 185–204.
- [3] K. Maleknejad, M. Karami, Numerical solution of non-linear Fredholm integral equations by using multiwavelets in the Petrov–Galerkin method, Appl. Math. Comput. 168 (2005), 102–110.
- [4] E. Zeidler, Nonlinear Functional Analysis and its Applications, Vol. I: Fixed Points Theorems, Springer Verlag, Berlin, 1986.

پست الکترونیکی: fatemehzarrin34@yahoo.com
پست الکترونیکی: tari@shahed.ac.ir

تحقیق در عملیات



ارائه مدلی جدید برای مساله زمان بندی کوتاه مدت کارگران دائم و موقت چندمهارته با امکان آموزش مهارت های جدید

رضا قنبری
دانشگاه فردوسی مشهد

صدیقه صادقی*
دانشگاه فردوسی مشهد

چکیده

برنامه ریزی نیروی انسانی در سازمان فرآیندی است که به وسیله آن، سازمان معین می کند که برای رسیدن به اهداف خود به چه تعداد کارمند با چه تخصص و مهارت هایی، برای چه مشاغلی و در چه زمانی نیاز دارد. طیف وسیعی از مسائل مربوط به برنامه ریزی کارمندان و کارگران کارخانجات و شرکت های خدماتی به برنامه ریزی نیروی انسانی اختصاص دارد. هدف از این کار، استفاده از حداقل نیروی کاری مورد نیاز به منظور کامل کردن اهداف تولیدی از پیش تعیین شده است. در این مقاله با در نظر گرفتن عواملی همچون «استخدام و اخراج کارگران دائم و موقت»، «اضافه کاری»، «ارتقا سطح مهارت کارگران» و «آموزش مهارت های جدید به کارگران» به ارائه مدلی جدید برای این مساله می پردازیم.

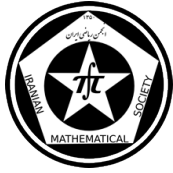
واژه های کلیدی: زمان بندی نیروی انسانی، کارگران موقت و دائم چندمهارته، آموزش کارگران.

Mathematics Subject Classification [2010]: 90B30, 90C10

۱ مقدمه و بیان مساله

در بسیاری از شرکت های صنعتی، استفاده از کارگران موقت در حال افزایش است. این استراتژی در مواقعی که تقاضا متغیر است، می تواند مفید باشد. زیرا با افزایش و یا کاهش تعداد کارگران موقت، می توان تقاضای موجود را برطرف کرد. کارهای اصلی در این زمینه مربوط به جانسون و مونتگمری [۳] و هکس و کندیا [۲] است. استفاده از کارگران موقت در گذشته به عنوان یک راه حل مقطعی استفاده می شده است، در حالی که امروزه به عنوان یک استراتژی رایج برای مدیران است. گالاجهر و کنلی [۱] مرور جامعی بر تحقیقات مربوط به کارگران موقت و مشروط داشته اند. همچنین تکاوین و انگ و همکاران [۵] با استفاده از استخدام و اخراج کارگران موقت ماهر و غیر ماهر سعی بر کاهش هزینه های موجود داشتند. دونالد و همکاران [۴] نیز مدل تخصیص کار به کارگران را ارائه کرده اند که در آن مهارت ها سطح بندی شده و آموزش کارگران برای رفع کمبود مهارت های مورد نیاز در نظر گرفته شده است. در تابع هدف مدل پیشنهادی دونالد و همکاران، هزینه انبارداری، آموزش و هزینه کیفیت پایین محصول مینیمم می شود. در این پژوهش، تلفیقی از مدل های فوق را در نظر می گیریم. به این صورت که افزون بر استخدام و اخراج کارگران موقت، به آموزش مهارت های مورد نیاز به کارگران و همچنین ارتقا سطح مهارت کارگران می پردازیم که با توجه به شرایط مساله، که در آن واریانس تقاضا بالاست، می تواند موثر باشد. زیرا با افزایش تقاضا، نیاز به نیروی کاری ماهر افزایش می یابد و آموزش کارگران موجود، کمبود نیروی کاری ماهر را جبران می کند و با توجه به این که هزینه آموزش کمتر از استخدام نیروی جدید است، در کاهش هزینه ها نیز موثر است. همچنین هر کارگر با سطح مهارت مختلف، دارای یک نرخ بهره وری است. به این معنی که با توجه به سطح مهارت، درصدی از محصولات که توسط کارگر تولید می شود، معیوب است. بنابراین با در نظر گرفتن این فرض، مساله را به شرایط واقعی، نزدیک تر می کنیم.

* سخنران



α_{jlk}^W میانگین حقوق هر کارگر دائم در ایستگاه کاری j در خط تولید l با سطح مهارت k در هر دوره.

α_{jlk}^T میانگین حقوق هر کارگر موقت در ایستگاه کاری j در خط تولید l با سطح مهارت k در هر دوره.

β_{jlk} هزینه استخدام هر کارگر موقت در ایستگاه کاری j در خط تولید l با سطح مهارت k در هر دوره.

θ_{jlk} هزینه اخراج هر کارگر موقت در ایستگاه کاری j در خط تولید l با سطح مهارت k در هر دوره.

π_{jlk}^W هزینه اضافه کاری هر کارگر دائم در ایستگاه کاری j در خط تولید l با سطح مهارت k در هر دوره.

π_{jlk}^T هزینه اضافه کاری هر کارگر موقت در ایستگاه کاری j در خط تولید l با سطح مهارت k در هر دوره.

λ_i هزینه نگهداری هر واحد محصول i در هر دوره.

σ_i هزینه هر واحد سفارش عقب افتاده.

$C_{Training}$ بیشترین هزینه آموزش ممکن در کل دوره های زمانی.

C_{ijlk} هزینه آموزش کارگر i از سطح مهارت $1 - k$ به سطح مهارت k برای ایستگاه کاری j در خط تولید l .

CQ_{jil} هزینه هر واحد با کیفیت پایین در ایستگاه کاری j در خط تولید l .

C_l بیشترین تعداد کارگران ممکن در خط تولید l .

h ساعات موظفی تولید برای هر کارگر در هر دوره.

A سقف ساعات اضافه کاری هر کارگر.

pr_{pjl} زمان پردازش محصول p در ایستگاه کاری j در خط l .

TA_i سقف ساعات آموزشی برای کارگر i .

M یک عدد مثبت بزرگ.

$IMAX_p$ ماکزیمم سطح موجودی محصول p .

ω مینیمم نسبت کارگران دائم به کل کارگران.

T تعداد دوره های زمانی.

$D_p(t)$ تقاضای پیش بینی شده برای محصول p در دوره t .

NS_{jil} سطح مهارت لازم برای ایستگاه کاری j در خط تولید l .

P_{pjl} نرخ بهره وری محصول p ، اگر کار در ایستگاه کاری j با سطح مهارت l انجام شود. [۴]

q_{ijlk} سطح کیفیت کارگر i در انجام کار در ایستگاه کاری j در خط تولید l با سطح مهارت k . [۴]

s_{jlk} سطوح مهارت برای ایستگاه کاری j در خط تولید l . [۴]

w_{ijl} سطح مهارت اولیه کارگر i در ایستگاه کاری j در خط l .

tr_{ijlk} زمانی که برای آموزش کارگر i برای کار در ایستگاه کاری j در خط تولید l با سطح مهارت k در هر دوره.

z_{ijlkt} اگر کارگر i کار j در خط تولید l را با سطح مهارت k در دوره t انجام دهد برابر یک است. در غیر این صورت صفر است.

y_{ijlt} اگر کارگر i کار j در خط تولید l را با هر سطح مهارتی در دوره t انجام دهد برابر یک است. در غیر این صورت صفر است.

v_{ijlk} اگر کارگر i کار j در خط تولید l را با سطح مهارت k در یک یا چند دوره انجام دهد برابر یک است. در غیر این صورت صفر است.

W_{it} اگر کارگر i در زمان t دسترس باشد، برابر یک است. در غیر این صورت صفر است.

در اینجا i اندیس مربوط به کارگران است که در آن فرض می کنیم $i = 1, \dots, N$ ، شمارنده کارگران دائم و S ، $i = N + 1, \dots, N + S$ ، شمارنده کارگران موقت است.



۲ مدل پیشنهادی مساله

$$I_p(t) \leq IMAX_p \quad \forall p, t \quad (14)$$

$$B_p(T) = 0 \quad \forall p \quad (15)$$

$$S_{jlk}(t) = S_{jlk}(t-1) + R_{jlk}(t) - F_{jlk}(t) + \sum_{i=N+1}^S z_{ijlkt}(\lambda - u_{ijl}) \quad \forall j, l, k, t \quad (16)$$

$$W_{jlk}(t) = W_{jlk}(t-1) + \sum_{i=1}^N z_{ijlkt}(\lambda - u_{ijl}) \quad \forall j, l, k, t \quad (17)$$

$$\sum_p X_p(t) pr_{pjl} \leq \sum_k (H_{jlk}^W(t) + H_{jlk}^T(t)) + \sum_k (O_{jlk}^W(t) + O_{jlk}^T(t)) \quad \forall j, l, t \quad (18)$$

$$H_{jlk}^T(t) = 0 \text{ if } NS_{jl} > k \quad \forall j, l \quad (19)$$

$$(1-\omega)H_{jlk}^W(t) \geq \omega H_{jlk}^T(t) \quad \forall j, l, t \quad (20)$$

$$(1-\omega)O_{jlk}^W(t) \geq \omega O_{jlk}^T(t) \quad \forall j, l, t \quad (21)$$

$$W_{jlk}(t) \geq \frac{1}{h} H_{jlk}^W(t) \quad \forall j, l, k, t \quad (22)$$

$$S_{jlk}(t) \geq \frac{1}{h} H_{jlk}^T(t) \quad \forall j, l, k, t \quad (23)$$

$$AW_{jlk}(t) \leq O_{jlk}^W(t) \quad \forall j, l, k, t \quad (24)$$

$$AS_{jlk}(t) \leq O_{jlk}^T(t) \quad \forall j, l, k, t \quad (25)$$

$$C_l \geq \frac{1}{h} \left(\sum_j \sum_k (H_{jlk}^W(t) + H_{jlk}^T(t)) \right) \quad \forall l, t \quad (26)$$

$$\min \sum_t \left[\sum_j \sum_l \sum_k (\alpha_{jlk}^W W_{jlk}(t) + \alpha_{jlk}^T S_{jlk}(t) + \pi^W O_{jlk}^W(t) + \pi^T O_{jlk}^T(t) + \beta_{jlk} R_{jlk}(t) + \theta_{jlk} F_{jlk}(t)) + \sum_p \lambda_p I_p(t) + \sum_p \sigma_p B_p(t) + \sum_i \sum_j \sum_l \sum_k \sum_p P_{pjl} z_{ijlkt} q_{ijlk} C Q_{jl} \right] + \sum_i \sum_j \sum_l \sum_k v_{ijlk} C_{ijlk} \quad (1)$$

$$\sum_j \sum_l y_{ijlt} \leq W_{it} \quad \forall i, t \quad (2)$$

$$\sum_k z_{ijlkt} \leq y_{ijlt} \quad \forall i, j, l, t \quad (3)$$

$$\sum_i \sum_k z_{ijlkt} s_{jlk} \geq NS_{jl} \quad \forall j, l, t \quad (4)$$

$$\sum_i \sum_j \sum_l \sum_k P_{pjl} z_{ijlkt} q_{ijlk} \geq D_p(t) \quad \forall p, t \quad (5)$$

$$\sum_i \sum_l \sum_k \sum_t P_{pjl} z_{ijlkt} q_{ijlk} \geq \sum_i \sum_l \sum_k \sum_t P_{pj+\lambda i} z_{ij+\lambda lkt} q_{ij+\lambda lk} \quad j = 1, \dots, J-1 \quad (6)$$

$$\sum_t z_{ijlkt} \leq v_{ijlk} T \quad \forall i, j, l, k \quad (7)$$

$$\sum_t z_{ijlkt} \geq v_{ijlk} \quad \forall i, j, l, k \quad (8)$$

$$\sum_j \sum_l \sum_k tr_{ijl} v_{ijlk} \leq T A_i \quad (9)$$

$$\sum_i \sum_j \sum_l \sum_k tr_{ijlk} v_{ijlk} \leq T_{total} \quad (10)$$

$$z_{ijlkt} s_{jlk} \leq w_{ijl} + 1 \quad \forall i, j, l, k, t \quad (11)$$

$$u_{ijl} - \sum_t y_{ijlt} \leq 0 \quad \forall j, l, i = 1, \dots, N \quad (12)$$

$$I_p(t) - B_p(t) = I_p(t-1) - B_p(t-1) + X_p(t) - D_p(t) \quad \forall p, t \quad (13)$$



محدودیت (۱) مربوط به تابع هدف است که به مینیمم سازی هزینه‌ها، شامل میانگین درآمد کارگران دائم و موقت، اضافه کاری، استخدام و اخراج کارگران موقت، نگهداری موجودی، سفارشات عقب افتاده، کیفیت پایین محصول و هزینه آموزش می‌پردازد. محدودیت (۲) بیان می‌کند در صورتی که کارگر i در دسترس نباشد (ممکن است تعدادی از کارگران را به دلیل اخراج، نداشته باشیم)، نباید به هیچ ایستگاه کاری اختصاص یابد. محدودیت (۳) بیان می‌کند که اگر کارگر i در ایستگاه کاری z در دوره t کار کند، آن‌گاه این کارگر فقط در یک سطح مهارت از کار z می‌تواند کار کند. محدودیت (۴) بیان می‌کند که کارگرانی که در ایستگاه کاری z در خط تولید l کار می‌کنند، سطح مهارت لازم برای انجام آن کار را برآورده می‌کنند. محدودیت (۵) تقاضای مورد نیاز برای محصول p در دوره t را برطرف می‌کند. محدودیت (۶) بیان می‌کند که تعداد محصولاتی که در ایستگاه کاری z تولید می‌شود باید از ایستگاه کاری $1 + z$ بیشتر باشد. زیرا درصدی از این محصولات در ایستگاه $1 + z$ معیوب تولید می‌شوند. محدودیت (۷) بیان می‌کند که تعداد دفعاتی که کارگر i در ایستگاه کاری z در خط تولید l کار می‌کند، حداکثر برابر کل دوره‌های زمانی است. محدودیت (۸) بیان می‌کند که اگر کارگر i در هیچ دوره زمانی به ایستگاه کاری z در خط تولید l با سطح مهارت k اختصاص نیابد، آن‌گاه نمی‌توانیم کارگر i را به ایستگاه کاری z در خط تولید l با سطح مهارت k اختصاص دهیم. محدودیت (۹) تعداد ساعات آموزشی مجاز برای کارگر i را محدود می‌کند. محدودیت (۱۰) تعداد کل ساعات آموزشی را برای کارگران محدود می‌کند. محدودیت (۱۱) باعث می‌شود تا کارگران نتوانند بیشتر از یک سطح مهارت از سطح مهارت کنونی‌شان در ایستگاه کاری z در دوره t را آموزش ببینند. محدودیت (۱۲) بیان می‌کند در صورتی که کارگر i سطح مهارت لازم برای کار در ایستگاه کاری z را داشته باشد، باید در یک دوره زمانی به این ایستگاه تخصیص یابد. محدودیت (۱۳) میزان تقاضا مورد نیاز را برطرف می‌کند. محدودیت (۱۴) بیان می‌کند که سطح موجودی برای هر محصول نباید از $IMAX_p$ بیشتر باشد. محدودیت (۱۵) بیان می‌کند که تمام سفارشات عقب افتاده قبل از پایان دوره زمان بندی تحویل داده می‌شوند. محدودیت‌های (۱۶) و (۱۷) تعداد کارگران موقت و دائم در دوره t را محاسبه می‌کند. محدودیت (۱۸) بیان می‌کند زمان پردازش کل محصولات تولید شده، از کل زمان‌های اختصاص داده شده به کارگران موقت و دائم کمتر است. محدودیت (۱۹) از تخصیص ساعت کاری به کارگرانی که سطح مهارت لازم برای کار در ایستگاه کاری z را ندارند، جلوگیری می‌کند. در مدل فوق، نسبت کارگران دائمی به کل کارگران از بالا کران دار است. محدودیت‌های (۲۰) و (۲۱) این نسبت را، هم در ساعات عادی و هم در ساعات اضافه کاری اعمال می‌کنند. محدودیت‌های (۲۲) و (۲۳) بیان می‌کنند که تعداد کارگران در هر دوره همیشه بیشتر از تعداد کارگرانی است که در آن دوره مشغول به کار هستند. محدودیت‌های (۲۴) و (۲۵) ساعات اضافه کاری را محدود می‌کنند. محدودیت (۲۶)، تعداد کارگران هر خط تولید را محدود می‌کند.

مراجع

- [1] C. E. Connelly, D. G. Gallagher, *Emerging trends in contingent work research*, Journal of Management 30 (2004), no. 6, 959–983.
- [2] A. Hax, D. Candea, *Production and Inventory Management*, Prentice-Hall, Englewood, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1984.
- [3] L. A. Johnson, D. C. Montgomery, *Operations Research in Production Planning, Scheduling and Inventory Control*, Wiley, New York, 1974.
- [4] T. McDonald, KP. Ellis, EM. Van Aken, CP. Koelling, *Development and application of a worker assignment model to evaluate a lean manufacturing cell*, Int. J. Prod. Res, 47 (2009), no. 9, pp. 2427–2447.
- [5] A. Techawiboonwong, P. Yenradee, S. K. Das, *A master scheduling model with skilled and unskilled temporary workers*, Int. J. Production Economics, 103 (2006), 798–809.



ارائه مدل جدید جهت رسته بندی واحدهای تصمیم گیری

فرانک حسین زاده سلجوقی

دانشگاه سیستان و بلوچستان

محمد امامی*

دانشگاه سیستان و بلوچستان

چکیده

هدف اولیه از معرفی تحلیل پوششی داده ها، تعیین کارایی واحدهای تصمیم گیری است. بر حسب نوع کارایی و ویژگی های محیط، مدل های متفاوتی از تحلیل پوششی داده ها ارائه گردیده است. یکی از جدیدترین کاربردهای مدل های تحلیل پوششی داده ها، رسته بندی واحدهای تصمیم گیری است. کاربران، واحدهای تصمیم گیری را بر اساس شرایطشان به منظور مقایسه بهتر و واقعی تر دسته بندی می کنند. رسته بندی واحد ها بر اساس یک ویژگی به سادگی انجام می گیرد، ولی اگر عوامل تعیین رسته و طبقات آن متعدد باشد، تعیین رسته واحدهای تصمیم گیری به سادگی امکان پذیر نبوده و تعیین آن از جانب کاربر، دقت کافی را نخواهد داشت. در این مقاله، مدل جدیدی برای تعیین رسته واحدهای تصمیم گیری با تلفیق دو روش تحلیل پوششی داده ها و مدل تفکیک خطی ارائه می دهیم.

واژه های کلیدی: تحلیل پوششی داده ها، واحد تصمیم گیری، شاخص رسته ای، کارایی، تفکیک دو به دو گروه ها

۱ مقدمه

در علم تحلیل پوششی داده ها، کاربران رتبه کارایی واحدهای تصمیم گیری (DMU)^۱ را محاسبه می کنند تا نقاط مرجع واحد تحت ارزیابی را شناخته و در حد توان، آن واحد را بهبود بخشند. به منظور مقایسه درست و واقعی کردن نقاط مرجع، شناخت شرایط واحدهای تصمیم گیری لازم است. از جمله روش های محاسبه رتبه کارایی واقعی تر، رسته بندی واحدها توسط شاخص رسته ای است. نخستین بار بنکر و موری در سال ۱۹۸۶ مدلی برای رسته بندی واحدها ارائه کردند [۱]. این رسته بندی با توجه به دیدگاه و قضاوت مدیر انجام می شود که از یک دقت ریاضی به دور می باشد. همچنین هرگاه چند شاخص رسته ای وجود داشته باشند، تعیین رسته مشکل تر است. در نتیجه ممکن است بعضی از واحدها به طور صحیح رده بندی نشوند. به منظور حل این مشکل می توان از مدل های برنامه ریزی آرمانی برای تفکیک گروه ها که توسط فرد و گلوور در سال ۱۹۸۱ ارائه گردیده، کمک گرفت [۲]. برای کاربردی کردن این روش در برنامه های مربوط به تحلیل پوششی داده ها و تعیین سریع رسته واحدها، مدل رسته ای و مدل برنامه ریزی آرمانی مربوط به تفکیک گروه ها را در یک مدل ترکیب می کنیم. در این مقاله ضمن تعریف شاخص رسته ای، مروری بر مدل رسته ای بنکر و موری و مدل برنامه ریزی آرمانی مربوط به تفکیک گروه ها داریم. در نهایت مدل جدید برای تعیین رسته واحدهای تصمیم گیری با رسته نامشخص را ارائه می دهیم.

۲ مدل رسته ای بنکر و موری

تعریف ۱.۲. شاخص های کیفی که واحدهای تصمیم گیری را بر اساس ویژگی های مشابه به چند رده دسته بندی می کنند شاخص رسته ای گوئیم.

* سخنران

^۱Decision Making Unit



بنکر و موری مدل زیر را برای محاسبه کارایی واحد های رسته بندی شده ارائه کردند [۳]:

$$\begin{aligned}
 & \min \theta \\
 & \text{s.t.} \\
 & \sum_{j=1}^n \lambda_j x_{ij} \leq \theta x_{io} \quad i = 1, \dots, m \\
 & \sum_{j=1}^n \lambda_j y_{rj} \geq y_{ro} \quad r = 1, \dots, s \\
 & \sum_{j=1}^n \lambda_j d_{kj}^{(\bar{c}_k)} \leq d_{ko}^{(\bar{c}_k)} \quad k = 1, \dots, K, \quad \bar{c}_k = 1, \dots, C_k \\
 & \sum_{j=1}^n \lambda_j = 1 \\
 & \lambda_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, n
 \end{aligned} \tag{1}$$

در این مدل واحد تحت ارزیابی با واحدهایی که در شرایط مشابه یا بدتر هستند مورد ارزیابی قرار می گیرد. بنابراین اگر واحد j ام در رسته c_k باشد آنگاه پارامترهای صفر یک $d_{kj}^{(\bar{c}_k)}$ به صورت زیر تعریف می شوند:

$$d_{kj}^{(\bar{c}_k)} = \begin{cases} 1 & \bar{c}_k = 1, \dots, c_k \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

۳ تفکیک دو به دو خطی

هدف، تعیین یک معادله ابر صفحه جداکننده دو به دو است که همه نقاط گروه p ام را، با تقاطع نیم فضاهای تعیین شده توسط بهترین ابر صفحه جداکننده نقاط گروه p از هر گروه دیگر q شناسایی کند. نکته مهم، تدوین مسئله به مجموعه ای از مسائل دو گروه کوچکتر است که در نتیجه منجر به تسهیل محاسبات می شود. بنابراین تعداد ابر صفحه های جدا کننده برابر $\frac{g(g-1)}{2}$ است که g تعداد گروه های تعیین شده است. روش تفکیک دو گروه در حالت کلی به تفصیل زیر است:

با توجه به دو گروه G_1 و G_2 بردار مناسب X و مقدار مرزی b به گونه ای تعیین می شوند که در قیود زیر صدق کنند:

$$A_j X \leq b, \quad A_j \in G_1$$

$$A_j X \geq b, \quad A_j \in G_2$$

قرار دهید α_j مقداری که A_j مرز را نقض و d_j میزان فاصله نقطه A_j از مرز تعیین شده، آنگاه هدف به حداقل رساندن مجموع α_j و به حداکثر رساندن مجموع d_j است. پس مدل تفکیک دو به دو به صورت زیر ایجاد می شود:

$$\begin{aligned}
 & \min \sum h_j \alpha_j - \sum e_j d_j \\
 & \text{s.t.} \\
 & A_j X + d_j = b + \alpha_j, \quad A_j \in G_1 \\
 & -A_j X + d_j = -b + \alpha_j, \quad A_j \in G_2
 \end{aligned}$$

در این مدل h_j و e_j ضرایبی هستند که میزان اهمیت A_j را در تعیین ابر صفحه جداکننده نشان می دهند. اگر A_j نقش بیشتری در جداسازی گروه ها داشته باشد می توان ضریب h_j مربوط به آن را افزایش داد.

نوع دیگری از این مدل وجود دارد که به صورت زیر بیان می شود:

d را اندازه حداقل فاصله هر عضو گروه، از مرز ابر صفحه $AX = b$ در نظر بگیرید. مدل برنامه ریزی جدید به صورت زیر



داریم:

$$\begin{aligned} & \min \sum h_j \alpha_j - d \\ & \text{s.t.} \\ & A_j X + d = b + \alpha_j, \quad A_j \in G_1 \\ & -A_j X + d = -b + \alpha_j, \quad A_j \in G_2 \end{aligned} \quad (2)$$

اگر مقدار بهین تابع هدف نامثبت شود به این معناست که جداسازی گروه ها امکان پذیر است.

۴ مدل جدید

به منظور ایجاد مدل جدیدی که رسته واحد تصمیم گیری با رسته نامعین را مشخص کند، موارد زیر را در نظر می گیریم. ۱- واحدهای رسته بندی شده را به زیرگروه ها تقسیم می کنیم. به این صورت که یک گروه، شامل واحدهایی است که کاملاً شرایط مشابهی دارند. برای مثال اگر دو شاخص رسته ای با ۲ و ۳ رده موجود باشد، واحدهایی که در رده اول شاخص اول و رده سوم شاخص دوم هستند در یک گروه قرار می گیرند. به منظور تبدیل رسته ها به زیرگروه ها:

فرض کنید برای n واحد تصمیم گیری با m ورودی و s خروجی، K شاخص رسته ای با C_k رده باشند، بنابراین تعداد زیرگروه ها $g = \prod_{k=1}^K C_k$ است. پارامترهای جدید $\delta_{kj}^{(\bar{c}_k)}$ به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$\delta_{kj}^{(\bar{c}_k)} = d_{kj}^{(\bar{c}_k)} - d_{kj}^{(\bar{c}_k+1)}, \quad k = 1, 2, \dots, K, \quad \bar{c}_k = 1, 2, \dots, C_k, \quad j = 1, 2, \dots, n$$

$$d_{kj}^{(C_k+1)} = 0$$

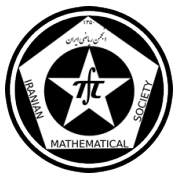
۲- با ضرب $t_{pj} = \prod_{k=1}^K \delta_{kj}^{(\bar{c}_k)}$ در دو طرف قیود، به صورت جداگانه، حداقل همپوشانی گروه های مجزا به صورت دو به دو با گروه جدید که شامل واحد تصمیم گیری با رسته نامعین است، محاسبه می شود. برای واحدهای تصمیم گیری با شرایط یکسان برابر یک و در غیر این صورت برابر صفر خواهد شد.

۳- ضرایب مربوط به α_j را برابر θ_j^* که از مدل (۱) به دست می آید قرار دهید، چون هر چه یک واحد به مرز نزدیکتر باشد تاثیر بیشتری در جداسازی ایجاد می کند.

۴- واحد تصمیم گیری با رسته نامعین را در یک گروه جدید قرار داده، سپس به صورت دو به دو با گروه های تعیین شده مقایسه کنید. این واحد به گروهی تعلق دارد که بیشترین نقض مرز یا به اصطلاح همپوشانی با آن ایجاد کند. حال با استفاده از مدل های (۱) و (۲)، مدل زیر را به دست می آوریم:

$$\begin{aligned} u_p^* &= \min \left(\sum_{j=1}^n t_{pj} \theta_j^* \alpha_j \right) + \alpha_{n+1} - t_{pj} d_p \\ & \text{s.t.} \\ & t_{pj} \left[\left(\sum_{i=1}^m w_i x_{ij} + \sum_{r=1}^s z_r y_{rj} \right) + d_p \right] = t_{pj} [b_p + \alpha_j], \quad j = 1, 2, \dots, n \\ & - \left(\sum_{i=1}^m w_i x_{i(n+1)} + \sum_{r=1}^s z_r y_{r(n+1)} \right) + d_p = -b_p + \alpha_{n+1} \end{aligned} \quad (3)$$

در مدل (۳)، u_p^* مقدار بهین تابع هدف است که حداقل همپوشانی گروه p ام را با گروه جدید که تنها شامل واحد تصمیم گیری با رسته نامعین است، نشان می دهد. w_i و z_r به ترتیب ضرایب مربوط به ورودی ها و خروجی های گروه p ام است که همراه با b_p (به منظور راحتی کار و شدنی شدن جواب می توان آن را یک مقدار ثابت مثبت در نظر گرفت.) ابرصفحه تفکیک کننده بین دو گروه را مشخص می کنند و مقدار d_p حداقل فاصله واحدهای گروه از مرز تعیین شده است. DMU با رسته نامعین در گروهی قرار دارد که بیشترین همپوشانی یا به اصطلاح نقض مرز را ایجاد کند.



۵ مثال

ده DMU با یک ورودی و یک خروجی و یک شاخص رسته ای که در سه رده دسته بندی شده اند که رسته یکی از آن ها نامشخص است در نظر بگیرید. در جدول (۱) اطلاعات مربوط ارائه شده است. رده DMU_J مشخص نیست.

جدول ۱: اطلاعات مربوط به DMU ها

DMU	ورودی	خروجی	رسته	$d_j^{(1)}$	$d_j^{(2)}$	$d_j^{(3)}$
A	۳	۱	ضعیف	۱	۰	۰
B	۷	۷	ضعیف	۱	۰	۰
C	۱۲	۶	ضعیف	۱	۰	۰
D	۴	۵	متوسط	۱	۱	۰
E	۶	۱۰	متوسط	۱	۱	۰
F	۱۱	۱۱	متوسط	۱	۱	۰
G	۸	۱۱	خوب	۱	۱	۱
H	۹	۱۳	خوب	۱	۱	۱
I	۱۳	۱۵	خوب	۱	۱	۱
J	۸	۱۰	نامشخص	-	-	-

نه DMU را در سه گروه قرار می دهیم. با اجرای مدل برای DMU_J نتایج زیر به دست می آید:

$$u_1^* = 0.665 \quad u_2^* = 1 \quad u_3^* = 0.636$$

پس بهترین رسته برای DMU_J رسته دوم یعنی متوسط است.

۶ نتایج اصلی

رسته بندی واحدها به مقایسه درست واحدهای تصمیم گیری و تعیین بهتر نقاط مرجع و در نهایت بهبود واقعی واحدهای تصمیم گیری منجر می شود. رسته بندی بعضی از واحدهای تصمیم گیری به صورت قطعی مشخص نیست و یا در صورت متعدد بودن عوامل رسته ای، تعیین رسته به سادگی امکان پذیر نخواهد بود. این مقاله یک مدل ریاضی برای رسته بندی بهتر چنین واحدهایی پیشنهاد می دهد که به صورت تعاملی با تصمیم گیرنده می توان رسته واحد تصمیم گیری را تعیین کرد. در این مدل از ترکیب روش های تحلیل پوششی داده ها و برنامه ریزی آرمانی جهت تفکیک دو به دو استفاده شده است. نتایج، نشان دهنده عملکرد مناسب مدل پیشنهادی است.

مراجع

- [1] R.D. Banker, R.C. Morey, *The use of categorical variables in data envelopment analysis*, Management Science (12) (1986), 1613-1627.
- [2] N. Freed, F. Glover, *Simple but powerful goal programming models for discriminant problems*, European Journal of Operational Research 7 (1981) 44-60.
- [3] G. Lober, M. Staat, *Integrating categorical variables in Data Envelopment Analysis models: A simple solution technique*, European Journal of Operational Research 202 (2010) 810-818



ارائه مدل کارایی فوق‌العاده NFR جهت رتبه بندی واحدها در DEA

ناصر روشنی*

دانشگاه پیام‌نور گناباد

چکیده

تحلیل پوششی داده‌های DEA دامنه گسترده‌ای از مدل‌های ریاضی است که برای سنجش کارایی نسبی مجموعه‌ای از واحدهای تصمیم‌گیرنده DMU ها با ورودی‌ها و خروجی‌های مشابه به کار می‌رود. این مقاله درباره رتبه‌بندی واحدهای تصمیم‌گیرنده DMU در تحلیل پوششی داده‌های DEA بحث می‌کند. ما با بهبود مدل کارایی فوق‌العاده DEA تحت VRS، مدل کارایی فوق‌العاده با محورگیری ورودی-خروجی را ارائه می‌دهیم که مدل ارائه شده در رتبه‌بندی عملکرد واحدهای تصمیم‌گیرنده استفاده می‌شود.

واژه‌های کلیدی: تجزیه و تحلیل پوششی داده‌ها، برنامه‌ریزی خطی، واحدهای تصمیم‌گیری، کارایی فوق‌العاده.

۱ مقدمه

تحلیل پوششی داده‌های DEA^۱، روشی برای تعیین راندمان نسبی واحدهای تصمیم‌گیری DMU^۲ ها است. اولین مدل DEA، در [۱]، معرفی شد و آن را مدل CCR نامیدند. DEA یک مرز کارا که تمام واحدهای تصمیم‌گیری DMU ها نمره یک دارند را مشخص می‌کند. معمولاً DMU هایی هستند که روی مرز کارایی قرار دارند. از این رو، رتبه‌بندی مرزی واحدهای تصمیم‌گیری در DEA بسیار مهم است. مدل کارایی فوق‌العاده DEA می‌تواند در رتبه‌بندی عملکرد واحدهای تصمیم‌گیری کارآمد، استفاده شود. در حقیقت وقتی یک DMU تحت ارزیابی، شامل مجموعه بازگشتی از مدل‌های اصلی DEA نیست، مدل‌های DEA را، مدل‌های کارایی فوق‌العاده DEA می‌نامند. پس در مدل کارایی فوق‌العاده DEA، جواب‌های حاصل، یا بازگشت به مقیاس CRS^۳ است یا بازگشت به مقیاس ارزشی VRS^۴. در CCR، مدل کارایی فوق‌العاده DEA تحت CRS در [۲] حاصل شد و آن را مدل AP نامیدند. در [۳] اشاره می‌شود که مدل AP ممکن است برای برخی از ورودی‌های نزدیک به صفر ممکن است نشدنی باشد. به طور مشابه در [۴] نشان داده شده‌است که نشدنی بودن مدل کارایی فوق‌العاده DEA تحت CRS می‌تواند رخ دهد اگر و فقط اگر یک صفر در داده‌ها وجود داشته باشد. هنگامی که فرض کنیم که مدل کارایی فوق‌العاده DEA بر اساس مدل BCC (مدل کارایی آرمانی VRS) باشد، آنگاه به احتمال زیاد غیر شدنی بودن در برنامه ریزی خطی رخ می‌دهد. در [۵] شرط لازم و کافی از نشدنی بودن در مدل کارایی فوق‌العاده VRS را نشان دادند. در [۶] استدلال شده‌است که کارایی فوق‌العاده را می‌توان مانند ورودی ذخیره شده و خروجی مازاد، که توسط DMU کارا حاصل شده، تفسیر کرد. با این تفسیر در [۷] یک مدل کارایی فوق‌العاده VRS با محورگیری ورودی (ورودی ذخیره شده) و خروجی (خروجی مازاد) ارائه شده که نشان می‌دهد این مدل همیشه امکان‌پذیر است، اما این مدل، رتبه‌بندی DMU ها را به درستی

* سخنران

^۱Data Envelopment Analysis^۲Decision Making Unit^۳Constant Return to Scale^۴Variable Returns to Scale



انجام نمی‌دهد و ما در این مقاله روشی برای رفع این مشکل ارائه می‌دهیم. در ادامه این مقاله، در بخش ۲، به مسائل مربوط به کارایی مدل فوق‌العاده DEA در VRS پرداخته می‌شود. در بخش ۳، مدل کارایی فوق‌العاده با محورگیری ورودی-خروجی معرفی می‌شود و در بخش آخر نتیجه‌گیری مطرح می‌شود.

۲ کارایی فوق‌العاده مدل DEA در VRS

در نظر بگیرید n DMU با ورودی‌های m و خروجی s که ورودی و خروجی بردارهایی از DMU_j ($j = 1, \dots, n$) هستند و $Y_j = (y_{1j}, \dots, y_{sj})$ خروجی و $X_j = (x_{1j}, \dots, x_{mj})$ ورودی با $X_j, Y_j \neq 0$ و $X_j, Y_j \geq 0$ هستند. فرض کنید DMU_o را بررسی کنیم که $O \in \{1, 2, \dots, n\}$ است. حال مدل BCC را به صورت زیر مورد بررسی قرار می‌دهیم.

$$\begin{aligned} \min \theta \\ s.t \quad & \sum_{j=1}^n \lambda_j x_{ij} - \theta x_{io} \leq 0, \quad i = 1, \dots, m \\ & \sum_{j=1}^n \lambda_j y_{rj} \geq y_{ro}, \quad r = 1, \dots, s \\ & \sum_{j=1}^n \lambda_j = 1, \quad \lambda_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, n \end{aligned} \quad (1)$$

x_{io} و y_{ro} به ترتیب i امین ورودی و r امین خروجی برای یک DMU_o تحت ارزیابی است. فرض کنید θ^* نشان دهنده مقدار بهینه است. اگر $\theta^* = 1$ نشان دهنده کارآمد بودن واحد تصمیم‌گیری مورد نظر است و به منظور تعیین مرز کارایی، از مدل کارایی آرمانی DEA استفاده می‌شود. مدل کارایی فوق‌العاده DEA تحت VRS، مربوط به مدل BCC به منظور تعیین مرز کارایی به صورت زیر است.

$$\begin{aligned} \min \theta \\ s.t \quad & \sum_{j=1, j \neq o}^n \lambda_j x_{ij} - \theta x_{io} \leq 0, \quad i = 1, \dots, m \\ & \sum_{j=1, j \neq o}^n \lambda_j y_{rj} \geq y_{ro}, \quad r = 1, \dots, s \\ & \sum_{j=1, j \neq o}^n \lambda_j = 1, \quad \lambda_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, n, \quad j \neq o \end{aligned} \quad (2)$$

فرض کنید تمام داده‌ها مثبت باشند. در [۴]-[۵]، نشان داده شده‌است که مدل (۲) نشدنی است اگر و فقط اگر $g^* < 1$. g^* جواب بهینه از مدل زیر است.

$$\begin{aligned} \min g \\ s.t \quad & \sum_{j=1, j \neq o}^n \lambda_j y_{rj} \geq g y_{ro}, \quad r = 1, \dots, s \\ & \sum_{j=1, j \neq o}^n \lambda_j = 1, \quad \lambda_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, n, \quad j \neq o \end{aligned} \quad (3)$$



بنابراین اگر DMU_o مقدار خروجی بزرگی داشته باشد مدل (۲) نشدنی است و برای بدست آوردن رتبه‌بندی کامل و حل مشکل نشدنی بودن باید راه حلی بدست آوریم. برای حل این مشکل، مدل کارایی فوق‌العاده با محورگیری ورودی-خروجی ارائه شده است [۷]. فرض کنید $DMU_o(x_o, y_o)$ واحد تحت ارزیابی است. مدل پیشنهادی به صورت زیر است.

$$\begin{aligned} \min \quad & \lambda + \beta_o \\ \text{s.t.} \quad & \sum_{j=1, j \neq o}^n \lambda_j x_{ij} - (\lambda + \beta_o) x_{io} \leq 0, \quad i = 1, \dots, m \\ & \sum_{j=1, j \neq o}^n \lambda_j y_{rj} - (\lambda - \beta_o) y_{ro} \geq 0, \quad r = 1, \dots, s \\ & \sum_{j=1, j \neq o}^n \lambda_j = 1, \quad \lambda_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, n, \quad j \neq o \end{aligned} \quad (4)$$

در مدل (۴) با وجود شدنی بودن و رتبه‌بندی کردن واحدها، رتبه‌بندی داده‌ها به درستی انجام نمی‌گیرد.

۳ معرفی مدل کارایی فوق‌العاده NFR با محورگیری ورودی-خروجی

با حذف $\sum_{j=1, j \neq o}^n \lambda_j = 1$ در مدل (۴)، به یک مدل جدید در مقیاس CRS دست پیدا می‌کنیم که رتبه‌بندی واحدها را به درستی انجام می‌دهد. مدل پیشنهادی که برای رفع مشکل رتبه‌بندی این مدل ارائه شده‌است، مدل NFR^۵ نامگذاری می‌شود و به صورت زیر است.

$$\begin{aligned} \min \quad & \lambda + \beta_o \\ \text{s.t.} \quad & \sum_{j=1, j \neq o}^n \lambda_j x_{ij} - (\lambda + \beta_o) x_{io} \leq 0, \quad i = 1, \dots, m \\ & \sum_{j=1, j \neq o}^n \lambda_j y_{rj} - (\lambda - \beta_o) y_{ro} \geq 0, \quad r = 1, \dots, s, \quad \lambda_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, n, \quad j \neq o, \quad \beta_o \geq 0 \end{aligned} \quad (5)$$

قضیه ۱.۳. فرض کنید (x_j, y_j) و (x_k, y_k) دو DMU_s که $x_k \leq x_j$ و $y_k \geq y_j$ باشد آنگاه مقادیر بهینه از مدل مطرح شده مربوط به (x_k, y_k) کمتر از (x_j, y_j) خواهد بود.

□

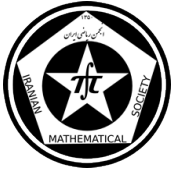
اثبات. اثبات این قضیه واضح است.

قضیه ۲.۳. فرض کنید تمام داده‌ها مثبت باشند آنگاه مدل مطرح شده همیشه شدنی است.

اثبات. فرض کنید مدل غیر شدنی باشد، (فرض خلف). دوگان زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{aligned} \max \quad & \lambda + U y_o - V x_o \\ \text{s.t.} \quad & U y_j - V x_j \leq 0, \quad j = 1, \dots, n, \quad j \neq o \\ & U y_o + V x_o \leq 1 \\ & U, V \geq 0 \end{aligned} \quad (6)$$

^۵Naser Farzad Rooshani



مدل (۶) شدنی است زیرا:

$$U_r = \circ (\forall r) \quad , V_k = \frac{1}{x_{ko}} (if \ x_{ko} \neq \circ) \quad , V_i = \circ (\forall i \neq r)$$

یک جواب شدنی است. بنابراین مدل پیشنهادی نمیتواند بی کران باشد. اگر مدل (۶) بی کران باشد ما باید داشته باشیم:

$$\exists d = (d_u, d_v) \neq \circ$$

$$d_u y_o - d_v x_o > \circ (A) \quad d_u y_j - d_v x_j \leq \circ (B)$$

$$d_u y_o + d_v x_o \leq \circ (C) \quad d_u, d_v \geq \circ (D)$$

با استفاده از (C) و (D) و چون x_o و y_o مثبت فرض شده اند در نتیجه $(d_u, d_v) = \circ$ که خلاف فرض ماست و فرض خلف ثابت می شود و اثبات کامل می شود. □

۴ نتیجه گیری

در مدل کارایی فوق العاده به دلیل وجود $\sum_{j=1, j \neq o}^n \lambda_j = 1$ در ساختار فرمول خود به مانند سایر مدل ها، رتبه بندی را به درستی انجام نمی دهد که با حذف آن به یک مدل جدید رسیده ایم. مدل AP و مدل NFR رتبه بندی یکسانی دارند که مدل کارایی فوق العاده این رتبه بندی را ندارد.

مراجع

- [1] A. Charnes, W.W. Cooper and E. Rhodes, *Measuring the efficiency of decision making units*, European Journal of Operation Research, 2 (1978), 429-444.
- [2] P. Andersen and N.C. Petersen, *A procedure for ranking efficient units in data envelopment analysis*, Management Science, 39 (1993), 1261-1264.
- [3] R.M. Thrall, *Duality, classification and slack in data envelopment analysis*, Annals of Operational research, 66 (1996), 109-138.
- [4] J. Zhu, *Super-efficiency and DEA sensitivity analysis*, European Journal of Operational Research, 129 (2001), 443-455.
- [5] L.M. Seiford and J. Zhu, *Stability regions for maintaining efficiency in data envelopment analysis*, European Journal of Operational Research, 108 (1998), 127-39.
- [6] C. Yao, *Measuring super-efficiency in DEA in presence of infeasibility*, European Journal of Operational research, 161- 2 (2003), 429-444.
- [7] S. Ebadi, *Super-efficiency and DEA sensitivity analysis*, Using a Super Efficiency Model for Ranking Units in DEA, Vol. 6, 2012, no. 41, 2043 - 2048.

پست الکترونیکی: rooshani777@yahoo.com



بررسی زمان اجرای حالت‌های خاص مسأله‌ی ماکزیمم جریان هم‌ریز در شبکه‌ها

اکرم احسنی*
دانشگاه بیرجند

مسعود امان
دانشگاه بیرجند

چکیده

یک جریان در یک شبکه جهت‌دار جریان هم‌ریز نامیده می‌شود اگر جریان در هر گره فقط از یک کمان خروجی استفاده کند. جریان‌های هم‌ریز به طور طبیعی در مسیریابی‌های مبتنی بر مقصد ظاهر می‌شوند. در این مقاله مسأله‌ی ماکزیمم جریان هم‌ریز با یک کالا اما چندین گره مبدأ و مقصد و ظرفیت‌های کمان ناهمگن مطالعه می‌شود. پیش از این، نشان داده شده که مسأله‌ی ماکزیمم جریان هم‌ریز حتی روی درخت‌ها یک مسأله‌ی NP -سخت است. اما در این مقاله این نتیجه را بهبود بخشیده و نشان می‌دهیم مسأله‌ی ماکزیمم جریان هم‌ریز روی گراف‌های مسطح خارجی با یک گره مبدأ و هم‌چنین روی درخت‌هایی با تعداد گره‌های مبدأ یا مقصد ثابت در زمان چندجمله‌ای حل می‌شود.

واژه‌های کلیدی: جریان هم‌ریز، الگوریتم زمان چندجمله‌ای، گراف مسطح خارجی

Mathematics Subject Classification [2010]: 05C21, 05C85

۱ مقدمه

یک جریان در یک شبکه جهت‌دار جریان هم‌ریز نامیده می‌شود اگر جریان در هر گره فقط یک از یک کمان خروجی استفاده کند. در مسأله‌ی ماکزیمم جریان هم‌ریز هدف ما فرستادن ماکزیمم مقدار جریان از گره‌های مبدأ به گره‌های مقصد است، به طوری که جریان، جریان هم‌ریز باشد. در مسأله‌ی حمل و نقل هم‌ریز هدف بررسی وجود یک جریان هم‌ریز می‌باشد به طوری که تقاضای هر گره مقصد برآورده شود. مسأله‌ی ماکزیمم جریان هم‌ریز کاربردهای فراوانی در اینترنت، راه‌آهن، ترافیک درون شهری و غیره دارد. در این مقاله ابتدا تعاریف پایه‌ای مورد نیاز و سپس قضایای مربوط آورده می‌شود.

شبکه‌ی جهت‌دار $G = (V, A)$ را بدون کمان‌های موازی و حلقه با تابع ظرفیت u و تابع مقصد d در نظر بگیرید. در یک جریان هم‌ریز در گراف G واحدهای جریان باید از گره‌های مبدأ به گره‌های مقصد با در نظر گرفتن محدودیت ظرفیت و محدودیت بالانس (تعادل) کمان‌ها فرستاده شود. هم‌چنین در یک جریان هم‌ریز باید برای هر گره‌ی یک کمان خروجی منحصر به فرد داشته باشیم که ممکن است حامل جریان باشد. برای هر مجموعه‌ی $V' \subseteq V$ ، عبارت $A[V']$ نشان‌دهنده‌ی همه کمان‌های موجود در گراف G است که گره‌های ابتدایی و پایانی آن کمان متعلق به V' باشد. قرارداد می‌کنیم $\mathcal{F}(V')$ خانواده‌ی مجموعه‌های $F \subseteq A[V']$ باشد، به طوری که $|F \cap \delta^+(v)| \leq 1$ $\delta^+(v)$ نشان‌دهنده‌ی مجموعه‌ی کمانهای خروجی رأس v است.) برای همه‌ی $v \in V' \subseteq V$.

تعریف ۱.۱. یک نمونه از یک مسأله‌ی جریان شامل یک گراف جهت‌دار $G = (V, A)$ ، یک تابع ظرفیت $u: A \rightarrow N_0$ ، مجموعه گره‌های مقصد $T \subseteq V$ با ظرفیت‌های مقصد $c: T \rightarrow N_0 \cup \{\infty\}$ و تابع مقصدی $d: V \rightarrow N_0 \cup \{\infty\}$ می‌باشد. گره‌های $S := \{v \in V : d(v) > 0\}$ گره‌های مبدأ نامیده می‌شوند و فرض می‌کنیم $S \cap T = \emptyset$.

* سخنران



تعریف ۲.۱. فرض کنید یک نمونه از مسأله‌ی جریان داده شده است، یک جریان یک تابع $x: A \rightarrow \mathbb{R}$ است به طوری که $a \in A$ برای هر $0 \leq x(a) \leq u(a)$.

تعریف ۳.۱. یک نمونه از مسأله‌ی جریان و یک جریان x را در نظر بگیرید. فرض کنید

$$F_x = \{(v, w) \in A : x(v, w) > 0\}$$

مجموعه‌ی گمان‌های حامل جریان باشد. یک جریان x جریان به طور تقریبی همریز نامیده می‌شود، اگر $F_x \in \mathcal{F}(v)$ باشد و $0 = F_x \cap \delta^+(t)$ برای هر $t \in T$. یک جریان به طور تقریبی همریز، همریز نامیده می‌شود، اگر F_x شامل هیچ دور جهت‌داری نباشد.

۲ جریان همریز روی گراف‌ها

مسأله‌ی ماکزیمم جریان همریز روی درخت‌ها با یک گره مقصد بسیار ساده است، اما همانطور که در [۱] نشان داده شده است، این مسأله روی درخت‌هایی با چندین گره مقصد به طور ضعیف NP -سخت است. اما خوشبختانه، مسأله‌ی حمل و نقل همریز روی درخت‌ها در زمان چندجمله‌ای حل می‌شود.

قضیه ۱.۲. یک الگوریتم زمان چندجمله‌ای برای مسأله‌ی حمل و نقل همریز روی درخت‌های جهت‌دار با تعداد دلخواه گره مبدأ و تعداد دلخواه گره مقصد وجود دارد.

قضیه زیر در مورد درخت‌هایی است که تعداد گره‌های مبدأ یا تعداد گره‌های مقصد از بالا کراندار شده است.

قضیه ۲.۲. اگر تعداد گره‌های مبدأ یا تعداد گره‌های مقصد به وسیله یک ثابت کراندار شده باشد، مسأله‌ی ماکزیمم جریان همریز روی درخت‌ها در زمان چندجمله‌ای حل می‌شود.

برای بیان قضایای بعدی به تعاریف زیر نیازمندیم.

تعریف ۳.۲. فرض کنید $G = (V, E)$ یک گراف بدون جهت باشد. یک تجزیه درخت از گراف G درخت (I, τ) روی گره‌های جدید I و گمان‌های τ و خانواده‌ای از مجموعه‌های $B_i \subseteq V$ است، به طوری که شرایط زیر برقرار باشد.

$$\cup_{i \in I} B_i = V - 1$$

۲- برای هر یال $\{u, v\} \in E$ اندیس $i \in I$ وجود داشته باشد به طوری که $\{u, v\} \subseteq B_i$.

۳- برای هر $i, j, k \in I$ اگر گره j در مسیر بین i و k در درخت (I, τ) قرار دارد، آنگاه $B_i \cap B_k \subseteq B_j$.

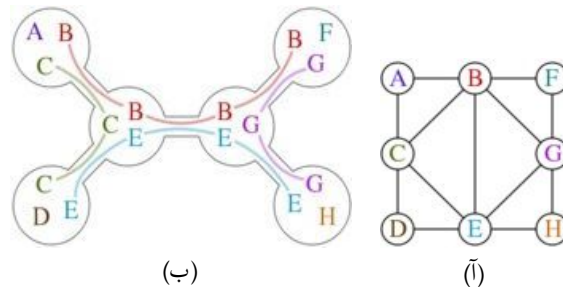
پهنای^۱ یک تجزیه درخت $1 - \max_{i \in I} |B_i|$ می‌باشد. درخت پهنای گراف G ^۲ مینیمم مقدار k است به طوری که G یک تجزیه درخت با پهنای k دارد (شکل ۱؟).

تعریف ۴.۲. گاهی اوقات یک مقدار ورودی خودش به جای لگاریتمش (سایز آن) در زمان اجرای یک الگوریتم ظاهر می‌شود. اگر کران پیچیدگی از این پارامتر چندجمله‌ای باشد، الگوریتم حاصل شبه چند جمله‌ای^۳ نامیده می‌شود.

^۱Width

^۲Treewidth

^۳Pseudo-polynomial time



شکل ۱: تجزیه درخت: (آ) گراف بدون جهت G (ب) یک تجزیه درخت از گراف G .

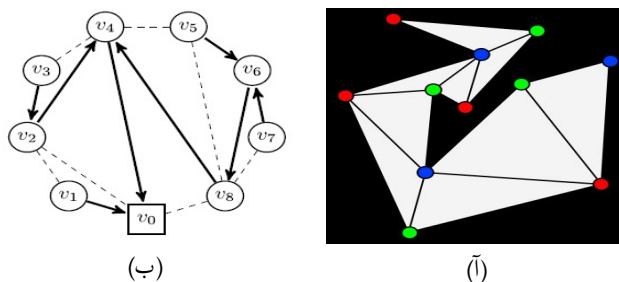
قضیه ۵.۲. مسأله‌ی ماکزیمم جریان هم‌ریز روی گراف‌هایی که درخت‌پهنای آن از بالا کراندار است، در زمان شبه چند جمله‌ای حل می‌شود.

با فرض کراندار بودن درخت‌پهنا می‌توان یک طرح تقریب زمان چندجمله‌ای (PTAS) برای مسأله‌ی ماکزیمم جریان هم‌ریز ارائه داد.

قضیه ۶.۲. مسأله‌ی ماکزیمم جریان هم‌ریز روی گراف‌های جهت‌دار با $|V|$ گره و درخت‌پهنای کراندار شده به وسیله‌ی یک ثابت می‌تواند با فاصله $\epsilon - 1$ از بهینگی برای هر $\epsilon > 0$ در زمان چندجمله‌ای در $|V|$ و $\epsilon - 1$ تقریب زده شود.

تعریف ۷.۲. در نظریه‌ی گراف‌ها، یک گراف بدون جهت گراف مسطح خارجی^۴ است اگر بتوان آن را در یک صفحه طوری رسم نمود که همه‌ی گره‌ها در وجه بیرونی قرار بگیرند و یال‌ها هیچ برخوردی با هم نداشته باشند (شکل ۱.۲). به عبارت دیگر هیچ گرهی به طور کامل توسط یال‌ها احاطه نشده باشد. یک گراف جهت‌دار G گراف مسطح خارجی نامیده می‌شود اگر گراف بدون جهت زمینه G ، یک گراف مسطح خارجی باشد.

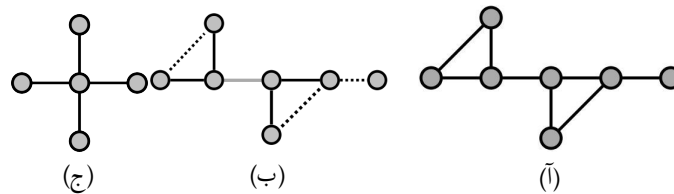
به طور کلی برای ترسیم یک گراف مسطح خارجی همه گره‌ها را روی یک دایره قرار داده و یال‌ها در داخل این دایره و یا روی محیط جای می‌گیرند (شکل ۲.۲).



شکل ۲: گراف مسطح خارجی

قضیه ۸.۲. مسأله‌ی ماکزیمم جریان هم‌ریز روی گراف مسطح خارجی G با یک گره مقصد در زمان چندجمله‌ای حل می‌شود. مینور M از گراف بدون جهت G گرافی است که از گراف G با حذف یال‌ها، ادغام کردن یال‌ها و یا حذف گره‌هایی که جدا مانده‌اند به دست می‌آید (شکل ۲.۲).

^۴Outerplanar graph



شکل ۳: شکل بالا به ترتیب از راست به چپ یک گراف، مراحل ساخت یک مینور از آن گراف و مینور گراف را نشان می‌دهد.

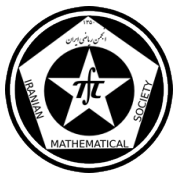
گراف‌های مسطح خارجی به طور دقیق گراف‌هایی هستند که مینورهای آن شامل K_4 و $K_{2,3}$ نمی‌باشد (K_4 و $K_{2,3}$ به ترتیب نشان‌دهنده‌ی گراف کامل از مرتبه ۴ و گراف کامل دوبرخی ۳ و ۲ می‌باشد).

قضیه ۹.۲. اگر گراف G شامل $K_{2,3}$ به عنوان مینور نباشد، مسأله‌ی ماکزیمم جریان هم‌ریز با یک گره مقصد می‌تواند در زمان چندجمله‌ای حل شود.

مراجع

- [1] D. Dressler, M. Strehler, *Polynomial-time algorithms for special cases of the maximum confluent flow problem*, TU Berlin, Discrete Applied Mathematics. 163 (2014), pp. 142–154.
- [2] D. Dressler, *Network Flow Problems Arising From Evacuation Planning*, Ph.D. Thesis, TU Berlin, Berlin, Germany, 2012.
- [3] D. Dressler, M. Strehler, *Capacitated Confluent Flows: complexity and algorithm*, Proceedings of the 7th International Conference on Algorithms and Complexity, CIAC 2010, in: Lecture Notes in Computer Science, Springer, Heidelberg. 6078 (2010), pp. 347–358.

پست الکترونیکی: akramahsani@birjand.ac.ir
پست الکترونیکی: mamann@birjand.ac.ir



بهینه‌سازی محافظت از شبکه‌های عرضه-تقاضا در برابر خط‌مشی‌های ممانعتی

امید قیصر قراملکی*
دانشگاه تبریز

محسن کولانی
دانشگاه تبریز

مسلم ولیزاده
دانشگاه آزاد اسلامی تبریز

چکیده

هدف ما در این مقاله ارائه یک قالب بهینه‌سازی شبکه است که پایداری شبکه را برای یک جریان مورد نیاز عرضه و تقاضا بیشینه می‌کند. در قالب ارائه شده یال حالت تصادفی دارد که با در نظر گرفتن آسیب‌پذیری یال با استفاده از تابع میزان موفقیت مهاجم-مدافع مشخص می‌شود. در این قالب هدف ممانعت‌کننده کاهش بیشینه جریان مورد انتظار شبکه از طریق تخریب یال‌های شبکه است. رویکردهای متفاوتی که برای حل این قالب ممانعت مطرح شده‌اند غالباً برای شبکه‌های با ابعاد کوچک هستند. در این مقاله یک الگوریتم تکاملی برای حل این مسائل ارائه می‌دهیم. نتایج عددی به دست آمده نشان می‌دهد که این الگوریتم تکاملی فضای جواب را به طور قابل توجهی محدود می‌کند و بنابراین می‌توان آن را در شبکه‌های با ابعاد بزرگ به کار برد.

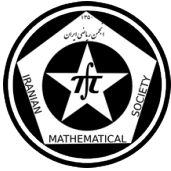
واژه‌های کلیدی: ممانعت در شبکه؛ محافظت از سیستم؛ پایداری شبکه؛ بهینه‌سازی تکاملی؛

۱ پیش‌گفتار

یک شبکه با پیکربندی معلوم و ثابت و تعدادی مصرف‌کننده محصول یا تحویل‌گیرنده خدمات را در نظر بگیرید. به عنوان مثال در مورد قانونی، برق و ارتباطات و در موارد غیر قانونی مواد مخدر یا قاچاق اسلحه چنین شبکه‌ای را تشکیل می‌دهند. بر اساس این شرایط، هدف ممانعت‌کننده کاهش جریان کالا از طریق شبکه با باز داشتن (به عنوان مثال تخریب) عناصر شبکه است. به علاوه، فرض می‌شود ممانعت‌کننده دارای منابع محدودی برای ممانعت از عناصر شبکه باشد. برای این نوع شبکه‌ها بویل^۱ یک روش شبکه دوگان بسط‌یافته را در نظر گرفته است. این شیوه تمام مسیرهای $s-t$ را می‌شمارد که از بین می‌روند. همچنین وود^۲ [۳] نشان داد که DNIP^۳ یک NP-کامل است و یک قالب‌بندی تازه از قالب LP ^۴ را ارائه کرد که با برنامه‌ریزی عدد صحیح حل می‌شود. با این حال این رویکرد در شبکه‌های با اندازه تقریباً کوچک اجرا شده بود. دای و پوه^۵ [۴] برای مواجه شدن با این نقص‌ها، نخستین روش بهینه‌سازی تکاملی را برای حل مسائل DNIP ارائه کرده‌اند. این الگوریتم ژنتیک (GA)^۶ می‌تواند جواب‌هایی را برای شبکه‌های بزرگ تولید کند. با این حال بایستی از مفاهیم مربوط به عملگر برش^۷، جهش^۸، جریمه^۹ و همچنین پیش زمینه مناسبی در GA استفاده کرد. در نهایت راکو و رامیرز-مارکز^{۱۰} [۱]،

*سخنران

^۱Boyle^۲Wood^۳Deterministic Network Interdiction Problem^۴Linear Programming^۵Dai and Poh^۶Genetic Algorithm^۷Crossover^۸Mutation^۹Penalization^{۱۰}Rocco and Ramirez-Marquez



PSDA^{۱۱} را ارائه کرده‌اند که یک الگوریتم تکاملی برای حل مسائل DNIP است.

۲ تعریف مسأله

قالب رقابت ممانعت‌کننده/مدافع برای شبکه، پایه‌ای برای تشریح رابطه بین تلاش‌های اختصاص‌یافته به وسیله ممانعت‌کننده و دفاع‌کننده است، که همان تلاش برای نابودی یا محافظت از هر عنصر سیستم است. در این مطالعه به دنبال پیدا کردن احتمال تخریب یک عنصر شبکه هستیم و سپس می‌خواهیم منابع دفاعی را در بین اقدامات دفاعی مختلف مثلاً جدایی، حفاظت و افزونگی به طور مطلوب توزیع کنیم به نحوی که پایداری سیستم حداکثر شود.

۱.۲ فرض‌ها

اگرچه می‌توان بی‌نهایت خط‌مشی‌های حمله‌ای ممکن توسط ممانعت‌کننده را در نظر گرفت، در این مقاله فرض بر این است که مهاجم منابع خود را به‌طور مساوی در میان تمام اجزای شبکه توزیع می‌کند. این فرض در مورد توزیع مساوی منابع در موارد زیر قابل توجیه است: (a) مهاجم هیچ اطلاعی درباره ساختار شبکه و اهمیت یال‌های خاص ندارد و برای از بین بردن تمامی عناصر شبکه تلاش می‌کند. (b) مهاجم هیچ توانایی برای هدایت حمله به یال‌های خاص را ندارد. به‌عنوان مثال، در استفاده از آلات موشکی با دقت پایین، مهاجم تلاش می‌کند به کل منطقه آسیب برساند و تنها بر حسب تصادف می‌تواند یالی را تخریب کند که تجهیزات زیادی در آن قرار گرفته است. (c) سیستم نیازمند حفاظت در برابر بلایای طبیعی از قبیل: سیل، طوفان و غیره است، که کل منطقه را تخریب می‌کنند. فرض‌های این قالب عبارتند از:

- ظرفیت تمام یال‌ها مشخص است.
- تقاضای شبکه و پیکربندی s-t شبکه ثابت و مشخص است.
- بودجه مدافع و مهاجم معلوم است.
- بودجه حمله به‌طور مساوی در میان یال‌ها توزیع می‌شود.
- مهاجم یال‌های بدون محافظت را با احتمالی برابر با یک تخریب می‌کند.

۲.۲ پیش زمینه حفاظت از شبکه‌ها

فرض کنید $G(N, A)$ یک شبکه ظرفیتی با گره منابع s و گره تقاضا t باشد، که در آن N مجموعه‌ای از گره‌ها است و $A = A_1 \cup A_2$ به طوریکه:

$A_1 = \{(s, i), (j, t) \mid 1 < i, j < n\}$ ، $A_2 = \{(i, j) \mid 1 < i, j < n\}$ مجموعه‌ای از یال‌ها هستند. شبکه به‌ترتیب دارای بودجه دفاعی و حمله‌ای b و B است. به‌علاوه k_{ijv} یک عضو از k_{ij} است، که بردار ظرفیت یال (i, j) را نمایش می‌دهد. برای این بردارها داریم $v = 0$ و $k_{ijv} < k_{ij0}$. بردار وضعیت شبکه $\mathbf{a} = (a_{s1}, a_{s2}, \dots, a_{st}, a_{12}, \dots, a_{ij}, \dots, a_{nt})$ ظرفیت جریان برای هر یال از شبکه است.

^{۱۱}Probabilistic Solution Discovery Algorithm



۳.۲ آسیب‌پذیری یال

آسیب‌پذیری یک یال شبکه v_{ij} (یعنی همان احتمال تخریب) به صورت نسبت تابع موفقیت در رقابت مهاجم-مدافع [۲] به شکل:

$$v_{ij} = \frac{T_{ij}^m}{T_{ij}^m + t_{ij}^m}$$

است که در آن t_{ij} و T_{ij} به ترتیب بودجه دفاعی و حمله‌ای اختصاص یافته به یال v_{ij} است، و پارامتر m میزان درگیری است. بنابر توضیحات داده شده، در این قالب فرض بر این است که مهاجم منابع خود را به طور مساوی در میان همه یال‌ها توزیع می‌کند، در نتیجه $T_{ij} = B/|A|$.

به علاوه بردار $x = (x_{s1}, x_{s2}, \dots, x_{st}, x_{12}, \dots, x_{ij}, \dots, x_{nt})$ یک خط‌مشی دفاعی است. به طوری که عنصر x_{ij} مقداری برابر ۱ ($x_{ij} = 1$) دارد اگر یال (i, j) به عنوان بخشی از خط‌مشی دفاعی تعریف شده باشد و مقدار ۰ ($x_{ij} = 0$) اگر دفاع نشود. در نتیجه بردار خط‌مشی دفاعی مشخص می‌کند از کدام یال‌ها دفاع شود، و چون در فرض‌های این قالب مدافع بودجه دفاعی خود را به طور مساوی در بین یال‌های انتخاب شده پخش می‌کند، پس داریم:

$$t_{ij}^m = \begin{cases} 0 & x_{ij} = 0 \\ \frac{b}{\sum_{ij} x_{ij}} & x_{ij} = 1 \end{cases}$$

۴.۲ پایداری شبکه

تابع $\varphi(a) : Z^{|A|} \rightarrow Z^+$ یک بردار حالت شبکه را به یک جریان شبکه بین $s - t$ می‌نگارد. بنابراین پایداری شبکه تحت خط‌مشی دفاعی بردار x' ، جریان داده شده d و آسیب‌پذیری‌های v_{ij} به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$R(a|x', d, v_{ij}) = P(\varphi(a) \geq d|x', v_{ij}).$$

۵.۲ قالب حفاظت بهینه از شبکه

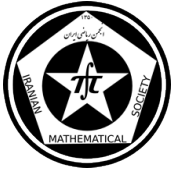
تابع هدف در این قالب عبارت است از یک خط‌مشی دفاعی که پایداری شبکه یک جریان بخصوص $s - t$ مورد نیاز شبکه در $G(N, A)$ به شکل

$$\begin{aligned} \max z &= R(a|x', d, v_{ij}) \\ \text{s.t.} & \\ C(x) &= b \\ \sum_{i|x_{ij}} a_{ij} - \sum_{h|x_{jh}} a_{jh} &= 0 \quad \forall j \in N \\ x_{ij} &\in \text{Bin}(0, 1) \end{aligned}$$

را بیشینه می‌کند.

۳ روش تحلیل و ارائه نتایج

رویکرد تحقیق در این مسئله براساس سه گام زیر است:



- (۱) شبیه‌سازی مونت کارلو 10^6 MC برای به‌وجود آوردن خط‌مشی ممانعتی بالقوه؛
- (۲) الگوریتم فورد فولکرسون برای ماکزیمم جریان $s - t$ شبکه؛
- (۳) الگوریتم تکاملی که ناحیه‌ای از فضای جواب را در هر چرخه براساس جستجوی احتمالی مورد کاوش قرار می‌دهد که از مناسب کردن جواب‌های تولیدشده به‌دست می‌آید.

۴ دست‌آوردهای پژوهش

این مقاله یک قالب تدافعی از شبکه را نشان می‌دهد که مهاجم تلاش می‌کند جریان عرضه-تقاضا را با اختصاص مساوی منابع تخریبی در میان یال‌های ظرفیت‌دار شبکه کاهش دهد. تحت این تهدید حمله، مدافع منابع خود را برای حفاظت از یال‌های شبکه اختصاص می‌دهد، به طوری که احتمال تامین جریان مورد نیاز شبکه (همان پایداری شبکه) بیشینه شود. قالب بهینه‌سازی بر اساس آسیب‌پذیری یال‌ها با استفاده از تابع میزان موفقیت مهاجم-مدافع برای هر یال تعیین می‌شود. جواب‌های بدست آمده برای این قالب بر روی شبکه‌های مختلف نشان می‌دهد موقعی که مدافع با توزیع مساوی منابع تهاجمی روبرو شود، خط مشی دفاعی بایستی بر اساس انتخاب میان بهبود قابل توجه پایداری یک مسیر بخصوص عرضه-تقاضا (با تخصیص تمام منابع دفاعی به یال‌های این مسیر)، یا توزیع منابع در میان یال‌های فراوان شبکه برای افزایش مختصر پایداری چندین مسیر و بنابراین ایجاد افزونگی باشد. نتایج بدست آمده همچنین نشان می‌دهد وقتی میزان درگیری افزایش می‌یابد انتخاب نخست سودمندتر است. اگرچه این مقاله نخستین گام در فهمیدن رفتار خط مشی دفاعی می‌باشد، با این حال اگر به مدافع اجازه دهیم منابع خود را به طور نامساوی تقسیم کند، شاید موجب تخصیص بهتر و در نتیجه پایداری شبکه را در برابر سناریوهای متفاوت حمله‌ای افزایش دهد. همچنین ممکن است مهاجم منابع‌اش را به طور بهینه در میان یال‌ها پخش کند تا بیشترین آسیب را برای هر خط مشی دفاعی محتمل برساند. بنابراین هریک از این موارد در تحقیقات آینده می‌تواند مورد بررسی قرار گیرد.

مراجع

- [1] Ramirez-Marquez JE, Rocco C, Levitin G, *Optimal protection of general sourcesink networks via evolutionary techniques*, Reliability Engineering and System Safety, 2009;94(10):1676-1684.
- [2] Levitin G, Hausken K, *Redundancy vs. protection vs. false targets for systems under attack*, IEEE Transactions on Reliability, 2009;58(1):58-68.
- [3] Kevin W, *Deterministic network interdiction*, Mathematical and Computer Modelling 1993;17(2):1-18.
- [4] Dai Y, Poh K, *Solving the network interdiction problem with genetic algorithms*, In: Proceedings of the fourth Asia-Pacific conference on industrial engineering and management system, Taipei, December, 2002;18-20.

^{۱۲}Monte-Carlo



تسریع همگرایی الگوریتم گرادیان مزدوج سه جمله ای در بهینه سازی نامقید

محمد کیانپور
دانشگاه گیلانمهری باقریان
دانشگاه گیلانپویان عزتی زاده*
دانشگاه گیلان

چکیده

یک الگوریتم گرادیان مزدوج سه جمله ای برای بهینه سازی نامقید در مقیاس بزرگ با استفاده از روش مینیمم سازی زیرفضا ارائه شده است. در این الگوریتم جهت های جستجو به وسیله مینیمم سازی تقریب درجه دوم تابع هدف در یک زیرفضای پدید آمده به وسیله بردارهای $-g_{k+1}, s_k, y_k$ محاسبه می شوند که این جهت ها کاهشی هستند و در شرایط تزویج Dai - Liao صدق می کنند. طول گام ها هم به وسیله شرایط جستجوی خطی ولف تعیین می شوند.

واژه های کلیدی: بهینه سازی نامقید، گرادیان مزدوج سه جمله ای، جستجوی خطی ولف، جهت کاهشی

۱ مقدمه

برای حل مسئله بهینه سازی نامقید غیرخطی

$$\min \{f(x) : x \in R^n\} \quad (1.1)$$

در مقیاس بزرگ که در آن $f : R^n \rightarrow R$ یک تابع به طور پیوسته مشتق پذیر و از پایین کراندار است با روش گرادیان مزدوج سه جمله ای و شروع از یک نقطه اولیه $x_0 \in R^n$ دنباله $\{x_k\}$ را به صورت زیر داریم:

$$x_{k+1} = x_k + \alpha_k d_k \quad (2.1)$$

که در آن $\alpha_k > 0$ به وسیله جستجوی خطی ولف بدست می آید [۴]:

$$f(x_k + \alpha_k d_k) - f(x_k) \leq \rho \alpha_k g_k^T d_k \quad (3.1)$$

$$g_{k+1}^T d_k \geq \sigma g_k^T d_k \quad (4.1)$$

که d_k یک جهت کاهشی و $0 < \rho \leq \sigma < 1$ است. در ادامه جهت کاهشی را بدست می آوریم.

* سخنران



۲ بدست آوردن جهت کاهشی

تقریب درجه دوم تابع هدف در x_{k+1} به صورت زیر است:

$$\phi_{k+1}(d) = g_{k+1}^T d + \frac{1}{2} d^T B_{k+1} d \quad (1.2)$$

که B_{k+1} یک تقریب هسین $\nabla^2 f(x_{k+1})$ است. جهت d_{k+1} را به صورت زیر ارائه می‌کنیم:

$$d_{k+1} = -g_{k+1} + a_k s_k + b_k y_k \quad (2.2)$$

که در آن $a_k s_k = g_{k+1} - g_k$ و $s_k = x_{k+1} - x_k$ ، $g_{k+1} = \nabla f(x_{k+1})$ از حل دستگاه مینیمم‌سازی زیر تعیین می‌شوند:

$$\min \phi_{k+1}(d_{k+1}) \quad (3.2)$$

$$a_k, b_k \in R$$

با وارد کردن d_{k+1} ارائه شده در (۲. ۲) در مساله مینیمم‌سازی (۳. ۲)، a_k, b_k بعد از حل سیستم جبری خطی زیر بدست می‌آیند:

$$a_k (s_k^T y_k) + b_k \|y_k\|^2 = g_{k+1}^T y_k - s_k^T g_{k+1}$$

$$a_k \|y_k\|^2 + b_k (y_k^T B_{k+1} y_k) = g_{k+1}^T B_{k+1} y_k - y_k^T g_{k+1} \quad (4.2)$$

تغییر متغیر $\omega_k = g_{k+1}^T B_{k+1} y_k$ و $\eta_k = y_k^T B_{k+1} y_k$ را انجام می‌دهیم. با فرض اینکه B_{k+1} معین مثبت است و استفاده از رابطه شبه‌نیوتن $B_{k+1} s_k = y_k$ ، η_k را به صورت زیر بدست می‌آوریم:

$$\eta_k = \frac{2(y_k^T y_k)^2}{y_k^T s_k} \quad (5.2)$$

حال برای محاسبه ω_k از روش‌های محاسبه تقریب هسین استفاده می‌کنیم. برای بدست آوردن تقریب هسین می‌توان از روش BFGS استفاده کرد ولی نتایج عددی نشان می‌دهد روش مقیاس‌گذاری طیفی BFGS [۵] بهتر است. فرمول بهنگام‌سازی مقیاس‌گذاری طیفی BFGS به صورت زیر می‌باشد:

$$B_{k+1} = B_k - \frac{B_k s_k s_k^T B_k}{s_k^T B_k s_k} + \gamma_k \frac{y_k y_k^T}{y_k^T s_k} \quad (6.2)$$

$$\text{که در آن } \gamma_k = \frac{y_k^T s_k}{\|y_k\|^2} \text{ و } y_k^T s_k \neq 0$$

با ماتریس اولیه I اولین تکرار بهنگام‌سازی مقیاس‌گذاری طیفی BFGS را می‌نویسیم:



$$B_{k+1} = I - \frac{s_k s_k^T}{s_k^T s_k} + \frac{y_k y_k^T}{y_k^T y_k} \quad (7.2)$$

حال ω_k را محاسبه می‌کنیم:

$$\begin{aligned} \omega_k &= g_{k+1}^T B_{k+1} y_k = g_{k+1}^T \left[I - \frac{s_k s_k^T}{s_k^T s_k} + \frac{y_k y_k^T}{y_k^T y_k} \right] y_k \\ &= g_{k+1}^T y_k - \frac{(g_{k+1}^T s_k)(s_k^T y_k)}{s_k^T s_k} + \frac{(g_{k+1}^T y_k)(y_k^T y_k)}{y_k^T y_k} \end{aligned} \quad (8.2)$$

حال پس از قرار دادن (۵. ۲) و (۸. ۲) در سیستم جبری خطی (۴. ۲) و حل دستگاه بدست می‌آوریم:

$$a_k = \frac{1}{\Delta_k} \left[\eta_k (y_k^T g_{k+1} - s_k^T g_{k+1}) - \|y_k\|^2 (\omega_k - y_k^T g_{k+1}) \right] \quad (9.2)$$

$$b_k = \frac{1}{\Delta_k} \left[(y_k^T s_k)(\omega_k - y_k^T g_{k+1}) - \|y_k\|^2 (y_k^T g_{k+1} - s_k^T g_{k+1}) \right] \quad (10.2)$$

$$\Delta_k = (y_k^T y_k)^2 \geq 0 \quad (11.2)$$

بنابراین اگر $\Delta_k > 0$ باشد با محاسبه a_k و b_k در (۹. ۲) و (۱۰. ۲) جهت جستجو با فرمول ارائه شده در (۲. ۲) بدست می‌آید.

۳ الگوریتم TTS

گام ۱. یک نقطه اولیه $x_0 \in \text{dom } f$ را انتخاب کنید، $g_0 = \nabla f(x_0)$ را محاسبه کنید و قرار دهید $d_0 = -g_0$ و $k = 0$.
گام ۲. شرط توقف را بررسی کنید ($\|g_k\|_\infty \leq 10^{-6}$) اگر برقرار باشد الگوریتم متوقف می‌شود در غیر این صورت به گام ۳ بروید.

گام ۳. طول گام α_k را با استفاده از شرایط جستجوی خطی ولف در (۳. ۱) و (۴. ۱) بدست بیاورید.

گام ۴. $y_k = g_k - g_z$ و $g_z = \nabla f(z)$ ، $z = x_k + \alpha_k d_k$ ، $\bar{a}_k = \alpha_k g_k^T d_k$ و $\bar{b}_k = -\alpha_k y_k^T d_k$ را محاسبه کنید.

گام ۵. اگر $\bar{b}_k > 0$ باشد، $\xi_k = -\frac{\bar{a}_k}{\bar{b}_k}$ را محاسبه کنید و متغیرها را با فرمول $x_{k+1} = x_k + \xi_k \alpha_k d_k$ بهنگام کنید، در غیر این صورت از فرمول $x_{k+1} = x_k + \alpha_k d_k$ استفاده کنید [۱]. f_{k+1} و g_{k+1} را محاسبه کنید. $y_k = g_{k+1} - g_k$ و $s_k = x_{k+1} - x_k$ را نیز بدست آورید.

گام ۶. Δ_k ، ω_k ، η_k ، a_k و b_k را به ترتیب در (۵. ۲)، (۸. ۲)، (۱۱. ۲)، (۹. ۲) و (۱۰. ۲) محاسبه کنید.

گام ۷. جهت جستجوی $d_{k+1} = -g_{k+1} + a_k s_k + b_k y_k$ را محاسبه کنید.

گام ۸. اگر $\|g_{k+1}\| > 0.2 \|g_k\|$ باشد قرار دهید $d_{k+1} = -g_{k+1}$ (راه‌اندازی مجدد پاول) [۳].

گام ۹. $k = k + 1$ در نظر بگیرید و به گام ۲ بروید.



۴ نتیجه گیری

در این مقاله یک روش گرادیان مزدوج سه جمله ای جدید بر پایه ی مینیم سازی روی زیرفضاها ارائه شده است. الگوریتم ما کاهش می یابد. برای توابع محدب یکنواخت جهت هایی که به وسیله الگوریتم تولید می شوند از بالا کراندار هستند یعنی الگوریتم همگراست.

مراجع

- [1] Andrei, N.: Acceleration of conjugate gradient algorithms for unconstrained optimization. Appl.Math. Comput. 213, 361–369 (2009) .
- [2] Andrei, N.: An accelerated subspace minimization three term conjugate gradient algorithm for unconstrained optimization. Numer. Algor. 65:859-874 (2014).
- [3] Powell M.J.D.: restart procedures for the conjugate gradient method. Mathematical programming 12 (1977) 241-254.
- [4] Wolfe, P.: Convergence conditions for ascent methods. SIAM Rev 11, 226–235 (1968).
- [5] W.Y. Cheng, D.H. Li.: Spectral Scaling BFGS Method. J Optim Theory Appl. 146: 305–319 (2010)

پست الکترونیکی: p.ezatizade@gmail.com



حل مسأله بهینه‌سازی چندهدفه با استفاده از یک الگوریتم تکاملی تعاملی مبتنی بر تابع ارزش، با فرض تعداد محدود فراخوانی‌های تصمیم‌گیرنده

حانیه خراشادی‌زاده*
دانشگاه بیرجند

نسیم نصرآبادی
دانشگاه بیرجند

مسعود امان
دانشگاه بیرجند

چکیده

این مقاله یک روش مبتنی بر ارجحیات را ارائه می‌دهد که با یک الگوریتم بهینه‌سازی چندهدفه برای سوق دادن تصمیم‌گیرنده به سمت انتخاب جواب ارجح ترکیب می‌شود. با فرض اینکه تعداد فراخوانی‌های تصمیم‌گیرنده محدود است، الگوریتم در هر تکرار پس از آن‌که پیشرفت قابل قبولی در جواب حاصل شد، تصمیم‌گیرنده را برای بیان ارجحیت‌های جدید فراخوانی کرده و سپس از این اطلاعات برای مدلسازی یک تابع ارزش اکیداً صعودی استفاده می‌کند. این تابع ارزش به هدایت الگوریتم به سمت نقطه مرجع کمک کرده به طوری که در انتهای هر تکرار با استفاده از یک معیار غلبه و یک معیار خاتمه جواب بهتری نسبت به تکرار قبلی و نزدیک‌تر به نقطه مرجع تولید می‌شود.

واژه‌های کلیدی: بهینه‌سازی چندهدفه تکاملی، الگوریتم‌های تعاملی، نقطه‌ی ارجح، تابع ارزش

۱ مقدمه

تصمیم‌گیری چندمعیاره کاربردهای زیادی در جهان واقعی دارد و از این رو روش‌های زیادی برای حل این‌گونه مسائل مطرح شده است که هر کدام از این روش‌ها نقاط قوت و ضعف مربوط به خودشان را دارند و در موارد خاص به خوبی قابل اجرا هستند. یکی از شاخه‌های تصمیم‌گیری چندمعیاره، بهینه‌سازی چندهدفه می‌باشد که به معنی بدست آوردن بهترین جواب برای مسأله‌ای با چند هدف مشخص روی ناحیه‌ی مفروض است. ولی معمولاً برای این‌گونه مسائل تک جوابی که بتواند همزمان تمام اهداف را بهینه کند، وجود ندارد. لذا برای این مسائل ما با یک مجموعه جواب با عنوان جواب پارتو بهینه سروکار داریم که انتخاب بهترین و کارآمدترین جواب از بین این جواب‌ها بر مبنای اولویت‌های تصمیم‌گیرنده می‌باشد. یک نمونه از الگوریتم‌های بهینه‌سازی چندهدفه، الگوریتم‌های بهینه‌سازی چندهدفه تکاملی بوده و یکی از جدیدترین روش‌های تکاملی برای حل مسائل چندهدفه، روش تعاملی مطرح شده در [۳] می‌باشد که ویژگی اصلی آن فرض کردن تعداد محدود فراخوانی‌های تصمیم‌گیرنده می‌باشد. الگوریتم مذکور در هر تکرار به کمک مخروط‌های چندوجهی جهت جستجو را برای یافتن یک جواب پارتو بهینه جدید تعیین می‌کند. در این مقاله با به‌کار گرفتن راهکار ساخت تابع ارزش بر مبنای اولویت‌های تصمیم‌گیرنده برای تعداد مفروضی جواب و مقایسه‌ی دودویی آنها، الگوریتم ارائه شده در [۲] را بهبود می‌بخشیم. در این مقاله، اولویت‌های تصمیم‌گیرنده با گام‌های میانی الگوریتم یکی می‌شود که این اجتماع منجر به هدایت الگوریتم به سمت نقطه ارجح (نقطه‌ای روی مرز پارتو بهینه است که بیشترین سودمندی یا خرسندی تصمیم‌گیرنده را در مقایسه با دیگر نقاط روی مرز دارد) می‌گردد. سهمیه فراخوانی‌های تصمیم‌گیرنده در شروع الگوریتم به عنوان پارامتر ورودی داده می‌شود. ساختار کلی مسأله‌ی بهینه‌سازی

* سخنران



چندهدفه مفروض در این مقاله به صورت زیر می‌باشد:

$$\begin{aligned} & \text{Maximize } \{f_1(x), \dots, f_M(x)\} \\ & \text{s.t. } x \in S. \end{aligned}$$

۲ چارچوب کلی الگوریتم

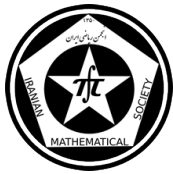
در اکثر روشهای تعاملی پیشرو یک مجموعه جواب آغازین بصورت تصادفی یا با استفاده از جستجوی تکاملی و معیار غلبه استاندارد تولید می‌شود. سپس اولویت‌های تصمیم‌گیرنده استخراج می‌شود، که این عمل به الگوریتم برای یک جستجوی متمرکز در ناحیه‌ی مورد علاقه کمک می‌کند. این الگوریتم معمولاً یک تک جواب را به عنوان خروجی نهایی تولید می‌کند. طرح سهمیه ثابت فراخوانی‌های تصمیم‌گیرنده به یک نقطه‌ی ایده‌آل (\vec{I}) برای شروع نیاز دارد. بعد از تعیین نقطه ایده‌آل، جمعیت آغازین بصورت تصادفی تولید می‌شود. نقطه‌ی \vec{P}^{ib} از جمعیت آغازین به عنوان نزدیک‌ترین نقطه به \vec{I} برحسب فاصله‌ی اقلیدسی انتخاب شده و فاصله آن از \vec{I} بصورت $D_I = |\vec{I} - \vec{P}^{ib}|$ نشان داده می‌شود. اگر T_{DM} حداکثر تعداد فراخوانی‌های تصمیم‌گیرنده باشد، فاصله‌ی D_I به $d_I = \frac{D_I}{T_{DM}}$ بخش تقسیم می‌شود. d_I را طول گام نامند. بعد از آن یک جستجوی تکاملی با نمونه‌های تصمیم‌گیری انجام می‌شود، تا زمانی که معیار خاتمه برقرار شود. قبل از شرح الگوریتم، ابتدا شیوه‌ی ساخت تابع ارزش، معیار خاتمه و قانون غلبه‌ی اصلاح شده بر مبنای این تابع را در بخش‌های بعدی توضیح می‌دهیم. [۲].

۱.۲ اطلاعات اولویت‌های تصمیم‌گیرنده و ساخت تابع ارزش چند جمله‌ای

گاهی فرض می‌شود که تصمیم‌گیرنده تصمیمات خود را بر پایه‌ی یک تابع بیان کند. این تابع که اولویت‌های تصمیم‌گیرنده را نشان می‌دهد و تابعی حقیقی مقدار است تابع ارزش V نامیده می‌شود. تابع ارزش یک تابع اکیداً صعودی می‌باشد زیرا به بهترین جواب انتخابی توسط تصمیم‌گیرنده بیشترین مقدار را نسبت می‌دهد. این تابع یک تابع فرضی می‌باشد و در عمل نمی‌توانیم آن را به صورت صریح بنویسیم بلکه فقط می‌توان فرض کرد ساختار این تابع به صورت یک تابع خاص مانند تابعی چندجمله‌ای یا جمعی و یا شبه محدب است. در این مقاله فرض می‌کنیم که تابع ارزش تصمیم‌گیرنده دارای یک ساختار چندجمله‌ای است. فرض کنید در یک فراخوانی تصمیم‌گیرنده η نقطه برای مقایسه وجود داشته باشد. یک راه برای تصمیم‌گیرنده مقایسه دودویی جواب‌ها می‌باشد که برای هر دو جواب P_i و P_j یکی از دو حالت رخ می‌دهد: جواب P_i از P_j بهتر است ($P_i \succ P_j$) یا دو جواب P_i و P_j با هم قابل مقایسه نیستند ($P_i \equiv P_j$). لذا در انتهای مقایسه دودویی η جواب می‌توان جواب‌ها را این‌گونه مرتب کرد: P_1 بهترین جواب، P_2 جواب بهتر مرتبه دوم، ... و P_η جواب آخر. که P_1 همان \vec{A}_c^{best} می‌باشد. اکنون بعد از مرتب‌سازی جواب‌ها تابع ارزش را به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$\begin{aligned} V(f) = & (f_1 + k_{11}f_2 + k_{12}f_3 + \dots + k_{1(M-1)}f_M + l_1) & \times \\ & (f_2 + k_{21}f_3 + k_{22}f_4 + \dots + k_{2(M-1)}f_1 + l_1) & \times \dots \times \\ & (f_M + k_{M1}f_1 + k_{M2}f_2 + \dots + k_{M(M-1)}f_{M-1} + l_M) \end{aligned}$$

که f_1, \dots, f_M توابع هدف و $l_1, \dots, l_M, k_{11}, k_{12}, \dots, k_{1(M-1)}, \dots, k_{21}, k_{22}, \dots, k_{2(M-1)}, \dots, k_{M1}, \dots, k_{M(M-1)}$ پارامترهای تابع ارزش هستند. این پارامترها مجهول می‌باشند و باید از اطلاعات اولویت η نقطه‌ی انتخابی توسط تصمیم‌گیرنده تعیین شوند. این تابع ارزش برای M تابع هدف نشان داده شده در بالا، به منظور ایجاد کردن M تابع خطی $S_m: \mathbb{R}^M \rightarrow \mathbb{R}; m = 1, 2, \dots, M$ در نظر گرفته می‌شود [۲]. برای این منظور مسأله‌ی بهینه‌سازی زیر را حل می‌کنیم:



$$\begin{aligned}
 & \text{maximum } \epsilon \\
 & \text{s.t.} \quad S_m(P_i) \geq 0 \quad i = 1, 2, \dots, \eta, \quad m = 1, 2, \dots, M \\
 & \quad k_{ij} \geq 0 \quad i = 1, 2, \dots, M, \quad j = 1, 2, \dots, (M-1) \\
 & \quad (V(P_i) - V(P_j)) \geq \epsilon \quad \forall (i, j); P_i \succ P_j \\
 & \quad |V(P_i) - V(P_j)| \leq \delta_v \quad \forall (i, j); P_i \equiv P_j \\
 & \quad \text{برای حذف پارامترهای اضافی ممکن است قرار دهیم } \delta_v = \epsilon/10. [2]
 \end{aligned}$$

۲.۲ معیار خاتمه

فرض کنید تابع ارزش V تعیین شده باشد. با استفاده از این تابع می‌توان تشخیص داد که آیا کل عمل بهینه‌سازی خاتمه یافته است یا خیر. ابتدا بهترین نقطه P_1 و دومین نقطه بهتر P_2 را از مجموعه η نقطه‌ای انتخاب می‌کنیم. تابع ارزش موردنظر می‌تواند اطلاعاتی را تأمین کند که آیا نقطه جدید P از بهترین نقطه جاری یعنی P_1 بهتر است یا خیر. بنابراین اگر یک جستجوی تک‌هدفه در راستای گرادیان تابع ارزش از نقطه P_1 را اجرا کنیم، انتظار داریم که نقطه‌ای بهتر از P_1 تولید شود که با استفاده از این می‌توان معیار خاتمه را توسعه داد، برای این منظور مسأله‌ی ASF زیر را برای $P_1 = z^b$ حل می‌کنیم، که در آن S فضای متغیرهای تصمیم‌شده مسأله‌ی اصلی را نشان می‌دهد.

$$\begin{aligned}
 & \text{maximum} \quad \left(\min_{i=1}^M \frac{f_i(x) - z_i^b}{\partial v / \partial f_i} \right) + \rho \sum_{j=1}^M \frac{f_j(x) - z_j^b}{\partial v / \partial f_j} \\
 & \text{s.t.} \quad x \in S.
 \end{aligned}$$

در حل این مسأله هر جواب در تکرارهای میانی ($z^{(i)}; i = 1, 2, \dots$) را ذخیره می‌کنیم. اگر فاصله اقلیدسی $z^{(i)}$ و P_1 از پارامتر خاتمه d_A بزرگتر بود [۳]، بهینه‌سازی ASF متوقف می‌شود و الگوریتم ادامه می‌یابد. که در این حالت $z^{(i)}$ جایگزین P_1 می‌شود. از طرف دیگر اگر بهینه‌سازی ASF خاتمه یافت و فاصله‌ی جواب نهایی z^T از P_1 بزرگتر از d_A نبود الگوریتم خاتمه می‌یابد و z^T به عنوان جواب نهایی الگوریتم معرفی می‌شود.

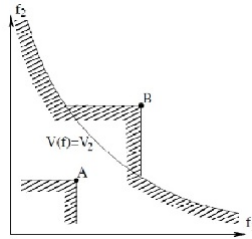
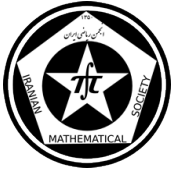
۳.۲ قانون غلبه اصلاح شده

فرض کنید V تابع ارزش در تکرار جاری باشد و $V(P_2) = V_2$ که در آن P_2 دومین نقطه‌ی بهتر است. در این صورت هر دو جواب شدنی $x^{(1)}$ و $x^{(2)}$ می‌توانند با مقادیر تابع هدفشان این‌گونه با هم مقایسه شوند: اگر مقدار تابع ارزش هر دو جواب از V_2 کمتر یا مقدار تابع ارزش هر دو از V_2 بیشتر بود آنگاه این دو نقطه به‌وسیله‌ی معیار غلبه‌ی معمول باهم مقایسه می‌شوند. در غیر این صورت اگر مقدار تابع ارزش یک جواب بیشتر از V_2 و جواب دیگر کمتر از V_2 بود آنگاه دو جواب به‌صورت زیر باهم مقایسه می‌شوند:

با توجه به شکل ۱ مقدار تابع ارزش در نقطه‌ی A از V_2 کمتر و در نقطه‌ی B از V_2 بیشتر می‌باشد لذا در نقطه‌ی A از معیار غلبه‌ی معمول استفاده می‌گردد و در نقطه‌ی B مطابق شکل ۱ عمل می‌شود. نواحی که توسط نقاط A و B مغلوب می‌شوند هاشور زده شده است. دلیل انتخاب P_2 به عنوان نقطه‌ی پایه برای معیار غلبه این است که در بعضی مسائل این امکان وجود دارد که نقطه‌ی ارجح بین P_1 و P_2 قرار گرفته باشد. در این حالت اگر P_1 به عنوان نقطه پایه برای معیار غلبه در نظر گرفته شود، نقطه‌ی ارجح توسط P_1 مغلوب خواهد شد.

۳ الگوریتم بهینه‌سازی چندهدفه تکاملی تعاملی مبتنی بر تابع ارزش

اکنون با توجه به توضیحات ارائه شده‌ی بالا و الگوریتم پیشنهادی در [۳]، الگوریتم جدید مورد نظر که مشابه الگوریتم مقاله [۳] می‌باشد و تفاوتش با این الگوریتم در گام‌های ۳، ۴، ۵ و ۷ است. در واقع برای تعیین جهت جستجو، به جای استفاده از



شکل ۱: نواحی مغلوب شده توسط نقاط A و B با استفاده از تعریف غلبه اصلاح شده

مخروط چندوجهی، از تابع ارزش استفاده می‌شود. لذا در این بخش فقط تغییرات لازم در این گام‌ها را بیان می‌کنیم. در گام ۳ هنگام فراخوانی تصمیم‌گیرنده از او می‌خواهیم که η نقطه را از بایگانی A_t انتخاب کند. در گام ۴ به جای ساخت مخروط چندوجهی با استفاده از توضیحات ۱، ۲ تابع ارزش $V(F)$ را توسط η نقطه‌ی انتخابی تصمیم‌گیرنده در گام ۳ می‌سازیم و مسأله‌ی بهینه‌سازی مربوطه را حل می‌کنیم. در گام ۵ هنگام تولید جمعیت فرزند از معیار غلبه‌ی اصلاح شده در ۲، ۳ استفاده می‌کنیم. و در آخر در گام ۷ دوباره تصمیم‌گیرنده را برای انتخاب η نقطه و بهترین عضو از بایگانی فراخوانی می‌کنیم و بهترین نقطه در η نقطه‌ی انتخابی تکرار قبلی را به عنوان A_{c-1}^{best} ذخیره می‌کنیم و تابع ارزش جدید را می‌سازیم.

۴ نتیجه‌گیری

الگوریتم پیشنهادی یک الگوریتم کلی است و برای مسائل چند هدفه، صرف‌نظر از نوع مرز پارتو بهینه، قابل اجرا می‌باشد. چون این الگوریتم از دسته‌ی الگوریتم‌های تکاملی می‌باشد توانایی حل مسائل چندهدفه‌ی پیچیده را دارد و در حل مسائلی با ۲ تا ۳ تابع هدف موفق است.

مراجع

- [1] J. Branke, K. Deb, K. Miettinen, R. Slowinski (Eds.), *Multiobjective Optimization: Interactive and Evolutionary Approaches*, Vol. 470, Springer, Berlin, 1998.
- [2] K. Deb, A. Sinha, P. Korhonen, J. Wallenius, *An interactive evolutionary multi-objective optimization method based on progressively approximated value function*, IEEE Transactions on Evolutionary Computation, 14 (5) (2010), pp. 723-739.
- [3] A. Sinha, P. Korhonen, J. Wallenius, K. Deb, *An interactive evolutionary multi-objective optimization algorithm with a limited number of decision maker calls*, European Journal of Operational Research, 233 (2014), pp. 647-688.

پست الکترونیکی: hkhoshadi@birjand.ac.ir
 پست الکترونیکی: nasimnasrabi@birjand.ac.ir
 پست الکترونیکی: mamann@birjand.ac.ir



حل مسائل کنترل بهینه با استفاده از یک مدل شبکه عصبی فیدفوروارد

علیرضا ناظمی

دانشگاه شاهرود

رضوان کرمی*

دانشگاه شاهرود

چکیده

در ابتدا مساله کنترل بهینه را بیان کرده، سپس با نوشتن شرایط بهینگی و تعریف تابع هامیلتونین، شرط لازم بهینگی را برای مساله به دست می‌آوریم. در ادامه با ارائه یک شبکه عصبی کارای فیدفوروارد به حل شرایط بهینگی پرداخته، تابع کنترل و مسیر را به دست می‌آوریم.

واژه‌های کلیدی: مساله کنترل بهینه، تابع هامیلتونین، شبکه عصبی، شرایط لازم بهینگی.

Mathematics Subject Classification [2010]: 13D45, 39B42

۱ مقدمه

نمونه‌های بسیاری از مسائل کنترل بهینه در علوم مهندسی وجود آمده است. در سال‌های اخیر، چندین محقق تلاش کرده‌اند تا روش جدیدی برای حل مسائل کنترل بهینه ارائه کنند. در [۲] یک مدل ریاضی برای کنترل رشد تومورهای سرطانی پیشنهاد شده است که به صورت نظریه کنترل بهینه فرموله‌بندی شده است. در [۳] یک الگوریتم ترکیبی بوسیله‌ی بهینه‌سازی ازدحام ذره‌های اصلاح شده با برنامه ریزی کوادراتیک متوالی برای حل مسائل کنترل بهینه غیر خطی ارائه کرده‌اند.

تعریف ۱.۱. نمو تابعی را می‌توان بصورت زیر تعریف کرد:

$$\Delta J(x, \delta x) = \delta J(x, \delta x) + g(x, \delta x) \|\delta x\|$$

که δJ قسمت خطی بر حسب δx می‌باشد. اگر $\lim_{\|\delta x\| \rightarrow 0} g(x, \delta x) = 0$ آنگاه J را دیفرانسیل پذیر گویند و δJ تغییرات تابعی J نامیده می‌شود.

قضیه ۲.۱. (قضیه اساسی حساب تغییرات). اگر x^* یک منحنی اکسترمم باشد، تغییرات J روی x^* باید صفر شود، یعنی به ازای هر δx قابل قبول $\delta J(x^*, \delta x) = 0$.

اثبات. به مرجع [۱] مراجعه شود. □

لم ۳.۱. (لم اساسی حساب). اگر تابع h پیوسته بوده و برای هر تابع پیوسته مانند δx در محدوده $[t_0, t_f]$ داشته باشیم:

$$\int_{t_0}^{t_f} h(t) \delta x(t) dt = 0$$

آنگاه h باید در تمام محدوده $[t_0, t_f]$ صفر باشد.

اثبات. به مرجع [۱] مراجعه شود. □

* سخنران



۲ بیان مساله

شکل کلی یک مساله‌ی کنترل بهینه به صورت زیر است:

$$\begin{aligned} \min J &= h(x(t_f), t_f) + \int_{t_0}^{t_f} f_0(x(t), u(t), t) dt, \\ \text{s.t. } \dot{x} &= g(x(t), u(t), t), \\ x(t_0) &= x_0. \end{aligned} \quad (1)$$

۱.۲ شرایط لازم برای کنترل بهینه

با اعمال قضیه اساسی حساب تغییرات و تعریف تابع $\mathcal{H}(x(t), u(t), p(t), t)$ به نام تابع هامیلتونین به صورت زیر، شرایط لازم به دست می‌آیند.

$$\mathcal{H}(x(t), u(t), p(t), t) \triangleq f_0(x(t), u(t), t) + p^T \cdot g(x(t), u(t), t) \quad (2)$$

شرایط لازم عبارتند از:

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x}(x^*(t), u^*(t), p^*(t), t) = -\dot{p}(t), \quad (3)$$

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial u}(x^*(t), u^*(t), p^*(t), t) = 0, \quad (4)$$

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p}(x^*(t), u^*(t), p^*(t), t) = \dot{x}(t), \quad (5)$$

$$\left[\frac{\partial h}{\partial x}(x^*(t_f), t_f) - p^*(t_f) \right]^T \delta x_f + \left[\mathcal{H}(x^*(t_f), u^*(t_f), p^*(t_f), t_f) + \frac{\partial h}{\partial t}(x^*(t_f), t_f) \right] \delta t_f = 0 \quad (6)$$

۳ ساختار شبکه عصبی

مقدار خروجی شبکه عصبی فیدفوروارد بوسیله فرمول زیر محاسبه می‌شود:

$$\begin{cases} \text{output} = \sum_{i=1}^I v_i \sigma(z_I), & \sigma(x) = \frac{1}{1+e^{-x}} \\ z_I = w_i x + b_i \end{cases}$$

۳ شبکه عصبی برای هرتابع در نظر می‌گیریم: حالت (شبکه عصبی آن n_x)، الحاقی (شبکه عصبی آن n_p) و کنترل (شبکه عصبی آن n_u) که به صورت زیر تعریف می‌شوند و جواب‌های آزمایشی (برای توابع حالت، الحاقی و کنترل) به صورت زیر ساخته می‌شوند:

$$\begin{cases} x_T = x_0 + t(t - t_0)n_x, & n_x = \sum_{i=1}^I v_x^i \sigma(z_x^i), & z_x^i = w_x^i \tau + b_x^i, \\ p_T = n_p, & n_p = \sum_{i=1}^I v_p^i \sigma(z_p^i), & z_p^i = w_p^i \tau + b_p^i, \\ u_T = n_u, & n_u = \sum_{i=1}^I v_u^i \sigma(z_u^i), & z_u^i = w_u^i \tau + b_u^i. \end{cases} \quad (7)$$

ممکن است در برخی مسائل برای نقاط انتهایی آزاد داشته باشیم $p(\cdot) = 0$. به عنوان مثال، اگر $x(t_f)$ آزاد باشد، باید داشته باشیم $p(t_f) = 0$. بنابراین می‌توانیم $p(t_f)$ را در (۷) بصورت $p_T = (t - t_f)n_p$ تعریف کنیم. برای دیگر شرایط اولیه (یا مرزی) می‌توانیم تابع آزمایشی تقریبی بسازیم



جواب‌های آزمایشی باید در شرایط بهینگی (۶) - (۳) صدق کنند، بنابراین داریم:

$$\frac{\partial \mathcal{H}_T}{\partial x_T} = -\dot{p}_T(t), \quad (۸)$$

$$\frac{\partial \mathcal{H}_T}{\partial u_T} = 0, \quad (۹)$$

$$\frac{\partial \mathcal{H}_T}{\partial p_T} = \dot{x}_T(t), \quad (۱۰)$$

که در آن

$$\mathcal{H}_T(x_T(t), u_T(t), p_T(t), t) = f_0(x_T(t), u_T(t), t) + p_T^T \cdot g(x_T(t), u_T(t), t) \quad (۱۱)$$

با دوباره فرموله بندی (۱۰) - (۸) به عنوان یک مساله حداقل سازی نامقید، در ابتدا دستگاه بهینه سازی (۱۰) - (۸) را با m نقطه $t_k, k = 1, 2, \dots, m$ در بازه $[t_0, t_f]$ گسسته سازی می‌کنیم و مساله بهینه سازی را بصورت زیر تعریف می‌کنیم

$$\text{minimize}_y E(y) = 1/2 \sum_{k=1}^m \{E_1(t_k, y) + E_2(t_k, y) + E_3(t_k, y)\} \quad (۱۲)$$

که در آن

$$y = (w_x, w_p, w_u, b_x, b_p, b_u, v_x, v_p, v_u)^T \in \mathbb{R}^{3I(2n+m)}$$

و

$$\begin{cases} E_1(t_k, y) = \left[\frac{\partial \mathcal{H}_T}{\partial x_T} + \dot{p}_T \right]^2, & k = 1, 2, \dots, m \\ E_2(t_k, y) = \left[\frac{\partial \mathcal{H}_T}{\partial u_T} \right]^2, & k = 1, 2, \dots, m \\ E_3(t_k, y) = \left[\frac{\partial \mathcal{H}_T}{\partial p_T} - \dot{x}_T \right]^2, & k = 1, 2, \dots, m \end{cases}$$

۴ مثال عددی

در این بخش، سعی می‌کنیم الگوریتم پیشنهادی را با حل یک مثال نشان دهیم.

مثال ۱.۴. مساله بهینه سازی زیر را در نظر بگیرید:

$$\text{minimize} \quad \frac{H}{2} x^2(T) + \int_0^T \frac{1}{4} u^2(t) dt,$$

subject to

$$\dot{x}(t) = -ax(t) + u(t),$$

$$x(0) = 5, x(T) = \text{is free}.$$

با فرض $H = 5, a = -0.2, T = 15$ جواب دقیق متغیر حالت و کنترل به صورت زیر است:

$$\begin{cases} x(t) = B \exp\left(\frac{-t}{5}\right) - 5A \exp\left(\frac{t}{5}\right), \\ u(t) = -2A \exp\left(\frac{t}{5}\right). \end{cases}$$



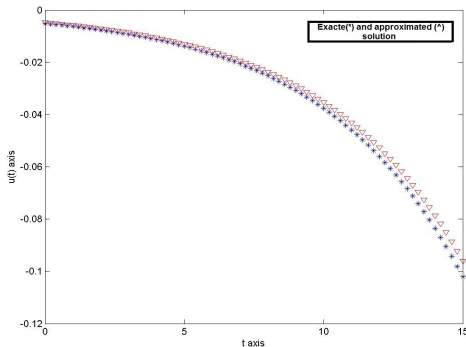
که در آن

$$A = \frac{25}{26 \exp(6) - 25}, \quad B = \frac{26 A \exp(6)}{5}$$

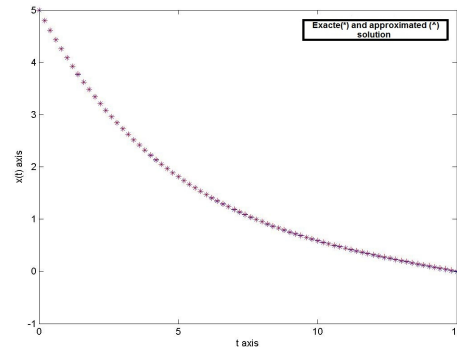
چون $x = 15$ در T آزاد است داریم $p(15) = 0$. با در نظر گرفتن شرط انتهایی آزاد و شرط اولیه $x(0) = 5$ ، می‌توانیم جواب‌های آزمایشی را به صورت زیر انتخاب کنیم:

$$\begin{cases} x_T = 5 + tn_x, \\ p_T = (t - 15)n_p + 5x(15), \\ u_t = n_u. \end{cases}$$

می‌توانیم جواب‌های تقریبی برای $x(t)$ و $u(t)$ را در شکل (۱) مشاهده کنیم.



(ب) تابع کنترل برای مثال (۱.۴)



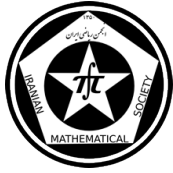
(آ) تابع حالت برای مثال (۱.۴)

شکل ۱: تابع حالت و کنترل برای مثال (۱.۴)

مراجع

- [۱] Kirk, D.E. Introduction to Optimal Control Theory, New York, Wiley, ۱۹۷۰.
- [۲] S. Pickl, W. Krabs, Optimal control problem in chemotherapy, Comput Math Appl ۱۱۱۷: ۲۱۷-۱۱۲۴ (۲۰۱۰).
- [۳] H. Modares, H. Naghibi, MB, Solving nonlinear optimal control problems using a hybrid algorithm, IPSOSQP, Intell Artif Appl Eng ۴۷۶: ۲۴-۴۸۴ (۲۰۱۱).

پست الکترونیکی: rezvankarami91@gmail.com
پست الکترونیکی: nazemi20042003@yahoo.com



روش برنامه ریزی خطی امکانی دو فازی جهت حل مسائل مربوط به ارزیابی تامین کننده و تخصیص سفارشات

سید یونس جلائی خادمی
دانشگاه پیام نور- مرکز مشهد

سمانه مصطفوی*
دانشگاه پیام نور- مرکز شیراز

چکیده

در این مقاله، ترکیبی از روش برنامه‌ریزی خطی امکانی چند هدفه (MOPLP) و فرآیند تحلیل سلسله مراتبی (AHP) برای تشریح عوامل کمی و کیفی ملموس و غیر ملموس جهت ارزیابی و انتخاب تامین کنندگان و تخصیص مقادیر بهینه سفارش ارائه می‌شود. به منظور رویارویی با عدم قطعیت در ارزیابی و انتخاب تامین کنندگان و تخصیص سفارشات، از رویکرد فازی استفاده می‌شود. برای حل مساله از یک روش برنامه‌ریزی خطی امکانی چند هدفه کمک گرفته و در خاتمه، یک برنامه‌ریزی خطی امکانی (PLP) جهت حل مساله ارائه می‌گردد.

واژه‌های کلیدی: ارزیابی تامین کنندگان، تخصیص سفارش، برنامه ریزی خطی امکانی چند هدفه، فرآیند تحلیل سلسله مراتبی

Mathematics Subject Classification [2010]: 13D45, 39B42

۱ مقدمه

انتخاب تامین کنندگان و تخصیص سفارشات یک مساله تصمیم‌گیری چند معیاره پیچیده می‌باشد که از متغیرهایی مانند هزینه، کیفیت، کارایی، قابلیت فنی و تحویل دهی مناسب و غیره تاثیر می‌پذیرد. تاکنون پژوهش‌های کمی صورت گرفته که در فضای غیرقطعی، علاوه بر انتخاب تامین کنندگان به مساله تخصیص سفارشات نیز توجه شده باشد. مقالات اندکی در مورد بررسی اطلاعات غیر قطعی و مبهم در ارزیابی تامین کنندگان و به ویژه در مدل‌های تخصیص سفارش وجود دارد. برای مثال لی [۱] هر دو معیار کیفی و کمی را برای عملکرد تامین کنندگان با کمک روش فازی تعیین نموده است. کومار [۲] یک مدل برنامه ریزی آرمانی ترکیبی فازی عدد صحیح برای ارزیابی تامین کنندگان بوجود آورده است. چن [۳] بر منبای تئوری مجموعه فازی جهت بررسی انتخاب تامین کنندگان یک مدل تصمیم‌گیری چندمعیاره را طراحی کرده است. این مقاله با بررسی یک مساله برنامه ریزی چند هدفه فازی، تخصیص سفارشات و ارزیابی تامین کنندگان در یک محیط فازی امکانی را در یک مدل جمع‌آوری می‌نماید.

۲ روش برنامه ریزی خطی امکانی چند هدفه^۱ (MOPLP)

روش (MOPLP) دو فازی، دو مرحله دارد که به صورت زیر می‌باشند:

* سخنران

^۱Multi-Objective Possibilistic Linear Programming



۱.۲ فاز اول

در فاز اول یک مساله برنامه ریزی خطی امکانی (PLP) که شامل ضرایب فازی مثلثی می باشد، به یک مساله برنامه ریزی خطی چند هدفه تبدیل شده و پس از آن از طریق روش زیمرمن این مساله برنامه ریزی خطی چند هدفه با استفاده از یک عملگر $\min - \max$ به یک مدل برنامه ریزی خطی تبدیل می شود. به طوریکه:

$$\max \sum_{i=1}^n \tilde{c}_i x_i, \quad s.t.: x \in X = \{x | \tilde{b}, x \geq 0\} \quad (1)$$

مساله (MOPLP) جهت حل معادله (۲)، می تواند به صورت زیر فرموله گردد:

$$\min z_1 = (c^m - c^p)^T x, \quad \max z_2 = c^m{}^T x, \quad \max z_3 = (c^o - c^m)^T x, \quad s.t.: x \in X \quad (2)$$

حال با استفاده از روش مجموعه های فازی زیمرمن [۴] مساله دنبال می شود به طوریکه:

$$\max Z = [c_1 x, c_2 x, \dots, c_l x]^T, \quad \min W = [c_1 x, c_2 x, \dots, c_r x]^T, \quad s.t.: Ax \leq b, x \geq 0. \quad (3)$$

توابع عضویت برای هدف ما به صورت زیر تعریف می گردد:

$$\begin{aligned} \mu_k(Z_k) &= (Z_k(x) - Z_k^{NIS}) / (Z_k^{PIS} - Z_k^{NIS}), \quad k = 1, 2, \dots, l, \\ \mu_s(W_s) &= (W_s^{NIS} - W_s(x)) / (W_s^{NIS} - W_s^{PIS}), \quad s = 1, 2, \dots, r, \end{aligned} \quad (4)$$

که Z_k^{PIS} و Z_k^{NIS} جواب های ایده آل مثبت و W_k^{NIS} و W_k^{PIS} جواب های ایده آل منفی می باشند. اکنون با استفاده از عملگر $\min - \max$ مساله MOLP به عنوان یک مساله تک هدفه به صورت زیر نوشته می شود:

$$\max \lambda^{(1)} \quad s.t.: \lambda^{(1)} \leq (Z_k(x) - Z_k^{NIS}) / (Z_k^{PIS} - Z_k^{NIS}), \quad k = 1, 2, \dots, l, \quad x \in X, \quad \lambda \in [0, 1]. \quad (5)$$

اما بزرگترین اشکال مدل ۵ این است که نتیجه ای که توسط عملگر $\min - \max$ بدست می آید، بدترین وضعیت را نمایان می سازد، که این وضعیت به وسیله اعضای دیگری که ممکن است بسیار خوب هم باشد نمی تواند جبران گردد. لذا باید از یک عملگر جبران کننده استفاده نمود که در فاز ۲ به این موضوع پرداخته می شود.

۲.۲ فاز دوم

در این فاز درجه مطلوبیت فاز یک ($\lambda^{(1)}$) به عنوان یک محدودیت در نظر گرفته می شود و عملگر میانگین حسابی $\lambda_{k,s}^{(2)}$ به عنوان میانگین $\lambda^{(1)}$ های هر محدودیت، جهت ماکزیم شدن در تابع هدف قرار می گیرد.

$$\begin{aligned} \max \bar{\lambda}_{k,s}^{(2)} &= \frac{l}{l+r} \sum_{i=1}^{l+r} \lambda_i \\ s.t.: \lambda^{(1)} &\leq \lambda_k^{(2)} \leq (Z_k(x) - Z_k^{NIS}) / (Z_k^{PIS} - Z_k^{NIS}), \quad k = 1, 2, \dots, l, \\ \lambda^{(1)} &\leq \lambda_s^{(2)} \leq (W_s^{NIS} - W_s(x)) / (W_s^{NIS} - W_s^{PIS}), \quad s = 1, 2, \dots, r, \\ x &\in X, \quad \lambda^{(1)}, \lambda_{k,s}^{(2)} \in [0, 1]. \end{aligned} \quad (6)$$

۳ مدل کردن مساله تخصیص سفارش MOPLP (MOPLP-OA)

در این مدل فرض بر این است که شرکت، محصولات گوناگونی را از تامین کنندگان مختلف خریداری می نماید و هر تامین کننده توانایی بر آوردن هر نوع محصولی را دارد و فضای مساله غیر قطعی است. در اینجا توابع هدف به ترتیب تخصیص مقادیر سفارشات جهت ارضای تقاضای کل - با توجه به قیمت های غیر قطعی -، نرخ پذیرش کالا و اوزان بدست آمده از روش AHP را برای هر تامین کننده بررسی می نمایند. متغیرهای مساله به صورت زیر تعریف می گردند:

\tilde{x}_1 : قیمت کل خرید؛ \tilde{x}_2 : نرخ کل پذیرفته نشدن محصول؛ \tilde{x}_3 : ارزش کل خرید؛ \tilde{p}_{ij} : قیمت محصول نوع j ام از تامین



کننده z_1 ؛ \tilde{q}_{ij} : میزان تقاضای داده شده به تامین کننده z_1 برای محصول i ؛ W_{AHP_j} : وزن تامین کننده z_1 که از روش AHP بدست آمده؛ x_{ij} : میزان تقاضای داده شده به تامین کننده z_1 برای خرید محصول نوع i ؛ D_i : تقاضای کل خریدار برای محصول i در طول یک دوره؛ a_{ij} : زمان ساخت یک واحد از محصول i توسط تامین کننده z_1 ؛ U_j : ظرفیت زمانی کل برای تامین کننده z_1 ؛ B_j : حداقل بودجه ی اختصاص داده شده به تامین کننده z_1 .

$$\begin{aligned} \min z_1 &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \tilde{p}_{ij} x_{ij}, & \min z_2 &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \tilde{q}_{ij} x_{ij}, & \max z_3 &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m W_{AHP_j} x_{ij} \\ \text{s.t.} & \sum_{j=1}^m x_{ij} = \tilde{D}_i, \quad \forall i, & \sum_{i=1}^n a_{ij} x_{ij} &\leq U_j, \quad \forall j, & \sum_{i=1}^n \tilde{p}_{ij} x_{ij} &\geq B_j, \quad \forall j, \\ & p_{ij}, x_{ij}, D_j, q_{ij}, a_{ij}, U_{ij}, B \geq 0, & \forall i, \forall j. \end{aligned} \quad (7)$$

۴ حل مدل MOLP

کافی است از طریق روش برنامه ریزی فازی زیرین که در بخش ۲ بررسی گردید، مدل به یک مدل تک هدفه تبدیل گردد. جواب های ایده آل مثبت (PIS) و منفی (NIS) مربوط به هدف تابع زیر تعیین می گردند.

$$\begin{aligned} z_1^{PIS} &= \min z_1^m, & z_1^{NIS} &= \max z_1^m, & z_2^{PIS} &= \max (z_1^m - z_1^0), & z_2^{NIS} &= \min (z_1^m - z_1^0) \\ z_2^{PIS} &= \max (z_1^m - z_1^0), & z_2^{NIS} &= \min (z_1^m - z_1^0), & z_3^{PIS} &= \min (z_1^p - z_1^m), & z_3^{NIS} &= \max (z_1^p - z_1^m) \\ z_3^{PIS} &= \min z_1^m, & z_3^{NIS} &= \max z_1^m, & z_4^{PIS} &= \max (z_1^m - z_1^p), & z_4^{NIS} &= \min (z_1^m - z_1^p) \\ z_4^{PIS} &= \min (z_1^m - z_1^p), & z_4^{NIS} &= \max (z_1^m - z_1^p), & z_5^{PIS} &= \max z_3, & z_5^{NIS} &= \min z_3. \end{aligned} \quad (8)$$

تابع عضویت خطی این توابع نیز به صورت زیر است:

$$\mu_{z_1} = \begin{cases} 1, & z_1 < z_1^{PIS}, \\ \frac{z_1^{NIS} - z_1}{z_1^{NIS} - z_1^{PIS}}, & z_1^{PIS} \leq z_1 \leq z_1^{NIS}, \\ 0, & z_1 > z_1^{NIS}, \end{cases} \quad \mu_{z_2} = \begin{cases} 1, & z_2 < z_2^{NIS}, \\ \frac{z_2 - z_2^{NIS}}{z_2^{PIS} - z_2^{NIS}}, & z_2^{NIS} \leq z_2 \leq z_2^{PIS}, \\ 0, & z_2 > z_2^{PIS}, \end{cases} \quad (9)$$

که البته μ_{z_1} و μ_{z_2} و μ_{z_3} همانند μ_{z_4} بوده و μ_{z_5} همانند μ_{z_6} می باشند که از نوشتن آن های خودداری می گردد.

۱.۴ فاز اول

$$\begin{aligned} \max \lambda^{(1)} \\ \text{s.t.} & \lambda^{(1)} \leq \mu_{z_{k,s}}, \quad k = 2, 5, 7; \quad s = 1, 3, 4, 6 \\ & \sum_{j=1}^m x_{ij} = (w_1 D_{i,\beta}^p + w_2 D_{i,\beta}^m + w_3 D_{i,\beta}^0), \quad \forall i, & \sum_{i=1}^n a_{ij} x_{ij} &\leq U_j, \quad \forall j, \\ & \sum_{i=1}^n (w_1 p_{ij,\beta}^0 + w_2 D_{ij,\beta}^m + w_3 D_{ij,\beta}^p) x_{ij} \leq B_j, \quad \forall i, \\ & p_{ij}, x_{ij}, D_j, q_{ij}, w_i, a_{ij}, U_{ij}, B \geq 0, \quad \forall i, \forall j. \quad \lambda^{(1)} \in [0, 1]. \end{aligned} \quad (10)$$



۲.۴ فاز دوم

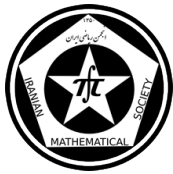
$$\begin{aligned} \max \quad & \lambda_{k,s}^{(2)} \\ \text{s.t.} \quad & \lambda^{(1)} \leq \lambda_k^{(2)} \leq \mu z_k, \quad k = 2, 5, 7 \quad \lambda^{(1)} \leq \lambda_s^{(2)} \leq \mu z_s, \quad s = 1, 3, 4, 6 \\ & \sum_{j=1}^m x_{ij} = (w_1 D_{i,\beta}^p + w_2 D_{i,\beta}^m + w_3 D_{i,\beta}^o), \quad \forall i, \quad \sum_{i=1}^n a_{ij} x_{ij} \leq U_j, \quad \forall j, \\ & \sum_{i=1}^n (w_1 p_{ij}^o + w_2 D_{ij,\beta}^m + w_3 D_{ij,\beta}^p) x_{ij} \geq B_j, \quad \forall i, \\ & p_{ij}, x_{ij}, D_j, q_{ij}, w_i, a_{ij}, U_{ij}, B \geq 0, \quad \forall i, \quad \forall j. \quad \lambda^{(1)}, \lambda_{k,s}^{(2)} \in [0, 1]. \end{aligned} \quad (11)$$

۵ نتیجه گیری

روش مرسوم جهت حل این نوع مسائل استفاده از مجموعه داده کومار [۵] می باشد. زمانی که یک مدل در مجموعه کومار [۵] بکار گرفته می شود برخی تغییرات روی آن صورت می گیرد. ابتدا هر پارامتر تابع هدف با ۱۰ درصد تلورانس به یک عدد فازی مثلثی تبدیل می گردد. پارامترهای سمت راست هر محدودیت که اعداد فازی باشند با رویکرد محتملترین مقادیر به صورت قطعی در می آیند. سپس مدل بر طبق مراحل MOPLP حل می گردد. در این روش جدید سعی بر این بوده که مدل پیشنهادی بتواند راه حل عمومی تری را به وجود آورد و یا نتایج منعطف تری را برای تصمیم گیران سبب گردد. بطوریکه در این روش پس از انجام فاز ۲ و افزایش λ در فاز ۲ مقادیر بهتری برای متغیرها، نسبت به مقادیر بدست آمده از روش کومار [۵] بدست می آید. لذا نتیجه می شود که توانایی این روش جهت حل اینگونه مسائل بهتر از روش کومار است و با این روش، دقیق تر می توان مسائل واقعی جهان را حل نمود.

مراجع

- [1] C.C. Li, Y.P. Fun, J.S. Hung, *A new measure for supplier performance evaluation*, IIE Transactions on Operations Engineering 29 (1997) 753–758.
- [2] M. Kumar, P. Vrat, R. Shankar, *A fuzzy goal programming approach for vendor selection problem in a supply chain*, Computers Industrial Engineering 46 (2004) 69–85.
- [3] C.T. Chen, C.T. Lin, S.F. Huang, *A fuzzy approach for supplier evaluation and selection in supply chain management*, International Journal of Production Economics 102 (2006) 289-301.
- [4] H.J. Zimmermann, *Fuzzy programming and linear programming with several objective functions*, Fuzzy sets and Systems 1 (1978) 45–55.
- [5] M. Kumar, P. Vrat, R. Shankar, *A fuzzy programming approach for vendor selection problem in a supply chain*, International Journal of Production Economics 101 (2006) 273–285.



روش عددی برای کنترل بهینه حلقه باز با استفاده از چندجمله ای های چپیشف

محمد رضا احمدی دارانی

دانشگاه شهرکرد

محمد حسین درخشان*

دانشگاه شهرکرد

چکیده

در این مقاله، شکل کلی یک مسئله کنترل بهینه کسری OPGs را بیان می کنیم و یک شرط لازم برای وجود این مسئله با استفاده از روش پونتریاگین بدست می آوریم. و از طرفی یک روش عددی به صورت سری چندجمله ای های چپیشف بیان می کنیم و این مسئله کنترل بهینه کسری را با استفاده از این روش عددی تقریب می زنیم. در پایان، کارایی روش ارائه شده را به کمک حل عددی یک مثال و مقایسه با جواب دقیق می آزماییم.

واژه های کلیدی: مشتق کسری کپوتو، چندجمله چپیشف، سرعت همگرایی، تقریب عددی

Mathematics Subject Classification [2010]: 65K10, 26A33, 49K15

۱ مقدمه

مسئله کنترل بهینه کاربرد فراوانی در رشته های مهندسی و علوم پایه دارد که یکی از کاربردهای این مسئله را در زمینه هوافضا و مکانیک می توان بیان کرد ([۱]، [۲]). در این بخش برخی از مفاهیم و تعاریفی که در بخش های بعدی مورد استفاده قرار می گیرد را بیان می کنیم. مشتق کسری ریمان لیوویل برای $\lambda(t)$ و همچنین مشتق کسری کپوتو برای $x(t)$ به ترتیب به صورت زیر بیان می شوند ([۳]، [۴]):

$${}_t D_{t_f}^{\alpha_1} \lambda(t) = \frac{(-1)^n}{\Gamma(n - \alpha_1)} \frac{d^n}{dt^n} \int_t^{t_f} (\tau - t)^{n - \alpha_1 - 1} \lambda(\tau) d\tau. \quad (1)$$

$${}_{t_0}^C D_t^{\alpha_1} x(t) = \frac{1}{\Gamma(n - \alpha_1)} \frac{d^n}{dt^n} \int_{t_0}^t (t - \tau)^{n - \alpha_1 - 1} x^{(n)}(\tau) d\tau. \quad (2)$$

فرض کنید α یک عدد حقیقی در بازه $[0, 1]$ باشد $f, g : [t_0, t_f] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ دو تابع مشتق پذیر باشند. در این صورت شکل کلی یک مسئله کنترل بهینه کسری را به صورت زیر بیان می کنیم:

$$\text{Minimize } J(x, u) = \int_{t_0}^{t_f} f(t, x(t), u(t)) dt, \quad (3)$$

تحت سیستم کنترل دینامیکی کسری زیر:

$$A\dot{x} + {}_{t_0}^C D_t^{\alpha} x(t) = g(t, x(t), u(t)), \quad (4)$$

که ماتریس A یک ماتریس غیر صفر بوده، و نقطه ابتدایی ثابت و نقطه انتهای آزاد در نظر گرفته می شود. اگر برای روابط (۳)-(۴) از روش پونتریاگین استفاده کنیم به یک شرط لازم برای وجود جواب برای این مسئله می رسم این شرایط را در

* محمد حسین درخشان



یک دستگاه معادلات به صورت زیر بیان می کنیم:

$$\begin{aligned} A\dot{\lambda} - B_t D_{t_f}^\lambda x(t) &= -\frac{\partial H}{\partial x}(t, x, u, \lambda), \\ A\dot{x} + B_{t_0}^C D_{t_0}^\alpha x(t) &= \frac{\partial H}{\partial \lambda}(t, x, u, \lambda), \\ \frac{\partial H}{\partial u}(t, x, u, \lambda) &= 0, \quad t \in [t_0, t_f], \\ x(t_0) &= 0, \quad \lambda(t_f) = 0, \end{aligned} \quad (5)$$

که در آن H هامیلتون می باشد و به صورت زیر تعریف می شود:

$$H(t, x, u, \lambda) = f(t, x, u) + \lambda g(t, x, u). \quad (6)$$

دستگاه معادلات بالا را می توان به صورت زیر بازنویسی کرد:

$$\begin{aligned} A\dot{\lambda} - B_t D_{t_f}^\alpha \lambda(t) &= P(t, x(t), \lambda(t)), \\ A\dot{x} + B_{t_0}^C D_{t_0}^\alpha x(t) &= Q(t, x(t), \lambda(t)), \\ x(t_0) &= 0, \quad \lambda(t_f) = 0, \end{aligned} \quad (7)$$

که در آن $P(t, x(t), \lambda(t))$, $Q(t, x(t), \lambda(t))$ دو تابع برحسب $x(t)$, $\lambda(t)$ هستند.

۲ روش عددی

هدف ما در این بخش بررسی روش عددی برای حل دستگاه معادلات (۵) است. فرض کنید $x(t)$, $\lambda(t)$ جوابهای دستگاه معادلات (۵) باشند. این جوابها را با استفاده از سری تعریف شده به صورت زیر تقریب می زنیم:

$$\begin{aligned} x(t) &\approx x_N = \sum_{n=0}^N X_n T_n(t), \\ \lambda(t) &\approx \lambda_N = \sum_{n=0}^N \Psi_n T_n(t), \end{aligned} \quad (8)$$

که در آن T_n چند جمله چپیشف، X_n و Ψ_n ضرایب چند جمله ای چپیشف هستند. چند جمله ایهای چپیشف را می توان در حالت کلی به کمک سری زیر محاسبه کرد:

$$T_n(t) = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} (-1)^k \frac{n!}{k!(n-2k)!} t^{n-2k}, \quad 0 \leq t < \infty, \quad (9)$$

برای بررسی روش عددی ابتدا بازه $[t_0, t_f]$ را به N قسمت مساوی تقسیم می کنیم و با جایگذاری این نقاط در دستگاه معادلات (۷) داریم:

$$\begin{aligned} Eq(t_k) : \quad A\dot{\lambda} - B_t D_{t_f}^\alpha \lambda(t) - P(t, x(t), \lambda(t))|_{t=t_k} &= 0, \quad k = 0, 1, 2, 3, \dots, N-1 \\ Eq(t_j) : \quad A\dot{x} + B_{t_0}^C D_{t_0}^\alpha x(t) - Q(t, x(t), \lambda(t))|_{t=t_k} &= 0, \quad k = 1, 2, 3, \dots, N \end{aligned} \quad (10)$$

معادلات (۱۰) یک دستگاه $2N+2$ معادله و $2N+2$ مجهول تشکیل می دهند که با حل آنها ضرایب مجهول و در نتیجه جوابهای تقریبی بدست می آید.



۳ مثال عددي

در این بخش با ارائه یک مثال، کارایی روش بیان شده را مورد بررسی قرار می‌دهیم. برای این مثال جوابهای عددی را با جوابهای تحلیلی مساله برای مقادیر مختلف N, α مقایسه می‌کنیم و نتایج بدست آمده در شکل ۱ و جداول ۱-۲ ارائه شده است.

مثال ۱.۳. سیستم کنترلی دو متغیره زیر را در نظر بگیرید:

$$J = \frac{1}{4} \int_0^1 (x^2(t) + u^2(t)) dt, \quad {}^C D_t^\alpha x(t) = -x(t) + u(t),$$

که در آن $x(0) = 1$ و $x(1)$ آزاد است. جواب دقیق این مثال برای $\alpha = 1/2$ به صورت زیر است:

$$x(t) = \cosh(\sqrt{2}t) + \beta \sinh(\sqrt{2}t),$$

$$u(t) = (1 + \sqrt{2}\beta) \cosh(\sqrt{2}t) + (\sqrt{2} + \beta) \sinh(\sqrt{2}t),$$

با استفاده از روابط (۵) داریم:

$${}^C D_t^\alpha x(t) = -x(t) - \lambda(t), \quad {}_t D_t^\alpha \lambda(t) = x(t) - \lambda(t), \quad x(0) = 1, \quad \lambda(1) = 0.$$

حال با استفاده از رابطه $\frac{\partial H}{\partial u} = 0$ داریم $u^*(t) = -\lambda(t)$

جدول ۱: مقدار تابع هزینه J_N را به ازاء مقادیر مختلف N

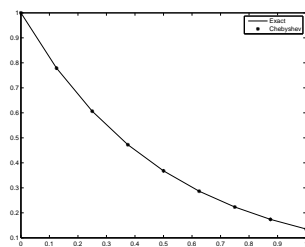
J_N	N
۰٫۱۹۲۳۸۶۷۳۱۶	۳
۰٫۱۹۲۹۰۴۱۵۱۵	۴
۰٫۱۹۲۹۰۶۵۸۴۷	۵
۰٫۱۹۲۹۰۹۲۷۵۶	۶

جدول ۲: خطای بین توابع حالت و کنترل را به ازاء $N = 6$

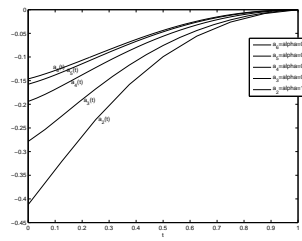
$ x^*(t_i) - x_N(t_i) $	$ u^*(t_i) - u_N(t_i) $	t_i
۰	$۸٫۹۳۹۹e - ۰۰۷$	۰
$۶٫۲۳۱۵e - ۰۰۸$	$۱٫۲۴۶۹e - ۰۰۶$	۰٫۲
$۲٫۴۵۶۵e - ۰۰۷$	$۱٫۵۱۰۸e - ۰۰۶$	۰٫۴
$۵٫۳۱۸۲e - ۰۰۷$	$۱٫۹۱۹۰e - ۰۰۶$	۰٫۶
$۶٫۲۴۴۱e - ۰۰۷$	$۲٫۶۰۱۷e - ۰۰۶$	۰٫۸
$۷٫۴۷۷۰e - ۰۰۶$	$۸٫۳۰۰۰e - ۰۱۱$	۱٫۰

۴ نتیجه گیری

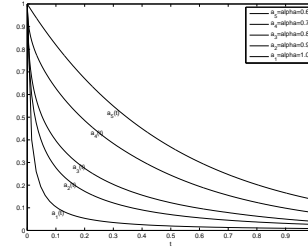
از روش عددی به کار گرفته شده در این مقاله به این نتیجه می‌رسیم که وقتی α به سمت یک میل می‌کند جوابهای تقریبی بدست آمده به جواب دقیق مسئله همگرا می‌شود.



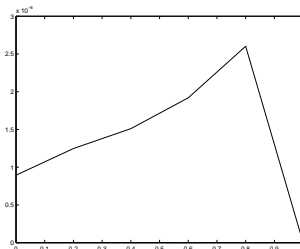
(ج) جواب دقیق $x(t)$ و $x_\epsilon(t)$ به ازاء $\alpha = 1/10$



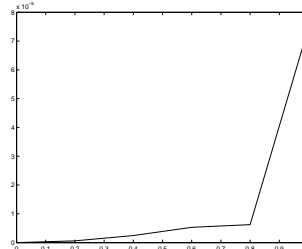
(ب) جوابهای تقریبی $u_\epsilon(t)$ به ازاء مقادیر مختلف α



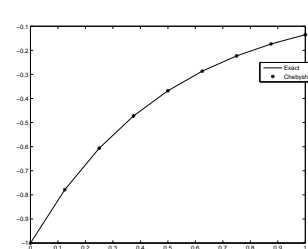
(آ) جوابهای تقریبی $x_\epsilon(t)$ به ازاء مقادیر مختلف α



(و) خطای بین جواب دقیق و جواب عددی $|u^*(t_i) - u_N(t_i)|$ به ازاء $N = 6$



(ه) خطای بین جواب دقیق و جواب عددی $|x^*(t_i) - x_N(t_i)|$ به ازاء $N = 6$



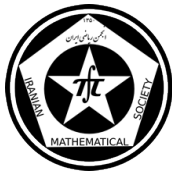
(د) جواب دقیق $u(t)$ و $u_\epsilon(t)$ به ازاء $\alpha = 1/10$

شکل ۱: بررسی جوابهای دقیق ، عددی و خطای بین آنها

مراجع

- [1] I. Podlubny, *Fractional Differential Equations*, Academic Press, San Diego, CA, 1999.
- [2] A.A. Kilbas, H.H. Srivastava, J.J. Trujillo, *Theory and Applications of Fractional Differential Equations*, Elsevier, The Netherlands, 2006.
- [3] J.A. Tenreiro-Machado, *Discrete time fractional order controllers*, *Frac. Calc. Appl. Anal.* 4 (2001) 47–66.
- [4] O.P. Agrawal, D. Baleanu, *A Hamiltonian formulation and a direct numerical scheme, for fractional optimal control problems*, *J. Vib. Control* 13 (2007), 1269–1281.

پست الکترونیکی: Analiz.Derakhshan.2009@gmail.com
پست الکترونیکی: Ahmadi.Darani@sci.sku.ac.ir



روش گرادیان گسسته برای بهینه سازی ناهموار

محمدرضا ضرابی
دانشگاه دامغانعلی اکبرنیا
دانشگاه پیام نورمریم طاعتی*
دانشگاه دامغان

چکیده

در این مقاله الگوریتمی مبتنی بر مفهوم زیرگرادیان برای حل مسایل بهینه سازی ناهموار مورد بررسی قرار گرفته است. این الگوریتم برای کمینه‌سازی موضعی توابع لیپ شیتز ارایه شده است. در این الگوریتم جهت کاهشی با حل دستگاه نامعادلات خطی محاسبه شده و همگرایی الگوریتم برای توابع شبه مشتق‌پذیر نیمه‌هموار نیز بررسی شده است. نتایج عددی با هر دو تابع هدف منظم و نامنظم ارایه گردیده و برای سرعت همگرایی بهتر زیرگرادیان تصویری در الگوریتم جهت کاهشی با روش مستقیم با استفاده از قضایای مربوطه جایگزین شده است. الگوریتم پیشنهاد شده با دو نمونه متفاوت آزمون شده و با به کارگیری نتایج عددی مقایسه شده است، نتایج حاصل برتری الگوریتم پیشنهاد شده را نسبت به روش زیرگرادیان تقریبی نشان می‌دهد.

واژه‌های کلیدی: روش زیرگرادیان تقریبی، زیرمشتق رابینوف-دمیانوف، گرادیان گسسته.

۱ مقدمه

برای حل مسایل بهینه‌سازی ناهموار از تعمیم تعریف‌های جدید مشتق استفاده شده است. مفهوم زیرگرادیان که با تعریف مجموعه‌ای از بردارها معرفی می‌شود، برای توابع محدب اولین بار به عنوان تعمیمی برای مشتق اول طرح و بررسی شد. ضعف عمده در زیرمشتق، بزرگ بودن مجموعه تعریف شده در آن است و آن هم ناشی از نوع تعریف مشتق سویی است. برای رفع این مشکل تعریف‌های جدیدی از مشتق سویی ارایه و بر اساس آنها تعمیم‌های جدیدی از مشتق مطرح شده است که از شبه مشتق میانوف-رابینوف^۱ و زیرمشتق میشل-پنو^۲ می‌توان به عنوان مهم‌ترین این تعمیم‌ها نام برد. اما زیرمشتق، تعمیمی از مشتق است که به راحتی قابل پیاده سازی عددی می‌شود، تعریف‌های معرفی شده برای تعمیم‌های مشتق تنها برای توابع لیپ شیتز موضعی ارایه شده‌اند.

در دهه‌های اخیر تلاش برای تعمیم تعریف مشتق به توابع نیم پیوسته پایینی^۳ با استفاده از تعریف گراف تابع ادامه یافته است. اکثر الگوریتم‌هایی که برای مسایل بهینه‌سازی ناهموار کارایی دارند از الگوریتم‌های مرتبه اول استفاده می‌کنند که این الگوریتم‌ها نیز مشتق اول توابع را به کار می‌گیرند و بدین منظور ابتدا توابع به صورت تقریبی هموارسازی می‌شود. برای نمونه می‌توان از الگوریتم شور^۴ که برای حل مسایل بهینه‌سازی محدب به کار می‌رود و الگوریتم‌های گرادیان گسسته^۵ و زیرگرادیان تقریبی^۶ که برای حل مسایل بهینه‌سازی نیمه هموار^۷ به کار می‌روند، نام برد.

* سخنران

^۱Demyanov-Rubinov^۲Michel-Penot^۳Lower semicontinuous^۴Shor algorithm^۵Discrete gradient^۶Approximate subgradient algorithm^۷Semismooth



تعریف ۱.۱. تابع منظم f را شبه مشتق رابینوف دمیانونف روی \mathbb{R}^n گویند اگر نسبت به هر جهت $g \in \mathbb{R}^n$ مشتق پذیر باشد و برای تمامی $x, g \in \mathbb{R}^n$ داشته باشیم $f'(x, g) = f^\circ(x, g)$ که $f'(x, g)$ مشتق جهتی f در نقطه x نسبت به جهت g است که به صورت زیر تعریف می شود

$$f'(x, g) = \lim_{\alpha \rightarrow +0} \alpha^{-1} [f(x + \alpha g) - f(x)],$$

مشتق جهتی $f'(x, g)$ نسبت به هر جهت $g \in \mathbb{R}^n$ پیوسته بالایی است.

تعریف ۲.۱. تابع $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ را در نظر بگیرید، تابع f روی \mathbb{R}^n نیم پیوسته پایینی (l.s.c) است، اگر به ازای هر $x \in \mathbb{R}^n$ داشته باشیم

$$f(x) = \liminf_{y \rightarrow x} f(y).$$

تعریف ۳.۱. تابع $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ یک تابع نیمه هموار در $x \in \mathbb{R}^n$ نامیده می شود اگر به طور موضعی پیوسته لیپشیتز باشد و برای هر $g \in \mathbb{R}^n$ حد زیر وجود داشته باشد،

$$\lim_{v \in \partial f(x + \alpha g'), g \rightarrow g', \alpha \rightarrow +0} \langle v, g \rangle.$$

قضیه ۴.۱. اگر سیستم

$$\langle v^i, g \rangle + \delta \leq 0, \quad i = 1, \dots, k, \quad g \in S_1. \quad (1)$$

قابل حل نبود آنگاه

$$\min_{v \in \bar{D}_k(x)} \|v\| < \delta. \quad (2)$$

ملاحظه ۵.۱. قضیه فوق نتیجه می دهد که اگر در گام دوم الگوریتم کاهش، سیستم

$$\langle v^i, g \rangle + \delta \leq 0, \quad i = 1, \dots, k, \quad g \in S_1$$

قابل حل نبود آنگاه نقطه $x \in \mathbb{R}^n$ را می توان به صورت جواب تقریبی در نظر گرفت.

گزاره ۶.۱. اگر

$$\min_{v \in \bar{D}_k(x)} \|v\| < \delta$$

صدق کند آنگاه سیستم

$$\langle v^i, g \rangle + \delta \leq 0, \quad i = 1, \dots, k, \quad g \in S_1$$

قابل حل نیست.

لم ۷.۱. اگر f یک تابع به طور موضعی لیپ شیتز روی \mathbb{R}^n باشد آنگاه در الگوریتم جهت کاهش شرط توقف بعد از تعداد متناهی از گام ها صدق خواهد کرد.

نتیجه ۸.۱. تابع $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ، بنابر قضیه کانتروویچ تقریباً همه جا مشتق پذیر است، در نتیجه اندازه نقاط غیرمشتق پذیر آن برابر صفر است.



۲ نتایج اصلی

گرادیان گسسته نمونه‌ای از تفاضلات متناهی برای تخمین زیرگرادیان‌ها است. از طرفی گرادیان گسسته نسبت به یک جهت تعریف می‌شود و این موجب می‌گردد که یک الگوریتم کارا برای محاسبه جهت شدنی برای یک تابع به دست آورد. البته می‌توان با استفاده از زیرگرادیان‌ها تخمینی برای ابر مشتقات یافت که فقط از دیدگاه نظری قابل اهمیت‌اند. برای محاسبه جهت شدنی برای یک نقطه داده شده فقط به محاسبه تعدادی از زیرگرادیان‌ها در آن نقطه نیاز است و نشان داده می‌شود که این محاسبات متناهی‌اند.

برای مطالعه بهینه‌سازی توابع لیپ‌شیتز نیاز به پیوستگی نگاشت زیرمشتقات و شبه مشتقات است. با استفاده از روش گرادیان گسسته یک تقریب پیوسته برای ابرمشتقات و شبه مشتقات ارائه شده است.

سپس با استفاده از تقریب‌های پیوسته برای زیرمشتقات و ابرمشتقات، روش‌های عددی برای حل مسایل مختلف کمینه سازی ناهموار به کار برده شده است، این روش‌ها به دسته‌ای از روش‌های بهینه‌سازی مرتبط هستند که بدون استفاده از مشتق به محاسبه نقطه بهینه تابع می‌پردازند.

Ω_f را مجموعه نقاط مشتق‌پذیر تابع f در نظر می‌گیریم. بنابراین داریم:

$$\partial f(x) = \bigcap_{\delta > 0} \overline{\text{con}}(f(\Omega_f \cap S_\delta(x)))$$

بر اساس معادله فوق به ازای نقاط x_1, x_2, \dots, x_k در یک همسایگی x مجموعه نقاط زیر می‌تواند یک تقریب خوب برای $\partial f(x)$ باشد

$$C_k = \overline{\text{con}}\{\nabla f(x_i) : i = 1, 2, \dots, k\}.$$

این تقریب اساس کار الگوریتم گرادیان گسسته است. مجموعه نقاط $M = \{x : f(x) \leq f(x_0)\}$ به ازای یک $x_0 \in \mathbb{R}^n$ کراندار باشد و تابع f بر روی یک مجموعه باز چگال D در دامنه خود مشتق‌پذیر باشد. حال اگر n بعد مساله باشد آنگاه $2n$ نقطه در همسایگی x تولید می‌شود. چون f بر روی یک مجموعه باز و چگال به صورت پیوسته مشتق‌پذیر است پس با احتمال یک در این نقاط تولید شده مشتق‌پذیر است. در نتیجه مجموعه زیر با احتمال یک، تقریبی مناسب برای است

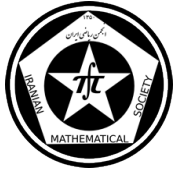
$$C_k = \overline{\text{con}}\{\nabla f(x_i) : i = 1, 2, \dots, 2n\}.$$

جدول ۱: نتایج به دست آمده از روش گرادیان گسسته

n	x^*	f^*
۲	(-۰/۰۰۰۰۷۷۳, ۰/۰۰۰۰۴۲۶)	۰/۰۰۰۰۱
۳	(۰/۰۰۰۰۲, ۰/۰, ۰/۰ ۱۸۵)	-۰/۰۰۰۰۱
۲	(-۰/۰۰۰۰۱۳۰۸, -۰/۰۰۰۰۱۳۰۸)	۰/۰۰۰۰۵۵۸

سپاس‌گزاری

سپاس و تشکر فراوان از استاد بزرگوام جناب آقای دکتر اکبر هاشمی برزآبادی که در این سال‌ها با راهنمایی‌های بی‌دریغ‌شان بسیاری از سختی‌ها را برایم آسان نمودند.

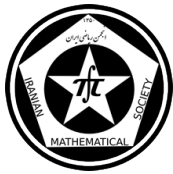


از استاد گرامی ام جناب آقای دکتر محمد رضا ضرابی و جناب آقای دکتر علی اکبرنیا صمیمانه سپاس گذارم که مرا صمیمانه و مشفقانه یاری دادند.

References

- [1] A. Bagirov, G. Nazari, *An approximate subgradient algorithm for unconstrained nonsmooth, nonconvex optimization*, (2008), pp. 187-206.
- [2] A. M. Bagirov, *Minimization methods for one class of nonsmooth functions and calculation of semiequilibrium prices*, In A. Eberhard et al. (eds.) *progress in optimization: contribution from Australasia*, Kluwer Academic publishers, (1999), pp. 147-175.
- [3] F. Plastria, *Lower subdifferentiable functions and their minimization by cutting planes*, J. Optim. Theory Appl. (1985), 46, pp. 37-53.
- [4] L. Luksan, J. Vlcek, *Test Problem for Nonsmooth Unconstrained and Linearly Constrained Optimization*, Technical Report, Institute of Computer Science, Academy of Sciences of the Czech Republic, No. 78, 2000.
- [5] M. Avriel, *Nonlinear programming, analysis and methods*. Dover, New York, 2003.

پست الکترونیکی: MaryamTaati1@gmail.com
پست الکترونیکی: AliAkbarnia52@yahoo.com
پست الکترونیکی: MZarrabi@du.ac.ir



قضیه گاوس-لوکاس و کاربرد آن در کنترل

سید مهدی کرباسی
دانشگاه یزد

نسیم قلاوند*
دانشگاه یزد

چکیده

در این پژوهش ابتدا قضیه گاوس-لوکاس را بیان می‌کنیم و سپس نشان می‌دهیم که چگونه قضیه گاوس-لوکاس می‌تواند در تعیین کنترل‌گرهای پایدار برای سیستم‌های کنترلی پس‌خوردی به‌کار برده شود. ارائه دو مثال درستی قضیه گاوس-لوکاس را به نمایش می‌گذارد.

واژه‌های کلیدی: قضیه گاوس-لوکاس، طراحی کنترل‌گر، سیستم‌های پس‌خورد حالت.

Mathematics Subject Classification [2010]: 93D15

۱ مقدمه

در نظریه سیستم‌های خطی، مساله ترکیب کنترل‌گرها، اغلب موجب سادگی در پیدا کردن یک مجموعه از پارامترهای کنترل‌گرها می‌شود که پایداری چندجمله‌ای مشخصه را اطمینان می‌بخشند. چندجمله‌ای‌های مشخصه نقش مهمی در تجزیه و تحلیل و طراحی سیستم کنترل دارند. موضوع این پژوهش یکی از موضوعاتی است که در ریاضیات و نیز در زمینه سیستم‌های کنترل، به خوبی مورد مطالعه قرار گرفته است. در این پژوهش، برای به دست آوردن کران پایداری و عملکرد سیستم‌های کنترل، با استفاده از قضیه گاوس-لوکاس، روابط بین ریشه‌های یک چندجمله‌ای و ریشه‌های مشتق آن را که غالباً پیچیده است، به شکل ساده‌تری تجزیه و تحلیل می‌کنیم و از این قضیه، نتایجی برای پایداری و عملکرد سیستم‌های حلقه بسته به دست می‌آوریم.

۲ قضیه گاوس-لوکاس

قضیه ۱.۲. (قضیه گاوس-لوکاس)^۱: فرض کنید $f(z)$ یک چندجمله‌ای با ضرایب حقیقی یا مختلط باشد. همه‌ی صفرهای $f'(z)$ در پوسته محدب از مجموعه صفرهای $f(z)$ قرار دارند. اگر صفرهای $f(z)$ در یک امتداد نباشند، آن‌گاه هیچ یک از صفرهای $f'(z)$ در مرز H قرار نمی‌گیرند، مگر آن‌که صفرهای $f(z)$ ، تکراری باشند.

تعریف ۲.۲. سیستم کنترل، مجموعه‌ای از دستگاه‌های کنترل هماهنگ بوده که باعث می‌شود یک سری از عملیات تحقق پذیرند؛ به عبارت دیگر، سیستم کنترل سیستمی است که خروجی مطلوب، به وسیله‌ی عملیات بر روی ورودی‌های سیستم حاصل می‌شود. سیستم‌های کنترل به لحاظ ساختار، به دو دسته تقسیم می‌شوند: ۱- سیستم کنترل حلقه باز ۲- سیستم کنترل حلقه بسته. در این مقاله بحث خود را پیرامون سیستم‌های کنترل حلقه بسته معطوف می‌کنیم.

تعریف ۳.۲. به فرایند برگشت برخی از متغیرهای کنترل شونده (خروجی) به ورودی، پس‌خورد^۲ گویند.

* سخنران

^۱Gauss-Lucas

^۲feedback



۳ استفاده در سیستم‌های کنترل

شکل کلی سیستم‌های کنترل که در این پژوهش مورد استفاده قرار می‌گیرد به صورت زیر است:

$$G_o(s, x) = \frac{n(s, x)}{d(s, x)} \quad (۱)$$

که در آن $n(s, x)$ و $d(s, x)$ به ترتیب چندجمله‌ای‌هایی از درجه m و n ($n \geq m$)، و با ضرایب حقیقی هستند و بردار x یک بردار پارامتری حقیقی است. چندجمله‌ای مشخصه سیستم حلقه بسته $S_o(x)$ به صورت زیر در نظر گرفته می‌شود:

$$p(s, x) = d(s, x) + n(s, x) \quad (۲)$$

و $S_o(x)$ پایدار گفته می‌شود اگر تمامی ریشه‌ها در (۲) درون مجموعه محدب باز \mathbb{C} که نشان دهنده ناحیه پایداری است، قرار گیرند.

فرض کنید $n^i(s, x)$ ، $d^i(s, x)$ ، $G_i(s, x)$ و $S_i(x)$ به صورت زیر تعریف شوند:

$$n^i(s, x) = \begin{cases} \frac{d^i n(s, x)}{ds^i} & , \text{ for } i = 1, 2, \dots, m \\ 1 & , \text{ for } i = m + 1, \dots, n - 1 \end{cases}$$

$$d^i(s, x) = \begin{cases} \frac{d^i d(s, x)}{ds^i} & , \text{ for } i = 1, 2, \dots, m \\ \frac{d^i d(s, x)}{ds^i} - 1 & , \text{ for } i = m + 1, \dots, n - 1 \end{cases}$$

$$G_i(s, x) = \frac{n^i(s, x)}{d_i(s, x)} , \text{ for } i = 1, 2, \dots, n - 1$$

و فرض کنید χ_i مجموعه‌ی پارامترهای پایداریکننده $S_i(x)$ که $i=0, 1, 2, \dots, n-1$ ، را نشان دهد.

قضیه ۱.۳. الف) $S_o(x)$ پایدار است اگر $S_i(x)$ ها، $i=1, 2, \dots, n-1$ ، پایدار باشند.

ب) مجموعه‌های پایداریکننده χ_i ، $i=1, 2, \dots, n-1$ ، در رابطه زیر صدق می‌کنند:

$$\chi_0 \subset \chi_1 \subset \chi_2 \subset \dots \subset \chi_{n-1}. \quad (۳)$$

ج) ناحیه‌ی ایجاد شده‌ی $S_o(x)$ توسط ناحیه‌های فازی ایجاد شده $S_i(x)$ که $i=1, 2, \dots, n-1$ ، از بالا کراندار است.

د) ناحیه‌ی فازی ایجاد شده‌ی $S_o(x)$ توسط ناحیه‌های فازی ایجاد شده $S_i(x)$ که $i=1, 2, \dots, n-1$ ، از بالا کراندار است.

اثبات. اثبات بندهای الف) و ب) مستقیماً از قضیه‌ی گاوس-لوکاس و محدب بودن \mathbb{C} نتیجه می‌شود و اثبات بندهای

ج) و د) با بکار بردن قضیه‌ی گاوس-لوکاس به ترتیب در زیر نتیجه می‌شود.

$$d(s, x) + Kn(s, x) \quad (۴)$$

و

$$d(s, x) + e^{-j\theta}n(s, x) \quad (۵)$$

□



در ادامه‌ی این مقاله برخی از کاربردهای این نتیجه را برای سیستم‌های کنترل با ذکر مثال بیان می‌کنیم.

مثال ۲.۳. یک سیستم با دستگاهی به صورت زیر در نظر بگیرید:

$$P(s) = \frac{s^3 + 6s^2 - 2s + 1}{s^5 + 3s^4 + 29s^3 + 15s^2 - 3s + 60} \quad (6)$$

و یک کنترل‌گر بصورت

$$C(s) = \frac{sk_p + k_i}{s}$$

در این صورت

$$p(s) = s^6 + 3s^5 + (k_p + 29)s^4 + (k_i + 6k_p + 15)s^3 + (6k_i - 2k_p - 3)s^2 + (k_p - 2k_i + 60)s + k_i$$

چند جمله‌ای‌های مشتق اول و دوم آن به صورت زیر هستند:

$$p'(s) = s^5 + \frac{5}{6}s^4 + \left(\frac{2}{3}k_p + \frac{58}{3}\right)s^3 + \left(\frac{1}{6}k_i + 3k_p + \frac{15}{6}\right)s^2 + (2k_i - \frac{2}{3}k_p - 1)s - \frac{1}{3}k_i + 116k_p$$

$$p''(s) = s^4 + 2s^3 + \left(\frac{2}{5}k_p + \frac{58}{5}\right)s^2 + \left(\frac{1}{5}k_i + \frac{6}{5}k_p + 3\right)s + \frac{2}{5}k_i - \frac{2}{15}k_p - \frac{1}{5}$$

در شکل ۱ مجموعه پارامترهای پایدارکننده نشان داده شده است.

در مثال زیر کاربرد قضیه‌ی گاوس لوکاس نشان داده شده است.

مثال ۳.۳. سیستم پس‌خورد و دستگاه زیر را در نظر بگیرید:

$$P(s) = \frac{1}{s^5 + s^4 + s^3 + 5s^2 + s + 1} \quad (7)$$

می‌خواهیم بررسی کنیم که آیا دستگاه داده شده توسط یک کنترل‌گر PID بصورت زیر پایدار می‌باشد.

$$C(s) = \frac{k_d s^2 + k_p s + k_i}{s} \quad (8)$$

قضیه گاوس-لوکاس را برای چند جمله‌ای مشخصه سیستم حلقه بسته به کار می‌بریم.

$$p(s) = s^6 + s^5 + 5s^4 + (1 + k_d)s^3 + (1 + k_p)s + k_i$$

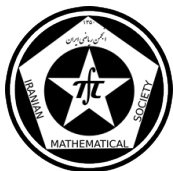
و مشتقات متوالی آن:

$$p'(s) = 6s^5 + 5s^4 + 4s^3 + 15s^2 + 2(1 + k_d)s + (1 + k_p) \quad (9)$$

$$p''(s) = 30s^4 + 20s^3 + 12s^2 + 30s + 2(1 + k_d) \quad (10)$$

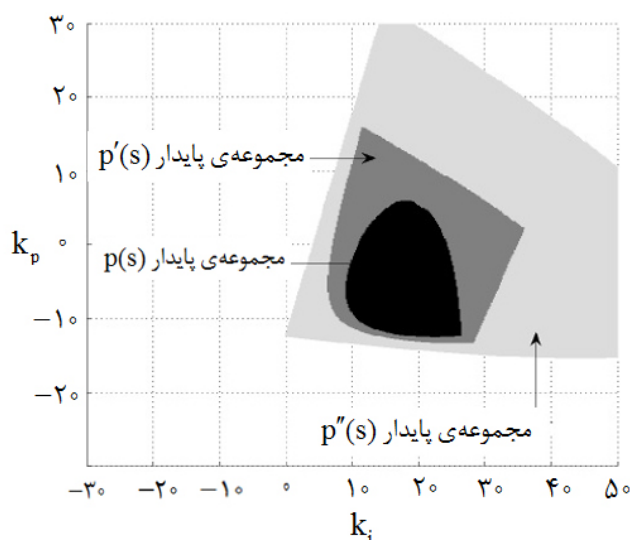
$$p'''(s) = 120s^3 + 60s^2 + 24s + 30 \quad (11)$$

این نشان می‌دهد که $p'''(s)$ فاقد پارامتر است و طبق معیار هورویتز پایدار نیست بنابراین سیستم داده شده یک سیستم پس‌خورد پایدار نیست.



۴ نتیجه‌گیری:

در این پژوهش بررسی پایداری و عملکرد سیستم پس خورد را با استفاده از قضیه‌ی گاوس-لوکاس بیان کردیم و با ذکر دو مثال کاربرد قضیه‌ی گاوس-لوکاس را نشان دادیم. کاربرد قضیه‌ی گاوس-لوکاس در سیستم‌های کنترل خطی با دیرکرد زمانی موضوع تحقیق بعدی است.

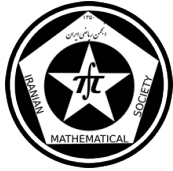


شکل ۱: مجموعه‌ی پایدار مثال ۱

مراجع

- [1] J.V. Burk, A.S. Lewis, M.L. Overton, *Variational Analysis of the Abscissa Mapping for Polynomials via the Gauss-Lucas Theorem*, 28 (2004), pp. 259–268
- [2] A.W Goodman, *Remarks on the Gauss-Lucas Theorem in higher dimensional Space*, Proceedings of the American Mathematical Society, 55 (1) (1976), pp. 97–102.
- [3] M.J .Knap, L.H. Keel, S.P. Bhattacharyya, *Controller Design and Gauss-Lucas Theorem*, *IEEE Transactions on Automatic Control*, 58(11) (2013), pp. 2940–2944.
- [4] K. Ogata, *Modern Control Engineering*, 4th ed., J Prentice Hall, 2002.

پست الکترونیکی: smkarbassi@yazd.ac.ir
پست الکترونیکی: ghalavand.nasim@gmail.com



کاربرد داده‌های فازی در تحلیل پوششی داده‌ها

مدینه امیری*

دانشگاه پیام نور- واحد گناباد

سید یونس جلائی خادمی

دانشگاه پیام نور- مرکز مشهد

چکیده

در این مقاله با فرض ورودی‌ها و خروجی‌های معین یک مدل با داده‌های فازی تحت عنوان مدل اصلی DEA فازی (FGDEA) مورد بررسی قرار داده می‌شود. تحلیل پوششی داده‌ها تکنیکی است کمی به منظور اندازه‌گیری کارایی نسبی از واحدهای سازمانی با ورودی‌ها و خروجی‌های متعدد با هدف دستیابی به کارایی نسبی واحدهای تصمیم‌گیری مشابه مورد استفاده قرار می‌گیرد. از آنجا که ورودی‌ها و خروجی‌های مدل فوق را به صورت اعداد فازی در نظر گرفتیم جوابهای حاصل از حل مدل دارای دقت بالاتری است و نتایج سود مندتری را ارائه می‌دهد البته این فرض به طور کلی صحیح نیست در این خصوص فرضیه نهفته در مدل اصلی این است که داده‌های مسأله شامل مقادیر قطعی است در حالی که این فرض در بسیاری موارد مخدوش است و داده‌ها فازی و غیردقیق هستند.

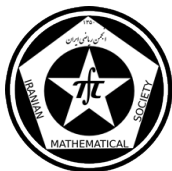
واژه‌های کلیدی: DEA، DEA فازی، GDEA فازی.

Mathematics Subject Classification [2010]: 13D45, 39B42

۱ پیش‌گفتار

منطق فازی در ابتدا به عنوان روشی برای پردازش اطلاعات معرفی شد که عضوهای یک مجموعه علاوه بر دو حالت قطعی عضو بودن و نبودن حالت بین این دو را نیز تعریف می‌کردند. مجموعه‌ای که در منطق ارسطویی دارای دو عضو صفر و یک است در منطق فازی به مجموعه‌ای با بینهایت عضو که دارای مقادیری از صفر تا یک هستند تبدیل می‌شود و بدین صورت منطق فازی به اعمال و طرز فکر آدمیان بیشتر نزدیک می‌شود. کاربرد اعداد فازی منحصر به ریاضیات فازی به معنای مصطلح نمی‌باشد اصولاً در هر زمینه‌ای که به جای کمیت‌های عددی دقیق با کمیت‌های غیردقیق سر و کار داریم. یکی از شاخه‌های علم آمار نظریه رگرسیون است در این نظریه مورد نظر آن است که بر اساس یک سری مشاهدات مجموعه‌ای رابطه ای بین متغیرهای مستقل و وابسته بیابیم روش‌های نظریه رگرسیون بر این پایه است که متغیرها و مشاهدات آنها کمیت‌های عددی دقیق هستند اما همیشه اینگونه نیست. در این حالات با کمیت‌های عددی غیردقیق مواجهیم که به صورت اعداد فازی صورت‌بندی کردیم در این زمینه اعداد فازی ابزار بسیار قوی در تحلیل رگرسیونی بر مبنای مشاهدات غیردقیق است.

* سخنران



۲ مدل DEA فازی

مدل CCR فازی و تبدیل آن به مدل FCCR مدل تحلیل پوششی زیر را در نظر بگیرید.

$$\begin{aligned} \max \quad & V_o^T \\ \text{s.t.} \quad & U_{i_o}^T = 1 \quad (FCCR_p) \\ & -U_{i_o}^T + V_o^T \\ & U, V \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{مدل (۱) min} \quad & (FCCR_p) \\ \text{s.t.} \quad & j_{ij} \quad i = 1, \dots, m \\ & j_{rj} \quad r = 1, \dots, s \\ & \lambda_j \quad j = 1, \dots, n \end{aligned}$$

i_j و r_j ورودیها و خروجیهای مدل هستند که به صورت اعداد فازی مثلثی در نظر گرفته ایم (m ورودی و r خروجی)

$$\begin{aligned} r_j &= (y_{rj}^l, y_{rj}^m, y_{rj}^u) \\ i_j &= (x_{ij}^l, x_{ij}^m, x_{ij}^u) \end{aligned}$$

که y_{rj}^l و x_{ij}^l حدود پایین و y_{rj}^u و x_{ij}^u حدود بالا و y_{rj}^m و x_{ij}^m حدود وسط را نمایندگی می کنند. در مدل (۱) مهمترین نکته این است که نا مساویها برای همه محدودیتها توجیهی از نامساویهای فازی هستند، بنابراین داریم:

$$\begin{aligned} \text{مدل (۲) min} \quad & \\ \text{s.t.} \quad & j_{ij} \quad i = 1, \dots, m \\ & j_{rj} \quad r = 1, \dots, s \\ & \lambda_j \quad j = 1, \dots, n \end{aligned}$$

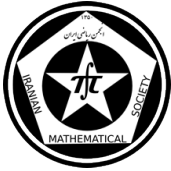
به طوری که

$$\begin{aligned} i_j &= i_j() + i_j()d \\ r_j &= r_j() + r_j()d \end{aligned}$$

۳ مدل خطی GDEA

مدل GDEA کارایی در برخی از مدل های اساسی در موارد خاص را ارزیابی می کند

$$\begin{aligned} \text{مدل (۳) max} \quad & \\ \text{s.t.} \quad & j + (r(y_{ro} - y_{rj}) + i(-x_{io} + x_{ij})) \quad j = 1, \dots, n \\ & r + i = 1 \quad i = 1, \dots, m, \quad r = 1, \dots, s \\ & u_r v_i \end{aligned}$$



که به طور خاص مطابق با مساله انتخاب می شود.

$$j = \max_{i,r} \{u_r(y_{ro} - y_{rj}), v_i(-x_{io} + x_{ij})\}$$

تعریف ۱.۳. به ازای عدد مثبت، DMU_o ، کارا است اگر و فقط اگر ارزش بهینه مدل GDEA برابر با صفر باشد. در غیر این صورت ناکارا است.

قضیه ۲.۳. DMU_o کارای BCC است اگر و فقط اگر DMU_o یک کارا باشد برای مقادیر به قدر کافی بزرگ.

۴ مدل با داده های فازی GDEA

max مدل (۴)

$$\begin{aligned} s.t \quad & o_r(r_o - r_j) + i(-i_o + i_j) \quad j = 1, \dots, n \\ & r + i = 1 \quad i = 1, \dots, m, \quad r = 1, \dots, s \\ & u_r v_i \end{aligned}$$

در مدل ۴ نامساوی ها از نوع فازی هستند حال با استفاده از قضیه ۲.۳، مدل ۴ را به مدل ۵ تبدیل می کنیم.

max مدل (۵)

$$\begin{aligned} s.t \quad & m(r(m(r_o) - m(r_j)) + i(-m(i_o) + m(i_j))), \quad j = 1, \dots, n \\ & r + i = 1, \quad i = 1, \dots, m, \quad r = 1, \dots, s \\ & u_r v_i \end{aligned}$$

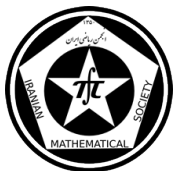
بنابراین مدل را به صورت زیر باز نویسی می کنیم.

max مدل (۶)

$$\begin{aligned} & (1/2) + ()d \\ s.t \quad & (1/2) + ()d + 1/2(r[r_o()] + r_o()d - \\ & r_j() + r_j()d) + 1/2(i[-i_o()] + i_o()d + i_j() + i_j()d) \\ & r + i = 1 \quad i = 1, \dots, m, \quad r = 1, \dots, s \\ & u_r v_i \end{aligned}$$

و متغیرها نیز بدین صورت تغییر می کنند

$$\begin{aligned} r_j &= 1/2 r_j() + r_j()d \\ i_j &= 1/2 i_j() + i_j()d \\ &= 1/2 + ()d \end{aligned}$$



در نتیجه ما داریم:

max مدل (۷)

$$s.t \quad \begin{aligned} r(ro-rj) + i(-io+ij) \quad j = 1, \dots, n \\ r+i = 1 \quad i = 1, \dots, m, \quad r = 1, \dots, s \\ u_r v_i \end{aligned}$$

با بکارگیری مدل های قبلی داریم:

max مدل (۸)

$$s.t \quad \begin{aligned} r(ro-rj) + i(-io+ij) \quad j = 1, \dots, n \\ r+i = 1 \quad i = 1, \dots, m, \quad r = 1, \dots, s \\ rro - iio = 0 \\ u_r v_i \end{aligned}$$

مراجع

- [1] Asadi, B. and A. Zendenam, 2007. *Ranking fuzzy number by distance minimization*. Applied Mathematical modeling.
- [2] Banker, R. D, A Charnes and W. W. Cooper, 1984. *Some models for estimating analysis*.
- [3] Deprins, D., L. Simar and H. Tulkens, 1984. *Measuring labor-efficiency in post offices*.
- [4] Farrell, M. J., 1957. *The measurement of productive efficiency*. Journal of the Royal Statistical Society, A.

پست الکترونیکی: amiri.math84@gmail.com

پست الکترونیکی: y.jalae@yahoo.com



کنترل بهینه معادلات انتگرال ولتراز طریق توابع مثلثی

علی دلاور خلفی
دانشگاه یزدعلی پورشرافتان جهرمی
دانشگاه یزدفرید حیدرپور*
دانشگاه یزد

چکیده

این مقاله یک روش تقریبی برای حل مسئله کنترل بهینه از معادلات انتگرال ولترا را ارائه می‌کند. این روش براساس توابع مثلثی متعامد می‌باشد. تخمین خطا و قضایای وابسته برای مسئله کنترل و تابع هدف آن اثبات گردیده است. در نهایت چند مثال عددی کارایی روش پیشنهادی را شرح می‌دهد.

واژه‌های کلیدی: مسئله کنترل بهینه، معادلات انتگرال ولترا، توابع مثلثی متعامد، تابع هدف.

۱. مقدمه

تکنیک‌های زیادی برای حل مسائل کنترل بهینه از طریق معادلات انتگرال ولترا وجود دارد. از میان همه آن‌ها، توابع متعامد در ارتباط با مسائل کنترل بهینه مورد توجه قرار گرفته‌اند. این مقاله بر وجود جواب مسئله کنترل بهینه برای یک دستگاه خطی با یک تابع هدف درجه دوم، متمرکز می‌شود. ما در این مقاله ویژگی ساختاری توابع مثلثی متعامد را برای تقلیل مسئله کنترل بهینه به یک مجموعه معادلات جبری توسعه می‌دهیم. ما این کار را با بسط دادن $x(t)$ و بردار کنترل $u(t)$ به صورت توابع متعامد مثلثی در یک روش مستقیم و بدون هیچ انتگرال‌گیری به دست می‌آوریم.

۲. تقریب مسئله کنترل بهینه ولترا

فرض کنید رفتار یک دستگاه در فضای اقلیدسی n -بعدی توسط یک دستگاه معادلات به شکل زیر توصیف شود،

$$x(t) = x_0(t) + \int_0^t K(t, s, x(s), u(s)) ds, \quad (1)$$

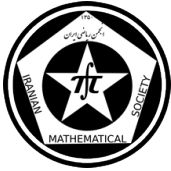
که در همسایگی هر کدام از نقاط مرزی، منظم باشد و $x(t) \in X \subseteq \mathbb{R}^n$ و $u(t) \in U \subset \mathbb{R}^n$ به ترتیب مسیر بهینه و کنترل بهینه می‌باشند. در معادله (۱) مسئله کنترل بهینه، هدف پیدا کردن کنترل $u(t)$ می‌باشد بطوریکه تابع هدف J مینیمم شود،

$$J = F_0(x(t)) + \int_{\Gamma} F(t, x(t), u(t)) dt. \quad (2)$$

می‌توانیم جواب‌های کنترل بهینه معادله (۱) را توسط یک روش عددی بر مبنای توابع مثلثی متعامد بدست آوریم. i امین مؤلفه از بردارهای $T_1(t)$ و $T_2(t)$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$T_{\setminus i}(x) = \begin{cases} 1 - \frac{t - ih}{h}, & ih \leq t < (i+1)h \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

* سخنران



$$T_{\nu i}(x) = \begin{cases} \frac{t-ih}{h}, & ih \leq t < (i+1)h \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

به طوری که $h = \frac{T}{m}$ و $i = 0, 1, 2, \dots, m-1$ می باشد. تقریب تابع $f(t)$ به صورت یک سری از توابع مثلثی از جمله m در $t \in [0, T]$ به صورت زیر است،

$$f(t) \simeq \sum_{i=0}^{m-1} (f_i T_{\nu i}(t) + f_{i+1} T_{\nu i}(t)) = F_1 \mathbf{T}_1(t) + F_2 \mathbf{T}_2(t). \quad (3)$$

که در آن

$$f_i = f(ih) \quad : \quad i = 0, 1, \dots, m \quad (4)$$

حال در معادله (۱) $x(t)$ و $u(t)$ را بر حسب توابع مثلثی متعامد بسط می دهیم،

$$\begin{aligned} x(t) &\simeq \sum_{i=0}^{m-1} (x_i T_{\nu i}(t) + x_{i+1} T_{\nu i}(t)) = X_1 \mathbf{T}_1(t) + X_2 \mathbf{T}_2(t), \\ u(t) &\simeq \sum_{i=0}^{m-1} (u_i T_{\nu i}(t) + u_{i+1} T_{\nu i}(t)) = U_1 \mathbf{T}_1(t) + U_2 \mathbf{T}_2(t). \end{aligned} \quad (5)$$

با استفاده از (۳) می توان $x_0(t)$ و $F_0(t)$ را بر حسب توابع مثلثی متعامد به صورت زیر بسط داد :

$$\begin{aligned} x_0(t) &\simeq \tilde{X}_0 \mathbf{T}_1(t) + \tilde{X}_0 \mathbf{T}_2(t), \\ F_0(t) &\simeq \sum_{i=0}^{m-1} (f_i T_{\nu i}(t) + f_{i+1} T_{\nu i}(t)) = F_1 \mathbf{T}_1(t) + F_2 \mathbf{T}_2(t). \end{aligned} \quad (6)$$

۳. جواب کنترل بهینه

با جایگذاری معادلات (۵) و (۶) در (۱) خواهیم داشت :

$$\begin{aligned} X_1 \mathbf{T}_1(t) + X_2 \mathbf{T}_2(t) &= \tilde{X}_0 \mathbf{T}_1(t) + \tilde{X}_0 \mathbf{T}_2(t) + \int_0^t K(t, s, X_1 \mathbf{T}_1(s) + X_2 \mathbf{T}_2(s), U_1 \mathbf{T}_1(s) + U_2 \mathbf{T}_2(s)) ds \\ J &= F_0(X_1 \mathbf{T}_1(t) + X_2 \mathbf{T}_2(t)) + \int_{\Gamma} F(t, X_1 \mathbf{T}_1(t) + X_2 \mathbf{T}_2(t), U_1 \mathbf{T}_1(t) + U_2 \mathbf{T}_2(t)) dt. \end{aligned} \quad (7)$$

مسئله کنترل این است که X و U را طوری بیابیم که $J(X, U)$ به شرط محدودیت زیر مینیمم شود،

$$\Phi^*(X, U) = [\Phi_1^*(X, U), \Phi_2^*(X, U)]^T$$

فرض کنید

$$J^*(X, U, \lambda) = J(X, U) + \lambda_1^T \Phi_1^*(X, U) + \lambda_2^T \Phi_2^*(X, U) \quad (8)$$



شرایط لازم برای مینیم شدن به ازای $i = 1, 2$ عبارتند از:

$$\frac{\partial J^*}{\partial X_i} = 0, \quad \frac{\partial J^*}{\partial U_i} = 0, \quad \frac{\partial J^*}{\partial \lambda_i} = 0 \quad (9)$$

یک دستگاه $6m$ معادله و $2m + 4$ مجهولی داریم پس در حالت کلی جواب ندارد. مطابق روابط (۷) در U_1, X_2, X_1 و U_2 جمعاً $2m - 2$ معادله وابسته خطی تکراری داریم. آنها را کنار گذاشته و دستگاه جدید را حل می‌کنیم تا ضرایب $\{x_i\}_{i=1}^m$ ، $\{\lambda_i\}_{i=1}^m$ و $\{u_i\}_{i=1}^m$ بدست آیند. بنابراین کنترل بهینه $u_m(t)$ و مسیر بهینه $x_t(t)$ در معادله (۱) حاصل خواهد شد.

۴. مثال عددی

مسئله مینیم سازی زیر را در نظر بگیرید:

$$J = \frac{1}{4} \int_0^1 [2x^2(t) + u^2(t)] dt, \quad \dot{x}(t) = -\frac{1}{4}x(t) + u(t), \quad x(0) = 1 \quad (10)$$

با اعمال روابط (۵) تا (۸) بر رابطه (۱۰) روابط زیر حاصل می‌شوند:

$$J = \frac{h}{4} [X_1 X_1^T + X_1 X_2^T + X_2 X_2^T] + \frac{h}{6} [U_1 U_1^T + U_1 U_2^T + U_2 U_2^T]. \quad (11)$$

$$\Phi_1^*(X_1, U_1) = X_1(I + \frac{1}{4}P_1) + \frac{1}{4}X_2P_1 - U_1P_1 - U_2P_1 - \tilde{X}_0 = 0,$$

$$\Phi_2^*(X_2, U_2) = \frac{1}{4}X_1P_2 + X_2(I + \frac{1}{4}P_2) - U_1P_2 - U_2P_2 - \tilde{X}_0 = 0. \quad (12)$$

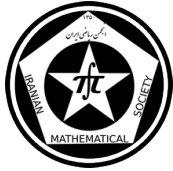
با حل دستگاه (۹) برای مثال فوق ضرایب برداری بدست می‌آیند. از کد متلب با بعد $m = 64$ استفاده کرده و نتایج را با جواب دقیق مسئله کنترل بهینه زیرمقایسه می‌کنیم که در جدول ۱ ارائه شده است.

$$x(t) = \frac{1}{4 + e^{-3}} (2e^{-\frac{3t}{4}} + e^{-3 + \frac{3t}{4}}),$$

$$u(t) = \frac{2}{4 + e^{-3}} (-e^{-\frac{3t}{4}} + e^{-3 + \frac{3t}{4}}) \quad 0 \leq t \leq 1$$

۵. نتیجه گیری

در این مقاله یک روش عددی ساده بر مبنای مجموعه توابع متعامد مثلثی ارائه شده است که مسائل کنترل بهینه را برای دستگاه‌های معادلات انتگرال ولترا حل می‌کند. نتایج بدست آمده توسط نرم افزار متلب، کارایی روش پیشنهادی را مطرح می‌کند.



t	x(t)		u(t)	
	Present	Exact	Present	Exact
۰	۱/۰۰۰۰۰۰۰	۱/۰۰۰۰۰۰۰	-۰/۹۱۵۲۳۲	-۰/۹۲۷۱۳۳
۰/۱	۰/۸۶۸۰۷۶	۰/۸۶۸۰۲۲	-۰/۷۸۱۲۹۵	-۰/۷۸۳۳۶۳
۰/۲	۰/۷۵۵۶۳۸	۰/۷۵۵۶۱۱	-۰/۶۶۲۸۳۴	-۰/۶۵۷۲۵۱
۰/۳	۰/۶۶۰۲۵۴	۰/۶۶۰۲۳۳	-۰/۵۴۱۰۷۶	-۰/۵۴۵۹۵۶
۰/۴	۰/۵۷۹۷۶۸	۰/۵۷۹۷۳۹	-۰/۴۴۸۴۴۳	-۰/۴۴۶۹۶۷

جدول ۱: نتایج عددی مثال ۱ با $m=64$

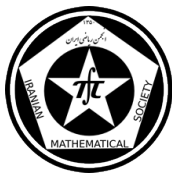
مراجع

- [1] K. Maleknejad, M. Hadizadeh, *A new computational method for Volterra–Fredholm integral equations*, Comput. Math. Appl. 37 (9) (1999) 1–8.
- [2] K. Maleknejad, S. Sohrabi, Y. Rostami, *Numerical solution of nonlinear Volterra integral equations of the second kind by using Chebyshev polynomials*, Appl. Math. Comput. 188 (2007) 123–128.
- [3] S.A. Belbas, *A new method for optimal control of Volterra integral equations*, Appl. Math. Comput. 189 (2007) 1902–1915.
- [4] N.G. Medlin, *Optimal processes governed by integral equations*, J. Math. Anal. Appl. 120 (1986) 1–12.

پست الکترونیکی: Dr.f.heidarpoor@gmail.com

پست الکترونیکی: Ali70.sherafat@gmail.com

پست الکترونیکی: Delavarkh@yazd.ac.ir



مدلی جدید در ارزیابی عملکرد در محیط نادقیق با شاخص قیمت تک نرخ

فرانک حسین زاده سلجوقی

عبدالناصر حسین بر*

دانشگاه سیستان و بلوچستان

دانشگاه سیستان و بلوچستان

چکیده

تحلیل پوششی داده ها تکنیکی برای تحلیل عملکرد و سنجش میزان کارایی نسبی واحد های تصمیم گیرنده با استفاده از برنامه ریزی خطی می باشد. مفهوم کارایی هزینه را، نسبت حداقل هزینه به هزینه های واقعی مشاهده شده که در آن قیمت های ورودی دقیقاً ثابت هستند تعریف می شود. در بازارهای رقابتی که قیمت های ورودی برای همه شرکت ها ثابت است کارایی هزینه تولید را تحت قانون تک نرخ مورد بررسی قرار می دهیم. تحمیل محدودیت های تک نرخ با حفظ مفروضات تولید و محدودیت های دیگر نیاز به یک چارچوب کافی و قابل انعطاف داریم. لذا از تکنولوژی پوسته دسترسی آزاد (FDH) که روشی غیر فراسنجشی با مرز قطعی است و هنگام سنجش کارایی هر امکان تولید، آن واحد تنها با یک واحد دیگر مقایسه می شود استفاده می کنیم. ولی در عمل داشتن قیمت های دقیق دشوار است و قیمت ها ممکن است در کوتاه مدت تغییر کند لذا برای تغییرات قیمت بازه ارائه کرده و با ارائه مدل بازه ای آن را مورد بررسی قرار می دهیم.

واژه های کلیدی: تحلیل پوششی داده ها، قانون تک نرخ، کارایی هزینه

Mathematics Subject Classification [2010]: 13D45, 39B42

۱ مقدمه

فارل (۱۹۵۷) اولین بار برای تخمین کارایی، روش غیر پارامتری را مطرح کرد. او به جای حدس تابع با استفاده از مشاهدات ورودی و خروجی ها مرز کارایی را تعریف کرد و با استفاده از روابط ریاضی ملاک دور افتادگی واحد تصمیم گیرنده از مرز مذکور را به عنوان کارایی آن واحد اندازه گیری نمود. چارنز و کوپر (۱۹۷۸) با معرفی مدل CCR که براساس مدل های ریاضی توسعه یافته بودند را به عنوان تحلیل پوششی داده معرفی کردند. بنکر، چانز و کوپر (۱۹۸۴) مدل قبلی را تعمیم داده و به عنوان مدل BCC معرفی کردند. دیپیرین و سیمار (۱۹۸۴) مدل های FDH را با مرز قطعی ابداع کردند. تامپسون و همکارانش (۱۹۹۷) بازده هزینه را، حداقل نسبت هزینه به هزینه های واقعی تعریف کردند. دایسون و همکارانش (۲۰۰۵) نشان دادند که قیمت ها در کوتاه مدت تفسیر می کند. بنابراین ارائه قیمت دشوار است. فانگ و همکارانش (۲۰۱۵) هزینه بهره وری در تحلیل پوششی داده ها را تحت عنوان قانون تک نرخ مورد بررسی قرار دادند. با توجه به آن که قیمت ورودی و خروجی کالاها در کوتاه مدت دچار تغییر می شود لذا مدل بازه ای را ارائه می کنیم.

۲ ارزیابی عملکرد در شرایط تک نرخ بودن قیمت

تحمیل محدودیت های تک نرخ حالتی است که تمام بنگاه ها با قیمت های ورودی و خروجی یکسان در بازارهای رقابتی با آن روبرو هستند.

* سخنران



تعریف ۱.۲. زمانی اقتصاد به یک حالت تعادل می رسد که قیمت کالا های همگن در برخی از سطوح پذیرفته شده، تثبیت می شود که در آن هیچ عامل اقتصادی تمایل به معاملات بیشتر ندارد. شرکت ها در تجارت یکسان، ورودی ها و خروجی ها را در برابر قیمت های منحصر به فرد به کار می گیرند که از آن به عنوان (LoOP) یاد می شود.

۳ مدل ترزیتی کارایی با شاخص قیمت ثابت

فرض کنید یک موسسه از n واحد تصمیم گیری تشکیل شده باشد:

$$(X_o) = (X_{o1}, \dots, X_{om}) \text{ (ورودی)} \longrightarrow Y_o = (Y_{o1}, \dots, Y_{os}) \text{ (خروجی)}$$

اگر ارائه روش شامل بازه به مقیاس ثابت برای تمام DMU ها تحت تکنولوژی مشابه باشد [۱] در این در این صورت مدل کارایی هزینه موسسه به شکل زیر است:

$$\begin{aligned} & \text{Max } C \\ & \text{s.t. } C \leq \sum_{r=1}^s \eta_r P_{or} \quad o = 1, \dots, n \\ & \sum_{r=1}^s y_{or} P_{or} - \sum_{i=1}^m X_{oi} w_i \leq 0 \quad o = 1, \dots, n \\ & \sum_{i=1}^m X_{oi} w_i = 1 \\ & w \in W \end{aligned} \quad (1)$$

که در آن $(X, \eta) = (\sum_{j=1}^n X_j, \sum_{j=1}^n \eta_j)$ ترکیبی از مجموع ورودی ها و خروجی های صنعتی است و P_{js} نشان دهنده قیمت سایه های خروجی s برای DMU_o و $W = \{w \in R_+^m | AW' \geq b\}$ نشان دهنده مجموعه چند وجهی محدب برای دامنه قیمت ورودی است. A یک ماتریس $L \times R$ و b یک بردار L بعدی است و محدودیت سوم تضمین می کند. قیمت ورودی مطابق $LoOP$ است. اگر ورودی ها و خروجی ها بازه ای باشند داریم:

$$[x_o^L, x_o^R] = ([x_{o1}^L, x_{o1}^R], \dots, [x_{om}^L, x_{om}^R]) \longrightarrow [y_o^L, y_o^R] = ([y_{o1}^L, y_{o1}^R], \dots, [y_{os}^L, y_{os}^R])$$

و مدل به صورت زیر است:

$$\begin{aligned} & \text{Max } [C^L, C^R] \\ & \text{s.t. } [C^L, C^R] \leq \sum_{r=1}^s \eta_r P_{or} \\ & \sum_{r=1}^s [y_{or}^L, y_{or}^R] P_{or} - \sum_{i=1}^m [X_{io}^L, X_{io}^R] w_i \leq 0 \quad (2) \\ & \sum_{i=1}^m [X_{io}^L, X_{io}^R] w_i = 1 \\ & w \in W \end{aligned}$$

از حل مدل (۲) در بهترین و بدترین حالت $[C^{*L}, C^{*R}]$ مقدار بهینه به دست می آید و w_i^* مقدار بهینه قیمت سایه ای ورودی برای به حداکثر رساندن کارایی هزینه موسسه می باشد. می توانیم از مقدار بهینه قیمت سایه ای ورودی استفاده کنیم



ولی چون مقدار این مقدار منحصر به فرد نیست لذا مدل های DEA را در دو حالت خوش بینانه و بدبینانه برای به دست آوردن بازه بالا و پایین از کارایی هزینه برای هر شرکت توسعه می دهیم.
مدل خوش بینانه

$$Max \ c_o$$

$$s.t. \ c^* \sum_{i=1}^m X_i w_i \leq \sum_{r=1}^s \eta_r P_{jr} \quad j = 1, \dots, n$$

$$c_o \leq \sum_{r=1}^s y_{or} P_{jr} \quad j = 1, \dots, n$$

$$\sum_{r=1}^s y_{jr} P_{jr} - \sum_{i=1}^m X_{ji} w_i \leq 0, \quad j = 1, \dots, n \quad (3)$$

$$\sum_{i=1}^m X_{oi} w_i = 1$$

$$P_j \in R_+^s$$

$$w \in W$$

که در آن $c^* = c^{*L} + t(c^{*R} - c^{*L})$ ، $x_{ij} = x_{ij}^L + t_j(x_{ij}^R - x_{ij}^L)$ و $y_{rj} = y_{rj}^L + t_j(y_{rj}^R - y_{rj}^L)$ ، $j = 1, \dots, n$ می باشند.

در مدل (۳)، P_j بردار هزینه سایه ای خروجی برای j تا DMU است که مطلوب ترین بازه قیمت از میان قیمت های سایه ای ورودی از مدل (۲) برای ارزیابی DMU_o است که می توانیم از آن به عنوان یک بازه بالا برای ارزیابی کارایی هزینه DMU_o استفاده کنیم.

قضیه ۱.۳. اگر P_{jr}^* ($j = 1, \dots, n, r = 1, \dots, s$) و w_i^* ($i = 1, \dots, m$) جواب بهینه مدل (۳) باشند آنگاه کارایی هزینه صنعتی متناظر با قیمت سایه ای بهینه برابر c^* است. [۱]

می توانیم ماکسیم c_o را وقتی که W_i و P_{jr} ثابت هستند به دست آوریم. هدف ما پیدا کردن ماکسیم و مینیم c_j است. بنابراین مدل بد بینانه که یک مسئله برنامه ریزی دو ترازه است برای به دست آوردن کران پایین کارایی هزینه به کاربرد و تعمیم آن به مدل بازه ای، یک بازه پایین کارایی هزینه برای DMU_j با مدل زیر به دست می آید:

$$Min \ c_o$$

$$s.t. \ c^* \sum_{i=1}^m X_i w_i \leq \sum_{r=1}^s \eta_r P_{jr} \quad j = 1, \dots, n$$

$$Max \ c_o$$

$$s.t. \ c_o \leq \sum_{r=1}^s y_{or} P_{jr} \quad j = 1, \dots, n$$

$$\sum_{r=1}^s y_{jr} P_{jr} - \sum_{i=1}^m X_{ji} w_i \leq 0, \quad j = 1, \dots, n \quad (4)$$

$$\sum_{i=1}^m X_{oi} w_i = 1$$

$$P_j \in R_+^s$$

$$w \in W$$



که برای حل آن از مدل زیر ارائه می گردد

$$\begin{aligned}
 & Min \ c_o \\
 & s.t. \ c^* \sum_{i=1}^m X_i w_i \leq \sum_{r=1}^s \eta_r P_{jr} \quad j = 1, \dots, n \\
 & \quad \sum_{j=1}^n \mu_j = 1 \\
 & \quad \sum_{j=1}^n y_{rj} \lambda_{rj} - \sum_{j=1}^n y_{ro} \lambda_{rj} \geq 0, \quad r = 1, \dots, s \\
 & \quad x_{oi} \theta_o - \sum_{j=1}^n X_{ij} \lambda_j \geq 0, \quad i = 1, \dots, m \\
 & \quad P_j \in R_+^s \\
 & \quad w \in W \\
 & \quad \mu_j \geq 0, \lambda_j \geq 0, \theta \text{ آزاد در علامت}
 \end{aligned} \tag{5}$$

۴ نتایج اصلی

تحلیل محدودیت های تک نرخه حالتی است که تمام بنگاه ها با قیمت های ورودی یکسان با آن مواجه هستند که با اعمال آن ها در مدل های DEA و استفاده از مدل FDH برای تحلیل محدودیت تک نرخه و توسعه آن به یک مدل برنامه ریزی بازه ای پرداختیم و برای کارایی هزینه هر بنگاه یک بازه بالا و پایین از کارایی هزینه در حالی که کارایی هزینه موسسه در مقدار مطلوب آن است به دست می آوریم و با مدل بازه ای می توانیم عملکرد بنگاه ها را تحت محدودیت تک نرخی برای داده های نادقیق ارزیابی کنیم و با توجه به تغییرات قیمت در کوتاه مدت می توان از آن در ارزیابی عملکرد بنگاه ها در دراز مدت استفاده کرد.

مراجع

- [1] Fang, L., *Cost efficiency in data envelopment analysis under the law of one price*, European journal of operational research, 240 (2015), pp. 488-492.
- [2] Fang, L., *Lower bound of cost efficiency measur in DEA with incomplete price information*, journal of productivity anlysis, 40 (2013), pp.219-226.
- [3] Bhurjee, A.K. , *Efficient solution of interval optimization problem*, math meth oper res, 76 (2012), pp.273-288.

پست الکترونیکی: f_h_saljooghi@yahoo.com
پست الکترونیکی: n_hosseinbor@yahoo.com



مدل دو مرحله‌ای تحلیل پوششی داده‌های شبکه‌ای با ورودی‌های مشترک و مقادیر میانی بهینه‌سازی شده

هدی گلشنی*

هادی باقرزاده ولمی

دانشگاه آزاد اسلامی واحد یادگار امام (ره) شهر ری، تهران

دانشگاه آزاد اسلامی واحد یادگار امام (ره) شهر ری، تهران

چکیده

تحلیل پوششی داده‌ها یک روش غیر پارامتری مبتنی بر برنامه‌ریزی خطی برای ارزیابی عملکرد واحدهای تصمیم‌گیرنده است. مدل‌های سنتی DEA به ساختارهای درونی و مقادیر میانی توجهی ندارند. مدل‌های تحلیل پوششی داده‌های شبکه‌ای با لحاظ نمودن مقادیر میانی، این نقص را برطرف کردند. از آن‌جا که مقادیر میانی نقش بسیار مهمی در ساختارهای شبکه‌ای دارند در این مقاله یک مدل رابطه‌ای دو مرحله‌ای برای محاسبه‌ی کارایی کلی سیستم مطرح می‌گردد که بر اساس مدل‌های تراکم در ورودی به بهینه‌سازی مقادیر میانی برای واحدهای ناکارا می‌پردازد. مقادیر بهینه‌سازی شده میانی در مدل مطرح شده لحاظ و بدین طریق منجر به بهبود مقدار کارایی سراسری سیستم می‌گردد.

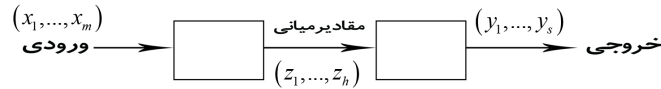
واژه‌های کلیدی: تحلیل پوششی داده‌های شبکه‌ای (NDEA)، مقادیر میانی، تراکم، کارایی

Mathematics Subject Classification [2010]: 13D45, 39B42

۱ مقدمه

در بخش مقدمه مقاله ابتدا به معرفی NDEA و برخی مفاهیم مرتبط با آن و سپس همچنین به معرفی مختصر پدیده‌ی تراکم پرداخته می‌شود. تحلیل پوششی داده‌ها DEA یک روش برنامه‌ریزی خطی غیر پارامتری می‌باشد که به ارزیابی عملکرد واحدهای متجانس می‌پردازد که نخستین بار در سال ۱۹۷۸ توسط چارلز با فرض بازده به مقیاس ثابت مطرح گردید و سپس در سال ۱۹۸۴ توسط بنکر با فرض بازده به مقیاس متغیر جامعیت بخشیده شد. تحلیل پوششی داده‌های سنتی با هر سیستم به‌عنوان یک جعبه‌ی سیاه برخورد می‌کند بدین معنی که ورودی‌ها و خروجی‌ها برای محاسبه‌ی کارایی کل سیستم لحاظ می‌گردند و به فرآیندهای درونی آن‌ها هیچ توجهی نمی‌شوند حال آن‌که در ساختارهای درونی بسیاری از سیستم‌ها مقادیر میانی وجود دارند که ورودی‌های یک مرحله و خروجی‌های مرحله‌ی دیگر می‌باشند و وجه تمایز دیدگاه سنتی و شبکه‌ای می‌باشد. نخستین بار فار و گروسکویف در سال ۲۰۰۰ این دیدگاه را مطرح نمودند [۲]. ساختار ارتباطی زیرواحدها در یک DMU می‌تواند ساده یا پیچیده باشد ولی ارتباط دو مرحله‌ای که در این مقاله مورد توجه قرار گرفته است به‌عنوان یک ارتباط پایه‌ای در تمام ساختارهای شبکه همواره مورد توجه بوده است و بسیاری از خواص موجود در بحث کارایی شبکه‌ای را می‌توان از تعمیم مفهوم در این رابطه به‌دست آورد. دو روش اصلی در فرآیندهای دو مرحله‌ای مدل‌های NDEA وجود دارد که عبارت است از مدل‌های مستقل و رابطه‌ای. وجه تمایز این مدل‌ها در نحوه‌ی رویارویی و وزن‌دهی با مقادیر میانی می‌باشد. در مدل‌های مستقل هر مرحله به‌طور مستقل ارزیابی می‌گردد و مقادیر میانی به‌عنوان یک خروجی مرحله اول و ورودی مرحله دوم می‌باشد، ضمن این‌که برای مقادیر میانی وزن‌های متفاوت در نظر گرفته می‌شود حال آن‌که در مدل‌های رابطه‌ای یک وزن یکسان برای مقادیر میانی در نظر گرفته می‌شود [۴].

* سخنران



شکل ۱: ساختار دو مرحله‌ای NDEA

در برخی ساختارهای دو مرحله‌ای NDEA مانند آنچه در [۵] نشان داده شده، ورودی‌ها بین دو مرحله با یک سهم مشخص شده مشترک هستند. مدل مطرح شده یک مدل رابطه‌ای غیر خطی با فرض بازده به مقیاس ثابت می‌باشد. در مدل یک متغیر $0 \leq \alpha_i \leq 1$ در نظر گرفته شد که $\alpha_i x_i$ سهم ورودی مرحله ۱ و $(1 - \alpha_i)x_i$ ورودی مرحله دوم از این ورودی مشترک تعریف گردید. در سال ۲۰۱۵ طلوع و همکاران [۱] مدل رابطه‌ای خطی با ورودی‌های مشترک را با کاربرد در صنعت بانکداری و دانشگاه برای اندازه‌گیری کارایی کلی مطرح کردند:

$$\theta_0 = \max \frac{1}{\varphi} [uz_0 + \sum_{r=1}^s u_r y_{r0}]$$

$$s.t. \sum_{i=1}^m w_i x_{i0} = 1$$

$$uz_j - \sum_{i=1}^m v_i x_{ij} \leq 0, \quad j = 1, \dots, n \quad (1)$$

$$\sum_{i=1}^m (v_i - w_i)x_{i0} + uz_0 = 2$$

$$\sum_{r=1}^s u_r y_{rj} - \sum_{i=1}^m (v_i - w_i)x_{ij} + uz_j \leq 0, \quad j = 1, \dots, n, \quad 0 \leq w_i \leq v_i, \quad u_r \geq 0, \quad \forall r, \quad w \geq 0$$

که در آن X و Y و Z به ترتیب بردار مقادیر ورودی، خروجی و میانی می‌باشند. v_i ، u_r و u وزن‌های مرتبط با ورودی‌ها، خروجی‌ها و مقادیر میانی می‌باشند. همچنین $v_i \alpha_i = w_i$ و $\forall i \quad 0 \leq \alpha_i \leq 1$ و $0 \leq w_i \leq v_i$ برای مرحله دوم داریم: $\forall i \quad v_i(1 - \alpha_i) = v_i - w_i$ که θ_0 بیان‌کننده مقدار کارایی کل سیستم است و مقداری بین صفر و یک دارد.

۲ تراکم

تراکم یک پدیده اقتصادی و در حقیقت یک نوع ناکارایی می‌باشد هنگامی که مقادیر زیاد ورودی علت کاهش خروجی‌ها می‌باشد. حال گویم در DMU تحت ارزیابی ناکارایی تکنیکی وجود دارد اگر در ارزیابی آن مشخص شود که امکان بهبود بعضی ورودی‌ها یا خروجی‌ها موجود باشند بدون این‌که بقیه ورودی‌ها و خروجی‌ها بدتر شوند. مفهوم تراکم نخستین بار که توسط فار و گروسکویف در سال ۱۹۸۵ مطرح گردید دارای مشکلاتی بود که توسط کوپر و همکارانش به صورت زیر مطرح



گردید. مدل زیر را می‌توان برای واحدهای ناکارا حل کرد: [۳]

$$\begin{aligned} \text{Max } \varphi_0 + \varepsilon \left(\sum_{r=1}^s S_r^+ - \sum_{i=1}^m S_i^{-c} \right) \\ \text{s.t. } \sum_{j=1}^n \lambda_j x_{ij} + S_i^{-c} = x_i, \quad i = 1, \dots, m \\ \sum_{j=1}^n \lambda_j y_{rj} - y_r \psi_0 - S_r^+ = 0, \quad r = 1, \dots, s \\ \sum_{j=1}^n \lambda_j = 1 \\ \lambda_j \geq 0, \quad S_i^{-c} \geq 0, \quad S_r^+ \geq 0, \quad j = 1, \dots, n \end{aligned} \quad (2)$$

که در آن مقدار تراکم در i امین ورودی است.

قضیه ۱.۲. تراکم وجود دارد اگر و فقط اگر در جواب بهینه مدل (۲)، $(\varphi_0^*, \lambda^*, S^{+*}, S^{-c*})$ حداقل یکی از دو شرط زیر برقرار باشد:

(الف) $\varphi_0^* > 1$ و حداقل یک $(1 \leq i \leq m) S_i^{-c*} > 0$ وجود داشته باشد.

(ب) حداقل یک $(1 \leq r \leq s) S_r^{+*} > 0$ و حداقل یک $(1 \leq i \leq m) S_i^{-c*}$ وجود داشته باشد [۳].

۳ نتایج اصلی

در مدل مطرح شده مقدار میانی بهینه‌سازی شده که آن را با Z_{opt} نشان می‌دهیم به صورت زیر محاسبه می‌گردند: ابتدا با حل مدل (۱)، DMUهای ناکارا شناسایی می‌گردند، سپس برای DMUهای ناکارا مدل (۲) را حل می‌نماییم. در صورتی که ناکارایی مربوط به تراکم در مقادیر میانی باشند، در مدل (۲) به جای مقادیر x_{ij} (مقادیر ورودی) مقادیر Z_j و مقدار سمت راست قید اول با Z_0 جایگزین و مدل را حل می‌نماییم. در صورتی که طبق قضیه ۱.۲ تراکم وجود داشته باشد یک مقدار Z_{opt_j} به صورت زیر تعیین می‌شود:

$$Z_{opt_j} = Z_j - S_i^{-c*}, \quad j = 1, \dots, n \quad (3)$$

به این دلیل که مقادیر میانی در این مرحله ورودی‌های مرحله‌ی دوم می‌باشند لذا مقدار مازاد این مقادیر در صورت وجود با فرض این که در این مدل‌سازی مقدار S^{-c*} را می‌توان به عنوان خروجی بدون واسطه یا byproduct لحاظ نمود در نظر

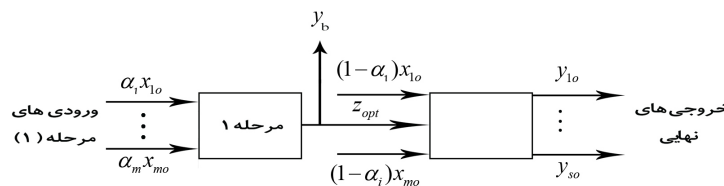


گرفته می‌شوند. مدل (۴) تغییر یافته‌ی مدل (۱) به صورت زیر است:

$$\begin{aligned} \text{Max} \frac{1}{\psi} [& uZ_{opt} + \sum_{r=1}^s u_r y_{r_o} + u y_{b_o}] \\ \text{s.t.} \sum_{i=1}^m & w_i x_{i_o} = 1 \\ uZ_{opt_j} - \sum_{i=1}^m & v_i x_{ij} \leq 0, \quad j = 1, \dots, n \\ \sum_{i=1}^m & (v_i - w_i) x_{i_o} + uZ_{opt_o} = 2 \\ \sum_{r=1}^s u_r y_{r_j} - \sum_{i=1}^m & (v_i - w_i) x_{ij} + uZ_{opt_j} \leq 0, \quad j = 1, \dots, n, \quad 0 \leq w_i \leq v_i, \quad \forall i, \quad u_r \geq 0, \quad \forall r, u \geq 0 \end{aligned} \quad (4)$$

که در آن $X_{ij}, i = 1, \dots, m$ و $Y_{r_j}, r = 1, \dots, s$ و Y_{b_o} به ترتیب i امین ورودی و r امین خروجی نهایی و خروجی

byproduct $DMU_j, j = 1, \dots, n$ می‌باشند.



شکل ۲: ساختار دو مرحله‌ای با بهینه‌سازی مقادیر میانی و منابع مشترک

از جمله مزیت‌های مدل مطرح شده، توجه خاص به بهینه‌سازی مقادیر میانی است که وجه تمایز اصلی دیدگاه کلاسیک و شبکه‌ای DEA در مدل‌سازی می‌باشد. از آنجایی که اکثر مدل‌های NDEA برای حل مسائل واقعی مطرح می‌گردند از جمله توسعه‌های مقاله‌ی حاضر می‌تواند با توجه به نوع مدل توجه به کاربردهای خاص مدل باشد که عبارتند از: مدیریت ریسک و سرمایه‌گذاری، انتخاب بهینه‌ی پرتفوی و مدیریت آن، زنجیره تأمین، صنعت بانکداری. همچنین نوع مواجهه با مقادیر میانی در انواع ساختارهای NDEA یا توسعه‌ی مدل به یک مدل چند مرحله‌ای نیز می‌تواند به‌عنوان توسعه‌های دیگر مدنظر قرار گیرد.

مراجع

- [1] M. Toloo, A. Emrouznejad and P. Moreno, A linear relational DEA model to evaluated two-stage processes with shared inputs, annual journal of oprational research, DoI 10. 1007/ S40314-0211-2 (2015).
- [2] R. Färe and S. Grosskopf, Network DEA, Socio planning sciences, 34 (2000) pp 35. 49.
- [3] W. Cooper, H. Deng, Z. M. Huang and S. X. Li, A one model approach to congestion in data envelopment analysis, Socio economic planning sciences, 36 (2002), pp. 231-238.
- [4] W. D. Cook and J. Zhue, Data envelopment analysis Ahand bookon the modeling of internal structures and networks, Springer, 2014.
- [5] Y. Chen, J. Du, H. David and S.J. Zhu, DEA model with shared resources and efficiency decomposition, European Journal of oprational research 207 (2010), pp. 339-349.



مقایسه تجزیه کارایی در مدل‌های شعاعی و غیر شعاعی با داده های مطلوب و نامطلوب

فرانک حسین زاده سلجوقی

دانشگاه سیستان و بلوچستان

فاطمه صوفی*

دانشگاه سیستان و بلوچستان

چکیده

مدلهای تحلیل پوششی داده ها DEA با ورودی ها و خروجی های مطلوب و نامطلوب در مقالات متعددی مورد بحث قرار گرفته در این مقاله به مقایسه مدل‌های شعاعی و غیر شعاعی با داده های مطلوب و نامطلوب می پردازیم بدین ترتیب که مدل کارایی سود که یک مدل شعاعی است رابه مدل ورودی و خروجی با داده های مطلوب و نامطلوب تبدیل می کنیم و تجزیه آن در تابع فاصله جهت دار که یک مدل غیر شعاعی است را نیز به مدل ورودی و خروجی با داده های مطلوب و نامطلوب تبدیل می کنیم و در آخر با ارائه مثالی به مقایسه این دو مدل از نظر کارایی می پردازیم .

واژه های کلیدی: تحلیل پوششی داده ها ، مدل‌های شعاعی ، مدل‌های غیر شعاعی ، تجزیه کارایی سود ، تابع فاصله جهت دار، داده های مطلوب، داده های نامطلوب

۱ مقدمه

امروزه تجزیه و تحلیل های زیادی درباره ی سود به عنوان عامل اصلی و تنها عامل معتبر برای تشریح عملکرد شرکت ها وجود دارد. براساس این رویکرد ساده، شرکت با افزایش سود، بهتر و با کاهش آن، بدتر کار می کنند. تلاش برای کسب سود انگیزه ی فعالیتهای تولیدی در جامعه به شمار می رود. کارایی می تواند به صورت کارایی تکنیکی، تخصیصی و کارایی سود اندازه گیری شود. یکی از روشهای تعیین کارایی براساس تحلیل پوششی داده ها، روش تابع فاصله جهت دار است که اولین بار توسط چانگ و همکاران (۱۹۹۷) ارائه شده است. در اینجا ابتدا به بررسی مدل‌های تابع فاصله جهت دار و مدل با ورودی ها و خروجی های مطلوب و کارایی سود می پردازیم سپس تجزیه کارایی سود را در مدل DDF به کار می بریم و این مدل و مدل کارایی سود را به مدل هایی با ورودی ها و خروجی های مطلوب و نامطلوب تبدیل می کنیم و در آخر با ارائه مثالی به مقایسه تجزیه کارایی سود در مدل‌های شعاعی و غیر شعاعی با داده های مطلوب و نامطلوب می پردازیم .

۲ تابع فاصله جهت دار

هر DMU_j با بردار ورودی $X_j = (x_{1j}, \dots, x_{mj}) \in \mathbb{R}_+^m$ و بردار خروجی $Y_j = (y_{1j}, \dots, y_{sj}) \in \mathbb{R}_+^s$ را تولید می کند پیرو نظریه چمبرز و همکاران (۱۹۹۸) فرض کنید که $G = (g^x, g^y)$ بردار ورودی - خروجی جهت دار نامنفی است در این صورت کارایی تکنیکی از DMU_o با نقطه (X_o, Y_o) می تواند با ایجاد محاسبه ای براساس اندازه ای از که یک مدل بازده به

* سخنران



مقیاس متغیر است به صورت زیر باشد :

$$\max \beta : \sum_{j=1}^n \lambda_j x_{ij} \leq x_{io} - \beta g_i^x, \sum_{j=1}^n \lambda_j y_{rj} \geq y_{ro} + \beta g_r^y, \sum_{j=1}^n \lambda_j = 1, \lambda_j \geq 0, (j = 1, 2, \dots, n) \quad (1)$$

که $G = (g^x, g^y)$ بردار ورودی - خروجی جهت دار نامنفی است که در اینجا $g^y = y_{ro}$ و $g^x = x_{io}$ را در نظر می گیریم.

۳ تحلیل پوششی داده ها با ورودی ها و خروجی های مطلوب و نامطلوب

نگرش کلی در ارزیابی عملکرد واحدها آن است که کاهش میزان ورودی و افزایش مقدار خروجی موجب بهبود عملکرد و بهترین کارکرد می شود. اما باید توجه داشت که سازمانها همواره به دنبال حداکثر کردن خروجی و حداقل کردن ورودی نیستند، زیرا خروجی ها و ورودی ها می توانند مطلوب یا نامطلوب باشند. فرایند تولید واحد همواره با تولید محصول نهایی، آلودگی و ضایعات همراه است که شامل دو نوع خروجی مطلوب و نامطلوب است که تولیدی خروجی مطلوبی است که باید افزایش یابد در حالیکه آلودگی و ضایعات، خروجی نامطلوب بوده که باید کاهش یابند. فرض کنید با توجه به مدل شارپ و همکاران n DMU ، [۱] که هر کدام m ، ورودی $x_i : i = 1, \dots, m$ را برای تولید s خروجی $(y_r : r = 1, \dots, s)$ بکار می رود داشته باشیم در این صورت مدل DEA برای ارزیابی عملکرد با ورودی ها و خروجی های مطلوب و نامطلوب که x_{ij}^b و x_{io}^g به ترتیب ورودی های مطلوب و نامطلوب باشند و y_{rj}^b و y_{ro}^g به ترتیب خروجی های مطلوب و نامطلوب باشند به صورت زیر است :

$$\max h : \sum_{j=1}^n \lambda_j x_{ij}^g \geq h x_{io}^g, \sum_{j=1}^n \lambda_j x_{ij}^b \leq h x_{io}^b, \sum_{j=1}^n \lambda_j y_{rj}^g \geq h y_{ro}^g, \sum_{j=1}^n \lambda_j y_{rj}^b \leq h y_{ro}^b, \sum_{j=1}^n \lambda_j = 1, \lambda_j \geq 0 \quad (2)$$

۴ کارایی سود

فرض کنید $p_r = (p_1, \dots, p_s)$ و $c_i = (c_1, \dots, c_m)$ بردار هزینه و قیمت متناظر با ورودی های DMU_j هر واحد در نظر بگیرد و هزینه و قیمت کل مشاهده شده برای ورودی واحد O ، $p_o = \sum_{r=1}^s p_r y_{ro}$ و $c_o = \sum_{i=1}^m c_i x_{io}$ در نظر بگیرد. کمیتهای ورودی و خروجی y_{ro} و x_{io} متغیرهای λ_j متغیرهای تصمیم برای شرکت می باشند و قیمت‌های ورودی و خروجی p_r و c_i ثابت در نظر گرفته شده اند. اگر مقدار ورودی و خروجی را به صورت متغیر x_i و y_r فرض می کنیم در این صورت مدل کارایی حداکثر سود را به ازای هزینه و قیمت های موجود می سنجد به صورت زیر است:

$$\max (p_o y - c_o x) : \sum_{j=1}^n \lambda_j x_{ij} \leq x_{io}, \sum_{j=1}^n \lambda_j y_{rj} \geq y_{ro}, \sum_{j=1}^n \lambda_j = 1, \lambda_j \geq 0 \quad (3)$$

که کارایی سود را می توان به صورت رابطه زیر تعریف نمود:

$$E_p = \frac{p_o y^* - c_o x^*}{p_o y - c_o x} \quad (4)$$

که با فرض $p_o y > c_o x$ داریم $E_p \geq 1$

۵ تجزیه تابع فاصله جهت دار بر روی کارایی سود

از آنجا که سود هم به خروجی ها و هم به ورودی ها مربوط می شود پس مدل DDF آن همان مدل (۱) است .



۶ مدل‌های پیشنهادی برای اندازه گیری تجزیه کارایی در حضور داده های مطلوب و نامطلوب

در اینجا با استفاده از مدل (۱) و مدل (۳) به ارائه مدلی در حضور داده های مطلوب و نامطلوب می پردازیم بطوریکه ورودی x_{ij}^g ، x_{ij}^b و ورودی نامطلوب، y_{rj}^g خروجی مطلوب و y_{rj}^b خروجی نامطلوب، به طور کلی نماد نشان دهنده مطلوب و نماد b نشان دهنده نامطلوب در این صورت مدل (۱) به صورت زیر تبدیل می شود:

$$\max \beta : \sum_{j=1}^n \lambda_j x_{ij}^g \leq x_{io}^g - \beta g_i^{xg}, \sum_{j=1}^n \lambda_j x_{ij}^b \geq x_{io}^b + \beta g_i^{xb}, \sum_{j=1}^n \lambda_j y_{rj}^g \geq y_{ro}^g + \beta g_r^{yg}, \sum_{j=1}^n \lambda_j y_{rj}^b \leq y_{ro}^b - \beta g_r^{yb}$$

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j = 1, \lambda \geq 0 \quad (5)$$

مدل (۳) نیز در حضور داده های مطلوب و نامطلوب با همان فرضیات به مدل زیر تبدیل می شود:

$$\max (p_o y^g - p_o y^b) - (c_o x^g - c_o x^b) : \sum_{j=1}^n \lambda_j x_{ij}^g \leq x_{io}^g, \sum_{j=1}^n \lambda_j x_{ij}^b \geq x_{io}^b, \sum_{j=1}^n \lambda_j y_{rj}^g \geq y_{ro}^g$$

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j y_{rj}^b \leq y_{ro}^b, \sum_{j=1}^n \lambda_j = 1, \lambda \geq 0 \quad (6)$$

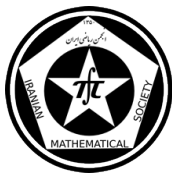
اکنون مدل (۵) را حل می کنیم و مقدار β^* را بدست می آوریم در این صورت مراحل زیر را داریم: ۱. نقاط بهبود یافته x^{g*} و $x^{b*} = x_{ij}^b \times (1 + \beta^*)$ و $x_{ij}^g \times (1 - \beta^*)$ و $y^{g*} = y_{rj}^g \times (1 + \beta^*)$ و $y_{rj}^b \times (1 - \beta^*)$ را بدست می آوریم. ۲. مقدار $(p_o y^{g*} - p_o y^{b*}) - (c_o x^{g*} - c_o x^{b*})$ را محاسبه می کنیم. ۳. مقدار $(p_o y^g - p_o y^b) - (c_o x^g - c_o x^b)$ را محاسبه می کنیم. مدل (۶) که مدل کارایی سود در حضور داده های مطلوب و نامطلوب است را حل می کنیم و مقدار کارایی را حساب می کنیم.

۷ مثال

جدول (۱) داده های مطلوب و نامطلوب به یازده DMU با ورودی ها و خروجی های مطلوب و نامطلوب همراه با هزینه ها و قیمت ها و جدول (۲) امتیازات مربوط به این داده ها در مدل‌های شعاعی و غیر شعاعی را نشان می دهد.

جدول ۱: داده ها همراه با هزینه ها و قیمت

DMU	x_1^g	c_1	x_2^b	c_2	y_1^g	p_1	y_2^b	p_2
۱	۱۵۱	۱۰۰	۱۶۰	۲۰	۹۰	۲۰۱۰	۱۰۰	۵۵۰
۲	۱۳۱	۸۰	۱۴۰	۱۹	۵۰	۱۸۰۰	۱۵۰	۴۰۰
۳	۱۶۰	۹۰	۱۲۰	۲۵	۵۵	۲۲۰۰	۱۶۰	۴۸۰
۴	۱۶۸	۱۲۰	۱۳۰	۲۷	۷۲	۳۵۰۰	۱۸۰	۶۰۰
۵	۱۵۸	۷۰	۱۹۴	۲۲	۶۶	۳۰۵۰	۹۴	۴۰۰
۶	۲۵۵	۸۰	۲۴۰	۵۵	۹۰	۳۹۰۰	۲۳۰	۴۳۰
۷	۲۳۵	۱۰۰	۱۲۰	۳۳	۸۸	۳۳۰۰	۲۲۰	۵۴۰
۸	۲۰۶	۸۵	۱۴۲	۳۱	۸۰	۳۵۰۰	۱۵۲	۴۲۰
۹	۲۴۴	۷۶	۱۳۲	۳۰	۱۰۰	۲۹۰۰	۱۹۰	۳۵۰
۱۰	۲۶۸	۷۵	۲۱۰	۵۰	۱۰۰	۲۶۰۰	۲۵۰	۴۱۰
۱۱	۳۰۶	۸۰	۲۱۰	۵۳	۱۴۷	۲۴۵۰	۲۶۰	۵۴۰



جدول ۲: امتیازات مربوط به مدل‌های شعاعی و غیرشعاعی در حضور داده‌های مطلوب و نامطلوب

DMU	کارایی مدل شعاعی	کارایی مدل غیرشعاعی
۱	۱.۱۴	۱
۲	۱	۱
۳	۵.۷۴	۱.۹۳
۴	۱.۹۱	۱.۳۸
۵	۱	۱
۶	۱	۱
۷	۱.۶۱	۱.۵۴
۸	۱	۱.۳۳
۹	۱	۱.۲۳
۱۰	۱.۶۴	۱.۱۴
۱۱	۱	۱

۸ نتیجه‌گیری

باتوجه به داده‌های جدول (۲) همانطور که می‌بینید در مدل‌های شعاعی و غیرشعاعی در حضور داده‌های مطلوب و نامطلوب بعضی از DMUها کارا و بعضی ناکاراهستند که در اینجا می‌توان نتیجه گرفت که مدل‌های شعاعی و غیرشعاعی در حضور داده‌های مطلوب و نامطلوب از نظر کارایی هیچ تطابقی با هم دیگر ندارند.

مراجع

- [1] W.B. Lie, J. Sharp and Z.M. Preference. Wu, *production and performance in data envelopment analysis.*, Annals of operational Research **145** (2006), 105-127.
- [2] Y. Chung, R. Färe and S. Grosskopf, *Productivity and undesirable outputs: a directional distance function approach*, J Environ Manage **51** (1997), 229-40.
- [3] Aparicio, Bernhard Mahlberg, Jesus T. Pastor and K. Biresh. sahoo, *Decomposing technical inefficiency using the principle of least action.*, European Journal of Operational Research **239** (2014), 776-785.
- [4] K. Tone, W.W. Cooper, L.M. Seiford, J. Zhu, *Data Envelopment Analysis*, United States of American. (2004)

پست الکترونیکی: fatemeh_sufi@yahoo.com
پست الکترونیکی: saljooghi@math.usb.ac.ir



مکان‌یابی بهینه تسهیلات اورژانسی کلان شهر شیراز به روش p - میانه و بر پایه‌ی الگوریتم جستجوی همسایگی متغیر

دکتر حمیدرضا ملکی
دانشگاه صنعتی شیراز

دکتر علیرضا فخارزاده جهرمی
دانشگاه صنعتی شیراز

مریم آریان‌فر*
دانشگاه صنعتی شیراز

چکیده

هدف اصلی این مقاله تعیین بهترین مکان از بین مکان‌های پیشنهادی به منظور استقرار خدمات اورژانس شهر شیراز با رعایت اصول مربوط به مدل p - میانه با محدودیت حداکثر زمان سفر است. در این تلاش برخلاف سایر مدل‌های p - میانه که p به صورت یک ثابت در نظر گرفته می‌شود، به‌عنوان یک متغیر وارد مدل می‌گردد. آن‌گاه پیاده‌سازی مدل ارایه شده با استفاده از الگوریتم جستجوی همسایگی متغیر (VNS) اصلاح شده بر روی اورژانس شیراز مورد بررسی قرار می‌گیرد.

واژه‌های کلیدی: تسهیلات اورژانسی شهر شیراز، p - میانه، مکان‌یابی، الگوریتم جستجوی همسایگی متغیر اصلاح شده؛

Mathematics Subject Classification [2010]: 90B80

۱ مقدمه

شیراز بزرگترین نقطه جمعیتی در نیمه جنوبی کشور می‌باشد که در 30° درجه و 25 دقیقه عرض جغرافیایی و 37° درجه و 29 دقیقه طول جغرافیایی قرار گرفته است. با توجه به تردد زیاد جمعیت در شیراز (گردشگری، محوریّت در تردد جنوب به شمال)، مساحت، محدودیت تعداد تسهیلات، محدودیت شعاع پوشش و کاهش هزینه‌های ثابت یا متغیر احداث تسهیلات و محدودیت سرمایه، همواره باید سعی شود که مکان ارایه تسهیلات چنان انتخاب گردد که حداکثر خدمات رسانی به خوشه‌های تقاضا انجام شده و تا حد امکان وقفه در سرویس‌دهی کاهش یابد. توجه داریم که در جوامع پیشرفته بشری در کلان شهرها علاوه بر کاهش علت وقوع حوادث، مهم است که تجهیزات نجات را به موقع به‌کار برد و هرچه سریعتر تلفات را تا حد امکان کاهش داد. افزون بر این سرویس‌های اورژانس باید خدمات خود را در سطحی ارایه دهند که سلامت و ایمنی عمومی به‌خوبی تامین شود. از این رو تعداد و محل قرارگرفتن تسهیلات تأثیر زیادی بر چگونگی انجام این خدمات رسانی دارد. بنابراین تعیین مکان‌هایی برای مستقر کردن سرویس‌های اورژانس همواره مسأله‌ای اساسی است. تسهیلات اورژانسی باید چنان مستقر شوند که بتوانند در یک زمان مناسب به هر نقطه‌ی دارای تقاضا بروند. برای دستیابی به این مهم برای کلان شهر شیراز، در این مقاله مدل p - میانه با محدودیت حداکثر زمان سفر در نظر گرفته شده است و پیاده‌سازی این مدل با استفاده از الگوریتم VNS اصلاح شده بر روی اورژانس کلان شهر شیراز مورد بررسی قرار گرفته است که دارای مزایای قابل توجهی است.

* سخنران

۲ معرفی مدل p - میانه

مساله p - میانه اولین بار توسط حکیمی [۲]، معرفی شد که مکان تعداد p تسهیل را معرفی می‌کرد. حکیمی [۳]، در یک ارتباط شبکه‌ای راه حلی برای یافتن مکان تاسیس یک ایستگاه پلیس در یک بزرگراه ارایه کرد. در سال ۱۹۷۹ کریو و حکیمی [۴]، نشان دادند مساله p - میانه NP - سخت است. علاوه بر اهمیت دادن به انتخاب مکان تسهیلات خدمات نجات در مدیریت اورژانسی، بهینه نمودن تعداد این مکان‌ها برای کاهش هزینه‌ها امر مهمی در مکان‌یابی تسهیلات اورژانسی است. بدین منظور یک مدل p - میانه با محدودیت حداکثر زمان سفر تا نقاط تقاضا توسط منگاو و همکاران [۵] در نظر گرفته شده است.

یک مساله p - میانه عبارت است از تعیین p کاندید از میان m مکان بالقوه به منظور خدمت‌رسانی به n مشتری با هدف کمینه کردن مجموع فاصله کلی از نقاط تقاضا تا تسهیلات.

جهت نمایش این مدل نیازمند به ابزارهایی هستیم که تحت عناوین پارامترها و متغیرها در اینجا معرفی می‌شوند.

پارامترها

• M : مجموعه نقاط بالقوه، N : مجموعه نقاط تقاضا ؛

• d_{ij} : کوتاه‌ترین فاصله از مکان تقاضای j ام تا تسهیلات i ام، α : هزینه ثابت احداث تسهیلات ؛

• L : طولانی‌ترین فاصله مجاز (حداکثر محدودیت فاصله)، p : تعداد تسهیلات ؛

متغیرها

اگر مکان j ام از تسهیلات i ام سرویس بگیرد $x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{اگر مکان } i \text{ ام به عنوان تسهیلات انتخاب شود} \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$

یادآوری : در حالت کلی $m = n$ و $M = N$ زیرا مکان m مشتری به‌عنوان مکان تسهیلات بالقوه در نظر گرفته می‌شود.

با توجه به متغیرها و پارامترهای تعریف شده و نقش مهم عامل زمان در خدمات نجات اورژانسی (محدودیت α)، مدل p - میانه با محدودیت حداکثر زمان سفر چنین قابل بیان است:

$$\text{Min} \quad \alpha p + \sum_{i \in M} \sum_{j \in M} d_{ij} x_{ij} \quad (1)$$

$$\text{S.to :} \quad \sum_{i \in M} x_{ij} = 1 \quad \forall j \in M \quad (2)$$

$$x_{ij} \leq y_j \quad \forall i, j \in M \quad (3)$$

$$\sum_{i \in M} y_i = p \quad (4)$$

$$\max_{i \in M} \{d_{ij} x_{ij} \mid \forall i \in M\} \leq L \quad (5)$$

$$x_{ij}, y_i \in \{0, 1\} \quad \forall i, j \in M \quad (6)$$

هدف از حل مدل، به حداقل رساندن فاصله (زمان) حمل و نقل کل از تسهیلات سرویس دهنده به مکان سرویس گیرنده و علاوه بر آن کاهش هزینه ثابت استقرار تسهیلات است. محدودیت (۲) تضمین می‌کند که به هر نقطه تقاضا تنها و تنها یک مرکز تسهیل سرویس می‌دهد. محدودیت (۳) تضمین می‌کند که مکان i ام وقتی به مکان j ام سرویس می‌دهد که آن به‌عنوان تسهیلات انتخاب شده باشد. محدودیت (۴) تضمین می‌کند که کل تسهیلات سرویس دهنده برابر p است. محدودیت (۵) نشان می‌دهد حداکثر فاصله از تسهیلات تا نقاط تقاضا کمتر از L می‌باشد.



۳ معرفی الگوریتم (VNS) اصلاح شده

این الگوریتم از توابع زیر تشکیل شده است :

- $EFLP$ •
- $pmp - search$ •
- $localsearch$ •
- $changecluster$ •

هسته اصلی الگوریتم (VNS) اصلاح شده (که با $EFLP$ نشان داده می‌شود) تابع $pmp - search$ است که خود از دو زیر تابع جستجوی موضعی ($localsearch$) و تغییر خوشه ($changecluster$) تشکیل شده است. تابع $localsearch$ عمل خوشه‌بندی را بر روی نقاط تقاضا و تسهیلات انجام می‌دهد و جواب بهینه موضعی را داخل هر خوشه جستجو می‌کند. این تابع فرصت انتخاب همسایگی‌های نزدیکتر را بیشتر می‌کند. تابع $changecluster$ با ایجاد یک آشوب در جواب حاصل از $localsearch$ به دنبال جواب بهتر است. دین منظور وسعت جستجو را بیشتر و برخلاف تابع قبل امکان انتخاب همسایگی‌های دورتر را نیز بیشتر می‌کند به طوری که در صورت داشتن شرایط لازم، نتیجه آن، جوابی بهتر از جواب قبل است. در ادامه تابع اصلی ($pmp - search$)، براساس دو زیر تابع خود به جستجو می‌پردازد. در این تابع شرط مربوط به محدودیت حداکثر زمان سفر رعایت شده و خروجی آن کمینه مجموع فاصله کلی از تسهیلات تا نقاط تقاضا (یعنی مقدار تابع هدف)، مجموعه نقاط تسهیلات اورژانسی و خوشه‌های تقاضا است؛ منظور از خوشه تقاضا مجموعه نقاطی از همسایگی‌های یک تسهیل است که اعضای آن کمترین فاصله را در مقایسه با سایر همسایگی‌ها نسبت به آن تسهیل دارند. هر خوشه تقاضا به نزدیکترین تسهیل خود اختصاص دارد و از آن خدمات دریافت می‌کند. تعداد این خوشه‌ها با تعداد تسهیلات متناظر است. در الگوریتم VNS اصلاح شده، p (تعداد تسهیلات) یک متغیر محسوب می‌شود. این الگوریتم جواب حاصل از $pmp - search$ را به خروجی می‌دهد و تعداد تسهیلات را با توجه به محدودیت حداکثر زمان سفر کمینه می‌کند. خروجی این تابع علاوه بر خروجی‌های حاصل از $pmp - search$ ، کمینه مجموعه نقاط تسهیلات اورژانسی جهت کاهش هزینه استقرار تسهیلات است. با استفاده از این روش محل تسهیلات نجات اورژانسی که سبب بهره‌وری و اثر بخشی در فرایند مدیریت اورژانسی است تعیین شده، هر دو هزینه ثابت و متغیر استقرار تسهیلات و هدایت عملیات نجات اورژانسی کاهش یافته و خدمات رسانی به نقاط تقاضا افزایش می‌یابد.

۴ مکان‌یابی خدمات اورژانسی شهر شیراز

در حال حاضر اورژانس شیراز دارای ۲۱ مکان تسهیلات خدمات رسانی در سطح شیراز می‌باشد که در هر کدام از این پایگاه‌ها وسایل نقلیه جهت خدمات رسانی مستقر می‌باشند. با توجه به امکانات موجود و همچنین با توجه به این‌که با تقسیم‌بندی سطح شهر به تعداد مناطق بیشتر، محاسبه داده‌های مساله بسیار زمان‌بر است، سطح شهر شیراز به ۵۴ منطقه تقاضا تقسیم بندی شده است به طوری که هر منطقه بتواند توسط تسهیلات ارایه شده مذکور تحت پوشش قرار گیرد. جمعیت تقاضای هر منطقه در یک ماه براساس داده‌های اردیبهشت ماه ۸۹ اورژانس شیراز بدست آمده است (به منظور نزدیک‌تر شدن مساله به واقعیت بهتر است داده‌های مساله را براساس یک بازه زمانی بیشتر مثلاً یک دوره یکساله محاسبه شود اما محاسبه داده‌ها بر اساس یک دوره یکساله با توجه به نحوه ثبت اطلاعات مرکز اورژانس شیراز، بسیار زمان‌بر است).

میانگین زمان رسیدن آمبولانس به محل موردنیاز تقریباً ۸ دقیقه می‌باشد [۱]، اما براساس اطلاعات ثبت شده، پاسخ‌های زمانی بیش از ۸ دقیقه نیز برای برخی از فراخوانی‌ها وجود دارد. مدل p - میانه با محدودیت حداکثر زمان سفر با استفاده از الگوریتم VNS اصلاح شده جهت تعیین مکان بهینه استقرار تسهیلات از بین ۲۱ مکان بالقوه با استفاده از نرم افزار متلب ۲۰۱۴ پیاده‌سازی شده و نتایج حاصل از آن در جدول ۱ و ۲ نشان داده شده است. در جدول ۱ دو مدل p - میانه با محدودیت حداکثر زمان سفر (mt) و p - میانه بدون محدودیت حداکثر زمان سفر (wmt) مقایسه شده‌اند. همانطور که ملاحظه می‌شود نتایج حاصل از مدل p - میانه با محدودیت حداکثر زمان سفر از نظر محدودیت حداکثر زمان (md) و تابع هدف (td) از شرایط بهتری نسبت به مدل p - میانه بدون محدودیت زمان سفر برخوردار است. علاوه بر این مدل p - میانه با



محدودیت حداکثر زمان سفر درصد پوشش جمعیت (pc) بیشتری را نسبت به مدل p - میانه بدون محدودیت حداکثر زمان سفر در فاصله استاندارد ۸ دقیقه ارایه می‌دهد. مجموعه تسهیلات انتخاب شده در هر دو مدل با fls نشان داده شده است. در جدول ۲ خوشه‌های تقاضای (clu) مربوط به هر تسهیل نشان داده شده است. این نتایج از حل مدل p - میانه با محدودیت حداکثر زمان سفر بدست آمده است. هر خوشه از نزدیکترین تسهیل خود (که با fac نشان داده شده) خدمات دریافت می‌کند و این خوشه‌ها در حداکثر زمان ۸ دقیقه از تسهیل مختص به خود سرویس می‌گیرند. تذکر ۱: اعداد بیان شده برای fls و fac مکان‌های معین شده شهری شیراز بر روی نقشه هستند. تذکر ۲: اعداد ذکر شده ستون‌های clu در جدول ۲ بیانگر نزدیکترین خوشه‌های تقاضا به منظور دریافت خدمات از مکان fac می‌باشند.

جدول ۱: نتایج بدست آمده از مقایسه دو مدل p - میانه با محدودیت حداکثر زمان سفر و بدون محدودیت حداکثر زمان سفر

pc	fls	td	md	p	$model$
.۰۹۷	۳،۹،۷،۱،۱۳،۱۴،۱۸،۲۰،۲۵،۲۷،۲۸،۳۱،۳۳،۳۶،۳۹،۴۱،۴۳،۴۸،۵۰،۵۱،۵۳	۲۲۱	۸	۲۱	mt
.۰۸۹	۱۸،۲۰،۲۱،۲۴،۲۵،۲۸،۳۰،۳۶،۳۹،۴۱،۴۵،۴۶،۴۹،۱،۳،۶،۷،۱۲،۱۴،۱۵	۲۲۸	۱۴	۲۱	wmt

جدول ۲: نتایج بدست آمده از حل مدل p - میانه با محدودیت حداکثر زمان سفر

clu	fac	ردیف	clu	fac	ردیف	clu	fac	ردیف
۳۹،۴۰	۳۹	۱۵	۲۰،۲۱	۲۰	۸	۳،۴،۵	۳	۱
۴۱	۴۱	۱۶	۲۵،۲۶	۲۵	۹	۹،۱۰	۹	۲
۴۳،۴۲،۴۴	۴۳	۱۷	۲۷	۲۷	۱۰	۷،۶،۸	۷	۳
۴۸،۲،۳۵،۴۷،۴۹	۴۸	۱۸	۲۸،۲۹	۲۸	۱۱	۱	۱	۴
۵۰	۵۰	۱۹	۳۱،۳۰،۳۲،۴۵	۳۱	۱۲	۱۳،۲۲،۱۲،۱۱	۱۳	۵
۵۱،۵۲	۵۱	۲۰	۳۳،۲۳،۲۴،۳۴	۳۳	۱۳	۱۴،۱۵،۱۶	۱۴	۶
۵۳،۵۴	۵۳	۲۱	۳۶،۳۷،۳۸	۳۶	۱۴	۱۸،۱۷،۱۹	۱۸	۷

مراجع

- [1] R. L Church, and K, Robert *Generalized coverage models and public facility location*, Papers of Regional Science Association, 53 (1983), pp. 117-35.
- [2] S. Hakimi, *The generalized maximal covering location problem*, Computer and Operations Research, 29 (2002), pp. 563-581.
- [3] S. Hakimi, *Optimum distribution of switching centers in a communication network and some related graph theoretic problems*, Operations Research, 13 (1965), pp. 462-485.
- [4] O. Kariv, S. Hakimi, *An algorithmic approach to network location problems.II. The p -medians*, SIAM Journal on Applied Mathematics, 37 (1979), pp. 539-560.
- [5] Xi. Menghao, Ye. Feng, Yao. Zhong. and QiuHong, *A modified P -median model for the emergency facilities location problem based on variable neighbourhood search*, Journal of Applied Mathematic, 20013 (20013).

پست الکترونیکی: maryam.arf@gmail.com
 پست الکترونیکی: a-fakharzadeh@sutech.ac.ir
 پست الکترونیکی: Maleki@sutech.ac.ir



یک الگوریتم تکاملی بهبودیافته تعاملی بر مبنای تابع اسکالرسازی دستاورد وزن دارشده

نسیم نصرآبادی
دانشگاه بیرجند

مهناز جمالی*
دانشگاه بیرجند

چکیده

الگوریتم‌های بهینه‌سازی چندهدفی تکاملی مبتنی بر ارجحیت، از اطلاعات ارجحیت برای متمرکز کردن جستجوی بردارهای هدف به سمت ناحیه مطلوب مرز پارتو بهینه استفاده می‌کنند. این ناحیه محتمل‌ترین بردارهای هدف پارتو بهینه را شامل است. یکی از این الگوریتم‌ها، الگوریتم ژنتیک بهبودیافته بر مبنای تابع اسکالرسازی دستاورد وزن دارشده است، که از نقطه مرجع داده شده توسط تصمیم گیرنده به عنوان اطلاعات ارجحیت استفاده می‌کند. مقایسه‌ی این الگوریتم با الگوریتم‌هایی در همین زمینه نشان‌دهنده‌ی مزیت‌های آن است، از جمله اینکه در مسائلی با انواع متفاوت متغیرها قابل استفاده است. در این مقاله یک الگوریتم تکاملی تعاملی پیشنهاد می‌کنیم که در آن علاوه بر استفاده از مزایای الگوریتم مذکور، با کاهش تعداد بردارهای وزن به دنبال کاهش پیچیدگی محاسباتی آن هستیم.

واژه‌های کلیدی: نقطه مرجع، تابع اسکالرسازی دستاورد، الگوریتم تکاملی، بهینه‌سازی چندهدفی، جواب پارتو بهینه

۱ مقدمه

بیشتر مسائل تصمیم‌گیری جهان واقعی با چندین معیار سروکار دارند که باید به طور همزمان بهینه شوند. از چنین مسائلی به عنوان مسائل تصمیم‌گیری چندمعیاره یاد شده و روش‌های زیادی برای حل اینگونه مسائل وجود دارد که هر کدام مزایا و معایب خود را داشته و در موقعیت‌های خاصی بسته به شرایط موجود به خوبی قابل استفاده می‌باشند. یکی از روش‌هایی که اخیراً برای حل مسائل تصمیم‌گیری چندمعیاره مطرح شده و در عمل پیشرفت خوبی داشته است، روش‌های بهینه‌سازی تکاملی می‌باشد. علت توجه به الگوریتم‌های تکاملی یافتن یک مجموعه جواب، تنها در یک اجرا می‌باشد. اشکال اصلی این الگوریتم‌ها این است که در طی فرایند جواب نمی‌توانند اولویت‌های تصمیم‌گیرنده^۱ را بررسی کنند و تصمیم‌گیرنده باید برای یافتن جوابی با بیشترین ارجحیت، مجموعه بزرگی از جواب‌ها را بررسی کند که از نظر محاسباتی مقرون‌به‌صرفه نیست و بنابراین الگوریتم‌های بهینه‌سازی تکاملی تعاملی مطرح می‌شوند. یکی از جدیدترین الگوریتم‌های تعاملی، الگوریتم مطرح شده در [۱] است، که با شروع از نقطه‌ی مرجع فراهم‌شده توسط تصمیم‌گیرنده به طور پیشرونده برای یافتن یک جواب بهتر، از طریق حل یک مسئله اسکالرسازی دستاورد مقادیر تابع هدف را بهبود می‌بخشد و در تکرار بعدی، بردارهای وزن عوض می‌شود. در این مقاله الگوریتم ارائه‌شده در [۱] را طوری بهبود می‌بخشیم که در آن علاوه بر تغییر بردار وزن، تعداد آن‌ها نیز تغییر می‌کند و نقطه‌مرجع به صورت تعاملی از تصمیم‌گیرنده خواسته می‌شود و بدین صورت الگوریتم به صورت تعاملی توسط تصمیم‌گیرنده هدایت می‌شود. انتظار داریم که با تقویت جنبه تعاملی الگوریتم، سرعت همگرایی الگوریتم به‌طور قابل‌توجهی بهبود یابد.

* سخنران

^۱Decision Maker



۲ مفاهیم و تعاریف اولیه

تعریف ۱.۲. بردار $(z_1, \dots, z_k) \in \mathbb{R}^k$ را که در آن $z_i = \text{Min}_{x \in S} f_i(x)$ برای $i = 1, \dots, k$ را یک نقطه مرجع می‌گوییم.

تعریف ۲.۲. بردار تصمیم $x \in S$ یک جواب پارتو بهینه است، اگر بردار تصمیم دیگری مثل $y \in S$ موجود نباشد بطوریکه برای هر $k = 1, \dots, k$ و $f_i(y) \leq f_i(x)$ و حداقل برای یک j ، $f_j(y) < f_j(x)$.

مسئله بهینه‌سازی چندهدفی با k تابع هدف که در این مقاله بررسی می‌شود به صورت زیر است:

$$\begin{aligned} \text{Min} \quad & \{f_1(x), \dots, f_k(x)\} \\ \text{s.t.} \quad & x \in S. \end{aligned} \quad (1)$$

یکی از روش‌های پایه‌ای برای حل مسئله بهینه‌سازی چندهدفی فوق، روش اسکالرسازی است. ایده اصلی این روش آن است که تمامی k تابع هدف را در یک تابع اسکالر ادغام کرده و سپس این تابع اسکالر را روی ناحیه شدنی بهینه می‌کند. یکی از پرکاربردترین توابع اسکالرسازی، تابع اسکالرسازی دستاورد است که به صورت زیر ساخته می‌شود:

$$s(q, f(x), \mu) = \text{Max} \{ \mu_i (f_i(x) - q_i) \} + \rho \sum_{i=1}^k \mu_i (f_i(x) - q_i).$$

در تابع فوق (q_1, \dots, q_k) نقطه مرجع است و (μ_1, \dots, μ_k) وزن‌های متناظر با توابع هدف هستند، که اولویت‌های تصمیم‌گیرنده را نشان می‌دهند و ρ عدد مثبت خیلی کوچکی است. با ساخت تابع اسکالرسازی فوق، مسئله زیر برای یافتن جواب‌های پارتو بهینه مساله ۱ حل می‌شود:

$$\begin{aligned} \text{Min} \quad & s(q, f(x), \mu) \\ \text{s.t.} \quad & x \in S. \end{aligned}$$

الگوریتم ارائه شده در این مقاله یک الگوریتم تکاملی تعاملی است که از تکنیک تابع اسکالرسازی دستاورد استفاده می‌کند و جنبه تعاملی الگوریتم در تعیین بردار وزن و نقطه مرجع توسط تصمیم‌گیرنده است که به صورت تعاملی در گام‌های الگوریتم صورت می‌گیرد. برای توضیح الگوریتم تکاملی مورد نظر، به نمادهای زیر احتیاج داریم:

k : تعداد توابع هدف

N_μ : تعداد بردارهای وزن در هر نسل

N : اندازه جمعیت در هر نسل

h : شماره نسل

p^h : جمعیت افراد در نسل h

F_n^h : مرز n ام نسل h

با توجه به تعاریف و نمادهای فوق اکنون الگوریتم مورد نظر را ارائه می‌دهیم.

۳ گام‌های الگوریتم

گام صفر: قرار دهید: $i = 0$ ، $N_\mu = 2^i k$.

گام اول: قرار دهید: $h = 0$ ، p^0 : جمعیتی از N فرد به صورت تصادفی تولید شده.



گام دوم: نقطه مرجع نسل h را، با توجه به اطلاعات اولویت تصمیم گیرنده تعیین کنید.
گام سوم: نمونه ای از N_μ بردار وزن را به صورت زیر تعیین کنید:

$$\mu^j = (\mu_1^j, \mu_2^j, \dots, \mu_k^j), j = 1, \dots, N_\mu \quad \mu_i^j = \frac{1}{u_i^j}, i = 1, \dots, k$$

که در آن مجموعه $\{\mu^1, \mu^2, \dots, \mu^{N_\mu}\}$ نمونه‌ای از بردارهای وزن استفاده شده در الگوریتم و مجموعه $\{u^1, u^2, \dots, u^{N_\mu}\}$ نمونه‌ای از بردارهای وزن خوش توزیع در $(0, 1)^k$ می‌باشد که بدست آوردن آن‌ها در بخش ۴ توضیح داده شده است.
گام چهارم: عملگرهای جهش و تقاطع را روی p^h (جمعیت پدرها) برای تولید N فرد جدید (جمعیت فرزندان) اعمال کنید.
گام پنجم: برای دسته‌بندی افراد به مرزها به ازای هر جواب شدنی $x \in S$ و به ازای هر $j = 1, \dots, N_\mu$ مقدار $s(q, f(x), \mu^j)$ را محاسبه کنید. جواب شدنی‌ای در p با کمترین مقدار $s(q, f(x), \mu^j)$ را در مرز F_1^h قرار دهید و به طور موقت این جواب شدنی را از p حذف کنید. متعاقباً مرزبندی تا زمانی که همه جواب‌های شدنی دسته‌بندی شوند، ادامه می‌یابد. بعد از دسته‌بندی جواب‌های شدنی، جواب‌های نشدنی براساس کل انحراف از محدودیت‌شان دسته‌بندی می‌شوند. به وضوح انحراف از محدودیت کوچکتر، بهتر است.

گام ششم: قرار دهید: $p^{h+1} = \phi, n = 1$

اگر تعداد افراد جمعیت نسل $h + 1$ ، بعلاوه افراد مرز n ام نسل h ، کمتر مساوی تعداد افراد جمعیت است، قرار دهید:

$$n = n + 1, p^{h+1} = p^h \cup F_n^h$$

افراد مرز n نسل h که به کمترین مقدار ASF می‌رسند، در جمعیت p^{h+1} قرار می‌گیرند، تا زمانی که N, p^{h+1} فرد داشته باشد.
گام هفتم: در صورتی که تصمیم‌گیرنده به جواب مطلوب خود رسیده است: توقف کنید و افراد مرز یک نسل h را به عنوان نتیجه الگوریتم نمایش دهید.

در غیر این صورت قرار دهید: $h = h + 1, i = i + 1$ و به گام صفر بروید.

۴ تولید بردارهای $\{u^1, u^2, \dots, u^{N_\mu}\}$

تولید این بردارهای وزن تنها وابسته به تعداد N_μ است و به مسئله‌ای که باید حل شود، بستگی ندارد. یعنی یکبار که این بردارها تولید شدند، برای هر مسئله k هدفی دیگری که این الگوریتم با N_μ بردار وزن استفاده شود، می‌توانند به کار روند. در زیر روش تولید این بردارها را برای مسائلی با دو تابع هدف و سه تابع هدف به طور جداگانه می‌آوریم:

۱.۴ دو تابع هدف

قرار دهید:

$$\mathbf{u}^j = (u_1^j, u_2^j), j = 1, \dots, N_\mu, u_1^j = \varepsilon + (j-1) \frac{1-2\varepsilon}{N_\mu-1}, u_2^j = 1 - u_1^j, \varepsilon = 0.01$$

۲.۴ سه تابع هدف یا بیشتر

قرار دهید:

$$\mathbf{u}^r = \varepsilon + r.s, r = 0, \dots, L, L = E \left(\frac{1-2\varepsilon}{s} \right)$$



که در آن $E(\cdot)$ نشان دهنده جزء صحیح است.

برای اجتناب از داشتن وزن‌هایی مساوی صفر قرار می‌دهیم: $\varepsilon = 0.01$

۵ نتایج اصلی

در الگوریتم تابع اسکالرسازی دستاورد الگوریتم ژنتیک، پیچیدگی محاسباتی $O(k, N, N_\mu)$ می‌باشد. در این الگوریتم N_μ به صورت پیش فرض برابر اندازه جمعیت (N) در نظر گرفته می‌شود. از آنجاییکه الگوریتم‌های تکاملی معمولاً برای حدود ۵ تا ۶ تابع هدف جواب می‌دهند، پس N همیشه نسبت به k عدد بزرگتری است. ما در شروع الگوریتم پیشنهادی خود، تعداد بردارهای وزن را مساوی k در نظر می‌گیریم و نقطه‌ی مرجع را از تصمیم گیرنده بر مبنای اطلاعات اولویت‌هایش می‌خواهیم. در پایان تکرار اول در صورتی که تصمیم‌گیرنده تمایل داشته باشد، به تکرار دوم می‌رویم. در این مرحله تعداد بردارهای وزن دوبرابر می‌شود و نقطه‌ی مرجع بعدی از تصمیم‌گیرنده خواسته می‌شود، احتمالاً تصمیم‌گیرنده در این مرحله سطح توقعات خود را پایین‌تر می‌آورد و نقطه مرجع بعدی را واقع‌بینانه‌تر اختیار می‌کند. بنا به درخواست تصمیم‌گیرنده الگوریتم تکرار خواهد شد، بدیهی است هرچه تصمیم‌گیرنده در تکرارهای پایین‌تری دستور توقف دهد، پیچیدگی محاسباتی پایین‌تری خواهیم داشت. الگوریتم ارائه‌شده، با استفاده از تابع اسکالرسازی دستاورد و پتانسیل الگوریتم‌های تکاملی و همچنین تعامل تصمیم‌گیرنده، جستجو را به سمت مرز پارتو بهینه مطلوب سوق می‌دهد.

مراجع

- [1] A. B. Ruiz, R. Saborido, M. Luque, *A preference based evolutionary algorithm for multi-objective optimization: the weighting achievement scalarizing function genetic algorithm*, Journal of Global Optimization, 1-29, 2014.
- [2] J. Branke, K. Deb, K. Miettinen, R. Slowinski (Eds.), *Multiobjective Optimization: Interactive and Evolutionary Approaches*, Vol. 470, Springer, Berlin, 1998.
- [3] K. Sindhya, A. B. Ruiz, K. Miettinen, *A preference based interactive evolutionary algorithm for multi-objective optimization: PIE*, In: Takahashi, R., Deb, K., Wanner, E., Greco, S. (eds.) Evolutionary Multi-Criterion Optimization, Volume 6576 of Lecture Notes in Computer Science, pp. 212-225, 2011.

پست الکترونیکی: mahnaz_jamali@birjand.ac.ir
پست الکترونیکی: nasimnasrabadi@birjand.ac.ir



یک مدل رتبه بندی در حضور خروجی های نامطلوب با استفاده از مرز کاملاً ناکارا

محمد افضلی نژاد

مینا مولایی*

‡ دانشگاه تفرش

† دانشگاه تفرش

چکیده

یکی از روش های رتبه بندی واحدهای کارا، روش رتبه بندی بر اساس مرز کاملاً ناکارا می باشد. در این روش واحدهای تصمیم گیرنده نسبت به مرز کاملاً ناکارا ارزیابی می شوند. مرز کاملاً ناکارا شامل DMU هایی است که بدترین اندازه کارایی را دارند و هیچ DMU دیگری توسط آنها مغلوب نمی شود. در بسیاری از مسائل، خروجی DMU ها تحت تأثیر عوامل محیطی قرار می گیرند و این عوامل باعث تولید خروجی های نامطلوب می شوند. در این مقاله مدلی ارائه می دهیم که در آن رتبه بندی واحدهای کارا در حضور خروجی های نامطلوب بر اساس مرز کاملاً ناکارا صورت می گیرد.

واژه های کلیدی: خروجی نامطلوب، رتبه بندی، مرز کاملاً ناکارا

مقدمه:

تحلیل پوششی داده ها (DEA) روشی برای ارزیابی کارایی واحدهای تصمیم گیری (DMU) با ساختار مشابه است. از آنجا که در DEA ممکن است بیش از یک واحد کارا ارزیابی شود، روش هایی برای رتبه بندی واحدهای کارا پیشنهاد شده است. یکی از این روش ها روش رتبه بندی بر اساس مرز کاملاً ناکارا می باشد. این روش دارای مزیت هایی نسبت به سایر روش های رتبه بندی می باشد که از جمله این مزیت ها می توان به قابلیت تعیین رتبه واحدهای کارای غیر رأسی اشاره کرد. همچنین این روش برخلاف روش اندرسن و پیترسون [۱] دارای مشکلات نشدنی بودن و ناپایداری نمی باشد. در این روش مرز کاملاً ناکارا شامل DMU هایی با بدترین سطح کارایی است، مشخص می شود. در فرآیند تولید ممکن است علاوه بر خروجی های مطلوب مورد نیاز، خروجی های نامطلوب مانند آلودگی هوا نیز تولید شود. حضور چنین خروجی هایی نقش مهمی در برآورد کارایی و تعیین رتبه DMU های کارا دارد. در این مقاله موقعیت واحد تحت ارزیابی بر اساس مرز کاملاً ناکارا [۳] سنجیده می شود به طوری که یک DMU ناکارا با افزایش ورودی ها و خروجی های نامطلوب و کاهش خروجی های مطلوب روی مرز کاملاً ناکارا تصویر می شود. در این مقاله یک مدل شعاعی خروجی گرا و یک مدل غیر شعاعی مبتنی بر اسلک به منظور رتبه بندی واحدهای کارا در حضور خروجی های نامطلوب بر اساس مرز کاملاً ناکارا پیشنهاد می شود.

۱ مدل شعاعی

فرض کنید n ، واحد تصمیم گیرنده DMU_j ($j = 1, \dots, n$) وجود دارد که هر کدام دارای سه عامل ورودی X ، خروجی Y^g و خروجی نامطلوب Y^b می باشند به طوری که $X = [x_1, \dots, x_m]$ ، $Y^g = [y_1^g, \dots, y_{s_1}^g]$ و $Y^b = [y_1^b, \dots, y_{s_p}^b]$

* سخنران

† پست الکترونیکی: minamolaei1988@yahoo.com

‡ پست الکترونیکی: afzalinejad@tafreshu.ac.ir



و فرض می‌کنیم $\mathbf{X} > \circ, \mathbf{Y}^g > \circ, \mathbf{Y}^b > \circ$. $S \subseteq \mathbb{R}^{m+s}$ پوسته محدب تمام DMU ها، به صورت زیر تعریف می‌گردد:

$$S = \{(\mathbf{x}, \mathbf{y}^g, \mathbf{y}^b) | \mathbf{x} = \sum_{j=1}^n \lambda_j \mathbf{x}_j, \mathbf{y}^g = \sum_{j=1}^n \lambda_j \mathbf{y}_j^g, \mathbf{y}^b = \sum_{j=1}^n \lambda_j \mathbf{y}_j^b, \sum_{j=1}^n \lambda_j = 1, \lambda_j \geq \circ \quad j = 1 \dots n\}$$

تعریف ۱.۱. $F_o(S)$ مرز کاملاً ناکارا در ماهیت خروجی به شکل زیر تعریف می‌شود:

$$F_o(S) = \{(\mathbf{x}, \mathbf{y}^g, \mathbf{y}^b) \in S | \forall \varphi \in \mathbb{R}, \varphi < 1, ((\mathbf{x}_o, \varphi \mathbf{y}_o^g, \frac{1}{\varphi} \mathbf{y}_o^b) \notin S)\}.$$

مدل شعاعی خروجی‌گرا پیشنهادی برای تعیین رتبه کارایی DMU_o با حضور خروجی‌های نامطلوب مبتنی بر مرز کاملاً ناکارا به شکل زیر می‌باشد:

$$\min \varphi \tag{1}$$

$$s.t. \quad \sum_{j=1}^n \lambda_j x_{ij} = x_{io} + s_i^- \quad i = 1, \dots, m$$

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j y_{rj}^g = \varphi y_{ro}^g - s_r^{+g} \quad r = 1, \dots, s_1$$

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j y_{rj}^b = \frac{1}{\varphi} y_{ro}^b + s_r^{+b} \quad r = 1, \dots, s_2$$

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j = 1$$

$$\mathbf{s}^- \geq \circ, \mathbf{s}^{+g} \geq \circ, \mathbf{s}^{+b} \geq \circ, \lambda_j \geq \circ \quad (j = 1, \dots, n)$$

قضیه ۲.۱. $DMU_o = (\mathbf{x}_o, \mathbf{y}_o^g, \mathbf{y}_o^b)$ کاملاً ناکارا است، به عبارت دیگر روی مرز $F_o(S)$ قرار دارد اگر و فقط اگر در هر جواب بهینه مدل شعاعی شرایط زیر برقرار باشند:

$$(\mathbf{s}^{-*}, \mathbf{s}^{+g*}, \mathbf{s}^{+b*}) = (\circ, \circ, \circ) \text{ و } \varphi^* = 1.$$

قضیه ۳.۱. اگر φ^* رتبه $(\mathbf{x}_o, \mathbf{y}_o^g, \mathbf{y}_o^b) \notin F_o(S)$ در ارزیابی توسط مدل شعاعی باشد و $\alpha > 1$ یک اسکالر باشد، آنگاه رتبه $(\mathbf{x}_o, \alpha \mathbf{y}_o^g, \frac{1}{\alpha} \mathbf{y}_o^b)$ برابر $\alpha \varphi^*$ خواهد بود.

مشابه مدل ژو [۴] مدل خطی زیر را می‌توانیم به جای مدل (۱) استفاده کنیم که در آن از بردار انتقال w استفاده شده



است، به طوری که z امین ستون خروجی نامطلوب بعد از انتقال به صورت $(\bar{y}_j^b = -y_j^b + w)$ تعریف می شود.

$\min \varphi$

$$s.t. \quad \sum_{j=1}^n \lambda_j x_{ij} = x_{io} + s_i^- \quad i = 1, \dots, m$$

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j y_{rj}^g = \varphi y_{ro}^g - s_r^{+g} \quad r = 1, \dots, s_1$$

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j \bar{y}_{rj}^b = \varphi \bar{y}_{ro}^b - s_r^{+b} \quad r = 1, \dots, s_2$$

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j = 1$$

$$s^- \geq 0, s^{+g} \geq 0, s^{+b} \geq 0, \lambda_j \geq 0 \quad (j = 1, \dots, n)$$

۲ مدل غیرشعاعی

در این قسمت مدل غیر شعاعی خروجی گرای معرفی می شود. ابتدا به بیان تعاریف زیر می پردازیم:

تعریف ۱.۲. مرز ناکارایی در حالت غیرشعاعی به شکل زیر تعریف می شود:

$$F(S) = \{(\mathbf{x}, \mathbf{y}^g, \mathbf{y}^b) \in S \mid \forall (\mathbf{x}', \mathbf{y}^{g'}, \mathbf{y}^{b'}) \in \mathbb{R}^{m+s_1+s_2}, ((-\mathbf{x}', \mathbf{y}^{g'}, -\mathbf{y}^{b'}) \preceq (-\mathbf{x}, \mathbf{y}^g, -\mathbf{y}^b) \implies (\mathbf{x}', \mathbf{y}^{g'}, \mathbf{y}^{b'}) \notin S\} \subseteq S$$

مدل غیر شعاعی خروجی گرای مبتنی بر اسلک (SBM) به صورت زیر پیشنهاد می گردد:

$$\rho = \min \frac{1 - \frac{1}{s_2} \sum_{r=1}^{s_2} \frac{s_r^b}{y_{ro}^b}}{1 + \frac{1}{s_1} \sum_{r=1}^{s_1} \frac{s_r^g}{y_{ro}^g}} \quad (2)$$

$$s.t. \quad \sum_{j=1}^n \lambda_j x_{ij} = x_{io} + s_i^- \quad i = 1, \dots, m$$

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j y_{rj}^g = y_{ro}^g - s_r^{+g} \quad r = 1, \dots, s_1$$

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j y_{rj}^b = y_{ro}^b + s_r^{+b} \quad r = 1, \dots, s_2$$

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j = 1$$

$$s^- \geq 0, s^{+g} \geq 0, s^{+b} \geq 0, \lambda_j \geq 0 \quad (j = 1, \dots, n)$$



قضیه ۲.۲. $DMU_o = (x_o, y_o^g, y_o^b)$ کاملاً ناکارا است، اگر و فقط اگر در هر جواب بهینه مدل (۲) شرایط زیر برقرار باشند:

$$(s^{-*}, s^{+g*}, s^{+b*}) = (o, o, o) \text{ و } \rho^* = 1.$$

مدل (۲) به صورت زیر خطی می‌گردد:

$$\begin{aligned} \min t - \frac{1}{s_2} \sum_{r=1}^{s_2} \frac{S_r^b}{y_{ro}^b} \\ \text{s.t. } t + \frac{1}{s_1} \sum_{r=1}^{s_1} \frac{S_r^g}{y_{ro}^g} &= 1 \\ \sum_{j=1}^n \mu_j x_{ij} &= tx_{io} + S_i^- \quad i = 1, \dots, m \\ \sum_{j=1}^n \mu_j y_{rj}^g &= ty_{ro}^g - S_r^{+g} \quad r = 1, \dots, s_1 \\ \sum_{j=1}^n \mu_j y_{rj}^b &= ty_{ro}^b + S_r^{+b} \quad r = 1, \dots, s_2 \\ \sum_{j=1}^n \mu_j &= 1 \\ S^- \geq o, S^{+g} \geq o, S^{+b} \geq o, t \geq o, \mu_j \geq o \quad j &= (1, \dots, n) \end{aligned}$$

که در آن: $\mu_j = t\lambda_j, S^- = ts^-, S^{+g} = ts^{+g}, S^{+b} = ts^{+b}$.

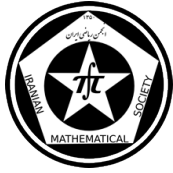
نتیجه‌گیری

در این مقاله روشی برای رتبه‌بندی واحدهای کارا براساس مرز کاملاً ناکارا در حضور خروجی‌های نامطلوب ارائه گردید. مدل‌های پیشنهادی در دو حالت شعاعی و غیرشعاعی معرفی شده است که در آنها فرض بازده به مقیاس متغیر در نظر گرفته شده است.

مراجع

- [1] P. Anderson, N. C. Peterson, *A procedure for ranking efficient units in data envelopment analysis*, Management Science, 39 (1993), pp. 1261-1264.
- [2] W. W. Cooper, L. M. Seiford, K. Tone, *Data Envelopment Analysis :A Comprehensive Text with Models, Applications, References and DEA Solver Software*, 2nd ed., John Wiley, 2006.
- [3] G. R. Jahanshahloo, M. Afzalinejad, *A ranking method based on a full-inefficient frontier*, Applied Mathematical Modelling, 30 (2006), pp. 248-260.
- [4] L. M. Seiford, J. Zhu, *Modeling undesirable factor in efficiency evaluation*, European Journal of Operational Research, 142 (2002), pp. 16-20.
- [5] K. Tone, *A slacks-based measure of efficiency in data envelopment analysis*, European Journal of Operational Research, 130 (2001), pp. 498-509.

آمار و احتمال



اثر حذف همزمان چند مشاهده و زیرمجموعه ای از متغیرهای مستقل بر رگرسیون حداقل مربعات وزنی

خدیدجه عباس زاده*
دانشگاه شهیدچمران اهواز

عبدالرحمن راسخ
دانشگاه شهیدچمران اهواز

بابک بابادی
دانشگاه شهیدچمران اهواز

چکیده

تأثیر حذف یک متغیر و یک مشاهده در معادله رگرسیونی دارای اهمیت خاصی است. در تجزیه و تحلیل رگرسیون خطی هر مشاهده به طور متفاوت بر معادله رگرسیون برازش شده اثر می‌گذارد. یک مشاهده ممکن است مانع از بروز اهمیت برخی متغیرها شود و همچنین حذف یک مشاهده ممکن است مجموع مربعات باقیمانده را کاهش دهد. در این مقاله برخی مباحث تشخیصی برای مدل رگرسیونی با خطاهای ناهمسان با طرح اغتشاش چند مشاهده و زیرمجموعه ای از متغیرهای مستقل بررسی می‌شود. در پایان نیز مثالی برای بیان میحث ارائه شده است.

واژه‌های کلیدی: حداقل مربعات وزنی، خطاهای ناهمسان، طرح اغتشاش

Mathematics Subject Classification [2010]: 13D45, 39B42

۱ مقدمه

تأثیر حذف همزمان یک متغیر و یک مشاهده به تحلیل‌گر داده‌ها در بررسی و درک روابطی که بین متغیرها و مشاهدات در رگرسیون خطی چندگانه وجود دارد، کمک می‌کند (چترجی و هادی [۲]). در مدل رگرسیون خطی چندگانه با تجزیه و تحلیل‌های رگرسیونی مانند برآورد ضرایب رگرسیونی، می‌توان تأثیرگذاری یک مشاهده را در مقایسه با زمانی که حذف می‌شود تشخیص داد. روش‌های زیادی برای بررسی تأثیر حذف مشاهدات بر جوانب مختلف مدل برازش شده وجود دارد. یکی از این روش‌ها، فاصله کوک (کوک [۳]) می‌باشد. در اینجا فاصله کوک تعمیم یافته برای اثر چند مشاهده و برخی مباحث دیگر بررسی می‌شود.

۲ معرفی مدل

مدل رگرسیونی وزنی به صورت زیر می‌باشد:

$$Z = S\beta^* + \varepsilon^*,$$

که در آن $Z = w^{1/2}Y$ یک بردار $n \times 1$ ، $S = w^{1/2}X$ یک ماتریس $n \times p$ از متغیرهای مستقل، β^* یک بردار $p \times 1$ از پارامترهای نامعلوم و به صورت $\hat{\beta}^* = (S'S)^{-1}S'Z$ محاسبه می‌شود و ε^* یک بردار $n \times 1$ از خطاهای تصادفی است.

از آنجا که هدف کار بر روی تأثیر حذف مشاهدات و زیرمجموعه ای از متغیرهای مستقل بر روی معادله رگرسیونی می‌باشد،

* سخنران



اندیس‌های I و J به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\begin{aligned} I &= \{i_1, i_2, \dots, i_m\}, & m < n \\ J &= \{j_1, j_2, \dots, j_r\}, & r < k \end{aligned}$$

که I شاخص m مشاهده حذف شده و J شاخص r متغیر حذف شده می‌باشد، همچنین n و k به ترتیب تعداد کل مشاهدات و متغیرهای موجود در مدل می‌باشند.

مدل مورد مطالعه را می‌توان به چهار مدل تفکیک کرد که به شرح زیر می‌باشند:

• مدل داده‌های کامل:

$$Z = S_{[J]}\beta^* + S_J\theta_J + \epsilon^*. \quad (1)$$

• مدل با I مشاهده حذف شده:

$$Z = S_{[J]}\beta^* + S_J\theta_J + M_I\eta + \epsilon^*. \quad (2)$$

• مدل با J متغیر حذف شده:

$$Z = S_{[J]}\beta^* + \epsilon^*. \quad (3)$$

• مدل با J متغیر و I مشاهده حذف شده:

$$Z = S_{[J]}\beta^* + M_I\eta + \epsilon^*. \quad (4)$$

در مدل داده‌های کامل $\hat{\theta}_J$ پارامتر مربوط به J متغیر حذف شده است که به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\hat{\theta}_J = \frac{S'_J(I - H_{[J]})Z}{S'_J(I - H_{[J]})S_J} = \frac{T'_J Z}{T'_J T_J},$$

که در آن $T_J = (I - H_{[J]})S_J$ بردار باقیمانده‌ها برای وقتی که S_J روی $S_{[J]}$ رگرسیون می‌شود و $H_{[J]} = X_{[J]}(X'_{[J]}X_{[J]})^{-1}X'_{[J]}$ ماتریس پیش‌بینی برای حالتی که J متغیر حذف شده است، می‌باشد.

M_I بردار واحد مربوط به I مشاهده می‌باشد، همچنین در این مدل‌ها برآوردگر β^* برای حالتی که J متغیر حذف می‌شود به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\hat{\beta}_{[J]}^* = (S'_{[J]}S_J)^{-1}S'_{[J]}Z.$$

۳ مباحث تشخیصی در مدل رگرسیونی حداقل مربعات وزنی با حذف همزمان چند مشاهده و زیر مجموعه‌ای از متغیرهای مستقل

در آنالیز رگرسیونی مباحث تشخیصی نقش مهمی را ایفا می‌کنند، چرا که در تحلیل رگرسیونی تشخیص مشاهدات غیرعادی یکی از مفاهیم بااهمیت و قابل توجه است. هدف اصلی مباحث تشخیصی نیز اندازه‌گیری میزان تغییرات بوجود آمده در شرایط وجود داده‌های غیرعادی است. برای بررسی مباحث تشخیصی می‌توان به (بلزلی و همکاران [۱])، (چترجی و هادی [۲])، (پارک و همکاران [۴]) اشاره کرد.

ماتریس پیش‌بینی از جمله مفاهیم اولیه در مباحث تشخیصی برای تشخیص مشاهدات مؤثر (مشاهداتی که از نظر متغیرهای مستقل دارای مقادیر غیر معمول است) می‌باشد. مقدار آن در حالت کلی به صورت زیر است:



$$H = X(X'X)^{-1}X'$$

که برای یافتن نقاط پرنفوذ مؤلفه‌های روی قطر اصلی این ماتریس در نظر گرفته می‌شود، (بلزلی و همکاران [۱]) نقاط مرزی $\frac{yp}{n}$ را پیشنهاد دادند، یعنی نقاط بزرگتر از این مقدار مرزی می‌تواند نقاط مشکوک باشند. معیار بعدی فاصله‌ی کوچک است که به صورت زیر تعریف می‌شود:

۱.۳ معیار فاصله کوچک

این معیار به منظور تعیین تغییرات ایجاد شده در کلیه‌ی مقادیر برازش شده‌ی برآورد در اثر حذف مشاهده‌ی مشکوک تعریف شده است، (کوک [۳]) راهی را برای پیدا کردن مشاهده تأثیر گذار پیشنهاد داد که به صورت زیر است:

$$D_i = \frac{(\hat{\beta}_{(i)} - \hat{\beta})'X'X(\hat{\beta}_{(i)} - \hat{\beta})}{k\sigma^2}$$

نقاط با D_i بزرگ نقاطی هستند که تأثیر قابل ملاحظه‌ای بر برآورد کمترین توان‌های دوم دارند. مقدار D_i را معمولاً با $F_{\alpha,p,n-p}$ مقایسه می‌کنند. این معیار برای مدل مورد بررسی به صورت زیر نگاشته می‌شود:

$$D_I = \frac{e_I'(I - H_I)^{-1}H_I(I - H_I)^{-1}e_I}{k\sigma^2}$$

k تعداد متغیرها در معادله رگرسیونی و H_I ماتریس پیش‌بینی می‌باشند. مقادیر بزرگ D_I نشان می‌دهد که I مشاهده به طور مشترک روی برآوردگر تأثیر گذار هستند. در یک حالت خاص برای $m = 2$ مشاهده، I را به صورت $I = (i, j)$ در نظر گرفته که در این حالت معیار کوچک به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$D_I = (D_i + D_j)\left[1 + \frac{h_{ij}^2}{\delta_{ij}^2}\right] + \frac{h_{ij}^2(e_i^2(2 - h_j) + e_j^2(2 - h_i))}{\delta_{ij}^2 k\sigma^2} + \frac{2e_i e_j h_{ij}(1 + h_{ij}^2 - (h_i h_j))}{\delta_{ij}^2 k\sigma^2}$$

۲.۳ معیار WDSSE

تفاوت مجموع مربعات باقیمانده برای مدل (۱) یعنی مقدار $(SSE_{Z,S})$ و مجموع مربعات باقیمانده برای مدل (۴) یعنی مقدار $(SSE_{Z(I),S(I)[J]})$ را می‌توان به عنوان معیاری برای اثر حذف همزمان I مشاهده و J متغیر مستقل بر مجموع مربعات باقیمانده در نظر گرفت که این تفاوت به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\begin{aligned} WDSSE_{IJ} &= SSE_{Z(I),S(I)[J]} - SSE_{Z,S} \\ &= (T_J \hat{\delta}_J)' T_J \hat{\delta}_J - e_{I[J]}'(I - H_{S_{I[J]}})' e_{I[J]} \end{aligned}$$

بزرگ بودن این معادله دلیل بر معنی دار بودن J متغیر دارد. و چنانچه این مقدار کوچک باشد یا به عبارتی منفی باشد، به این معنی است که I مشاهده از J متغیر بانفوذتر است.

۴ مثال عددی

در این قسمت به عنوان مثال داده‌های موش صحرائی در نظر گرفته شده است (ویسبرگ [۵]). که این داده‌ها شامل سه متغیر مستقل و ۱۹ مشاهده می‌باشند. هدف یافتن مشاهدات بانفوذ و مؤثر برای حالت حذف یک مشاهده و حالتی که دو مشاهده با هم حذف می‌شود، است که در جدول ۱ این مشاهدات بر اساس معیارهای مطرح شده، بیان شده است. آنچه از مقادیر h_i و



D_i پیدا است، مشاهدات ۳ و ۵ و ۱۳ در هر دو مشترک هستند و می‌توانند به عنوان مشاهدات بانفوذ در نظر گرفته شوند. در قسمت D_I به تعداد $(\binom{9}{2})$ ترکیب دوتایی از مشاهدات وجود دارد که در هر مرحله یکی از این زوج مشاهدات حذف و کوک محاسبه می‌شود، بیشترین مقادیر به دست آمده در جدول ۱ بیان شده است، آنچه از این مقادیر حاکی است، مشاهده می‌شود که به عنوان مثال مشاهده‌ی ۸ تأثیرگذار نیست، اما چنان چه با مشاهده سوم در نظر گرفته شود این زوج مشاهده به صورت مشترک بر برآورد تأثیرگذار هستند.

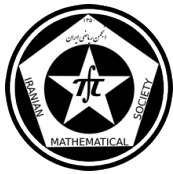
جدول ۱: مشاهدات مؤثر و بانفوذ

D_I	D_i	h_i
(۱۱، ۱۳)، (۵، ۱۶)، (۳، ۱۴)، (۳، ۱۳)، (۳، ۸)، (۳، ۵)	۱، ۳، ۵، ۱۳، ۱۹	۳، ۵، ۱۳

مراجع

- [1] D. A. Belsley, E. Kuh, R. E. Welsch, *Regression Diagnostics*, New York: John Wiley, 1980.
- [2] S. Chatterjee, A. Hadi, *Impact of Simultaneous Omission of a Variable and an Observation on a Linear Regression Equation*, *Comp.Stati, and data analysis*, 6, 129-144, 1988.
- [3] R. D. Cook, *Detection of Influential Observations in Linear Regression*, *Technometrics Association*, 19(1), 15-18, 1977.
- [4] S. Park, B. Lee, H. Jung, *Joint Impact of Multiple Observations on a Subset of Variables in Multiple Linear Regression*, *Journal of Applied Statistics*, vol. 32, no.3, 207-219, 2005.
- [5] H. Weisberg, *Applied Linear Regression*, John Wiley, 1982.

پست الکترونیکی: k-abbaszadeh@mscstu.scu.ac.ir
 پست الکترونیکی: rasekh_a@scu.ac.ir
 پست الکترونیکی: b.babadi@scu.ac.ir



برآورد میانگین توزیع نرمال دو متغیره با استفاده از نمونه‌گیری مجموعه رتبه‌دار فرین متحرک

زینب پیرسیاه اسطلخی*
دانشگاه اصفهان

ایران پناه، نصراله
دانشگاه اصفهان

چکیده

یکی از اهداف مهم نمونه‌گیری به دست آوردن استنباط‌هایی درباره پارامترهای جامعه است. بنابراین به‌کارگیری یک روش نمونه‌گیری مناسب بسیار مهم است. نمونه‌گیری مجموعه رتبه‌دار فرین متحرک نسخه‌ای اصلاح شده از نمونه‌گیری مجموعه رتبه‌دار است. در این مقاله برآورد میانگین توزیع نرمال دو متغیره با استفاده از یک متغیر تصادفی کمکی در روش نمونه‌گیری مجموعه رتبه‌دار فرین متحرک ارائه می‌شود. سپس برآوردهای ماکسیمم درستنمایی برای میانگین توزیع نرمال دو متغیره معرفی می‌شوند. در ادامه در یک مطالعه شبیه‌سازی نتایج با نمونه‌گیری تصادفی ساده مورد مقایسه قرار می‌گیرند.

واژه‌های کلیدی: توزیع نرمال دو متغیره، نمونه‌گیری تصادفی ساده، نمونه‌گیری مجموعه رتبه‌دار، نمونه‌گیری مجموعه رتبه‌دار فرین متحرک، متغیر کمکی.

Mathematics Subject Classification [2010]: 62D05, 62E25, 62E30.

۱ مقدمه

نمونه‌گیری یکی از مهم‌ترین شاخه‌های علم آمار است که با استفاده از آن می‌توان استنباط‌هایی درباره مشخصات جامعه به دست آورد. یکی از روش‌های متداول در نمونه‌گیری که برای جمع‌آوری اطلاعات به‌کار می‌رود، نمونه‌گیری تصادفی ساده^۱ (SRS) است. زمانی که اندازه‌گیری واحدهای نمونه گران و مشکل، اما رتبه‌بندی واحدها ارزان و آسان است از روش نمونه‌گیری مجموعه رتبه‌دار^۲ (RSS) استفاده می‌شود. در این روش ابتدا m^2 واحد به طور تصادفی از جامعه مورد نظر انتخاب و به m گروه m تایی تقسیم می‌شوند. سپس بدون اندازه‌گیری دقیق و به صورت بصری واحدها در هر مجموعه رتبه‌بندی می‌گردند. از گروه i -ام ($i = 1, 2, \dots, m$) واحدی که دارای رتبه i است انتخاب شده و مقدار آن اندازه‌گیری می‌شود. اگر لازم باشد اندازه نمونه بزرگتر باشد این فرآیند r بار تکرار می‌گردد به طوری که اندازه نمونه $n = rm$ شود. وقتی اندازه مجموعه بزرگ باشد رتبه‌بندی با خطا همراه است که این مسئله بر روی کارایی برآوردها اثر می‌گذارد. برای کاهش خطا در رتبه‌بندی، روش نمونه‌گیری مجموعه رتبه‌دار فرین متحرک^۳ ($MERSS$) که در آن اندازه مجموعه‌ها متغیر است معرفی می‌گردد. روش RSS ابتدا توسط [۴] برای برآورد محصول یونجه مراتع معرفی شد. [۵] روش RSS با استفاده از متغیرهای کمکی را معرفی کرد. روش $MERSS$ ابتدا توسط [۱] معرفی گردید. [۳] برآوردهای ماکسیمم درستنمایی توزیع‌های مکان را در روش $MERSS$ مطالعه کردند. آنها نشان دادند در توزیع نرمال برآوردهای ماکسیمم درستنمایی با استفاده از روش $MERSS$

*سخنران

^۱Simple Random Sampling

^۲Ranked Set Sampling

^۳Moving Extremes Ranked Set Sampling



کارا تر از روش SRS است. [۲] برآورد میانگین توزیع نرمال دومتغیره را در روش $MERSS$ با استفاده از متغیر کمکی به‌دست آوردند. در این مقاله ابتدا در بخش ۲ روش $MERSS$ با استفاده از متغیر کمکی برای برآورد میانگین توزیع نرمال دومتغیره ارائه می‌گردد. سپس در بخش ۳ برآوردگرهای ماکسیمم درست‌نمایی برای میانگین‌های توزیع نرمال دومتغیره و خواص آنها ارائه می‌گردند. در ادامه در بخش ۴ کارایی این برآوردگرها با برآوردگرهای حاصل از روش SRS به‌صورت نظری یا شبیه‌سازی مورد مقایسه قرار می‌گیرند.

۲ روش $MERSS$

فرض کنید (X, Y) یک نمونه تصادفی دومتغیره است به طوری که اندازه‌گیری و یا رتبه‌بندی متغیر تصادفی Y مشکل است، اما اندازه‌گیری و یا رتبه‌بندی متغیر تصادفی X که با Y همبستگی بالایی دارد آسان‌تر است. متغیر تصادفی X به صورت زیر برای پیدا کردن رتبه Y استفاده می‌شود: فرض کنید یک بردار تصادفی (X, Y) توزیع نرمال دومتغیره به صورت $N_2(\mu_x, \mu_y, \sigma_x^2, \sigma_y^2, \rho)$ با تابع چگالی توأم $f_{X,Y}(x, y)$ باشد به طوری که $-\infty < x, y, \mu_x, \mu_y < \infty$ و $-1 < \rho < 1$. روش $MERSS$ دارای مراحل زیر است:

(۱) ابتدا m نمونه تصادفی به ترتیب با اندازه‌های $1, \dots, m$ از توزیع نرمال دومتغیره انتخاب می‌شود. ماکسیمم در هر مجموعه بر اساس متغیر X تعیین می‌شود.

(۲) مرحله ۱ این بار برای مقادیر مینیمم در هر مجموعه تکرار می‌شود.

(۳) اگر لازم باشد اندازه نمونه بزرگتر باشد این فرآیند r بار تکرار می‌گردد به طوری که اندازه نمونه $n = 2rm$ شود.

(۴) n واحد شناخته شده برای هر دو متغیر به طور دقیق اندازه‌گیری می‌شود.

با استفاده از این روش، مجموعه‌ای از n زوج به‌دست می‌آید که یک نمونه $MERSS$ با متغیر کمکی نامیده می‌شود.

فرض کنید $\{(X_{(1:k)}, Y_{[1:k]}), (X_{(k:k)}, Y_{[k:k]}) ; k = 1, 2, \dots, m\}$ یک نمونه $MERSS$ از تابع چگالی $f_{X,Y}(x, y)$ مبنی بر متغیر کمکی X باشد. اگر رتبه‌بندی به طور دقیق انجام شود $X_{(i:k)}$ و $Y_{[i:k]}$ به ترتیب آماره رتبه‌ای نرمال استاندارد $-i$ ام از یک نمونه تصادفی ساده از اندازه k از توزیع X و Y هستند به طوری که $i = 1$ یا $i = k$. دو برآوردگر نارایب μ_y و μ_x در روش $MERSS$ به ترتیب به‌صورت زیر است:

$$\hat{\mu}_{xMERS}^* = \frac{1}{2m} \sum_{k=1}^m (X_{(1:k)} + X_{(k:k)}) \quad (1)$$

$$\hat{\mu}_{yMERS}^* = \frac{1}{2m} \sum_{k=1}^m (Y_{[1:k]} + Y_{[k:k]}) \quad (2)$$

حال فرض کنید $\hat{\mu}_{xSRS}^*$ و $\hat{\mu}_{ySRS}^*$ دو برآوردگر بر اساس نمونه تصادفی ساده از توزیع نرمال دومتغیره باشد. در بخش ۴ با استفاده از شبیه‌سازی نشان داده می‌شود روش $MERSS$ از روش SRS کارا تر است.

۳ برآوردگرهای ماکسیمم درست‌نمایی

تابع چگالی و تابع توزیع تجمعی نرمال استاندارد به ترتیب با ϕ و Φ نشان داده می‌شود. برای به‌دست آوردن برآورد ماکسیمم درست‌نمایی پارامترهای μ_y و μ_x تابع درست‌نمایی زیر را در نظر بگیرید (فرض کنید $\sigma_x^2 = \sigma_y^2 = 1$)

$$\mu_x - \bar{x} + \rho(\bar{y} - \mu_y) + \frac{1 - \rho^2}{2m} \sum_{k=1}^m (k - 1) \left\{ \frac{\phi(x_{(k:k)} - \mu_x)}{\Phi(x_{(k:k)} - \mu_x)} - \frac{\phi(x_{(1:k)} - \mu_x)}{[1 - \Phi(x_{(1:k)} - \mu_x)]} \right\} = 0 \quad (3)$$



$$\mu_y - \bar{y} + \rho(\bar{x} - \mu_x) = 0 \quad (4)$$

رابطه های ۳ و ۴ به صورت زیر ساده می‌شوند:

$$\mu_y = \bar{y} - \rho(\bar{x} - \mu_x) \quad (5)$$

$$\mu_x - \bar{x} + \frac{1}{2m} \sum_{k=1}^m (k-1) \left\{ \frac{\phi(x_{(k:k)} - \mu_x)}{\Phi(x_{(k:k)} - \mu_x)} - \frac{\phi(x_{(1:k)} - \mu_x)}{[1 - \Phi(x_{(1:k)} - \mu_x)]} \right\} = 0 \quad (6)$$

با حل عددی معادلات ۵ و ۶ برآوردگرهای ماکسیمم درستنمایی μ_x و μ_y که به ترتیب توسط $\hat{\mu}_{xMERSS}$ و $\hat{\mu}_{yMERSS}$ نشان داده می‌شوند به دست می‌آید. فرض کنید $\hat{\mu}_{xSRS}$ و $\hat{\mu}_{ySRS}$ برآوردگرهای ماکسیمم درستنمایی مبنی بر نمونه تصادفی ساده از توزیع نرمال دومتغیره باشند. در بخش ۴ با استفاده از شبیه‌سازی نشان داده می‌شود روش $MERSS$ از روش SRS کارتر است.

۴ مطالعه شبیه‌سازی

در این بخش از شبیه‌سازی مونت کارلو با ۳۰۰۰۰ بار تکرار برای مقایسه کارایی برآوردگرها استفاده شده است. نمونه‌ها از توزیع $N_2(\mu_x, \mu_y, \sigma_x^2, \sigma_y^2, \rho)$ تولید شده‌اند که ρ ضریب همبستگی بین دو متغیر X و Y را نشان می‌دهد. همچنین حجم مجموعه از ۱ تا ۱۰ تغییر می‌کند.

در جدول ۱ مقایسه کارایی دو برآوردگر $\hat{\mu}_{xMERSS}^*$ (معادله ۱) و $\hat{\mu}_{xSRS}^*$ انجام شده است. این جدول نشان می‌دهد $eff(\hat{\mu}_{xMERSS}^*, \hat{\mu}_{xSRS}^*)$ همیشه بزرگتر از یک است و با افزایش m کارایی افزایش می‌یابد.

جدول ۱: کارایی برآوردگرهای میانگین $\hat{\mu}_{xMERSS}^*$ نسبت به $\hat{\mu}_{xSRS}^*$

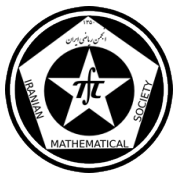
m	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰
eff	۱/۰۰	۱/۱۹	۱/۳۴	۱/۴۶	۱/۵۷	۱/۶۷	۱/۷۶	۱/۸۳	۱/۹۱	۱/۹۸

در جدول ۲ مقایسه کارایی دو برآوردگر $\hat{\mu}_{yMERSS}^*$ (معادله ۲) و $\hat{\mu}_{ySRS}^*$ انجام شده است. این جدول نشان می‌دهد $eff(\hat{\mu}_{yMERSS}^*, \hat{\mu}_{ySRS}^*)$ همیشه بزرگتر از یک است.

جدول ۲: کارایی برآوردگرهای میانگین $\hat{\mu}_{yMERSS}^*$ نسبت به $\hat{\mu}_{ySRS}^*$

m	$\leftarrow \rho \downarrow$	۰/۲	۰/۴	۰/۶	۰/۸
۱	۱/۰۰	۱/۰۰	۱/۰۰	۱/۰۰	۱/۰۰
۲	۱/۰۱	۱/۰۳	۱/۰۵	۱/۰۶	۱/۰۷
۳	۱/۰۱	۱/۰۴	۱/۰۸	۱/۰۲	۱/۰۳
۴	۱/۰۱	۱/۰۲	۱/۰۵	۱/۰۳	۱/۰۴
۵	۱/۰۲	۱/۰۳	۱/۰۶	۱/۰۴	۱/۰۵
۶	۱/۰۲	۱/۰۴	۱/۰۷	۱/۰۵	۱/۰۶
۷	۱/۰۲	۱/۰۴	۱/۰۷	۱/۰۵	۱/۰۶
۸	۱/۰۲	۱/۰۴	۱/۰۸	۱/۰۶	۱/۰۷
۹	۱/۰۲	۱/۰۴	۱/۰۸	۱/۰۶	۱/۰۷
۱۰	۱/۰۲	۱/۰۴	۱/۰۹	۱/۰۶	۱/۰۷

در جدول ۳ مقایسه کارایی دو برآوردگر کمکی $\hat{\mu}_{xMERSS}$ (معادله ۵) و $\hat{\mu}_{xSRS}$ انجام شده است. این جدول نشان می‌دهد $eff(\hat{\mu}_{xMERSS}, \hat{\mu}_{xSRS})$ همیشه بزرگتر از یک است و با افزایش m کارایی افزایش می‌یابد.



جدول ۳: کارایی برآوردگرهای ماکسیمم درست‌نمایی $\hat{\mu}_{xMERSS}$ نسبت به $\hat{\mu}_{xSRS}$

m	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰
eff	۱/۰۰	۱/۲۳	۱/۴۳	۱/۶۳	۱/۷۲	۱/۸۹	۲/۰۱	۲/۰۷	۲/۱۸	۲/۲۸

در جدول ۴ مقایسه کارایی دو برآوردگر اصلی $\hat{\mu}_{yMERSS}$ (معادله ۶) و $\hat{\mu}_{ySRS}$ انجام شده است. این جدول نشان می‌دهد $eff(\hat{\mu}_{yMERSS}, \hat{\mu}_{ySRS})$ برای هر $\rho > 0$ همیشه بزرگتر از یک است.

جدول ۴: کارایی برآوردگرهای ماکسیمم درست‌نمایی $\hat{\mu}_{yMERSS}$ نسبت به $\hat{\mu}_{ySRS}$

m	$\rho = 0$	$\rho = 0.2$	$\rho = 0.4$	$\rho = 0.6$	$\rho = 0.8$
۱	۱/۰۰	۱/۰۰	۱/۰۰	۱/۰۰	۱/۰۰
۲	۱/۱۵	۱/۰۲	۱/۰۸	۱/۰۲	۱/۰۸
۳	۱/۲۴	۱/۰۴	۱/۰۴	۱/۰۴	۱/۰۴
۴	۱/۳۶	۱/۰۸	۱/۰۸	۱/۰۸	۱/۰۸
۵	۱/۴۰	۱/۰۸	۱/۰۸	۱/۰۸	۱/۰۸
۶	۱/۴۴	۱/۰۸	۱/۰۸	۱/۰۸	۱/۰۸
۷	۱/۴۹	۱/۱۱	۱/۱۱	۱/۱۱	۱/۱۱
۸	۱/۵۰	۱/۱۱	۱/۱۱	۱/۱۱	۱/۱۱
۹	۱/۵۵	۱/۱۰	۱/۱۰	۱/۱۰	۱/۱۰
۱۰	۱/۵۸	۱/۰۸	۱/۰۸	۱/۰۸	۱/۰۸

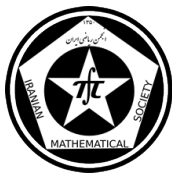
۵ بحث و نتیجه‌گیری

در این مقاله روش $MERSS$ به عنوان روشی اصلاح شده از RSS معرفی شد. سپس برآوردگرهای ماکسیمم درست‌نمایی تحت توزیع نرمال دومتغیره در روش $MERSS$ با متغیر کمکی محاسبه گردید. سپس کارایی برآوردگرهای به‌دست آمده در روش‌های $MERSS$ و SRS به صورت نظری و شبیه‌سازی مورد مقایسه قرار گرفت و نشان داده شد برآوردگرهای به‌دست آمده با استفاده از روش $MERSS$ با متغیر کمکی کاراتر از روش SRS است.

مراجع

- [1] M.T. Al-Odat, M.F. Al-Saleh, *A variation of ranked set sampling*, Journal of Application Statistical Society, 10 (2001), 137-146.
- [2] M.F. Al-Saleh, A.M. Al-Ananbeh, *Estimation of the means of the bivariate normal using moving extreme ranked set sampling with concomitant variable*, Statistical Papers, 48 (2007), 179-195.
- [3] M.F. Al-Saleh, S.A. Al-Hadrami, *Parametric estimation for the location parameter for symmetric distributions using moving extremes ranked set sampling with application to trees data*, Environmetrics, 14 (2003), 651-664.
- [4] G.A. McIntyre, *A method for unbiased selective sampling using ranked sets*, Australian Journal of Agricultural Research, 3 (1952), 385-390.
- [5] S. Stokes, *Ranked set sampling with concomitant variables*, Communications in Statistics-Theory and Methods, 6 (1977), 1207-1211.

: pirsiah@yahoo.com
: Iranpanah@sci.ui.ac.ir



برخی خواص توزیع وایبل - بر نوع ۲ (BURR II)

حسن زارعی
دانشگاه سیستان و بلوچستان

نجمیه مکسائی*
دانشگاه سیستان و بلوچستان

چکیده

بر (BURR) در سال ۱۹۴۲ با حل معادله دیفرانسیلی به ۱۲ نوع توزیع دسترسی پیدا کرد که به توزیع های بر مشهورند. یکی از اعضای این خانواده توزیع بر نوع ۲ می باشد. در این مقاله ابتدا توزیع وایبل- بر نوع ۲ (BURR II) را با مولد نسبت شانس مورد مطالعه قرار می دهیم و همچنین برخی خصوصیات این توزیع، تابع چندک، گشتاور، شانون آنتروپی و تابع نرخ خطر را بدست می آوریم.

واژه های کلیدی: توزیع بر نوع ۲، توزیع وایبل، گشتاور، تابع چندک

Mathematics Subject Classification [2010]: 62E15, 62F10

۱ مقدمه

توزیع وایبل، توزیعی شناخته شده برای مسائل در قابلیت اعتماد است. در دهه گذشته از توزیع های کلاسیک متعدد برای مدلسازی داده ها در چندین عرصه مانند مهندسی، محیطی، آماری، دانش پزشکی و ... استفاده شده است. توزیع های جدید معرفی شده در سال های اخیر قابلیت انعطاف پذیری بیشتری برای برازش به داده ها را دارند و باعث می شوند بتوانیم مدل های بهتری به داده های موجود برازش دهیم. در این مقاله ابتدا با یک مولد که به مرجع [۱] ارجاع داده می شود، توزیع وایبل- بر نوع ۲ را معرفی می کنیم و تعدادی از خواص این توزیع را بدست می آوریم.

تعریف ۱.۱. تابع توزیع $F(\cdot)$ را از خانواده توزیع های وایبل- بر نوع ۲ گوئیم هرگاه تابع توزیع آن به صورت زیر باشد:

$$F(x; \alpha, \beta, P) = 1 - \exp\left\{-\alpha \left[\frac{(1+e^{-x})^{-P}}{1 - (1+e^{-x})^{-P}}\right]^\beta\right\} \quad -\infty < x < \infty \quad (1)$$

و تابع چگالی آن به صورت زیر است:

$$f(x; \alpha, \beta, P) = \alpha \beta P e^{-x} \frac{(1+e^{-x})^{-P-1}}{(1 - (1+e^{-x})^{-P})^2} \left[\frac{(1+e^{-x})^{-P}}{1 - (1+e^{-x})^{-P}}\right]^{\beta-1} \exp\left\{-\alpha \left[\frac{(1+e^{-x})^{-P}}{1 - (1+e^{-x})^{-P}}\right]^\beta\right\} \quad (2)$$

در لم زیر ارتباط بین توزیع های وایبل- بر نوع ۲ با توزیع های وایبل، نمایی و گامبل می پردازیم:

*نجمیه مکسائی



لم ۲.۱. الف) اگر Y یک متغیر تصادفی وایبل با پارامترهای α و β باشد آنگاه متغیر تصادفی

$$X = -\ln(1 + e^{-\frac{Y}{\beta+1}})^{\frac{1}{\beta}} - 1$$

دارای توزیع وایبل-بر نوع ۲ با پارامترهای α, β, P است.

ب) اگر Y یک متغیر تصادفی نمایی با پارامتر α باشد آنگاه متغیر تصادفی $X = -\ln(1 + e^{\frac{Y}{\beta+1}})^{\frac{1}{\beta}} - 1$ دارای توزیع وایبل-بر نوع ۲ با پارامترهای α, β, P است.

ج) اگر Y یک متغیر تصادفی گامبل با پارامتر β باشد آنگاه متغیر تصادفی $X = -\ln(1 + e^{\frac{e^{-Y}}{\alpha^{\frac{1}{\beta} + e^{-Y}}}})^{\frac{1}{\beta}} - 1$ دارای توزیع وایبل-بر نوع ۲ با پارامترهای α, β, P است.

قضیه ۳.۱. فرض می‌کنیم (Ω, Σ, P) یک فضای احتمال و $H=[a, b]$ یک فاصله برای $a < b$ باشد. فرض کنید $H: \Omega \rightarrow H$ یک متغیر تصادفی پیوسته با تابع توزیع $F(X)$ و q_1 و q_2 دو توابع حقیقی تعریف شده روی H باشد به طوری که

$$E[q_1(X) | X \geq x] = E[q_2(X) | X \geq x]\eta(x), \quad x \in H,$$

با تابع حقیقی η تعریف شده است. فرض کنید q_1 و q_2 توابع پیوسته دوبار مشتقپذیر و تابع اکیدا یکنوا روی مجموعه H است. در نهایت فرض کنید معادله $q_2\eta = q_1$ جواب حقیقی درون فاصله H ندارد، همچنین G منحصر بفرد است که با توابع q_1, q_2 و η تعیین می‌شود. همچنین

$$F(X) = \int_a^x C \left| \frac{\eta'(x)}{\eta(u)q_2(x) - q_1(u)} \right| e^{-s(u)} du,$$

که تابع s یک حل از معادله دیفرانسیل $s' = \frac{\eta' q_2}{\eta q_2 - q_1}$ و C ثابت است [۲].

گزاره ۴.۱. فرض کنید $X: \Omega \rightarrow (0, \infty)$ یک متغیر تصادفی پیوسته باشد و فرض کنید $q_2(x) = 1$ و $q_1 = \alpha \left(\frac{(1+e^{-x})^{-P}}{1 - (1+e^{-x})^{-P}} \right)^\beta - 1$ (برای $x > 0$) است. X دارای تابع چگالی (۲) است اگر و فقط اگر η تعریف شده در قضیه ۳.۱ به صورت زیر باشد:

$$\eta = \alpha \left(\frac{(1+e^{-x})^{-P}}{1 - (1+e^{-x})^{-P}} \right)^\beta$$

اثبات. فرض می‌کنیم X دارای چگالی (۲) است، در نتیجه طبق فرضیات و η داده شده، داریم

$$s' = \frac{\eta' q_2(x)}{\eta(x)q_2(x) - q_1(x)} = \alpha \beta P e^{-x} (1+e^{-x})^{-P-1} \frac{(1+e^{-x})^{-P(\beta-1)}}{(1 - (1+e^{-x})^{-P})^{\beta+1}}, \quad x > 0$$

$$s(x) = \alpha \left(\frac{(1+e^{-x})^{-P}}{1 - (1+e^{-x})^{-P}} \right)^\beta, \quad x > 0, \quad \text{or} \quad e^{-s(x)} = e^{-\alpha \left(\frac{(1+e^{-x})^{-P}}{1 - (1+e^{-x})^{-P}} \right)^\beta}, \quad x > 0.$$

□

حال، با توجه به قضیه ۳.۱، X دارای تابع چگالی (۲) است.

لم ۵.۱. فرض کنید $k(\cdot)$ تابع چگالی احتمال وایبل و $G(x)$ تابع توزیع بر نوع ۲ است در اینصورت اگر X یک متغیر تصادفی با چگالی

$$f(x) = \frac{g(x; \xi)}{(1 - G(x; \xi))^2} k\left(\frac{G(x; \xi)}{1 - G(x; \xi)}\right)$$



باشد شانون آنتروپی X به صورت زیر است:

$$\eta_x = E(\ln(G^{-1}(\frac{T}{T+1}))) - 2E(\ln(T+1)) + \eta_T$$

که در آن η_T شانون آنتروپی متغیر تصادفی T با چگالی $k(t)$ و $T = \frac{G(x;\xi)}{1-G(x;\xi)}$ دارای چگالی وایبل است.

حال گشتاور r -ام توزیع وایبل-بر نوع ۲ را به صورت زیر بدست می آوریم. با استفاده از بسط سری توانی و بسط دو جمله ای می توان تابع توزیع وایبل-بر نوع ۲ را به صورت زیر نوشت:

$$F(x) = \sum_{k=1, j=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1} \alpha^k \Gamma(k\beta + j)}{k! j! \Gamma(k\beta)} G(x)^{k\beta+j},$$

فرض می کنیم $H_{k\beta+j} = G^{k\beta+j}$ توزیع G -نمایی شده با پارامتر $k\beta + j$ است، که در آن

$$w_{j,k} = \frac{(-1)^{k+1} \alpha^k \Gamma(k\beta + j)}{k! j! \Gamma(k\beta)}.$$

است. حال با استفاده از تابع توزیع بر نوع ۲ داریم:

$$F(x) = \sum_{k=1, j=0}^{\infty} w_{j,k} H(x)_{(k\beta+j)P}(x),$$

و تابع چگالی آن

$$f(x) = \sum_{k=1, j=0}^{\infty} w_{j,k} h(x)_{(k\beta+j)P}(x). \quad (3)$$

است. که در آن $h(x)_{(k\beta+j)P}(x)$ به توزیع بر نوع ۲ با پارامتر $(k\beta + j)P$ دلالت دارد. چگالی فوق اشاره دارد به اینکه چگالی وایبل-بر نوع ۲ ترکیبی از چگالی بر نوع ۲ است. حال گشتاور r -ام این توزیع به صورت زیر است. با توجه به تابع چگالی (۳) و گشتاور r -ام توزیع بر نوع ۲ داریم:

$$E(X^r) = \sum_{k=1, j=0}^{\infty} w_{j,k} \frac{1}{\Gamma((k\beta + j)P)} [-\Gamma'((k\beta + j)P) + r] + \Gamma'((k\beta + j)P) + r \Gamma(1 - r)]$$

لم ۶.۱. فرض کنید $0 < \lambda < 1$ و $Q(\lambda)$ تابع چندک توزیع وایبل-بر نوع ۲ باشد. آنگاه $Q(\lambda)$ به صورت زیر بدست می آید:

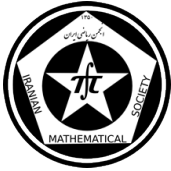
$$Q(\lambda) = -\ln \left[\frac{(-\frac{1}{\alpha} \ln(1 - \lambda))^{\frac{1}{\beta}}}{(1 + (-\frac{1}{\alpha} \ln(1 - \lambda))^{\frac{1}{\beta}})} \right]^{\frac{1}{P}} - 1.$$

تابع نرخ خطر توزیع فوق به صورت زیر است:

$$h_f(x) = \frac{f(x)}{1 - F(x)} = \alpha \beta P e^{-x} \frac{(1 + e^{-x})^{-P-1}}{(1 - (1 + e^{-x})^{-P})^2} \left[\frac{(1 + e^{-x})^{-P}}{1 - (1 + e^{-x})^{-P}} \right]^{\beta-1}.$$

۲ نتیجه گیری

یک مورد خاص از خانواده توزیع های وایبل- G ، توزیع وایبل-بر نوع ۲ (BURR II) است، که مورد مطالعه قرار گرفته است. تعدادی خواص از توزیع وایبل-بر نوع ۲ شامل تابع چندک، گشتاورها، شانون آنتروپی و ... بدست آوردیم. با توجه به لم ۵.۱ نتیجه می گیریم که بین شانون آنتروپی توزیع وایبل-بر نوع ۲ و توزیع وایبل رابطه مستقیم وجود دارد.



چهل و ششمین کنفرانس ریاضی ایران

۳-۶ شهریور ۱۳۹۴

دانشگاه یزد



ص: ۴-۴

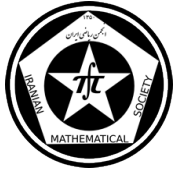
برخی خواص توزیع وایبل - بر نوع ۲ (BURR II)

پوستر

مراجع

- [1] Alzaatreh, A., Lee, C., Famoye, F, *A new method for generating families of continuous distributions*, Metron: International Journal of Statistics, 71:63-79(2013).
- [2] Gl'anzel, W, *A characterization theorem based on truncated moments and its application to some distribution families*, In: Mathematical Statistics and Probability Theory, Volume B, pp. 75-84 (Reidel, Dordrecht, 1987).

پست الکترونیکی: n.maksaei@gmail.com
پست الکترونیکی: zarei@math.usb.ac.ir



برخی نابرابری‌های گشتاوری برای متغیرهای پذیرفتنی

نگار اقبال
دانشگاه شاهرودآمنه نوروزی فیروز*
دانشگاه شاهرود

چکیده

اکثر نابرابری‌هایی که برای گشتاور مطلق مجموع و تفاضل متغیرهای تصادفی ارایه شده‌اند، با فرض استقلال متغیرهای تصادفی همراه است، در صورتی که در واقعیت بیشتر با متغیرهایی مواجه هستیم که مستقل نیستند. در این مقاله، سعی کردیم نتایج موجود را برای دسته‌ای از متغیرهای تصادفی به نام متغیرهای تصادفی پذیرفتنی که شامل متغیرهای تصادفی مستقل نیز هستند، تعمیم دهیم و همچنین چند نابرابری برای متغیرهای تصادفی متقارن و پذیرفتنی به دست آورده‌ایم.

واژه‌های کلیدی: متغیرهای تصادفی پذیرفتنی، گشتاور مطلق، تابع مشخصه، متغیر تصادفی متقارن

Mathematics Subject Classification [2010]: 60E10, 60E15

۱ مقدمه

نابرابری‌های فراوانی برای گشتاورهای مطلق متغیرهای تصادفی مستقل با تکنیک‌های گوناگون ارایه شده است. یکی از روش‌های جالب استفاده از تابع مشخصه می‌باشد که مورد توجه افرادی از جمله هسو [۳]، ون بهر و ایسن [۴] و یوشاکوف [۵] قرار گرفته است.

در مقاله سعی کردیم کران‌هایی برای گشتاور مطلق مجموع و تفاضل متغیرهای تصادفی پذیرفتنی بدست آوریم. در بخش دوم تعاریف و لم‌های مورد نیاز را بیان می‌کنیم و در بخش سوم نتایج اساسی را در قالب قضیه بیان و اثبات می‌کنیم.

۲ تعاریف و لم‌های مورد نیاز

ون بهر ایسن [۴] با استفاده از تابع مشخصه متغیر تصادفی لم زیر را برای به دست آوردن گشتاور مطلق نشان دادند که ما از آن در به دست آوردن نابرابری‌های گشتاوری بهره برده‌ایم.

لم ۱.۲. فرض کنید X یک متغیر تصادفی ساده با تابع توزیع $F(x)$ و تابع مشخصه $\varphi(x)$ باشد که برای $p > 0$ ، $E|X|^p < \infty$. اگر $\alpha_k = EX^k$ که k عدد صحیح غیر منفی است، آنگاه

$$E|X|^p = c(p) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{R(\varphi(t)) - \sum_{k=0}^s (-1)^k \alpha_k t^k}{|t|^{p+1} (2k)!} dt \quad (1)$$

* سخنران



s قسمت صحیح $\frac{p}{4}$ است و

$$c(p) = \frac{\Gamma(p+1)}{\pi} \cos \frac{(p+1)\pi}{2} \quad (2)$$

و $R(\varphi(t))$ قسمت صحیح تابع مشخصه است.

گزاره ۲.۲. ون بهر و ایسن [۴] نشان دادند اگر $0 < p < 2$ ، آن‌گاه

$$E|X|^p = c(p) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(1 - R(\varphi(t)))}{|t|^{p+1}} dt \quad (3)$$

متغیرهای تصادفی پذیرفتنی توسط آنتونینی و همکاران [۱] به صورت زیر تعریف شده است.

تعریف ۳.۲. یک مجموعه متناهی از متغیرهای تصادفی X_1, X_2, \dots, X_n پذیرفتنی است، اگر برای هر عدد حقیقی t ، رابطه زیر برقرار باشد:

$$E(\exp\{t \sum_{i=1}^n X_i\}) \leq \prod_{i=1}^n E(\exp\{tX_i\}) \quad (4)$$

۳ نابرابری‌های گشتاوری

در این بخش برخی نابرابری‌ها برای گشتاورهای مطلق مجموع و تفاضل متغیرهای تصادفی پذیرفتنی ارائه می‌کنیم.

قضیه ۱.۳. فرض کنید X و Y متغیرهای تصادفی پذیرفتنی و متقارن حول صفر باشند، X' مستقل از متغیر تصادفی X و هم توزیع با X باشد و Y' مستقل از متغیر تصادفی Y و هم توزیع با Y باشد.

۱- اگر $0 < p < 2$ آن‌گاه:

$$E|X + X'|^p + E|Y + Y'|^p \leq 2E|X + Y|^p \quad (5)$$

۲- اگر $2 < p < 4$ آن‌گاه:

$$E|X + X'|^p + E|Y + Y'|^p \geq 2E|X + Y|^p \quad (6)$$

اثبات. تابع مشخصه X و Y را به ترتیب با $\varphi(t)$ و $\psi(t)$ نشان می‌دهیم. برای نابرابری (۵) با استفاده از لم ۱.۲؛

$$\begin{aligned} 2E|X + Y|^p &= 2c(p) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{|t|^{p+1}} (1 - \varphi_{X+Y}(t)) dt \\ &\geq 2c(p) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{|t|^{p+1}} (1 - (\varphi_X(t)\psi_Y(t))) dt \\ &\geq c(p) \left[\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{|t|^{p+1}} (1 - \varphi_X^2(t)) dt + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{|t|^{p+1}} (1 - \psi_Y^2(t)) dt \right] \\ &= E|X + X'|^p + E|Y + Y'|^p \end{aligned}$$



مجدداً از لم ۱.۲ برای نابرابری (۶) استفاده می‌کنیم، در این حالت چون $۲ < p < ۴$ است، $c(p) < ۰$ می‌شود، بنابراین داریم؛

$$\begin{aligned} ۲E|X + Y|^p &= -۲c(p) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{۱}{|t|^{p+۱}} (\varphi_{X+Y}(t) + E(X + Y)^۲ \cdot \frac{t^۲}{۲} - ۱) dt \\ &\leq -۲c(p) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{۱}{|t|^{p+۱}} ((\varphi_X(t)\varphi_Y(t)) + E(X + Y)^۲ \frac{t^۲}{۲} - ۱) dt \\ &\leq -c(p) \left[\int_{-\infty}^{\infty} \frac{۱}{|t|^{p+۱}} (\varphi_X^۲(t) + E(X + X')^۲ \frac{t^۲}{۲} - ۱) dt \right. \\ &\quad \left. + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{۱}{|t|^{p+۱}} (\varphi_Y^۲(t) + E(Y + Y')^۲ \frac{t^۲}{۲} - ۱) dt \right] \\ &= E|X + X'|^p + E|Y + Y'|^p. \end{aligned}$$

□

لم ۲.۳. پیتن و هیتکت [۲] نشان دادند که اگر $\varphi(t)$ تابع مشخصه و n عدد صحیح مثبت باشد، آنگاه نابرابری

$$۱ - R\varphi(nt) \leq n[۱ - (R\varphi(t))^n] \quad (۷)$$

به ازای هر $t \in (-\infty, \infty)$ برقرار است.

قضیه ۳.۳. فرض کنید $X_۱, \dots, X_n$ متغیرهای تصادفی هم‌توزیع، پذیرفتنی و متقارن باشند. آنگاه برای هر $۱ \leq p \leq ۲$

داریم:

$$n^{p-۱} E|X_۱|^p \leq E|X_۱ + \dots + X_n|^p \quad (۸)$$

اثبات. برای اثبات نابرابری (۸) با استفاده از لم ۱.۲ و ۲.۳ پیش می‌رویم، در این حالت $c(p) > ۰$ می‌شود، پس

$$\begin{aligned} E|X_۱ + \dots + X_n|^p &= c(p) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{۱}{|t|^{p+۱}} (۱ - \varphi_{X_۱+\dots+X_n}(t)) dt \\ &\geq c(p) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{۱}{|t|^{p+۱}} (۱ - \varphi_{X_۱}^n(t)) dt \\ &= E|X_۱^* + \dots + X_n^*|^p \\ &\geq n^{p-۱} E|X_۱|^p \end{aligned}$$

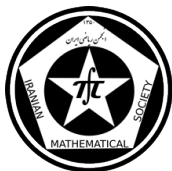
□

که در روابط بالا X_i^* ها همان تعریف قبل را دارند.

قضیه ۴.۳. اگر X و Y پذیرفتنی و هم‌توزیع باشند، آنگاه برای هر $۰ < p < ۲$

$$۲^{p-۱} E|X^*|^p \leq E|X + Y|^p \quad (۹)$$

می‌شود.



اثبات. با استفاده از لم ۱.۲ و ۲.۳

$$\begin{aligned}
E|X + Y|^p &= c(p) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{|t|^{p+1}} (1 - R(\varphi_{X+Y}(t))) dt \\
&\geq c(p) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{|t|^{p+1}} (1 - R(\varphi_{X^*+Y^*}(t))) dt \\
&= E|X^* + Y^*|^p \\
&\geq 2^{p-1} E|X|^p
\end{aligned}$$

□

۴ بحث و نتیجه‌گیری

با توجه به تعریف متغیرهای تصادفی پذیرفتنی، کلیه نابرابری‌های این مقاله برای متغیرهای تصادفی مستقل نیز برقرار می‌باشند.

مراجع

- [1] R. G. Antonini, Y. Kozachenko and A. Volodin, *Convergence of series of dependent φ -subgaussian random variables*, Journal of Math. Anal. Appl, 338(2008), pp.1188–1203.
- [2] C. R. Heathcote, J. W. Pitman, *An inequality for characteristic functions*, Bull. Aust. Math. Soc., 16(1972), pp.1–9.
- [3] P. L. Hsu, *Absolute moments and characteristic function*, J. Chinese Math. Soc. , 1(1951), pp.259–280.
- [4] D. Von Bahr, G. C. Esseen, *Inequalities for the r th absolute moment of a sum of random variables*, Ann. Math. Stat, 36(1965), pp.299–303.
- [5] N. G. Ushakov, *Some inequalities for absolute moments*, .Stat. & Probab. letters , 81(2011), pp.2011–2015.

پست الکترونیکی: ameneh.norouzif@gmail.com

پست الکترونیکی: n.eghbal@shahroodut.ac.ir



بررسی احتمالات دمی مجانبی برای مجموع وزنی تصادفی

محمد عابدی*
دانشگاه شاهرود

احمد نزاکتی رضازاده
دانشیار دانشگاه شاهرود

چکیده

در این مقاله به بررسی و جمع‌آوری مطالب به دست آمده، در رابطه با مجموع وزنی تصادفی متغیرهای تصادفی درازدم و دو به دو مستقل می‌پردازیم و هم‌چنین دو متغیر تصادفی وزنی وابسته X_1 و X_2 را در نظر می‌گیریم که وزن‌های متناظر W_i ها مستقل از X_i ها، $i = 1, 2$ ، می‌باشند و نتایجی که در این حالت به دست آمده را بیان می‌کنیم.

واژه‌های کلیدی: توزیع‌های درازدم، وزن تصادفی، متغیر تصادفی

۱ مقدمه

مجموع وزنی تصادفی عمدتاً در نظریه بیمه و ریسک‌های مالی کاربرد فراوان دارد. در نظریه خطر اغلب با مدل‌های تصادفی که شامل مقادیر وزنی تصادفی هستند، روبرو می‌شویم که از میان این مدل‌ها می‌توان به مدل‌های خطر تصادفی زمان-گسسته اشاره کرد.

در این مقاله تمام روابط حدی، برای حالت $x \rightarrow \infty$ در نظر گرفته شده است، در غیر این صورت آن را ذکر می‌کنیم. اگر $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a(x)}{b(x)} = 1$ باشد آن‌گاه آن را با نماد $a(x) \sim b(x)$ و اگر $\liminf_{x \rightarrow \infty} \frac{a(x)}{b(x)} \geq 1$ آن را با نماد $a(x) \gtrsim b(x)$ نمایش می‌دهیم.

برای هر عدد حقیقی x ، $x^+ = \max\{x, 0\}$ و به ازای هر توزیع F ، توزیع دم \bar{F} به صورت $\bar{F}(x) = 1 - F(x)$ تعریف می‌شود.

فرض می‌کنیم X_1, X_2, \dots, X_n ، متغیرهای تصادفی حقیقی مقدار متناظر با توابع توزیع F_1, F_2, \dots, F_n باشند که دو به دو مستقل هستند و متناظر با هر X_k وزن تصادفی W_k را اختصاص می‌دهیم که به ازای هر k ، $W_k \geq 0$ می‌باشد. در ابتدا مقادیر S_m و M_n را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$S_m = \sum_{k=1}^m W_k X_k \quad m = 1, 2, \dots, n$$

$$M_n = \max_{1 \leq m \leq n} S_m \quad (1)$$

تعریف ۱.۱. به ازای هر x ، F از راست بی‌کران است، اگر:

$$\bar{F}(x) > 0$$

*مسئول مقاله



تعریف ۲.۱. توزیع F روی مجموعه‌ی اعداد حقیقی، درازدم است اگر F از راست بی‌کران باشد و برای هر ثابت $y \neq 0$ داشته باشیم:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\bar{F}(x+y)}{\bar{F}(x)} = 1$$

مجموعه تمام توزیع‌های درازدم را با L نشان می‌دهیم.

تعریف ۳.۱. توزیع F روی مجموعه اعداد حقیقی، متعلق به کلاس توزیع‌های مقادیر غالب دمی است اگر به ازای هر $y \in (0, 1)$ داشته باشیم:

$$\limsup_{x \rightarrow \infty} \frac{\bar{F}(xy)}{\bar{F}(x)} < \infty$$

مجموعه تمام توزیع‌های مقادیر غالب دمی را با D نمایش می‌دهیم.

مقادیر S_n و M_n تعریف شده در (۱) را در نظر می‌گیریم. برای چنین مقادیری تانگ و همکارش [۱] فرض کردند که مقادیر $0 < a \leq b < \infty$ وجود دارد به طوری که برای $k = 1, 2, \dots, n$ داریم:

$$P(a \leq W_k \leq b) = 1. \quad (2)$$

قضیه ۴.۱. اگر برای مقادیر تعریف شده در (۱) شرایط زیر برقرار باشد:

الف) متغیرهای تصادفی X_1, X_2, \dots, X_n دو به دو مستقل و تابع توزیع هر X_k به کلاس توزیع‌های درازدم تعلق داشته باشد.

ب) برای وزن‌های تصادفی مستقل W_1, W_2, \dots, W_n به ازای هر $k = 1, 2, \dots, n$ رابطه‌ی (۲) برقرار باشد.

ج) دنباله‌های $\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$ و $\{W_1, W_2, \dots, W_n\}$ از هم مستقل باشند.

در این صورت:

$$P(M_n > x) \sim P(S_n > x) \sim P\left(\sum_{k=1}^n W_k X_k^+ > x\right) \quad (3)$$

تعریف ۵.۱. دنباله‌ای از متغیرهای تصادفی X_1, X_2, \dots, X_n را هم‌پیوند مثبت گوئیم اگر برای توابع نازولی f و g داشته باشیم:

$$\text{Cov}[f(X_1, X_2, \dots, X_n), g(X_1, X_2, \dots, X_n)] \geq 0.$$

با این شرط که $\mathbb{E}f(\mathbf{X})$ و $\mathbb{E}g(\mathbf{X})$ وجود داشته باشند که در آن $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ می‌باشد.

در قضیه بعدی که برگرفته شده از کار تانگ [۲] است، وزن‌های تصادفی هم‌پیوند مثبت می‌باشند، سپس شرط کران‌داری دوطرفه (۲) را به شرط کران‌داری یک طرفه زیر تغییر می‌دهد:

برای هر $k = 1, 2, \dots, n$:

$$\exists b > 0 \quad \text{s.t.} \quad P(0 \leq W_k \leq b) = 1 \quad \text{و} \quad P(W_k = 0) < 1. \quad (4)$$

قضیه ۶.۱. اگر برای مقادیر تعریف شده در (۱) شرایط زیر برقرار باشد:

الف) متغیرهای تصادفی X_1, X_2, \dots, X_n دو به دو مستقل و تابع توزیع هر X_k به کلاس توزیع‌های درازدم تعلق داشته باشد.

ب) وزن‌های تصادفی W_1, W_2, \dots, W_n هم‌پیوند مثبت می‌باشند و برای بعضی $0 < b < \infty$ رابطه (۴) برقرار باشد.

ج) دنباله‌های $\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$ و $\{W_1, W_2, \dots, W_n\}$ از هم مستقل باشند.

در این صورت رابطه (۳) برقرار است.



۲ احتمالات دمی مجانبی و خاصیت بسته بودن تحت پیچش

در این بخش دو متغیر تصادفی حقیقی مقدار و وابسته X_1 و X_2 با توابع توزیع به ترتیب F_1 و F_2 را در نظر می‌گیریم. هم‌چنین فرض می‌کنیم W_1 و W_2 دو وزن تصادفی وابسته دلخواه و مستقل از X_1 و X_2 باشند. مشابه قبل برای وزن‌های تصادفی فوق نیز رابطه (۲) برقرار است. هم‌چنین مانند قبل مجموع وزنی تصادفی و ماکسیمم مجموع وزنی تصادفی را به صورت زیر نمایش می‌دهیم:

$$S_2 = W_1 X_1 + W_2 X_2 \quad \text{و} \quad M_2 = \max \{W_1 X_1, W_1 X_1 + W_2 X_2\}. \quad (5)$$

بعلاوه فرض می‌کنیم بین دو متغیر تصادفی X_1 و X_2 ساختار وابستگی زیر:

$$\begin{aligned} P(X_2 > x \mid X_1 = y) &\sim h_1(y) \overline{F_2}(x), \\ P(X_1 > x \mid X_2 = y) &\sim h_2(y) \overline{F_1}(x). \end{aligned} \quad (6)$$

به طور یکنواخت به ازای هر $y \in \mathbb{R}$ برقرار باشد، که در آن توابع $(\circ, \infty) := \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R} : h_k(\cdot)$ توابع اندازه‌پذیر هستند و مفهوم یکنواختی به صورت زیر مطرح می‌شود:

$$\limsup_{x \rightarrow \infty} \sup_{y \in \mathbb{R}} \left| \frac{P(X_i > x \mid X_j = y)}{h_j(y) \overline{F_i}(x)} - 1 \right| = \circ, \quad i, j = 1, 2, \quad i \neq j.$$

ساختار وابستگی (۶) اولین بار توسط آسمیت و بادسکو [۳] پیشنهاد شد.

در ادامه به بیان دو قضیه اساسی و مهم در رابطه با بسته بودن کلاس توزیع‌های درازدم و مقادیر غالب دمی تحت پیچش می‌پردازیم.

قضیه ۱.۲ (یانگ و همکاران (۲۰۱۴)، [۴]). فرض کنید X_1 و X_2 متغیرهای تصادفی حقیقی مقدار و متناظر با توزیع‌های F_1 و F_2 باشند که در رابطه (۶) صدق می‌کنند، هم‌چنین فرض کنید W_1 و W_2 متغیرهای تصادفی وابسته دلخواه و مثبت هستند که مستقل از X_1 و X_2 می‌باشند به طوری که برای آن‌ها رابطه (۲) برقرار باشد. حال اگر برای $k = 1, 2$ ، $F_k \in L$ باشد، آن‌گاه توزیع S_2 نیز درازدم است و بعلاوه رابطه زیر نیز برقرار است:

$$P(M_2 > x) \sim P(S_2 > x) \sim P(S_2^+ > x). \quad (7)$$

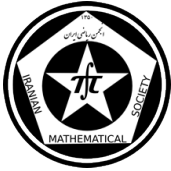
$$\text{که در آن} \quad S_2^+ = W_1 X_1^+ + W_2 X_2^+$$

قضیه ۲.۲ (یانگ و همکاران (۲۰۱۴)، [۴]). فرض کنید تمام شرایط قضیه ۱.۲ برقرار باشد. حال اگر برای $k = 1, 2$ ، $F_k \in D$ باشد، آن‌گاه توزیع S_2 نیز متعلق به کلاس توزیع‌های مقادیر غالب دمی است و بعلاوه برای مقادیر $c > 0$ رابطه زیر را داریم:

$$cP(S_2^+ > x) \lesssim P(S_2 > x) \leq P(M_2 > x) \leq P(S_2^+ > x).$$

مراجع

- [1] Tang, Q., Tsitsiashvili, G. *Randomly weighted sums of subexponential random variables with application to ruin theory*, Extremes 6, (2003), 171-188.



چهل و ششمین کنفرانس ریاضی ایران

۳-۶ شهریور ۱۳۹۴

دانشگاه یزد



ص: ۴-۴

بررسی احتمالات دمی مجانبی برای مجموع وزنی تصادفی

پوستر

- [2] Tang, Q. *Asymptotic ruin probabilities in finite horizon with subexponential losses and associated discount factors*, Probab. Engrg, Inform. Sci. 20, (2006), 103-113.
- [3] Asimit, A.V., Badescu, A.L. *Extremes on the discounted aggregate claims in a time dependent risk model*, Scand. Actuar, J. 2, (2010), 93-104.
- [4] Yang, Y., Remigijus, L., Jonas, S. *Closure property and maximum of randomly weighted sums with heavy-tailed increments*, Statistics and Probability Letters 91, (2014), 162-170.

پست الکترونیکی: mohamad.abedi69@gmail.com
پست الکترونیکی: nezakati@shahroodut.ac.ir



بررسی پایایی تبدیل کل زمان آزمون تعمیم یافته

مجتبی اصفهانی*
دانشگاه ولایت ایران‌شهر

چکیده

در این مقاله پس از معرفی ترتیب تصادفی کل زمان آزمون (TTT) ، ترتیب تصادفی کل زمان آزمون تعمیم یافته $(GTTT)$ را معرفی کرده و به بیان برخی از ویژگی‌های این ترتیب تصادفی می‌پردازیم. در ادامه برقراری مفهوم پایایی را برای تبدیل $GTTT$ مورد بررسی قرار داده و در پایان کاربرد ترتیب تصادفی $GTTT$ را در قابلیت اعتماد مورد مطالعه قرار می‌دهیم.

واژه‌های کلیدی: ترتیب تصادفی کل زمان آزمون، تبدیل کل زمان آزمون تعمیم یافته، پایایی، قابلیت اعتماد
Mathematics Subject Classification [2010]: 13D45, 39B42

۱ مقدمه

ترتیب‌های تصادفی TTT و $GTTT$ و برخی از خواص ترتیب تصادفی $GTTT$ توسط بارلو و داکسوم (۱۹۷۲) مورد بررسی و مطالعه قرار گرفت. بارتازویچ در سال ۱۹۸۶ رابطه بین ترتیب تصادفی $GTTT$ و ترتیب تصادفی پراکنده‌گی را بیان کرد. در سال‌های اخیر نیز لی و شیکد (۲۰۰۷) پس از بیان برخی از ویژگی‌های ترتیب TTT به معرفی خانواده‌ای از این ترتیب‌ها پرداخته و کاربردهایی از این ترتیب تصادفی را در بیمه و نظریه قابلیت اعتماد بیان کردند. لی من و راجو (۱۹۹۲) ترتیب‌های تصادفی را بوسیله خواص تابع $G^{-1}F$ که از تبدیل کل زمان آزمون به دست می‌آید بر حسب پایایی تبدیل‌های یکنوا دسته‌بندی کردند. بارتازویچ (۲۰۰۹) گروه دیگری از ترتیب‌های تصادفی را با استفاده از خواص تابع $G^{-1}F$ تحت پایایی تبدیل $GTTT$ بر اساس توابع پیوسته و مثبت روی بازه $[0, 1]$ معرفی کرد.

فرض کنید ξ مجموعه همه توابع h باشد که $h(u) > 0$ و $\forall u \in (0, 1)$ ، $h(u) = 0$ و $\forall u \notin [0, 1]$.

تعریف ۱.۱. فرض کنید X یک متغیر تصادفی نامنفی باشد و تابع $h \in \xi$ آنگاه

$$H_F^{-1}(p, h) = \int_{-\infty}^{F^{-1}(p)} h(F(x)) dx, \quad p \in (0, 1), \quad (1-1)$$

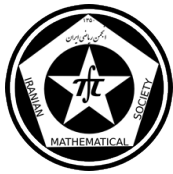
را تبدیل $GTTT$ متغیر تصادفی X بر حسب تابع h گوئیم.

تعریف ۲.۱. فرض کنید X و Y دو متغیر تصادفی نامنفی با توابع توزیع به ترتیب F و G باشند. اگر $H_F^{-1}(p, h) \leq H_G^{-1}(p, h)$ آنگاه گوئیم X کوچکتر از Y در ترتیب تصادفی $GTTT$ است و با نماد $X \leq_{GTTT}^{(h)} Y$ نشان می‌دهیم.

تعریف ۳.۱. فرض کنید X و Y دو متغیر تصادفی نامنفی با توابع توزیع به ترتیب F و G باشند و $h(u) = 1 - u$. اگر $H_F^{-1}(p, h) \leq H_G^{-1}(p, h)$ آنگاه گوئیم X کوچکتر از Y در ترتیب تصادفی TTT است و با نماد $X \leq_{TTT} Y$ نشان

می‌دهیم.

* سخنران



۲ ویژگی های تبدیل $GTTT$

در این بخش ویژگی هایی از تبدیل $GTTT$ را بیان کرده و در ادامه شرایط حفظ برخی ترتیب های تصادفی را با استفاده از تبدیل کل زمان آزمون تعمیم یافته مورد مطالعه قرار می دهیم.

واضح است که در رابطه $(1-1)$ اگر $h(u) = 1$ آنگاه $H_F^{-1}(p, h) = F^{-1}(p)$. همچنین برای $p = 1$ اگر $h(u) = u$ آنگاه $H_F^{-1}(p, h) = H_F^{-1}(1) = \int_0^\infty \bar{F}(x) dx = \mu$. در مثال زیر تبدیل $GTTT$ را برای توزیع نمایی بدست می آوریم.

مثال ۱.۲. فرض کنید X یک متغیر تصادفی نمایی با میانگین ۱ باشد برای $h_1(u) = 1 - u$ و $h_2(u) = u$ که $h_1, h_2 \in \xi$ به صورت زیر است

$$H_F^{-1}(p, h_1) = \int_{-\infty}^{F^{-1}(p)} h(F(x)) dx = \int_0^{-\ln(1-p)} (1 - (1 - e^{-x})) dx = p$$

و

$$H_F^{-1}(p, h_2) = \int_0^{-\ln(1-p)} (1 - e^{-x}) dx = -1.$$

۳ پایایی تبدیل $GTTT$

در این قسمت مفهوم پایایی را نسبت به تبدیل $GTTT$ مورد بررسی قرار می دهیم.

فرض کنید Φ کلاس توابع مثبت و پیوسته روی بازه $(0, 1)$ باشد. برای توزیع $F \in \Phi$ یک رابطه ترتیبی در مجموعه ϕ از زوج های مرتب (F, G) در $\Phi \times \Phi$ را به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$(F, F) \in \phi \quad \forall F \in \phi \quad \text{(الف)}$$

$$(F, H) \in \phi \quad \text{و} \quad (G, H) \in \phi \implies (F, G) \in \phi \quad \text{(ب)}$$

(ج) وقتی $(F, G) \in \phi$ میگوییم $F \leq_s G$ که s یک ترتیب تصادفی است.

تعریف ۱.۳. مجموعه ϕ را نسبت به تبدیل $GTTT$ پایا گوییم هرگاه برای $F, G \in \phi$

$$F \leq_s G \implies H_F(., \Phi) \leq_s H_G(., \Phi).$$

که در آن s یک ترتیب تصادفی است.

تعریف ۲.۳. برای تبدیل های $GTTT$ و زوج های مرتب (F, G) در فضای $\Phi \times \Phi$ مجموعه زیر را تعریف می کنیم:

$$O(F, G) = (H_F(., h), H_G(., h)), \quad h \in \xi.$$

از تعریف O و تعریف (۳-۱) نتیجه می شود که $(F, G) \in \phi$ اگر و تنها اگر $O \in \phi$. به عبارت دیگر $(H_F, H_G) \in \phi$.

قضیه ۳.۳. تابع $k(u) = \frac{fF^{-1}(u)}{gG^{-1}(u)}$ تحت تبدیل $GTTT$ نسبت به کلاس ξ پایای ماکزیمال است.

اثبات. با مشتق گیری از طرفین رابطه $(1-1)$ داریم

$$\frac{d}{dp} H_F^{-1}(p; h) = \frac{1}{h_F(H_F^{-1}(p; h))} = \frac{h(p)}{fF^{-1}(p)}$$



$$\implies h_F(H_F^{-1}(p; h)) = \frac{fF^{-1}(p)}{h(p)}, \quad (۱-۳)$$

و بطور مشابه

$$h_G(H_G^{-1}(p; h)) = \frac{gG^{-1}(p)}{h(p)}, \quad (۲-۳)$$

که در آن $h_F(.; h)$ تابع چگالی $H_F(.; h)$ است. از روابط (۱-۳)، (۲-۳) نتیجه می‌گیریم

$$\frac{h_F(H_F^{-1}(p; h))}{h_G(H_G^{-1}(p; h))} = \frac{fF^{-1}(p)}{gG^{-1}(p)},$$

بنابراین $\frac{fF^{-1}(p)}{gG^{-1}(p)}$ تحت تبدیل‌های $GTTT$ نسبت به کلاس ξ پایا است. در ادامه فرض کنید (F_1, G_1) ، (F_2, G_2) دو زوج از توزیع‌های Φ باشند و

$$\frac{f_1 F_1^{-1}(p)}{g_1 G_1^{-1}(p)} = \frac{f_2 F_2^{-1}(p)}{g_2 G_2^{-1}(p)}, \quad p \in (0, 1). \quad (۳-۳)$$

باید ثابت کنیم (F_2, G_2) و (F_1, G_1) در یک مجموعه قرار دارند، یعنی تابع $h_0 \in \xi$ وجود دارد بطوریکه

$$F_2^{-1}(p) = \int_0^{F_1^{-1}(p)} h_0(F_1(x)) dx$$

و بطور مشابه برای G_1 و G_2 . با توجه به رابطه (۳-۳) و قرار دادن $p \in (0, 1)$ داریم

$$\int_0^{F_1^{-1}(p)} h_0(F_1(x)) dx = \int_0^{F_2^{-1}(p)} \frac{f_1 F_1^{-1}(F_1(x))}{g_1 G_1^{-1}(F_1(x))} = F_2^{-1}(p),$$

و برای G_1 و G_2 هم به همین صورت داریم:

$$\int_0^{G_1^{-1}(p)} h_0(G_1(x)) dx = \int_0^{G_2^{-1}(p)} \frac{g_1 G_1^{-1}(G_1(x))}{f_1 F_1^{-1}(G_1(x))} = G_2^{-1}(p),$$

□

و اثبات کامل می‌شود.

۴ کاربرد در قابلیت اعتماد

در این بخش کاربرد ترتیب تصادفی $GTTT$ را نظریه قابلیت اعتماد مورد مطالعه قرار می‌دهیم. ابتدا تعریف تابع قابلیت یک سیستم منسجم را بیان می‌کنیم.

تعریف ۱.۴. فرض کنید در یک سیستم منسجم هر کدام از مولفه‌ها مستقل از یکدیگر با احتمال u کار کنند. تابع $\omega: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ را تابع قابلیت یک سیستم می‌نامیم که $\omega(u)$ احتمال کارکردن کل سیستم است.



اگر طول عمر هر کدام از مولفه ها مستقل و هم توزیع با تابع بقای \bar{F} باشد آنگاه تابع بقای طول عمر سیستم یعنی S را به صورت زیر نشان می دهیم:

$$\bar{F}_S(x) = \omega(\bar{F}(x)), \quad x \geq 0. \quad (1-4)$$

و بطور مشابه برای یک سیستم دیگر با مولفه های مستقل و هم توزیع با \bar{G} تابع بقای طول عمر سیستم یعنی T را به صورت زیر نشان می دهیم:

$$\bar{F}_T(x) = \omega(\bar{G}(x)), \quad x \geq 0. \quad (2-4)$$

نتیجه ۲.۴. بنا به روابط (۱-۴)، (۲-۴) می توانیم رابطه $X \leq_{ttt}^{(h)} Y$ را به صورت زیر بنویسیم:

$$\int_0^{F^{-1}(p)} \bar{F}_S(x) dx \leq \int_0^{G^{-1}(p)} \bar{G}_T(x) dx, \quad p \in (0, 1). \quad (3-4)$$

بنابراین اگر یک سیستم منسجم با کسر p از مولفه هایش مرتبا روی یک آزمون کار کند آنگاه متوسط زمانی که سیستم با طول عمر S برای آزمون مورد نظر صرف می کند کمتر از متوسط زمانی است که یک سیستم مشابه با طول عمر T برای آن آزمون صرف می کند.

قضیه ۳.۴. فرض کنید Y, X دو متغیر تصادفی با تابع توزیع پیوسته و کران پایین تکیه گاه صفر باشند و ω تابع قابلیت یک سیستم منسجم باشد. اگر $\frac{\omega(u)}{u}$ روی بازه $(0, 1)$ صعودی باشد و $h(\cdot) = \omega(1 - \cdot)$ آنگاه:

$$X \leq_{ttt} Y \implies X \leq_{ttt}^{(h)} Y.$$

نتیجه ۴.۴. با توجه به شرایط قضیه قبل اگر $\frac{\omega(u)}{u}$ یک تابع نزولی باشد آنگاه $X \leq_{ttt} Y \implies X \leq_{ttt}^{(h)} Y$.

بحث و نتیجه گیری

در این مقاله ویژگی های تبدیل $GTTT$ و کاربرد ترتیب تصادفی $GTTT$ در قابلیت اعتماد بررسی و شرایط حفظ مفهوم پایایی برای تبدیل $GTTT$ مورد مطالعه قرار گرفته است. یافتن کاربردهای بیشتر در نظریه قابلیت اعتماد و دیگر زمینه ها در آینده تحقیق مد نظر است.

مراجع

- [1] Barlow, R. E. and Daksum, K. A. (1972). *Isotonic tests for convex ordering*. *Mathematical Statistics and Probability*, Vol. i, 293-323.
- [2] Bartoszewicz, J. (1986). *Dispersiv ordering and the total time on test transformation*. *Statist. Probab. Lett.* 4, 285-288.
- [3] Bartoszewicz, J. and Benduch, M. (2009). *Some properties of the generalized TTT transform*. *Jornal of Statistical Planning and Inference*. 139, 2208-2217.
- [4] Lehmann, E. L. and Rojo, J. (1992). *Invariant directional orderings*. *Ann. Statist.* 20, 2100-2110.
- [5] Li, X. and Shaked, M. (2007). *A general family of univariate stochastic orders*. *J. Statist. Plann. Inference* 137, 3601-3610.



بررسی شاخص کارایی طول عمر توزیع بیرنهام - ساندرز

بهرام صادقیپورگیلده
دانشگاه فردوسی مشهد

داود دریایی*
دانشگاه فردوسی مشهد

چکیده

شاخص کارایی طول عمر C_L برای بررسی کارایی فرایند در صنایع استفاده می شود. در این مقاله فرض می شود متغیرهای تصادفی طول عمر دارای توزیع بیرنهام - ساندرز با پارامتر شکل معلوم می باشند، برآوردگر مجانبی C_L را برای این توزیع به دست می آوریم و با استفاده از آن فرضیه های آماری درباره آن را آزمون می کنیم. سرانجام با استفاده از داده های واقعی از این توزیع، کارایی یک فرایند تولید را مورد بررسی قرار می دهیم.

واژه های کلیدی: شاخص کارایی طول عمر، توزیع بیرنهام - ساندرز، برآوردگر مجانبی.

Mathematics Subject Classification [2010]: 62P30, 62C10, 62D05

۱ مقدمه

مونتگومری [۱] شاخص کارایی فرایند C_L را برای ارزیابی عملکرد طول عمر قطعات الکتریکی مطرح کرد که L نشان دهنده حد مشخصه فنی پایین می باشد. در این مقاله فرض می کنیم که متغیر تصادفی طول عمر از توزیع بیرنهام - ساندرز پیروی می کند و پارامتر شکل آن معلوم می باشد. این توزیع توسط بیرنهام و ساندرز معرفی شد که تابع توزیع تجمعی و تابع چگالی احتمال آن به ترتیب به صورت زیر می باشد:

$$F(x; \alpha, \beta) = \Phi \left[\frac{1}{\alpha} \left(\sqrt{\frac{x}{\beta}} - \sqrt{\frac{\beta}{x}} \right) \right] \quad x > 0, \alpha > 0, \beta > 0$$

$$f(x; \alpha, \beta) = \frac{1}{\sqrt{2}\alpha\beta\sqrt{\pi}} \left[\left(\frac{x}{\beta}\right)^{-\frac{1}{2}} + \left(\frac{x}{\beta}\right)^{-\frac{3}{2}} \right] \exp \left[-\frac{1}{\sqrt{2}\alpha^2} \left(\frac{x}{\beta} - 2 + \frac{\beta}{x} \right) \right] \quad x > 0, \alpha > 0, \beta > 0 \quad (1)$$

که Φ تابع توزیع تجمعی نرمال استاندارد است. پارامترهای α و β به ترتیب پارامتر شکل و مقیاس این توزیع می باشند.

۲ شاخص کارایی طول عمر

فرض کنید متغیر تصادفی طول عمر X دارای توزیع بیرنهام - ساندرز باشد که آن را با نماد $X \sim BS(\alpha, \beta)$ نشان می دهیم. امید ریاضی و واریانس این متغیر تصادفی که به ترتیب با μ و σ^2 نشان می دهیم به صورت زیر می باشد:

$$\sigma^2 = Var(X) = \frac{\beta^2}{\sqrt{\pi}} (5\alpha^2 + 4\alpha^2) \text{ و } \mu = E(X) = \beta \left(1 + \frac{\alpha^2}{\sqrt{\pi}} \right)$$

* سخنران



مونتگومری [۱] شاخص کارایی طول عمر C_L را معرفی کرد که به صورت $C_L = \frac{\mu-L}{\sigma}$ تعریف می شود، که μ میانگین و σ انحراف فرآیند می باشد همچنین L حد مشخصه فنی پایین می باشد. برای متغیر تصادفی توزیع بیرنهام - ساندرز داریم

$$C_L = \frac{\mu - L}{\sigma} = \frac{\beta(1 + \frac{\alpha^2}{\gamma}) - L}{\alpha\beta\sqrt{1 + \frac{\alpha^2}{\gamma}}} = \frac{2 + \alpha^2}{\sqrt{5\alpha^4 + 4\alpha^2}} - \frac{2L}{\beta\sqrt{5\alpha^4 + 4\alpha^2}} \quad -\infty < C_L < \frac{2 + \alpha^2}{\sqrt{5\alpha^4 + 4\alpha^2}} \quad (2)$$

۳ نرخ انطباق

اگر طول عمر محصول از حد مشخصه فنی پایین L بیشتر باشد، تولید محصول را تولید منطبق می نامند. نسبت تولیدات منطبق را نرخ انطباق نامیده و برابر است با: $p_r = P(X > L) = 1 - F_X(L) = R_X(L)$ که R و F به ترتیب تابع قابلیت اعتماد و تابع توزیع تجمعی متغیر تصادفی می باشند. با توجه به (۲)، نرخ انطباق توزیع $BS(\alpha, \beta)$ برابر است با:

$$p_r = R_X \left(\frac{\beta}{\gamma} \left[2 + \alpha^2 - C_L \sqrt{5\alpha^4 + 4\alpha^2} \right] \right) \quad -\infty < C_L < \frac{2 + \alpha^2}{\sqrt{5\alpha^4 + 4\alpha^2}} \quad (3)$$

۴ برآوردگر درست‌نمایی ماکزیمم شاخص کارایی طول عمر

فرض کنید متغیر تصادفی X نشان دهنده زمان شکست یک محصول و دارای توزیع بیرنهام - ساندرز با تابع چگالی احتمال (۱) باشد. فرض کنید n مشاهده مورد آزمایش قرار می گیرند که زمان شکست آنها را به صورت x_1, x_2, \dots, x_n نشان می دهیم. تابع درست‌نمایی این توزیع برای n مشاهده به صورت زیر می باشد:

$$L(x_1, x_2, \dots, x_n | \alpha, \beta) = \prod_{i=1}^n f(x_i; \alpha, \beta)$$

همچنین لگاریتم تابع درست‌نمایی برای این توزیع به صورت زیر می باشد:

$$\ell(\alpha, \beta) = k + \frac{n}{\alpha^2} - n \log(\alpha) - \frac{n}{\gamma} \log(\beta) + \sum_{i=1}^n \left(\log(x_i + \beta) - \frac{1}{\gamma \alpha^2} \left[\frac{x_i}{\beta} + \frac{\beta}{x_i} \right] \right) \quad (4)$$

که در آن k ثابت می باشد و به α و β بستگی ندارد. با مشتق‌گیری از (۴) نسبت به α و β و مساوی با صفر قرار دادن آنها، برآوردهای درست‌نمایی ماکزیمم α و β که آنها را به ترتیب با $\hat{\alpha}$ و $\hat{\beta}$ نشان می دهیم به دست می آیند، در اینجا داریم:

$$\hat{\alpha} = \left[\frac{s}{\hat{\beta}} + \frac{\hat{\beta}}{r} - 2 \right]^{\frac{1}{\gamma}}$$

که s و r به ترتیب میانگین حسابی و میانگین هارمونیک مشاهدات می باشند. اما فرم بسته ای برای $\hat{\beta}$ وجود ندارد و می توان آن را با روش های عددی برآورد کرد. انگلهارد و همکاران [۲] نشان دادند که توزیع توام مجانبی برآوردهای درست‌نمایی ماکزیمم $\hat{\alpha}$ و $\hat{\beta}$ نرمال دو متغیره و به صورت زیر می باشد:

$$(\hat{\alpha} \quad \hat{\beta})^T \sim N_{\gamma}((\alpha \quad \beta)^T, J(\alpha, \beta)) \quad (5)$$



که در آن $J(\alpha, \beta)$ معکوس ماتریس اطلاع فیشر پارامترهای α و β و برابر است با:

$$J(\alpha, \beta) = \begin{pmatrix} \frac{\alpha^2}{2n} & 0 \\ 0 & \frac{\beta^2}{n[0.25 + \frac{1}{\alpha^2} + p(\alpha)]} \end{pmatrix}$$

که در آن $p(\alpha) = 2 \int_0^\infty \left[\frac{1}{1+h(\alpha x)} - 0.5 \right]^2 d\Phi(x)$ ، همچنین $\Phi(\cdot)$ تابع توزیع نرمال استاندارد است و علاوه بر این، $h(y) = 1 + \frac{y^2}{4} + y \left[1 + \frac{y^2}{4} \right]^{1/2}$. از ماتریس فوق نتیجه می‌گیریم که $\hat{\alpha}$ و $\hat{\beta}$ از هم مستقل می‌باشند. طبق خاصیت پایایی برآوردگرهای درست‌نمایی ماکسیمم، برآورد C_L برابر است با:

$$\hat{C}_L = \frac{2+\hat{\alpha}^2}{\sqrt{5\hat{\alpha}^4+4\hat{\alpha}^2}} - \frac{2L}{\hat{\beta}\sqrt{5\hat{\alpha}^4+4\hat{\alpha}^2}}$$

همانطور که در بخش ۱ عنوان شد، در این مقاله فرض می‌کنیم پارامتر شکل α معلوم است. بنابراین:

$$\hat{C}_L = \frac{2+\alpha^2}{\sqrt{5\alpha^4+4\alpha^2}} - \frac{2L}{\hat{\beta}\sqrt{5\alpha^4+4\alpha^2}} \quad (6)$$

اکنون با توجه به (۵) و ماتریس $J(\alpha, \beta)$ ، $\hat{\beta}$ دارای توزیع مجانبی نرمال به صورت زیر است:

$$\hat{\beta} \sim N \left(\beta, \frac{\beta^2}{n[0.25 + \frac{1}{\alpha^2} + p(\alpha)]} \right) \quad (7)$$

بنابراین طبق خاصیت پایایی برآوردگرهای درست‌نمایی ماکسیمم، توزیع مجانبی C_L نیز نرمال است، به عبارت دیگر:

$$\hat{C}_L \sim N(C_L, J(C_L)) \quad (8)$$

که در آن $J(C_L)$ واریانس مجانبی \hat{C}_L می‌باشد. با فرض $C_L = \gamma(\alpha, \beta)$ و به روش دلتا داریم:

$$J(C_L) = \left[\frac{\partial}{\partial \alpha} \gamma(\alpha, \beta) \right]^2 \frac{\alpha^2}{2n} + \left[\frac{\partial}{\partial \beta} \gamma(\alpha, \beta) \right]^2 \frac{\beta^2}{n[0.25 + \frac{1}{\alpha^2} + p(\alpha)]}$$

۵ آزمون فرضیه برای شاخص کارایی طول عمر

با وجود خطای نمونه‌گیری، برآورد نقطه‌ای C_L را نمی‌توان به طور حتم برای تعیین اینکه "طول عمر محصولات مطابق با نیازها می‌باشد یا خیر" استفاده کرد، بنابراین انجام آزمون فرضیه در مورد کارایی فرآیند ضروری است. اگر فرضیه صفر به صورت $C_L \leq c_0$: H_0 (فرآیند کارا نمی‌باشد) و فرض مخالف به صورت $C_L > c_0$: H_1 (فرآیند کارا می‌باشد) در نظر گرفته شود و همچنین در صورتی فرضیه H_0 رد شود که $\hat{C}_L > K$ (مقداری ثابت می‌باشد که آن را مقدار بحرانی می‌نامیم)، بنابراین رویه زیر را برای انجام آزمون کارایی فرآیند خواهیم داشت؛ به گونه‌ای که با توجه به میزان احتمال خطای نوع اول ω ، مقدار بحرانی K به صورت زیر حاصل می‌شود:

$$\begin{aligned} \omega = P(\hat{C}_L > K \mid C_L \leq c_0) &= P\left(\frac{2+\alpha^2}{\sqrt{5\alpha^4+4\alpha^2}} - \frac{2L}{\hat{\beta}\sqrt{5\alpha^4+4\alpha^2}} > K \mid C_L \leq c_0\right) \\ &= P\left(\hat{\beta} > \frac{2L}{2+\alpha^2 - K\sqrt{5\alpha^4+4\alpha^2}} \mid C_L \leq c_0\right) \end{aligned}$$



$$\omega = P \left(Z > \frac{\left(\frac{2L}{\beta} - (\gamma + \alpha^2) + K \sqrt{5\alpha^4 + 4\alpha^2} - \beta \right)}{\sqrt{n \left[\gamma + \alpha^2 - K \sqrt{5\alpha^4 + 4\alpha^2} + p(\alpha) \right]}} \mid C_L \leq c_0 \right) \quad \text{حال با توجه به (۷) داریم:}$$

به عبارت دیگر:

$$P \left(Z > \left[\frac{\sqrt{n \left[\gamma + \alpha^2 - K \sqrt{5\alpha^4 + 4\alpha^2} + p(\alpha) \right]}}{\gamma + \alpha^2 - K \sqrt{5\alpha^4 + 4\alpha^2}} \right] \left(\frac{2L}{\beta} - (\gamma + \alpha^2) + K \sqrt{5\alpha^4 + 4\alpha^2} \mid C_L \leq c_0 \right) \right)$$

در ادامه با فرض اینکه $g(\alpha) = \left[\frac{\sqrt{n \left[\gamma + \alpha^2 - K \sqrt{5\alpha^4 + 4\alpha^2} + p(\alpha) \right] (\Delta \alpha^4 + 4\alpha^2)}}{\gamma + \alpha^2 - K \sqrt{5\alpha^4 + 4\alpha^2}} \right]$ باشد، داریم:

$$\omega = P(Z > g(\alpha)(K - C_L) \mid C_L \leq c_0) \Rightarrow \omega = \Phi(g(\alpha)(c_0 - K)) \Rightarrow K = c_0 - \frac{z_\omega}{g(\alpha)}$$

که z_ω چندک ω ام بالایی توزیع نرمال استاندارد می باشد. باید توجه داشت که $g(\alpha)$ تابعی از K می باشد، پس:

$$K = \frac{c_0 - \frac{z_\omega(\gamma + \alpha^2)}{\sqrt{n \left[\gamma + \alpha^2 - K \sqrt{5\alpha^4 + 4\alpha^2} + p(\alpha) \right] (\Delta \alpha^4 + 4\alpha^2)}}}{1 - \frac{z_\omega}{\sqrt{n \left[\gamma + \alpha^2 - K \sqrt{5\alpha^4 + 4\alpha^2} + p(\alpha) \right]}}} \quad (9)$$

۶ مثال عددی

داده های مربوط به ۱۰۱ قطعه آلومینیوم که توسط بیرنباوم و ساندرز [۳] بدست آمده است را در نظر می گیریم. برآورد ماکسیمم درستنمایی پارامتر β برابر با ۱۳۱/۸۱۸ می باشد. چون فرض کرده ایم که پارامتر α معلوم می باشد، آن را برابر با ۰/۱۷ در نظر می گیریم. مقدار L را ۱۰۰ اختیار می کنیم. نرخ انطباق محصولات را بیش از ۸۰ درصد در نظر می گیریم. با توجه به جدول ۱ که از رابطه (۳) به دست آمده، c_0 را برابر با ۱ در نظر می گیریم. مقدار ω (سطح معنی داری) را ۰/۰۵ در نظر می

جدول ۱: مقادیر C_L در برابر p_r به ازای $\alpha = 0.17$ و $\beta = 131.82$

C_L	p_r	C_L	p_r	C_L	p_r	C_L	p_r
$-\infty$	۰/۰۰۰۰۰	۳/۰	۰/۰۰۰۵۶۳	۰/۵	۰/۲۸۵۶۸	۲/۰	۰/۹۹۱۴۹
۰/۵	۰/۰۰۰۰۸	۲/۵	۰/۰۱۴۴۲	۰/۰	۰/۴۶۶۳۷	۲/۵	۰/۹۹۹۳۷
۰/۵	۰/۰۰۰۰۲	۲/۰	۰/۰۳۴۵۲	۰/۵	۰/۶۷۰۰۷	۳/۰	۰/۹۹۹۹۹
۰/۵	۰/۰۰۰۰۷	۱/۵	۰/۰۷۶۶۴	۱/۰	۰/۸۴۵۴۳	۳/۵	۱/۰۰۰۰۰
۰/۵	۰/۰۰۰۰۲	۱/۰	۰/۱۵۵۷۵	۱/۵	۰/۹۵۱۴۹		

گیریم. سرانجام با محاسبه روابط (۶) و (۹) داریم $K = 1.13 > \hat{C}_L = 1.47$ ، فرضیه $H_0: C_L \leq 1$ رد می شود.

مراجع

- [1] D.C. Montgomery, *Introduction to Statistical Quality Control*, John Wiley & Sons Inc. , New York, 1985.
- [2] L.J. Bain, M. Engelhardt, and F.T. Wright, *Inferences on the parameters of the Birnbaum-Saunders fatigue life distribution based on maximum likelihood estimation*, Technometrics 23 (1981) 251-255.



بررسی مشاهدات مؤثر و بانفوذ در برآوردگر رگرسیون مؤلفه‌های اصلی تحت محدودیت تصادفی

شایسته دیلمی*
دانشگاه شهید چمران اهواز

عبدالرحمن راسخ
دانشگاه شهید چمران اهواز

چکیده

در تحلیل رگرسیون، وجود هم‌خطی در میان متغیرهای مستقل ممکن است باعث ناپایداری برآوردگرهای حداقل مربعات پارامترها شود. برای غلبه بر این مشکل، روشهای مختلفی ارائه شده است. یک روش طراحی شده برای مقابله با هم‌خطی استفاده از برآوردگرهای اریب از جمله برآوردگر رگرسیون مؤلفه‌های اصلی تحت محدودیت تصادفی می‌باشد و در صورت استفاده از این برآوردگر بررسی نقاط مؤثر و بانفوذ ضروری است. در این مقاله به بررسی معیارهای تشخیصی مشاهدات بانفوذ و مؤثر برای برآوردگر رگرسیون مؤلفه‌های اصلی تحت محدودیت تصادفی می‌پردازیم. در ادامه با استفاده از مجموعه داده واقعی کاربرد این روش ارزیابی می‌شود.

واژه‌های کلیدی: هم‌خطی، مشاهدات بانفوذ و مؤثر، برآوردگر رگرسیون مؤلفه‌های اصلی تحت محدودیت تصادفی
Mathematics Subject Classification [2010]: 13D45, 39B42

۱ مقدمه

هم‌خطی درجه بالایی از وابستگی خطی در میان چندین متغیر مستقل در مدل رگرسیونی است و وجود آن در میان متغیرهای مستقل اثر جدی بر برآوردها و پیش‌بینی می‌گذارد. بنابراین برای کاهش این اثرات به مطالعه‌ی برآوردگرهای اریب از جمله برآوردگر رگرسیون مؤلفه‌های اصلی تحت محدودیت تصادفی (هی و وو [۱]) می‌پردازیم و سپس برخی مباحث تشخیصی تحت این برآوردگر را بررسی می‌نماییم.

۲ معرفی برآوردگر رگرسیون مؤلفه‌های اصلی تحت محدودیت تصادفی

مدل رگرسیونی خطی زیر را در نظر بگیرید:

$$Y = X\beta + \varepsilon, \quad (1)$$

که در آن Y یک بردار تصادفی قابل مشاهده $n \times 1$ ، X یک ماتریس $n \times p$ از متغیرهای مستقل، β یک بردار $p \times 1$ از پارامترهای نامعلوم و ε یک بردار $n \times 1$ با خطای تصادفی، که $E(\varepsilon) = 0$ و $\text{cov}(\varepsilon) = \sigma^2 I_n$ می‌باشد. برآوردگر شناخته شده‌ی حداقل مربعات معمولی از β عبارت است از:

$$\hat{\beta}_{OLSE} = S^{-1} X'Y$$

که در آن $S = X'X$.

* سخنران



فرض کنید $T = (t_1, t_2, \dots, t_p)$ ماتریس متعامد به طوری که $T'X'XT = \Lambda$ که $\Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p)$ و $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_p > 0$ مقادیر ویژه $X'X$ هستند. علاوه بر این، فرض کنید $T_k = (t_1, t_2, \dots, t_k)$ ستون های باقیمانده از T پس از حذف $k - p$ (ستون آخر است). پس داریم:

$$T'_k X' X T_k = \Lambda_k = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k),$$

$$T'_{p-k} X' X T_{p-k} = \Lambda_{p-k} = \text{diag}(\lambda_{k+1}, \lambda_{k+2}, \dots, \lambda_p),$$

که در آن $T_{p-k} = (t_{k+1}, t_{k+2}, \dots, t_p)$. در مدل (۱)، فرض کنید برخی از اطلاعات پیشین در مورد β را به صورت مجموعه ای از j محدودیت تصادفی خطی به شرح زیر داشته باشیم:

$$r = R\beta + v, \quad E(v) = 0, \quad \text{Cov}(v) = \sigma^2 W, \quad (2)$$

که r بردار $1 \times j$ ، R ماتریس $j \times p$ با $\text{rank}(R) = j$ و v بردار $1 \times j$ از خطای تصادفی، و W ماتریس معلوم و معین مثبت فرض شده است. همچنین، فرض شده است که بردار تصادفی v مستقل از ε است. برای مدل (۱)، (مسی [۲]) برآوردگر رگرسیون مؤلفه های اصلی (PCR) را به صورت زیر معرفی کرد:

$$\hat{\beta}_{PCR} = T_k (T'_k S T_k)^{-1} T'_k X' Y.$$

برای مدل (۱)، با محدودیت تصادفی (۲)، برآوردگر معمولی آمیخته (OME) به صورت زیر است:

$$\hat{\beta}_{OME} = (S + R'W^{-1}R)^{-1} (X'Y + R'W^{-1}r).$$

برآوردگر پیشنهادی (هی و وو [۱]) که از ترکیب برآوردگرهای (PCR) و (OME) ساخته شده است به صورت زیر می باشد:

$$\hat{\beta}_{SRPC} = (S + R'W^{-1}R)^{-1} (T_k T'_k X' Y + R'W^{-1}r).$$

شرط لازم و کافی برای برتری برآوردگر رگرسیون مؤلفه های اصلی تحت محدودیت تصادفی (SRPC) نسبت به برآوردگرهای (PCR) و (OME) در معیار ماتریس میانگین مربع خطا است.

۳ مباحث تشخیصی در برآوردگر SRPC

مباحث تشخیصی شامل بررسی روش هایی چون یافتن مشاهدات غیرعادی و دارای نفوذ بالا می باشد، همچنین با شناسایی متغیرهای وابسته به هم، وجود و شدت روابط خطی را در میان داده های رگرسیونی اندازه گیری می کند. نزدیک به چهل سال است مباحث تشخیصی و آنالیز تأثیر در مدل رگرسیون به طور کامل مورد بررسی قرار گرفته است. (وانگ و همکاران [۳]) برخی مباحث تشخیصی در مدل رگرسیونی تحت محدودیت تصادفی را ارائه دادند. در زیر برخی معیارهای تشخیصی برای برآوردگر SRPC مورد بررسی قرار گرفته است.

۱.۳ ماتریس پیش بینی

در کلیه مباحث تشخیصی ماتریس پیش بینی و بردار باقیمانده از مفاهیم اولیه به حساب می آیند. بردار مقادیر برازش شده \hat{y} بر اساس برآوردگر SRPC به صورت زیر محاسبه می شود:

$$\begin{aligned} \hat{y}_{SRPC} &= X \hat{\beta}_{SRPC} = X (X'X + R'W^{-1}R)^{-1} (T_k T'_k X' Y) + X (X'X + R'W^{-1}R)^{-1} (R'W^{-1}r) \\ &= H \begin{pmatrix} Y \\ r \end{pmatrix}, \end{aligned}$$



که در آن $H = X(X'X + R'W^{-1}R)^{-1}(T_k T'_k X', R'W^{-1})' = X(X'X + R'W^{-1}R)^{-1} \hat{X}$ اگر $A = (X'X + R'W^{-1}R)$ باشد، به این ترتیب مؤلفه ی ig ام ماتریس H به صورت زیر بدست می آید:

$$h_{ig} = x'_i A^{-1} \hat{x}_g,$$

که $i = 1, \dots, n$ و $g = 1, \dots, n + j$. برای تشخیص مشاهدات پرنفوذ، از مؤلفه های روی قطر اصلی این ماتریس کمک می گیریم.

بردار باقیمانده این برآوردگر را می توان به صورت زیر تعریف کرد:

$$e = Y - \hat{Y} = Y - X\hat{\beta}_{SRPC} = (I - H) \begin{pmatrix} Y \\ r \end{pmatrix}.$$

۲.۳ معیار $DFBETAS$

این معیار بر این مسئله اشاره دارد که اگر i امین مشاهده حذف شود، که با نماد (i) نشان داده می شود، ضریب رگرسیونی مؤلفه ی j ام برآوردگر چقدر تغییر می کند.

$$DFBETAS_{(i)j} = \frac{\hat{\beta}_{(SRPC)j} - \hat{\beta}_{(i)(SRPC)j}}{SE(\hat{\beta}_{(i)(SRPC)j})}$$

$$= \frac{[A^{-1}]_{jj} D_j [A^{-1} (T_k T'_k S T_k T'_k + R'W^{-1}R) A^{-1}]_{jj}^{-1/2}}{(1 - x'_i A^{-1} x_i) S(i)}$$

که در آن $D = (T_k T'_k x_i y_i) x'_i A^{-1} x_i + x_i y_i - (T_k T'_k x_i y_i) - x_i x'_i A^{-1} (T_k T'_k x_i y_i)$

۳.۳ معیار $DFFITs$

این معیار که استاندارد شده میزان تغییر در مقدار برازش شده بدون حضور مشاهده i ام در برآوردگر $SRPC$ بر حسب انحراف استاندارد است به صورت زیر مطرح می گردد.

$$DFFITSS_{(i)} = \frac{x'_i (\hat{\beta}_{(SRPC)} - \hat{\beta}_{(i)(SRPC)})}{SE(x'_i \hat{\beta}_{(SRPC)})}$$

$$= \frac{x'_i A^{-1} D [x'_i A^{-1} (T_k T'_k S T_k T'_k + R'W^{-1}R) A^{-1} x_i]^{-1/2}}{(1 - x'_i A^{-1} x_i) S(i)}$$

۴.۳ معیار فاصله کوک

با هدف شناسایی مشاهدات مؤثر معیار مناسب فاصله کوک را بر اساس فاصله ی بین مقدار برآورد ضرایب رگرسیونی با وجود مشاهده مشکوک و بدون حضور آن ارائه می دهیم. دو نسخه متفاوت از این معیار برای برآوردگر $SRPC$ را می توان به صورت زیر بیان کرد.

$$D_i = \left(\frac{1}{pS^2} \right) \frac{D' A^{-1} X' X A^{-1} D}{(1 - x_i A^{-1} x'_i)' (1 - x_i A^{-1} x'_i)}$$



و نسخه دوم آن نیز به صورت زیر می باشد:

$$D_i^* = \left(\frac{1}{pS^2} \right) \frac{D'(X'X + R'W^{-1}R)^{-1}D}{(1 - x_i A^{-1} x_i')(1 - x_i A^{-1} x_i')}$$

معیارهای ذکر شده تأثیر مشاهدات بر ضرایب رگرسیونی و مقادیر برازش شده را بیان می کنند.

۴ مثال عددی

به منظور نشان دادن عملکرد برآوردگر ارائه شده، ابتدا به عنوان مثال داده های واقعی را در نظر بگیرید که در (گربر [۴]) مورد بحث قرار گرفت. در این مثال عدد شرطی برابر $1/16470$ نشان دهنده وجود هم خطی می باشد. بر اساس (چانگ و یانگ [۵])، تعداد مؤلفه های اصلی را $k=3$ انتخاب می کنیم، و با در نظر گرفتن محدودیت تصادفی زیر

$$r = R\beta + e, \quad R = (1, 1, 2, -2, -2), \quad e \sim N(0, \hat{\sigma}_{OLSE}^2)$$

معیارهای تشخیصی را بدست می آوریم. در جدول ۱ مشاهدات مؤثر و بانفوذ بر اساس معیارهای مطرح شده بیان شده است. سطرهای جدول ۱ به ترتیب مؤثرترین و بانفوذترین نقاط هنگامی که از برآوردگر حداقل مربعات ($\hat{\beta}_{OLSE}$) و برآوردگر رگرسیون مؤلفه های اصلی تحت محدودیت تصادفی ($\hat{\beta}_{SRPC}$) استفاده شده را نشان می دهد. مشاهده اول در دو برآوردگر بانفوذترین، و مشاهده هفتم نیز در بین هر دو برآوردگر نقطه مؤثر است و فقط ترتیب آن در بین دو برآوردگر متفاوت است.

جدول ۱: مشاهدات مؤثر و بانفوذ

D	DFFITs	h	Estimators
۷, ۱,۳,۲,۸,۴	۱,۷,۴,۶,۹,۵	۱,۸,۱۰,۴,۳,۲	$\hat{\beta}_{OLSE}$
۸,۶,۵,۱۰,۷,۲	۷,۲,۱۰,۳,۱,۹	۱,۴,۹,۳,۱۰,۲	$\hat{\beta}_{SRPC}$

مراجع

- [1] D. He, Y. Wu, *A stochastic restricted principal components regression estimator in the linear model*, Hindawi Publishing Corporation the Scientific World Journal, Article ID 231506, 6 pages, 2014.
- [2] W. F. Massy, *Principal components regression in exploratory statistical research*, Journal of the American Statistical Association, vol. 60, no. 309, pp. 234–266, 1965.
- [3] Sh. Wang, M. Liu, X. Deng, *On diagnostics in stochastic restricted linear regression models*, Open Journal of Statistics, 4, 757-764, 2014.
- [4] M. H. J. Gruber, *Improving Efficiency by Shrinkage: The James-Stein and Ridge Regression Estimators*, Marcel Dekker, New York, NY, USA, 1998.
- [5] X. Chang and H. Yang, *Combining two-parameter and principal component regression estimators*, Statistical Papers, vol. 53, pp. 549–562, 2012.



پواسن دو متغیره با صفر انباشته همراه با اثر تصادفی نرمال چوله و کاربرد آن در تعیین عوامل مؤثر بر تعداد واحدهای مردودی و ترم‌های مشروطی دانشجویان

محمد رضا زادکرمی
دانشگاه شهید چمران اهواز

مژگان دهقانی*
دانشگاه شهید چمران اهواز

چکیده

پیشرفت تحصیلی دانشجویان و عوامل مؤثر بر آن از اولویت‌های پژوهشگران و همچنین مدیران آموزشی دانشگاه‌ها می‌باشد. بررسی تعداد واحدهای مردودی و ترم‌های مشروطی از جمله روش‌هایی است که می‌توان موفقیت تحصیلی دانشجویان را ارزیابی کند. از آن‌جا که این عوامل در بسیاری از دانشجویان دارای مقدار صفر می‌باشد، استفاده از مدل‌های رگرسیون پواسن با انباشتگی در صفر که برای مدل‌سازی داده‌های شمارشی با مقادیر صفر زیاد بکار می‌رود، توصیه می‌گردد. در این مطالعه از مدل رگرسیون پواسن دو متغیره با انباشتگی در صفر با اثرات تصادفی برای مدل‌سازی و تعیین عوامل مؤثر بر تعداد واحدهای مردودی و ترم‌های مشروطی دانشجویان ورودی سال ۸۹-۸۸ دانشگاه شهید چمران اهواز استفاده می‌شود.

واژه‌های کلیدی: پواسن با صفر انباشته، اثر تصادفی، نرمال چوله، واحدهای مردودی، ترم‌های مشروطی

Mathematics Subject Classification [2010]: 13D45, 39B42

۱ مقدمه

در آمار کاربردی برای بررسی متغیرهای گسسته (شمارشی) معمولاً از توزیع پواسن استفاده می‌شود. در شرایطی که هدف بررسی و تبیین یک متغیر شمارشی با استفاده از چند متغیر کمکی باشد، از مدل‌سازی آماری استفاده می‌گردد. مدل‌سازی آماری از جمله روش‌های مناسب برای بررسی روابط پدیده‌های اقتصادی و اجتماعی است. رگرسیون پواسن یکی از مدل‌هایی است که برای مدل‌سازی پدیده‌های شمارشی نظیر تعداد دروس مردودی، ترم‌های مشروطی و... بکار می‌رود. در این روش به مدل‌بندی میانگین این متغیرها با استفاده از روابط آماری پرداخته می‌شود. در صورتی که متغیر شمارشی دارای انباشتگی بیش از حد در عدد صفر باشد، از توزیع پواسن با انباشتگی در صفر استفاده می‌گردد. مدل رگرسیون پواسن با صفر انباشته نوع اصلاح شده‌ی توزیع پواسن است که امکان مدل‌بندی فراوانی تعداد صفر را فراهم می‌کند. لامبرت [۴] مدل رگرسیون با صفر انباشته (ZIP) را برای داده‌های شمارشی با انباشتگی در صفر پیشنهاد کرد. برای اطلاعات بیشتر به [۲]، [۳]، [۵] و [۶] مراجعه کنید. برای در نظر گرفتن عوامل ناشناخته و غیر قابل اندازه‌گیری که باعث وابستگی در پاسخ‌ها می‌شوند از اثر تصادفی استفاده شده است. هدف این مطالعه مدل‌سازی و تعیین عوامل مؤثر بر تعداد واحدهای مردودی و ترم‌های مشروطی دانشجویان دانشگاه شهید چمران اهواز با استفاده از توزیع پواسن دو متغیره با انباشتگی در صفر با اثرات تصادفی می‌باشد. رشته‌های تحصیلی یک نوع کلاسه‌بندی را در دانشجویان ایجاد می‌کنند. از اثر تصادفی برای نشان دادن اثر رشته‌های تحصیلی استفاده شده است. توزیع اثر تصادفی معمولاً نرمال [۷] در نظر می‌گیرند ولی ما از توزیع نرمال چوله [۱] استفاده کرده‌ایم.

* سخنران



۲ مدل رگرسیون پواسن با انباشتگی در صفر (ZIP)

مدل رگرسیون پواسن با صفر انباشته که در آن متغیر پاسخ شمارشی $Y = (Y_1, \dots, Y_n)$ می باشد به صورت زیر تعریف می شود:

$$pr(Y_{ik} = y_{ik}) = \begin{cases} p_{ik} + (1 - p_{ik}) \exp(-\lambda_{ik}) & y_{ik} = 0 \\ (1 - p_{ik}) \frac{\exp(-\lambda_{ik}) \lambda_{ik}^{y_{ik}}}{y_{ik}!} & y_{ik} > 0 \end{cases}$$

که $0 < p < 1$ و $k = 1, 2, i = 1, \dots, n$ می باشد و همچنین مفروضات زیر را داریم:

$$\log(\lambda_{i1}) = \sum_{j=0}^m x'_{ij} \beta_{1j} + u, \quad \log(\lambda_{i2}) = \sum_{j=0}^m x'_{ij} \beta_{2j} + v, \quad \log(p_{i1}/(1 - p_{i1})) = \sum_{j=0}^m x'_{ij} \gamma_{1j},$$

$$\log(p_{i2}/(1 - p_{i2})) = \sum_{j=0}^m x'_{ij} \gamma_{2j}, \quad x'_i = (1, x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{im}), \quad \beta_{kj}' = (\beta_{k0}, \dots, \beta_{km}), \quad \gamma_{kj}' = (\gamma_{k0}, \dots, \gamma_{km}).$$

که $j = 1, \dots, m$ می باشد. در اینجا x'_i ، i امین ردیف ماتریس متغیرهای مستقل X است که $X = (x_1, \dots, x_n)'$ می باشد و β و γ بردار $(m+1)$ بعدی از ضرایب متغیرهای مستقل می باشند و همچنین (u, v) متغیرهای اثر تصادفی هستند که توزیع آن ها را در دو حالت $N_2(0, \Sigma)$ و $SN_2(0, \Sigma, \lambda)$ در نظر گرفته ایم که در اینجا $\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & 0 \\ 0 & \sigma_2^2 \end{pmatrix}$ می باشد.

۱.۲ برآورد ماکزیمم درستنمایی

جهت برآورد پارامترها از روش ماکزیمم درستنمایی استفاده شده است. لگاریتم تابع درستنمایی را به صورت زیر داریم:

$$f(y_{i1}, y_{i2} | u, v) = f(y_{i1} | u) f(y_{i2} | v)$$

$$f(y_{i1}, y_{i2}) = \int \int f(y_{i1} | u) f(y_{i2} | v) f(u, v) du dv$$

$$L = \prod_{i=1}^n f(y_{i1}, y_{i2}) = \prod_{i=1}^n \left(\int \int f(y_{i1} | u) f(y_{i2} | v) du dv \right)$$

$$LL = \sum_{i=1}^n \log f(y_{i1}, y_{i2})$$

۳ روش تحقیق

در این مقاله جامعه آماری مورد مطالعه، کلیه دانشجویان شاغل به تحصیل ورودی سال ۸۹ - ۸۸ دانشگاه شهید چمران اهواز در مقاطع مختلف تحصیلی بوده اند. نمونه گیری تصادفی ساده، به حجم ۲۶۹۰ نفر انتخاب شده است. این اطلاعات شامل دانشکده، رشته، مقطع تحصیلی، جنسیت، بومی بودن، سهمیه، تعداد واحدهای مردودی و ترم های مشروطی دانشجویان می باشد. برای تجزیه و تحلیل از نرم افزار SAS نسخه ۹.۲ و بسته *proc nlmixed* و مدل های آماری رگرسیون پواسن دو متغیره با انباشتگی در صفر، رگرسیون پواسن دو متغیره با انباشتگی در صفر همراه با اثرات تصادفی با توزیع نرمال و نرمال چوله استفاده شده است.



۴ تحلیل مدل انتخابی

با توجه به جدول ۱ کمترین مقدار ملاک آکاییکه و شوارتز متعلق به مدل توزیع پواسن دو متغیره با صفر انباشته همراه با اثر تصادفی نرمال چوله می‌باشد. از این رو برازش مدل با اثر تصادفی نرمال چوله مناسب‌تر از نرمال می‌باشد.

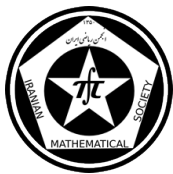
جدول ۱: مقایسه مدل‌های برازش داده شده به تعداد واحدهای مردودی و ترم‌های مشروطی دانشجویان

ردیف	مدل	$-2 \log likelihood$	AIC	AICC	BIC
۱	توزیع پواسن دو متغیره با صفر انباشته	۱۹۱۴۰	۱۹۱۸۸	۱۹۱۸۹	۱۹۳۴۷
۲	توزیع پواسن دو متغیره با صفر انباشته همراه با اثر تصادفی نرمال	۱۸۳۶۵	۱۸۴۱۷	۱۸۴۱۷	۱۸۴۴۰
۳	توزیع پواسن دو متغیره با صفر انباشته همراه با اثر تصادفی نرمال چوله	۱۰۹۷۸	۱۱۰۳۲	۱۱۰۳۲	۱۱۰۵۶

در مدل توزیع پواسن دو متغیره با صفر انباشته همراه با اثر تصادفی نرمال چوله مطابق با جدول ۲ تغییر از مقطع تحصیلی کارشناسی به کارشناسی ارشد باعث کاهش ضریب تعداد واحدهای مردودی و ترم‌های مشروطی به ترتیب به اندازه‌ی ۰/۹۱۵۹ و ۲/۱۱۲۹ می‌شود. همچنین تغییر جنسیت از زن به مرد باعث افزایش ضریب تعداد واحدهای مردودی به اندازه‌ی ۰/۱۸۱۷ می‌شود. علاوه بر این با تغییر سهمیه از سایر سهمیه‌ها به سهمیه مناطق، ضریب تعداد واحدهای مردودی و ترم‌های مشروطی به ترتیب به اندازه‌ی ۰/۲۳۷۶ و ۰/۴۶۹۳ کاهش می‌یابد و همچنین بومی بودن دانشجویان باعث افزایش ضریب تعداد ترم‌های مشروطی به اندازه‌ی ۰/۲۷۹۴ می‌شود. همچنین مقاطع تحصیلی کارشناسی ارشد و دکتری، نسبت به کارشناسی شانس انباشتگی مردود شدن واحدهای درسی را کاهش می‌دهند و همچنین بومی بودن دانشجویان شانس انباشتگی مردود شدن واحدهای درسی و مشروط شدن ترم‌های درسی را کاهش می‌دهد. علاوه بر این تغییر جنسیت از زن به مرد شانس انباشتگی مردود شدن واحدهای درسی و ترم‌های مشروطی را افزایش می‌دهد.

مراجع

- [1] A. Azzalini, *The Skew-normal Distribution and Related Multivariate Families*, Scandinavian Journal of Statistics, 32(2),(2005), 159-188.
- [2] D. Bohning, *Zero-Inflated Poisson Models and C.A.MAN: A Tutorial Collection of Evidence*, Biometrical Journal, 1998, 833-843.
- [3] D. Bohning, E. Dietz and P. Schlattmann, *The Zero-Inflated Poisson Model and the Decayed, Missing and Filled Teeth Index in Dental Epidemiology*, Journal of Royal Statistical Society, 1999, 195-209.
- [4] D. Lambert, *Zero-inflated poisson regression, with an application to defects in manufacturing*, Technometrics, 1992, 1-14.
- [5] A.H. Lee, K. Wangand and K. K. W. Yau, *Analysis of Zero-Inflated Poisson Data Incorporating Extent of Exposure*, Biometrical Journal, 2001, 963-975.
- [6] J.P. Fox , *Multivariate zero-inflated modeling with latent predictors: Modeling feedback behavior*, Computational Statistics and Data Analysis, 2013, 361-374.



جدول ۲: برآورد پارامترها (توزیع پواسن دو متغیره با صفر انباشته همراه با اثر تصادفی نرمال چوله)

$P - value$	مقدار آماره T	انحراف معیار	برآورد	پارامتر
$</0.0001$	۱۳/۱۹	۰/۱۴۲۶	۱/۸۸۱۱	β_{10}
$</0.0001$	-۱۶/۸۱	۰/۰۵۴۴۷	-۰/۹۱۵۹	β_{11} (مقطع کارشناسی ارشد)
۰/۹۶۰۲	-۰/۰۵	۰/۳۸۳۱	-۰/۰۱۹۴۳	β_{12} (مقطع دکتری)
$</0.0001$	۸/۹۹	۰/۰۲۰۲۱	۰/۱۸۱۷	β_{13} (جنسیت)
۰/۱۰۲۰	-۱/۷۳	۰/۰۲۱۹۲	-۰/۰۳۸۰۲	β_{14} (بومی بودن)
$</0.0001$	-۶/۲۴	۰/۰۳۸۰۹	-۰/۲۳۷۶	β_{15} (سهمیه)
۰/۰۷۶۴	۱/۸۹	۰/۱۶۶۸	۰/۳۱۵۹	β_{20}
۰/۰۳۳۱	-۲/۳۳	۰/۹۰۶۰	-۲/۱۱۲۹	β_{21} (مقطع کارشناسی ارشد)
۰/۹۴۰۰۱	-۰/۸۶	۰/۵۳۱۶	-۰/۴۵۹۵	β_{22} (مقطع دکتری)
۰/۴۸۰۱	۰/۷۲	۰/۱۲۸۴	۰/۰۹۲۸۴	β_{23} (جنسیت)
۰/۰۳۳۰	۲/۳۳	۰/۱۱۹۷	۰/۲۷۹۴	β_{24} (بومی بودن)
۰/۰۰۸۸	-۲/۹۸	۰/۱۵۷۳	-۰/۴۶۹۳	β_{25} (سهمیه)
۰/۰۰۲۴	-۳/۶۰	۰/۱۸۵۵	-۰/۶۶۷۳	γ_{10}
$</0.0001$	۱۵/۷۹	۰/۱۳۵۷	۲/۱۴۲۶	γ_{11} (مقطع کارشناسی ارشد)
$</0.0001$	۵/۱۹	۰/۳۴۵۷	۱/۷۹۵۳	γ_{12} (مقطع دکتری)
$</0.0001$	-۷/۵۹	۰/۰۹۸۱۹	-۰/۷۴۵۴	γ_{13} (جنسیت)
۰/۰۰۰۴	۴/۴۸	۰/۱۰۱۰	۰/۴۵۱۸	γ_{14} (بومی بودن)
۰/۱۳۰۴	۱/۵۹	۰/۱۸۴۵	۰/۲۹۴۲	γ_{15} (سهمیه)
۰/۴۰۸۴	۰/۸۵	۰/۴۲۶۶	۰/۳۶۲۱	γ_{20}
۰/۶۱۶۵	-۰/۵۱	۳/۹۳۵۶	-۲/۰۱۰۲	γ_{21} (مقطع کارشناسی ارشد)
۰/۳۴۳۱	۰/۹۸	۰/۶۵۷۴	۰/۶۴۲۳	γ_{22} (مقطع دکتری)
$</0.0001$	-۷/۵	۰/۰۹۸۱۹	-۰/۷۴۵۴	γ_{23} (جنسیت)
۰/۰۰۳۹	۳/۳۷	۰/۱۸۸۳	۰/۶۳۵۴	γ_{24} (بومی بودن)
۰/۵۵۶۳	۰/۶۰	۰/۴۲۵۴	۰/۲۵۵۷	γ_{25} (سهمیه)
-	-	-	۰/۱۷۲۸	σ_1^2
-	-	-	۰/۰۱۲۱۶	σ_2^2
۰/۰۰۲۰	۳/۶۹	۱/۷۵۷	۶/۴۷۵۷	λ

[7] K.K.W. Yau , A.H. Lee , *Zero-Inflated Poisson Regression with Random Effects to Evaluate an Occupational Injury Prevention Programme*, Statistics in Medicine, 2001, 2907-2920.

پست الکترونیکی: m-deghani@mscstu.scu.ac.ir
 پست الکترونیکی: zadkarami_m@scu.ac.ir



تحلیل رگرسیون بیزی تحت روش نمونه‌گیری مجموعه رتبه‌دار کرانگین

افشین فلاح*

دانشگاه بین‌المللی امام خمینی

مریم شیخ

دانشگاه بین‌المللی امام خمینی

چکیده

تحلیل رگرسیونی به صورت سنتی بر پایه‌ی این فرض که مشاهدات از روش نمونه‌گیری تصادفی ساده به دست آمده‌اند، صورت می‌پذیرد. در این مقاله تحلیل رگرسیونی تحت روش نمونه‌گیری مجموعه رتبه‌دار از دیدگاه بیزی مورد توجه قرار گرفته و برای این منظور مدلی پیشنهاد شده است، مدل پیشنهادی در قالب یک مطالعه شبیه‌سازی مورد ارزیابی قرار گرفته است.

واژه‌های کلیدی: تحلیل رگرسیونی، نمونه‌گیری مجموعه رتبه‌دار، بیز

Mathematics Subject Classification [2010]: 62J05,94A20

مقدمه

گاهی اوقات واحدهای جامعه تحت مطالعه را می‌توان با صرف هزینه‌های اندک و بدون آنکه اطلاع دقیقی از مقدار خصوصیت مورد بررسی در دست باشد، رتبه‌بندی کرد. برای این کار اغلب از نظر کارشناسان یا مقادیر متغیری مرتبط با خصوصیت مورد بررسی که اندازه‌گیری آن آسان و کم هزینه باشد، استفاده می‌شود. در چنین شرایطی، روش نمونه‌گیری مجموعه رتبه‌دار و تعمیم‌های آن، روش‌های کاراتری را برای برآورد پارامترهای جامعه مورد مطالعه ارائه می‌کنند. در روش‌های نمونه‌گیری مجموعه رتبه‌دار برآوردگر میانگین جامعه در مقایسه با برآوردگر حاصل از نمونه‌گیری تصادفی ساده با همان تعداد نمونه است دارای کارایی بیشتری است. روش نمونه‌گیری مجموعه رتبه‌دار اولین بار توسط [۱] و [۲] برای افزایش دقت در برآورد میانگین جامعه و به عنوان رقیبی برای روش نمونه‌گیری تصادفی ساده به کار گرفته شد. چون رتبه‌بندی کامل یک متغیر ممکن است مشکل باشد، [۳] روشی تحلیلی برای مقایسه دقت نسبی روش‌های نمونه‌گیری مجموعه رتبه‌دار و تصادفی ساده ارائه کردند. از طرفی، در برخی از مسائل کاربردی رتبه‌بندی متغیر مورد بررسی بدون اندازه‌گیری آن امکان‌پذیر نیست. در چنین حالتی اگر یک متغیر کمکی قابل اندازه‌گیری و دارای همبستگی زیاد با متغیر مورد نظر وجود داشته باشد، در این صورت می‌توان برای رتبه‌بندی واحدهای نمونه‌ای از این متغیر کمکی استفاده نمود. بر پایه این ایده، [۴] روش نمونه‌گیری مجموعه رتبه‌دار کرانگین را معرفی کردند. در این مقاله، تحلیل رگرسیونی بیزی تحت روش نمونه‌گیری مجموعه رتبه‌دار کرانگین مورد بررسی قرار گرفته است. در بخش دوم روش نمونه‌گیری مجموعه رتبه‌دار به اختصار شرح داده شده است. در بخش سوم، تحلیل رگرسیونی تحت روش نمونه‌گیری مجموعه رتبه‌دار از دیدگاه بیزی مورد توجه قرار گرفته و مدلی برای این منظور پیشنهاد شده است. در بخش چهارم، مدل پیشنهادی در قالب یک مطالعه شبیه‌سازی مورد ارزیابی قرار گرفته است.

* سخنران



۱ روش نمونه‌گیری مجموعه رتبه‌دار

در این بخش روش نمونه‌گیری مجموعه رتبه‌دار و روش نمونه‌گیری مجموعه رتبه‌دار کرانگین متحرک به اختصار توضیح داده می‌شود. در برخی مطالعات این امکان وجود دارد که واحدهای جامعه را با صرف هزینه‌ای اندک بدون آن‌که اطلاع دقیقی از مقدار خصیصه تحت مطالعه در دسترس باشد، رتبه‌بندی کرد. در چنین شرایطی استفاده نمونه‌گیری مجموعه رتبه‌دار می‌تواند به افزایش دقت در برآورد پارامترهای جامعه منجر شود. روش نمونه‌گیری مجموعه رتبه‌دار در ساده‌ترین حالت دارای مراحل زیر است: (۱) انتخاب تصادفی n^2 واحد نمونه‌ای از جامعه مورد مطالعه. (۲) تخصیص n^2 واحد انتخابی به طور تصادفی به n مجموعه هر یک به اندازه n . (۳) رتبه‌بندی واحدهای آزمایشی به ترتیب صعودی در هر مجموعه بر اساس مقادیر تقریبی متغیر مورد نظر. (۴) انتخاب نمونه مجموعه رتبه‌دار بر اساس یک تکرار، که شامل انتخاب واحد دارای کوچکترین رتبه در اولین مجموعه، سپس انتخاب واحد دارای دومین رتبه در دومین مجموعه و به همین ترتیب تا انتخاب واحد دارای بزرگترین رتبه در آخرین مجموعه می‌باشد. حال اگر نمونه‌گیری را m مرتبه تکرار کنیم، یک نمونه مجموعه رتبه‌دار $k = mn$ تایی حاصل می‌شود. از آن‌جا که ممکن است با افزایش اندازه نمونه خطای رتبه‌بندی نیز افزایش یابد، به همین دلیل نوعی روش نمونه‌گیری مجموعه رتبه‌دار به نام نمونه‌گیری مجموعه رتبه‌دار کرانگین متحرک توسط [۴] معرفی شد. این روش نمونه‌گیری به اختصار به صورت زیر است: (۱) به تصادف m نمونه به حجم‌های $m, \dots, 2, 1$ انتخاب می‌شود. (۲) واحدهای نمونه در هر مجموعه به صورت بصری رتبه‌بندی می‌شود. (۳) واحدهای دارای بزرگترین رتبه از این m مجموعه انتخاب می‌شود. (۴) مراحل قبل را تکرار کرده و این بار کوچکترین‌ها انتخاب می‌شود.

۲ تحلیل رگرسیونی تحت روش‌های نمونه‌گیری مجموعه رتبه‌دار

در تحلیل رگرسیون تحت روش نمونه‌گیری مجموعه رتبه‌دار، مشاهدات را می‌توان بر اساس مقادیر متغیر وابسته یا مقادیر متغیرهای تبیینی رتبه‌بندی نمود. در روش اول مدل به صورت

$$Y_{(i)} = \beta_0 + \beta_1 x_{[i]} + \epsilon_{(i)}, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (1)$$

نوشته می‌شود، که در آن $Y_{(i)}$ نشان دهنده‌ی متغیر پاسخ در i امین کوچکترین عنصر از i امین نمونه و $x_{[i]}$ متغیر تبیینی متناظر با آن را نشان می‌دهد. اندیس (i) نشان دهنده‌ی رتبه‌ی اختصاص داده شده و اندیس $[i]$ نشان دهنده‌ی رتبه‌ی واقعی متغیر تبیینی در نمونه می‌باشد. فرضیات اولیه در این جا شبیه فرضیات مربوط به تحلیل رگرسیونی تحت نمونه‌گیری تصادفی ساده است. برآوردگرهای کمترین توان‌های دوم پارامترهای مدل به صورت $\hat{\beta}_0 = \bar{Y} - \hat{\beta}_1 \bar{x}$ و $\hat{\beta}_1 = \frac{\sum_{i=1}^n (Y_{(i)} - \bar{Y})(x_{[i]} - \bar{x})}{S_{xx}}$ محاسبه می‌شوند. در روش دوم رتبه‌بندی بر اساس متغیر مستقل صورت می‌پذیرد. بر این اساس مدل رگرسیونی به صورت

$$Y_{[i]} = \beta_0 + \beta_1 x_{(i)} + \epsilon_{[i]}, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (2)$$

است، که در آن پارامترها به شکل $\hat{\beta}_0 = \bar{Y} - \hat{\beta}_1 \bar{x}$ و $\hat{\beta}_1 = \frac{\sum_{i=1}^n (Y_{[i]} - \bar{Y})(x_{(i)} - \bar{x})}{S_{xx}}$ برآورد می‌شوند. می‌توان نشان داد که برآوردگرهای ضرایب در هر دو روش نارایب هستند. در تحلیل رگرسیونی تحت روش نمونه‌گیری مجموعه رتبه‌دار

$$Y_{k:K} = \beta_0 + \beta_1 x_k + \epsilon_{k:k} \text{ و } Y_{1:K} = \beta_0 + \beta_1 x_k + \epsilon_{1:k} \text{ به صورت}$$

$$\epsilon_{k:k} = \max(\epsilon_{11}, \dots, \epsilon_{2k}) \text{ و } \epsilon_{1:k} = \min(\epsilon_{11}, \dots, \epsilon_{1m}). \quad [5]$$

مدل فوق را می‌توان به صورت

$$Y_k^* = \beta_0 + \beta_1 x_k + \epsilon_k^*, \quad k = 1, 2, \dots, m, \quad (3)$$



بازنویسی کرد. چون خطاها دارای میانگین صفر و واریانس غیر ثابت هستند، پارامترهای مدل از روش کمترین توان‌های دوم وزنی به صورت زیر برآورد می‌شوند:

$$\hat{\beta}_{1w} = \frac{\sum_{k=1}^m w_k x_k Y_k^* - \frac{(\sum_{k=1}^m w_k x_k)(\sum_{k=1}^m w_k Y_k^*)}{\sum_{k=1}^m w_k}}{\sum_{k=1}^m w_k x_k^2 - \frac{(\sum_{k=1}^m w_k x_k)^2}{\sum_{k=1}^m w_k}}$$

$$\hat{\beta}_{0w} = \frac{\sum_{k=1}^m w_k Y_k^* - \hat{\beta}_{1w} \sum_{k=1}^m w_k x_k}{\sum_{k=1}^m w_k}$$

۳ تحلیل رگرسیون بیزی تحت روش نمونه‌گیری مجموعه رتبه‌دار

لازمه تحلیل بیزی مدل رگرسیون آن است که پارامترهای مدل متغیرهایی تصادفی تلقی و برای آن‌ها توزیع‌های پیشین مناسب در نظر گرفته شود. در این مقاله، برای بردار ضرایب رگرسیونی و پارامتر واریانس، به ترتیب توزیع‌های پیشین نرمال چند متغیره و گامای وارون به صورت

$$\beta | \sigma^2 \sim N_p(\beta_0, \sigma^2 I_p), \quad \beta_0 \in \mathbb{R}^p, \sigma^2 \in \mathbb{R}$$

$$1/\sigma^2 \sim \text{Gamma}(a_0, b_0), \quad a_0, b_0 \in \mathbb{R}$$

در نظر گرفته شده‌است، که در آن‌ها β_0 ، a_0 و b_0 ابر پارامترهای توزیع پیشین هستند. بر این اساس، توزیع پسین به صورت

$$\pi(\beta, \sigma^2 | D) \propto f(\mathbf{y} | \mathbf{x}, \beta) \pi(\beta | \sigma^2) \pi(\sigma^2)$$

$$= f(\mathbf{y} | \mathbf{x}, \beta) \times \Phi_p(\beta; \mu, \sigma^2 I) \times dIG(\sigma^2; a_0, b_0)$$

نوشت، که در آن $dIGamma(\sigma^2; a_0, b_0)$ و $\Phi_p(\beta; \mu, \sigma^2 I)$ توابع چگالی توزیع‌های نرمال چند متغیره و گامای وارون را نشان می‌دهند. تابع درستنمایی متناظر با مدل رگرسیون تحت روش نمونه‌گیری مجموعه رتبه‌دار و مجموعه رتبه‌دار کرانگین متحرک به ترتیب به شکل

$$f(\mathbf{y}_{ij} | \mathbf{x}_{ij} \beta, \sigma^2) = \prod_{i=1}^n \prod_{j=1}^m \frac{n! (\Phi(y_{ij}; \mathbf{x}_{ij} \beta, \sigma^2))^{i-1} (1 - \Phi(y_{ij}; \mathbf{x}_{ij} \beta, \sigma^2))^{n-i}}{(i-1)!(n-i)!} \phi(y_{ij}; \mathbf{x}_{ij} \beta, \sigma^2)$$

$$f(\mathbf{y}_k | \mathbf{x}_k \beta, \sigma^2) = \prod_{k=1}^m k [\Phi(y_{k:k}; \mathbf{x}_k \beta, \sigma^2)]^{k-1} \times \phi(y_{k:k}; \mathbf{x}_k \beta, \sigma^2)$$

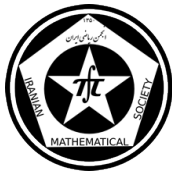
$$\times k [1 - \Phi(y_{1:k}; \mathbf{x}_k \beta, \sigma^2)]^{k-1} \times \phi(y_{1:k}; \mathbf{x}_k \beta, \sigma^2),$$

است. بنابراین، توزیع‌های پسین‌های متناظر با مدل‌های مورد بحث به ترتیب به صورت

$$\pi(\beta, \sigma^2 | D) = \prod_{i=1}^n \prod_{j=1}^m \frac{n! (\Phi(y_{ij}; \mathbf{x}_{ij} \beta, \sigma^2))^{i-1} (1 - \Phi(y_{ij}; \mathbf{x}_{ij} \beta, \sigma^2))^{n-i}}{(i-1)!(n-i)!} \phi(y_{ij}; \mathbf{x}_{ij} \beta, \sigma^2)$$

$$\times \Phi_p(\beta; \mu, \sigma^2 I) \times dIG(\sigma^2; a_0, b_0)$$

$$\pi(\beta, \sigma^2 | D) \propto \prod_{k=1}^m k [\Phi(y_{k:k} | \mathbf{x}_k \beta, \sigma^2)]^{k-1} \times \phi(y_{k:k} | \mathbf{x}_k \beta, \sigma^2)$$



جدول ۱: مقادیر ریشه میانگین توان دوم خطا ($RMSE$) براوردگرهای ضرایب رگرسیونی حاصل از روش‌های نمونه‌گیری مجموعه رتبه‌دار و مجموعه رتبه‌دار کرانگین متحرک به‌ازای اندازه نمونه‌های ۵، ۱۰ و ۲۰.

روش نمونه‌گیری		ضرایب رگرسیونی	اندازه نمونه
مجموعه رتبه‌دار	مجموعه رتبه‌دار کرانگین متحرک		
۰/۱۳۴۶	۰/۳۹۹۵	β_0	۵
۰/۱۶۳۵	۰/۴۴۱	β_1	
۰/۳۷۹۰	۰/۴۲۸	β_2	
۰/۴۶۲۲	۰/۳۹۹۷	β_0	۱۰
۱/۲۹۹۵	۰/۴۳۹	β_1	
۰/۷۸۶۵	۰/۴۲۶	β_2	
۰/۱۵۹۶	۰/۱۶۷۶	β_0	۲۰
۰/۳۵۳۱	۰/۱۴۹۶	β_1	
۰/۳۵۳۲	۰/۱۲۵۶	β_2	

$$\begin{aligned} & \times k[1 - \Phi(y_{1:k} | \mathbf{x}_k \boldsymbol{\beta}, \sigma^2)]^{k-1} \times \phi(y_{1:k} | \mathbf{x}_k \boldsymbol{\beta}, \sigma^2) \\ & \times \Phi_p(\boldsymbol{\beta}; \boldsymbol{\mu}, \sigma^2 \mathbf{I}) \times dIG(\sigma^2; a_0, b_0), \end{aligned}$$

است. ملاحظه می‌شود که توزیع‌های پسین فاقد فرم بسته و شناخته شده هستند. از این رو، از الگوریتم‌های مونت کارلویی زنجیر مارکوفی برای نمونه‌گیری از توزیع پسین و استنباط‌های پسینی درباره پارامترها استفاده می‌شود.

۴ مطالعه شبیه‌سازی

در این بخش مدل بیزی پیشنهادی بر اساس یک مطالعه شبیه‌سازی به‌ازای اندازه نمونه‌های مختلف مورد مقایسه قرار می‌گیرد. مقادیر متغیرهای تبیینی از توزیع نرمال تولید شده‌اند. مقادیر متغیر پاسخ بر پایه سه روش نمونه‌گیری تصادفی ساده، نمونه‌گیری مجموعه رتبه‌دار و مجموعه رتبه‌دار کرانگین شبیه‌سازی شده‌اند. مقادیر ریشه میانگین توان دوم خطای $RMSE$ براوردگرهای حاصل از دو مدل به‌ازای اندازه‌های نمونه‌ای متفاوت محاسبه و در جدول زیر ارائه شده است. همان‌طور که ملاحظه می‌شود، براوردگرهای رگرسیونی تحت نمونه‌گیری مجموعه رتبه‌دار کرانگین متحرک در مقایسه با نتایج متناظر تحت نمونه‌گیری مجموعه رتبه‌دار، به‌ازای تمام مقادیر اندازه نمونه کارایی بیشتری دارند.

مراجع

- [1] McIntyre, G. A. (1992) *A method for unbiased selective sampling, using ranked sets*, Australian journal of Agricultural Research, 3, 385-390.
- [2] Takahashi, K. and Wakitmoto, K. (1968) *Trial of ranked set sampling for forage yields*. Forest Science, 12, 22-26.
- [3] David, H. A. and Levine, D. N. (1972) *Ranked set sampling in the presence of judgment error*. Biometrics, 28, 553-555.
- [4] Alodat, M. T. and Al-saleh, M. F. (2001) *Variation of ranked set sampling*. J. Appl. Statist. Sci., 10, 137-146.
- [5] Alodat, M. T. and Al-Odat, N. A. and Al-Rawwash, M. and Alodat, M. T. (2009) *Moving extreme ranked set sampling for simple linear regression*. Vita e pensiero, 13.



توزیع لیندلی-دوجمله‌ای منفی و ویژگی های آن

عیسی محمودی*
دانشگاه یزدسمیه ابوالحسینی
دانشگاه یزد

چکیده

در این مقاله خانواده جدیدی از توزیع‌ها تحت عنوان توزیع لیندلی-دوجمله‌ای منفی معرفی می‌گردد. توزیع جدید از ترکیب توزیع لیندلی و توزیع دوجمله‌ای منفی به دست می‌آید. این توزیع حالت خاصی از کلاس توزیع‌های لیندلی-سری توانی است، که این کلاس در حقیقت تعمیمی از توزیع لیندلی می‌باشد؛ با این وجود نسبت به توزیع لیندلی از انعطاف پذیری بیشتری برخوردار است. در این مقاله به صورت مختصر برخی از ویژگی‌های توزیع جدید از جمله تابع چگالی احتمال، تابع نرخ شکست، تابع بقا و گشتاورها محاسبه می‌شود.

واژه‌های کلیدی: تابع بقا، تابع نرخ شکست، توزیع دوجمله‌ای منفی، توزیع لیندلی.

Mathematics Subject Classification [2010]: 13D45, 39B42

۱ مقدمه

فرض کنید یک سیستم با N مؤلفه داریم، N (تعداد مؤلفه‌ها) یک متغیر تصادفی گسسته با تکیه‌گاه $\{1, 2, \dots\}$ و دارای توزیع دوجمله‌ای منفی با تابع جرم احتمال به فرم

$$P(N = n) = \binom{n-1}{k-1} (1-\theta)^k \theta^{n-k}, \quad n = 1, 2, \dots, \quad k \geq 1, \quad 0 < \theta < 1, \quad n \geq k$$

است. طول عمر i امین مؤلفه $(i = 1, 2, \dots, N)$ که یک متغیر تصادفی پیوسته (X_i) است، از توزیع لیندلی برخوردار است. چنانچه مؤلفه‌ها در یک سیستم به طور سری قرار گرفته باشند، طول عمر این سیستم برابر $Y = \min_{1 \leq i \leq N} X_i$ است، متغیر تصادفی Y یک خانواده از توزیع‌ها تحت عنوان لیندلی-دوجمله‌ای منفی را معرفی می‌کند. لازم به ذکر است که توابع توزیع و چگالی توزیع لیندلی به فرم

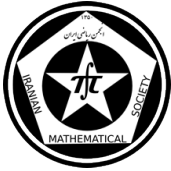
$$F(x; \gamma) = 1 - \left(1 + \frac{\gamma x}{\gamma + 1}\right) e^{-\gamma x}, \quad x > 0,$$

$$f(x; \gamma) = \frac{\gamma^2}{\gamma + 1} (1 + x) e^{-\gamma x}, \quad x > 0, \quad \gamma > 0,$$

می باشند.

مدل‌سازی و تجزیه و تحلیل داده‌های طول عمر، یک جنبه‌ی مهم از کارهای آماری است که در طیف گسترده‌ای از زمینه‌های علمی و تکنولوژیکی مورد استفاده قرار می‌گیرند. در سال‌های گذشته توزیع‌های فراوانی به منظور مدل‌سازی برای داده‌های طول

* سخنران



عمر از ترکیب دو تابع معرفی شده‌اند، از جمله توزیع‌های طول عمر ترکیبی، نمایی تعمیم یافته-سری توانی، لیندلی-هندسی، وایبول نمایی شده-پواسون، وایبول نمایی شده-هندسی، وایبول نمایی شده-لگاریتمی، وایبول نمایی شده-سری توانی و نرخ شکست نمایی-سری توانی به ترتیب توسط محمودی و جعفری (۲۰۱۲)، ذاکرزاده و محمودی (۲۰۱۲)، محمودی و سپهدار (۲۰۱۳)، محمودی و شیران (۲۰۱۳)، محمودی و سپهدار (۲۰۱۴)، محمودی و شیران (۲۰۱۴) و محمودی و جعفری (۲۰۱۵) معرفی شده و مورد تجزیه و تحلیل قرار گرفته است.

کاربرد قابل توجه این توزیع در بهداشت عمومی، علوم آماری، مطالعات زیستی، میکروبیولوژی، بیمه و داده‌های مالی، جمعیت‌شناسی و قابلیت اطمینان صنعتی است. در این مقاله قصد داریم برخی از خصوصیات این توزیع را بیان کنیم. در بخش ۲ توابع چگالی، توزیع، بقا و نرخ شکست توزیع لیندلی-دوجمله‌ای منفی ارائه شده است. بخش ۳ به گشتاورهای این توزیع اختصاص داده شده است.

۲ تابع توزیع تجمعی و تابع چگالی احتمال لیندلی-دوجمله‌ای منفی

تابع توزیع تجمعی و تابع چگالی احتمال توزیع لیندلی-دوجمله‌ای منفی به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$F(y; \theta, \gamma, k) = 1 - \left[\frac{(1 - \theta)(1 + \frac{\gamma y}{\gamma + 1})e^{(-\gamma y)}}{(1 - \theta)(1 + \frac{\gamma y}{\gamma + 1})e^{-\gamma y}} \right]^k, \quad (1)$$

$$f(y; \theta, \gamma, k) = k \frac{\gamma^2}{\gamma + 1} e^{-\gamma y} \frac{(1 + y)(1 - \theta)}{(1 - \theta)(1 + \frac{\gamma y}{\gamma + 1})e^{-\gamma y}}^2 \left[\frac{(1 - \theta)(1 + \frac{\gamma y}{\gamma + 1})e^{-\gamma y}}{(1 - \theta)(1 + \frac{\gamma y}{\gamma + 1})e^{-\gamma y}} \right]^{k-1}, \quad (2)$$

که در آن $0 < \theta < 1, \gamma > 0$ و $k \in \mathcal{N}$ است. توجه داشته باشید حتی زمانی که $\theta \leq 0$ است معادله‌ی (۲) همچنان تابع چگالی باقی می‌ماند. توابع بقا و نرخ شکست توزیع لیندلی-دوجمله‌ای منفی به ترتیب عبارتند از:

$$S(y; \theta, \gamma) = \left[\frac{(1 - \theta)(1 + \frac{\gamma y}{\gamma + 1})e^{(-\gamma y)}}{(1 - \theta)(1 + \frac{\gamma y}{\gamma + 1})e^{-\gamma y}} \right]^k, \quad (3)$$

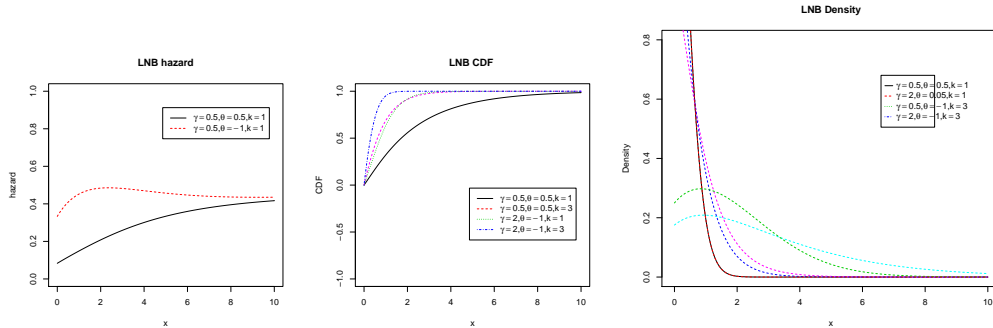
$$h(y; \theta, \gamma) = k \frac{\gamma^2}{\gamma + 1} \frac{(1 + y)}{(1 + \frac{\gamma y}{\gamma + 1})(1 - \theta)(1 + \frac{\gamma y}{\gamma + 1})e^{-\gamma y}}. \quad (4)$$

در ادامه شکل ۱، به ترتیب نشان‌دهنده نمودارهای توابع توزیع، چگالی و نرخ شکست به ازای مقادیر مختلف پارامترهای توزیع است. با توجه به شکل رفتار تابع چگالی و نرخ شکست به ازای مقادیر مختلف پارامترها کاملاً واضح است؛ تابع چگالی مربوطه دارای حالات تک مدی و نزولی می‌باشد و همچنین تابع نرخ شکست دارای حالات صعودی و تک مدی است.

گزاره ۱.۲. با استفاده از معادله‌ی (۲) برای توزیع لیندلی-دوجمله‌ای منفی داریم:

۱. اگر $k = 1$ ، آنگاه توزیع لیندلی-دوجمله‌ای منفی به توزیع لیندلی-هندسی تبدیل می‌شود بنابراین این توزیع را می‌توان تعمیمی از توزیع لیندلی-هندسی دانست.

۲. اگر $k = 1$ و $\theta \rightarrow 0$ ، آنگاه توزیع لیندلی به دست می‌آید.



شکل ۱: نمودار توابع توزیع، چگالی و نرخ شکست توزیع لیندلی-دوجمله‌ای منفی برای مقادیر مختلف θ ، γ و k

۳ گشتاورهای توزیع لیندلی-دوجمله‌ای منفی

تابع مولد گشتاور و گشتاور r ام حول صفر برای این توزیع به ترتیب عبارتند از:

$$M_Y(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=0}^{n-1} \binom{N-1}{n-1} \binom{n-1}{i} (1-\theta)^k \theta^{n-k} \frac{\gamma^{n-i+1}}{(\gamma+1)^{n-i}} n \left[\frac{\Gamma(n-i)}{(n\gamma-t)^{n-i}} + \frac{\Gamma(n-i+1)}{(n\gamma-t)^{n-i+1}} \right], \quad (5)$$

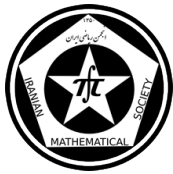
و
(۶)

$$E[Y^r] = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=0}^{n-1} \binom{N-1}{n-1} \binom{n-1}{i} (1-\theta)^k \theta^{n-k} \frac{\gamma^{i+2}}{(\gamma+1)^{i+1}} n \left[\frac{\Gamma(r+i+2)}{(n\gamma)^{r+i+2}} + \frac{\Gamma(r+i+1)}{(n\gamma)^{r+i+1}} \right].$$

با استفاده از معادله (۶)، امید ریاضی توزیع لیندلی-دوجمله‌ای منفی به صورت زیر حاصل می‌شود:

$$E[Y] = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=0}^{n-1} \binom{N-1}{n-1} \binom{n-1}{i} (1-\theta)^k \theta^{n-k} \frac{\gamma^{i+2}}{(\gamma+1)^{i+1}} n \left[\frac{\Gamma(i+3)}{(n\gamma)^{i+3}} + \frac{\Gamma(i+2)}{(n\gamma)^{i+2}} \right].$$

با توجه به عبارات فوق می‌توان نتیجه گرفت از آن جهت که امید ریاضی و واریانس توزیع لیندلی-دوجمله‌ای منفی فاقد یک فرم بسته است، مقادیر امید ریاضی و واریانس برای این توزیع قابل دستیابی نیستند، اما در جدول ۱ نشان داده می‌شود علی‌رغم نامتناهی بودن سری‌ها، می‌توان با استفاده از روش‌های عددی به ازای مقادیر مختلف γ ، θ و k ، امید ریاضی، واریانس، چولگی و کشیدگی را برای این توزیع محاسبه نمود.



جدول ۱: مقادیر امید ریاضی، واریانس، چولگی و کشیدگی توزیع لیندلی-دوجمله‌ای منفی برای مقادیر مختلف پارامتر

k	(γ, θ)	امید ریاضی	واریانس	چولگی	کشیدگی
۱	$(0/1, 0/8)$	۲۳/۶۹۲۱	۲۳۷/۵۷۶۲	۱/۰۳۳۲	۴/۲۷۸۵
	$(0/4, 0/1)$	۱۵/۴۷۴۸	۱۵۹/۱۶۳۱	۱/۶۴۰۶	۶/۶۹۶۹
	$(0/8, 0/1)$	۹/۳۹۸۹	۹۱/۷۳۱۷	۲/۴۵۷۴	۱۱/۸۵۳۳
	$(0/8, 0/8)$	۲/۴۹۹۲	۳/۵۱۹۳	۱/۲۴۹۴	۵/۲۷۱۲
	$(0/4, 0/8)$	۱/۵۲۸۶	۲/۲۳۲۷	۱/۹۲۶۰	۸/۴۰۹۳
	$(0/8, 0/8)$	0/۸۴۸۳	۱/۱۹۹۵	۲/۹۲۶۷	۱۵/۷۴۴۵
	$(2, 0/8)$	۱/۹۳۶۴	۲/۱۹۸۲	۱/۲۸۰۳	۵/۳۷۶۷
	$(0/4, 2)$	۱/۱۷۴۲	۱/۳۸۰۳	۱/۹۷۵۵	۸/۶۷۹۹
	$(0/8, 2)$	0/۶۴۵۱	0/۷۳۲۸	۳/۰۱۰۶	۱۶/۴۵۹۹
	$(3, 0/8)$	0/۸۷۰۹	0/۴۹۶۸	۱/۳۹۱۰	۵/۸۰۳۳
	$(0/4, 3)$	0/۵۱۶۲	0/۳۰۲۰	۲/۱۴۱۸	۹/۶۸۸۸
	$(0/8, 3)$	0/۲۷۶۸	0/۱۵۵۰	۳/۲۷۷۳	۱۸/۹۶۸۴
	۳	$(0/1, 0/8)$	۱۱/۸۷۰۶	۵۸/۴۵۶۵	0/۹۴۱۶
$(0/4, 0/1)$		۶/۵۹۷۱	۲۴/۲۰۹۶	۱/۴۳۹۵	۶/۲۴۰۷
$(0/8, 0/1)$		۳/۴۰۵۳	۸/۱۷۹۰	۱/۹۴۱۹	۹/۸۴۱۸
$(0/8, 0/8)$		۱/۰۹۲۳	0/۷۳۷۸	۱/۱۸۵۰	۴/۶۷۹۹
$(0/4, 0/8)$		0/۵۲۳۷	0/۲۵۸۷	۱/۹۳۲۳	۸/۶۳۱۸
$(0/8, 0/8)$		0/۲۲۰۷	0/۰۶۶۴	۲/۹۵۵۸	۱۸/۲۰۱۸
$(1, 0/8)$		0/۸۲۹۹	0/۴۴۶۲	۱/۲۳۴۳	۴/۸۴۹۸
$(0/4, 1)$		0/۳۹۱۳	0/۱۵۲۰	۲/۰۱۷۱	۹/۱۶۷۲
$(0/8, 1)$		0/۱۶۲۱	0/۰۳۷۶	۳/۱۰۳۹	۱۹/۸۸۱۹
$(2, 0/8)$		0/۳۵۳۸	0/۰۹۰۸	۱/۳۸۰۲	۵/۴۲۹۱
$(0/4, 2)$		0/۱۶۰۶	0/۰۲۸۷	۲/۲۴۷۳	۱۰/۸۲۵۲
$(0/8, 2)$		0/۰۶۴۲	0/۰۰۶۵	۳/۴۷۶۵	۲۴/۷۵۸۰

مراجع

- [1] Mahmoudi, E. and Jafari, A.A. (2012). Generalized exponential-power series distributions, *Computational Statistics and Data Analysis*, **56**, 4047-4066.
- [2] Mahmoudi, E. and Jafari, A.A. (2015). The compound class of linear failure rate-power series distributions: model, properties and applications, *Communication in Statistics-Simulation and Computation*, Accepted for Publication.
- [3] Mahmoudi, E. and Sepahdar, A. (2013). Exponentiated Weibull-Poisson distribution: model, properties and applications, *Mathematics and Computers in Simulation*, **92**, 76-97.
- [4] Mahmoudi, E. and Sepahdar, A. (2014). Exponentiated Weibull-logarithmic distribution, Submitted.
- [5] Mahmoudi, E. and Shiran, M. (2013). Exponentiated Weibull-geometric distribution and its applications. Submitted.
- [6] Mahmoudi, E. and Shiran, M. (2014). Exponentiated Weibull-power series distributions, Submitted.
- [7] Zakerzadeh, H. and Mahmoudi, E. (2012). A new two parameter lifetime distribution: model and properties, submitted for publication, <http://arxiv.org/abs/1204.4248v1>.

پست الکترونیکی: emahmoudi@yazd.ac.ir
پست الکترونیکی: abolhosseinis@gmail.com



رفتار مجانبی ماکزیمما در کلمات هندسی محدود

مهری جوانیان
دانشگاه زنجان

ژاله طوفانپور*
دانشگاه زنجان

چکیده

فرض کنید $\omega_1, \omega_2, \dots$ دنباله ای از متغیرهای تصادفی مستقل هندسی باشد. کلمه هندسی $\omega_1 \omega_2 \dots \omega_n$ با ویژگی $\omega_k \leq d + \max\{\omega_0, \dots, \omega_{k-1}\}$ ، $\omega_0 := 0$ و $d \geq 1$ را در نظر می گیریم. در این مقاله نشان داده ایم که $L_n^{(d)}$ ، گشتاورهای تعداد رخ دادهای ماکزیمما در \mathcal{W}_n ، هرگاه $n \rightarrow \infty$ و $d = 1$ ، توابعی متناوب هستند و در نتیجه $L_n^{(d)}$ توزیع حدی ثابتی ندارد؛ در حالی که اگر $d \geq 2$ ، توزیع حدی $L_n^{(d)}$ نرمال است.

واژه‌های کلیدی: کلمات هندسی محدود، پواسونی نمودن، توزیع حدی، تبدیل ملین، حساب مانده ها

Mathematics Subject Classification [2010]: 05A18, 05A16, 05A15

۱ مقدمه

فرض کنید $\omega_1, \omega_2, \dots$ دنباله ای از متغیرهای تصادفی مستقل هندسی با احتمال موفقیت $q := 1 - p$ است. در این صورت $\mathcal{W}_n = \omega_1 \omega_2 \dots \omega_n$ را یک کلمه هندسی n حرفی محدود گویند که در آن ω_i ها، حروف \mathcal{W}_n ، دارای ویژگی $\omega_k \leq d + \max\{\omega_0, \dots, \omega_{k-1}\}$ ، $\omega_0 := 0$ و $d \geq 1$ هستند.

به ازای $d = 1$ ، هر کلمه هندسی n حرفی محدود متناظر افزایشی از یک مجموعه n عضوی است و بالعکس. به طور مثال اگر $\{\{2, 7\}, \{1, 3, 4\}, \{5, 6\}\}$ افراز مجموعه $\{1, 2, \dots, 7\}$ باشد که از ۳ مجموعه تشکیل شده است، و کوچکترین عضو هر مجموعه نماینده آن مجموعه باشد، سپس با مرتب کردن مجموعه های افراز از چپ به راست بر حسب نماینده هر مجموعه، داریم

$$\{\underbrace{\{1, 3, 4\}}_{\#1}, \underbrace{\{2, 7\}}_{\#2}, \underbrace{\{5, 6\}}_{\#3}\}.$$

در این صورت $\mathcal{W}_7 = \omega_1 \omega_2 \dots \omega_7 = 1211332$ (نماینده مجموعه ای که شامل i است ω_i) کلمه متناظر با افراز مذکور است. تعداد مجموعه های افراز مذکور برابر است با مقدار ماکزیمما (تعداد رکوردهای بالا) در کلمه \mathcal{W}_7 .

تحقیقات زیادی در رابطه با تعداد ماکزیمما در کلمات هندسی و نه کلمات هندسی محدود شده است که لیست کاملی از آنها در [۲] ذکر شده است. ولی در هیچ مقاله ای توزیع حدی تعداد ماکزیمما به دست نیامده است. در این مقاله به بررسی توزیع حدی تعداد ماکزیمما در کلمات هندسی محدود می پردازیم. در این مقاله تعداد ماکزیمما در یک کلمه هندسی n حرفی محدود را با $L_n^{(d)}$ نمایش می دهیم. دو نتیجه اصلی مقاله به صورت زیر است که در بخش ۲ به اثبات رسیده اند:

* سخنران



قضیه ۱.۱. به ازای $m \geq 1$ ، داریم

$$\mathbf{E}\left(L_n^{(1)} - \log_{1/q} n\right)^m \sim \Phi_m^{(1)}(\log_{1/q} n)$$

که در آن $\Phi_m^{(1)}(z)$ تابعی متناوب به صورت

$$\Phi_m(z) = \frac{d^m}{dt^m} \frac{(1 - pe^t)\Omega(e^t)}{q\Omega(1)} \cdot \frac{\sum_k \Gamma(-\log_{1/q} p - t/L + \chi_k) e^{-\chi_k \pi i z}}{\sum_k \Gamma(-\log_{1/q} p + \chi_k) e^{-\chi_k \pi i z}} \Big|_{t=0}$$

است. بنابراین $L_n^{(1)} - \log_{1/q} n$ در توزیع، به توزیعی ثابت میل نمی کند.

قضیه ۲.۱. به ازای $d \geq 2$ داریم

$$\frac{L_n^{(d)} + \log_{1/q}^n / (\rho P'(\rho))}{\sqrt{\log_{1/q} n}} \rightarrow N(0, \sigma_d^2),$$

که در آن ρ ریشه حقیقی مثبت و یکتای چندجمله ای $z^l - q^{l-1} z^l - p$ است و

$$\sigma_d^2 := \frac{1}{\rho P'(\rho)} + \frac{P''(\rho)}{\rho P'(\rho)^3} + \frac{1}{\rho^2 P'(\rho)^2}.$$

۲ تغییر توزیع حدی بر حسب d

فرض کنید $p_{n,k}$ احتمال این پیشامد است که یک کلمه هندسی محدود n حرفی، دقیقاً k ماکزیم داشته باشد. در این صورت $p_n = \sum_{k \geq 0} p_{n,k}$ برابر با احتمال این پیشامد است که یک کلمه هندسی n حرفی، کلمه هندسی محدود باشد. بنابراین داریم $P(L_n^{(d)} = k) = \frac{p_{n,k}}{p_n}$. استدلالی بر اساس قانون احتمال کل به رابطه بازگشتی بر حسب $p_{n,k}$ به صورت

$$p_{n+1,k} = p \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} p^{n-j} q^j p_{j,k-1} \quad (n \geq 0, k \geq 1) \quad (1)$$

با شرایط اولیه $p_{0,0} = 1$ ، $p_{n,0} = 1$ ، به ازای $n \geq 1$ و $p_{0,k} = 0$ ، به ازای $k \geq 1$. با قرار دادن N ، متغیر تصادفی پواسن با پارامتر z ، به جای n در $\varphi(n, t) := \sum_{k \geq 0} p_{n,k} e^{kt}$ و شرطی کردن بر روی N ، $\varphi(n, t)$ را پواسونی نمودن، که به صورت زیر نام گذاری می نمایم:

$$\tilde{L}(z, t) := e^{-z} \sum_{n \geq 0} \sum_{k \geq 0} p_{n,k} e^{kt} \frac{z^n}{n!}.$$

طبق (۱)، $\tilde{L}(z, t)$ در معادله بازگشتی

$$\tilde{L}(z, t) + \frac{\partial}{\partial z} \tilde{L}(z, t) = pe^t \tilde{L}(qz, t) \quad (2)$$



صدق می نماید. حال با گرفتن تبدیل ملین از طرفین معادله فوق داریم

$$\mathcal{M}[\tilde{L}(z, t); \omega] - (\omega - 1)\mathcal{M}[\tilde{L}(z, t); \omega - 1] = (1 - P_t(q^\omega))\mathcal{M}[\tilde{L}(z, t); \omega]$$

که در آن $P_t(z) := 1 - pe^t \sum_{l \geq 1} q^{l-1} z^l$ طبق قضیه ۳، در [۱]، و شرط $\tilde{L}(\circ, t) = 1$ جواب معادله بالا به صورت

$$\mathcal{M}[\tilde{L}(z, t); \omega] = \Gamma(\omega) \frac{P_t(1)\Omega_t(1)}{P_t(q^{-\omega})\Omega_t(q^{-\omega})}$$

به دست می آید که در آن $\Gamma(\omega)$ تابع گاما است و $\Omega_t(s) := \prod_{l \geq 1} P_t(q^l s)$. بنابراین از طرفی طبق لم ۱ در [۳]، به ازای هر t ، $P_t(z)$ دارای ریشه حقیقی مثبت یکتایی مانند ρ_t است. بنابراین $\mathcal{M}[\tilde{L}(z, t); \omega]$ دارای قطب های ساده $\omega = \log_{1/q} \rho_t + \chi_k$ است. طبق حساب مانده ها داریم

$$\text{Res} \left(\mathcal{M}[\tilde{L}(z, t); \omega]; \omega = \log_{1/q} \rho_t + \chi_k \right) = \frac{P_t(1)\Omega_t(1)}{\log(1/q)\rho_t P'(\rho_t)\Omega(\rho_t)} \Gamma(\log_{1/q} \rho_t + \chi_k).$$

حال با استفاده از قضیه مانده کوشی، هرگاه $z \rightarrow \infty$ ، داریم

$$\tilde{L}(z, t) \sim - \frac{P_t(1)\Omega_t(1)}{\log(1/q)\rho_t P'(\rho_t)\Omega(\rho_t)} z^{-\log_{1/q} \rho_t} \sum_k \Gamma(\log_{1/q} \rho_t + \chi_k) z^{-\chi_k}.$$

طبق تعریف JS - قابل قبول در [۵]، لم زیر بدست می آید.

لم ۱.۲. فرض کنید $\tilde{f}(z, t)$ و $\tilde{g}(z, t)$ توابع تام بر حسب z به ازای هر t ، $|t| \leq \varepsilon$ (یک ثابت مثبت ناچیز). اگر

$$\tilde{f}(z, t) + \frac{\partial}{\partial z} \tilde{f}(z, t) = pe^t \tilde{f}(qz, t) + \tilde{g}(z, t)$$

به ازای هر t که $|t| \leq \varepsilon$ ، $\tilde{g}(z, t)$ ، JS - قابل قبول است اگر و تنها اگر $\tilde{f}(z, t)$ ، JS - قابل قبول باشد.

اثبات. به همان روش قضیه فرعی ۲.۴ در [۴]، و فقط با تغییرات جزئی اثبات قضیه کامل می شود. \square

طبق لم ۱.۲ و (۲)، $\tilde{L}(z, t)$ ، JS - قابل قبول است (زیرا در این حالت، $\tilde{g}(z, t) = \circ$ که JS - قابل قبول است). در نتیجه بر اساس قضیه فرعی ۲.۲ در [۴] (به این عمل از پواسونی در آوری گویند)،

$$\sum_{k \geq 0} p_{n,k} e^{kt} \sim - \frac{P_t(1)\Omega_t(1)}{\log(1/q)\rho_t P'(\rho_t)\Omega(\rho_t)} n^{-\log_{1/q} \rho_t} \sum_k \Gamma(\log_{1/q} \rho_t + \chi_k) n^{-\chi_k}.$$

$$\text{همچنین } \mathbf{E}(e^{L_n^{(d)} t}) = \frac{\sum_{k \geq 0} p_{n,k} e^{kt}}{p_n} \sim \frac{\tilde{L}(z, t)}{p_n}$$

گزاره ۲.۲. به ازای هر t که $|t| \leq \varepsilon$ ، داریم

$$\mathbf{E}(e^{L_n^{(d)} t}) \sim \frac{P_t(1)\Omega_t(1)\rho P'(\rho)\Omega(\rho)}{q^d \Omega(\rho) \rho_t P'(\rho_t)\Omega(\rho_t)} n^{-\log_{1/q}(\rho_t/\rho)} \frac{\sum_k \Gamma(\log_{1/q} \rho_t + \chi_k) n^{-\chi_k}}{\sum_k \Gamma(\log_{1/q} \rho + \chi_k) n^{-\chi_k}}$$



حال با استفاده از گزاره ۲.۲ می توان دو قضیه ۱.۱ و ۲.۱ را نتیجه گرفت.

اثبات. (اثبات مربوط به قضیه ۱.۱) هرگاه $d = ۱$ ، داریم $\rho_t = \rho = p$ و

$$\mathbf{E}\left(e^{(L_n^{(1)} - \log_{1/q} n)t}\right) \sim \frac{(1 - pe^t)Q(pe^t)}{qQ(p)} \cdot \frac{\sum_k \Gamma(-\log_{1/q} p - t/\log 1/q + \chi_k)n^{-\chi_k}}{\sum_k \Gamma(-\log_{1/q} p + \chi_k)n^{-\chi_k}}$$

□ که از آن با m بار مشتق گیری نسبت به t و قرار دادن $t = 0$ ، قضیه ۱.۱ به دست می آید.

اثبات. (اثبات مربوط به قضیه ۲.۱) همچنین به ازای $d \geq ۲$ ، بسط مک لورن ρ_t حول $t = 0$ ، به صورت زیر

$$\rho_t = \rho + \frac{t}{P'(\rho)} - \left(\frac{1}{P'(\rho)} + \frac{P''(\rho)}{P'(\rho)^3}\right) \frac{t^2}{2} + O(t^3).$$

است و هرگاه $t \rightarrow 0$ ،

$$-\log_{1/q}(\rho_t/\rho) = \frac{\mu_d t}{\log 1/q} + \frac{\sigma_d^2 t^2}{2 \log 1/q} + O(t^3),$$

که در آن $\mu_d := -1/(\rho P'(\rho))$. حال با قرار دادن $t = u/\sqrt{\log_{1/q} n}$ ، به ازای u ثابت، داریم

$$\mathbf{E}\left(\exp\left(L_n^{(d)} u / \sqrt{\log_{1/q} n}\right)\right) \sim \exp\left(\mu_d u \sqrt{\log_{1/q} n} + \frac{\sigma_d^2 t^2}{2}\right).$$

در نتیجه چون $e^{\sigma_d^2 t^2/2}$ تابع مولد گشتاور توزیع نرمال با میانگین صفر و واریانس σ_d^2 است و

$$\mathbf{E}\left(\exp\left((L_n^{(d)} - \mu_d \log_{1/q} n)u / \sqrt{\log_{1/q} n}\right)\right) \sim e^{\sigma_d^2 t^2/2},$$

□ اثبات قضیه ۲.۱ نیز کامل می شود.

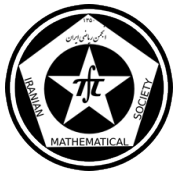
مراجع

- [1] P. Flajolet, X. Gourdon, P. Dumas, *Mellin transform and asymptotics: Harmonic sums*, Theoret. Comput. Sci., 144:1-2 (1995), 3-58.
- [2] M. Fuchs, M. Javanian, *Limit Behavior of Maxima in Geometric Words representing Set Partitions*, *Applicable Analysis and Discrete Mathematics*, appear in Vol 9, issue 2, 2015. ¹
- [3] M. Fuchs, H. Prodinger, *Words with a generalized restricted growth property*, *Indag. Math.* (special issue in memory of N. G. de Bruijn), 24:4 (2013), 124-133.
- [4] H.-K. Hwang, M. Fuchs, V. Zacharovas, *Asymptotic variance of random symmetric digital search trees*. (special issue in honor of Philippe Flajolet), *Discrete Math. Theor. Comput. Sci.*, 12:2 (2010), 103-166.
- [5] P. Jacquet, W. Szpankowski, *Analytical de-Poissonization and its applications*, Theoret. Comput. Sci., 201:1-2 (1998), 1-62.

پست الکترونیکی: javanian@znu.ac.ir

پست الکترونیکی: jale-toofanpour@znu.ac.ir

¹<http://jupiter.math.nctu.edu.tw/mfuchs/geometric-words-11.pdf>



رگرسیون (پارامتری) استوار و انتخاب متغیر با روش کمترین قدرمطلق انحرافات موزون با تاوان لاسو برای داده‌های بیمه

شهره شریفی میناب*

دانشگاه یاسوج

چکیده

در برآزش مدل‌های رگرسیونی خطی، مرسوم‌ترین روش کمترین توان‌های دوم معمولی می‌باشد. این روش در مواردی از جمله وجود داده‌های نافذ و زیاد بودن تعداد متغیرهای مستقل ممکن است نتایج گمراه کننده‌ای به همراه داشته باشد. در این مقاله ابتدا بر اساس کمترین قدر مطلق انحرافات روشی استوار برای برآورد پارامترها ارائه می‌دهیم که به وجود داده‌های نافذ حساسیت زیادی ندارند. در حالیکه تعداد متغیرهای مستقل زیاد باشد هدف انتخاب مجموعه‌ای از متغیرهای مستقل است که همبستگی معنا داری با متغیر وابسته دارند که اصطلاحاً به "انتخاب متغیر" معروف است. در ادامه مقاله دو روش رگرسیونی استوار برای انتخاب متغیر ارائه می‌دهیم. در آخر با استفاده از این روش‌ها یک سری داده واقعی را تحلیل می‌کنیم.

واژه‌های کلیدی: کمترین قدرمطلق انحرافات، تاوان لاسو، نقطه فروریزش، استواری، کمترین قدرمطلق انحرافات موزون با تاوان لاسو

Mathematics Subject Classification [2010]: 13D45, 39B42

۱ مقدمه

تحلیل رگرسیون روشی آماری برای بررسی و مدل‌سازی ارتباط بین متغیرهاست. دو بخش اصلی رگرسیون در آمار وجود دارد: پارامتری و ناپارامتری. یکی از مسائلی که در بحث استنباط آماری مطرح می‌شود برآورد پارامترها و تشخیص مدل صحیح با انتخاب متغیر در حالت آمار پارامتری است. برخی روش‌های رگرسیونی که بطور گسترده استفاده می‌شوند مانند رگرسیون کمترین توان‌های دوم، اگر پیش فرض‌های درستی داشته باشند دارای خواص مطلوبی هستند، اما اگر این فرض‌ها درست نباشند می‌توانند نتایج گمراه کننده‌ای بدهند.

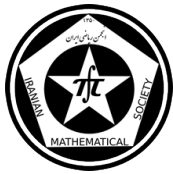
انتخاب متغیر، یکی از مهم‌ترین موضوعات در مدل‌سازی آماری محسوب می‌شود که کاربرد وسیعی در تحلیل‌های آماری دارد. بسیاری از روش‌های انتخاب متغیر با استفاده از مدل رگرسیون خطی انجام می‌شود. اما کاملاً آشکار است که روش کمترین توان‌های دوم اغلب در تفسیر و پیش‌بینی مدل ناتوان عمل می‌کند. روش‌هایی برای حل این مشکل ارائه شده است که در بین آنها مدل رگرسیون تاوانیده^۱ از اهمیت خاصی برخوردار است. در سال ۱۹۹۶ تیشیرانی^۲ رگرسیون تاوانیده لاسو^۳ را معرفی کرد. یکی از ویژگی‌های لاسو صفر کردن بعضی از پارامترها و یا به عبارتی انتخاب متغیر می‌باشد. علاوه بر حضور نقاط دورافتاده در مجموعه داده‌ها است که باعث انحراف خط برازش شده از داده‌ها می‌شود. علاوه بر نقاط

* سخنران

^۱Penalized Regression

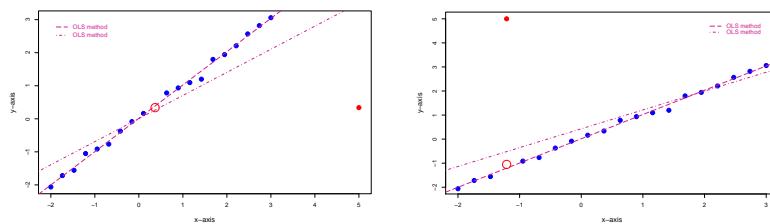
^۲Tibshirani

^۳LASSO



دورافتاده گاهی توزیع خطاها دم‌های پهن‌تری نسبت به توزیع نرمال دارند یعنی از احتمال بیشتری نسبت به توزیع نرمال در دم‌ها برخوردار هستند که ممکن است چنین توزیع‌های دم پهنی خطاهای بزرگتری را نسبت به حالت نرمال در نظر بگیرند. یک روش برای درمان این مشکلات، رگرسیون استوار^۴ است.

در شکل‌های زیر استفاده از روش OLS برای برآورد پارامترها در حضور نقاط دورافتاده در محورهای x و y بطور جداگانه و اثر آنها برخط رگرسیونی مشاهده می‌شود. رگرسیون استوار برای کاهش اثر مشاهداتی به کار می‌رود که اگر روش کمترین



شکل ۱: (آ) برازش خط رگرسیونی به داده‌ها در حضور نقطه دورافتاده (ب) برازش خط رگرسیونی به داده‌ها در حضور نقطه نافذ

شکل ۱: برازش خط رگرسیونی به داده‌ها در حضور داده‌های پرت

توان‌های دوم بکار گرفته شود تاثیرگذاری بالایی خواهد داشت. یک رگرسیون استوار علاوه بر حساس نبودن نسبت به نقاط دورافتاده وقتی که مشاهدات دارای توزیع نرمال هستند کارایی ۹۰ تا ۹۵ درصد نسبت به روش برآورد کمترین توان‌های دوم خواهد داشت. روش‌های استوار به مشاهدات وزن نابرابر اختصاص می‌دهند و به طور کلی مشاهداتی که باقیمانده‌های بزرگی تولید می‌کنند، بوسیله‌ی این روش کم وزن‌تر می‌شوند. اگر مدل رگرسیون خطی

$$y_i = \beta_0 + x_i^T \beta + \epsilon_i, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

را داشته باشیم آنگاه $x_i = (x_{i1}, \dots, x_{ip})^T$ بردار p بعدی متغیرها و $y_i \in R$ بردار پاسخ، و همچنین $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_p)^T$ بردار ضرایب هستند و خطای تصادفی بصورت $\epsilon = (\epsilon_1, \dots, \epsilon_n)^T \sim N(0, \sigma^2 I_n)$ می‌باشد. رگرسیون کمترین قدرمطلق انحرافات^۵ (LAD) یک حالت خاص از روش رگرسیون M می‌باشد که در آن پارامترهای رگرسیونی از طریق مینیم کردن مجموع قدرمطلق خطاها برآورد می‌شود. به این معنی که برای یافتن برآوردها باید عبارت زیر مینیم شود:

$$\sum_i |y_i - (a - bx_i)| \quad (1)$$

برخلاف روش رگرسیونی OLS، روش رگرسیونی LAD در برابر نقاط دورافتاده در متغیر پاسخ مقاوم است و برازش خط با این روش مناسب می‌باشد. یک معیار برای تشخیص استواری برآوردها استفاده از نقطه فروریزش^۶ است. در هر دو برآوردگر OLS و LAD مقدار فروریزش $1/n$ می‌باشد و این یعنی حضور حتی یک نقطه دورافتاده بر آنها اثر منفی خواهد گذاشت [۵]. برای حل این مشکل روش برآورد رگرسیونی کمترین قدرمطلق انحرافات موزون^۷ (WLAD) پیشنهاد شده

^۴Robust regression

^۵Least Absolute Deviation

^۶Breakdown Point

^۷Weighted Least Absolute Deviation



است.

روش برآورد کمترین قدرمطلق انحرافات موزون رگرسیونی برای افزایش استواری در مقابل تاثیر نقاط نافذ در داده‌ها ارائه شده است. می‌توان نشان داد که انتخاب مناسب وزن‌ها می‌تواند نقطه فروریزش نمونه متناهی برآوردهای رگرسیونی LAD را بهبود بخشد. در روش $WLAD$ تابع هدف برای برآورد پارمترها عبارت است از:

$$\sum_{i=1}^n w_i |y_i - \mathbf{x}_i^T \beta| \quad (2)$$

برای آشنایی با شیوه محاسبه وزن‌ها به [۱] مراجعه کنید. چون وزن‌های w_i با افزایش فاصله استوار کاهش می‌یابند پس نقاط نافذ وزن‌های کوچکتری دریافت می‌کنند و این کم وزن شدن باعث کاهش تاثیر آنها در مجموعه داده‌ها خواهد شد. برای استفاده از الگوریتم روش LAD می‌توان متغیرهای توضیحی و پاسخ را به صورت زیر تبدیل کرد:

$$\tilde{y}_i = w_i y_i \quad \text{و} \quad \tilde{\mathbf{x}}_i = w_i \mathbf{x}_i \quad \text{برای} \quad i = 1, \dots, n$$

و با استفاده از زوج مشترک $(\tilde{y}_i, \tilde{\mathbf{x}}_i^T)$ تابع هدف (۱) را بکار می‌بریم.

یکی دیگر از معایب نقاط دورافتاده این است که می‌توانند بر روش‌های انتخاب متغیر در آنالیز رگرسیون اثر بگذارند. به این دلیل روشی معرفی شد که هم زمان انتخاب متغیر و برآورد پارمترها را با هم انجام دهد به این صورت که روش LAD را با تاوان $LASSO$ ترکیب کرده و روش برآورد کمترین قدرمطلق انحرافات با تاوان لاسو $(LAD - LASSO)$ را ارائه دادند. در روش $LAD-LASSO$ پارمترهای رگرسیونی با مینیمم کردن تابع هدف زیر برآورد می‌شود:

$$Q(\beta) = \sum_{i=1}^n |y_i - \mathbf{x}_i^T \beta| + n \sum_{j=1}^p \lambda_j |\beta_j| \quad (3)$$

که اگر $\hat{\beta}$ هر برآوردگر استوار از β باشد آنگاه $p, \dots, 3, 2, 1, j$ از روش زیر به دست می‌آید:

$$\hat{\lambda}_j = 1/(|\hat{\beta}_j|)^\gamma \quad \text{برای} \quad j = 1, 2, \dots, p$$

۲ نتایج اصلی

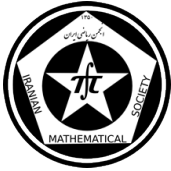
زمانی که تعداد متغیرها زیاد است و نیاز داریم علاوه بر برآورد خوب پارمترها یکسری از متغیرها را انتخاب کنیم روش $WLAD$ کارایی چندانی نداشته و عملکرد خود را از دست می‌دهد، از طرفی روش $LAD - LASSO$ در برابر نقاط دورافتاده در متغیرهای توضیحی استوار نیست بنابراین برای رسیدن به روشی که هم قادر به انتخاب متغیر بوده و هم در برابر نقاط نافذ استوار باشد اولکی ارسلان^۹ در سال ۲۰۱۱ معیار $WLAD$ را با تابع تاوان نوع $LASSO$ ترکیب کرده و معیار کمترین قدرمطلق انحرافات موزون با تاوان لاسو^{۱۰} $(WLAD - LASSO)$ را پیشنهاد داد. برای بدست آوردن برآورد پارمترها بوسیله این روش باید تابع هدف زیر را مینیمم کنیم [۱]:

$$Q_w(\beta) = \sum_{i=1}^n w_i |y_i - \mathbf{x}_i^T \beta| + n \sum_{j=1}^p \lambda_j |\beta_j| \quad (4)$$

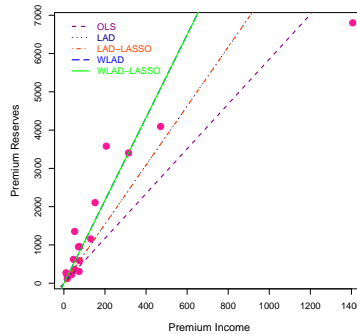
^۸Least Absolute Deviation-LASSO

^۹ Olcay Arslan

^{۱۰}Weighted Least Absolute Deviation-LASSO



مثال ۱۰۲. داده‌های این مثال مربوط به صندوق‌های بازنشستگی برای 10° شعبه حرفه‌ای، از *Wit* (۱۹۹۲) است. که متغیر توضیحی آن جدول مجموع ۱۹۸۱ حق بیمه درآمد از یافته‌های بازنشستگی شرکت هلندی، برای ۱۸ شاخه حرفه‌ای است و متغیر پاسخ آن مربوط به ذخایر حق بیمه در میلیون گیلدر می‌باشد.



شکل ۲: نمودار برازش پنج خط *OLS* و *LAD* و *LAD-LASSO* و *WLAD* و *WLAD-LASSO* به داده‌های صندوق بازنشستگی کشور هلند

مشاهده می‌شود که دو خط *LAD-LASSO* و *LAD* و همچنین دو خط *WLAD-LASSO* و *WLAD* برهم منطبق شده اند که این نشان دهنده حساسیت دو روش *LAD-LASSO* و *LAD* از نقاط نافذ و عدم تاثیر پذیری *WLAD-LASSO* از نقطه نافذ می‌باشد.

در این مقاله به معرفی روش کمترین قدرمطلق انحرافات موزون با تاوان لاسو پرداختیم که در آن برای بهبود عدم استواری در روش‌های *OLS* و *LAD* با افزودن وزن مناسب به آنها و همچنین برای انتخاب مدل صحیح از ترکیب تاوان لاسو و روش *WLAD* استفاده شده است. بعلاوه در مثال انجام شده با ۴ روش مختلف و مقایسه با روش *WLAD-LASSO* نتیجه حاصله حاکی از کارایی خوب آن می‌باشد. علاوه بر آن، چون این روش از لحاظ محاسباتی دشوار نیست و می‌توان محاسبات را با استفاده از الگوریتم ساده *LAD* انجام داد در تجزیه و تحلیل داده‌های واقعی مزایای زیادی دارد.

مراجع

- [1] O. Arsalan, *Weighted LAD-LASSO method for robust parameter estimation and variable selection in regression*, J. Comput. Stat. Data An., 56 (2012), 1952–1965.
- [2] C. Chen, *textitRobust Regression and Outlier Detection with the ROBUSTREG Procedure*, 265–27.
- [3] A. Giloni, J. S. Simonoff, B. Sengupta, *Robust weighted LAD regression*, J. Comput. Stat. Data An., 50 (2006), 3124–3140.
- [4] G. James, D. Witten, T. Hastie, R. Tibshirani, *An Introduction to Statistical Learning with Applications in R*, J. Springer Texts Statist, (2013).
- [5] X. Shifeng, J. V. Roshan, *Regression with outlier shrinkage*, J. Statist. Plann. Inference., 143 (2013), 1988–2001.
- [6] H. Wang, G. Li, G. Jiang, *Robust regression shrinkage and consistent variable selection through the LAD-lasso*, J. Bus. Econ. Stat., 25 (2007), 347–355.



رگرسیون چندکی ناپارامتری با استفاده از روش اسپلاین

علی محمدیان مصمم
دانشگاه زنجان

سیده مریم موسوی*
دانشگاه زنجان

چکیده

رگرسیون چندکی ناپارامتری روشی برای مطالعه تاثیر متغیرهای تشریحی بر روی متغیر پاسخ می باشد که مشکلات محدودکننده رگرسیون چندکی کلاسیک را ندارد. یکی از مسائل مهم در رگرسیون چندکی ناپارامتری انتخاب متغیرهای تشریحی مهم می باشد. در این مقاله از روش هموارسازی اسپلاین ها برای انتخاب متغیرها استفاده می گردد.

واژه های کلیدی: اسپلاین، فضای هیلبرت تابع هسته، رگرسیون چندکی

Mathematics Subject Classification [2010]: 13D45, 39B42

۱ مقدمه

رگرسیون چندکی یک چارچوب جامع برای مطالعه اثرات متغیرهای تشریحی بر روی نه تنها میانگین شرطی بلکه بر روی تمام چندک های شرطی فراهم می کند. هدف اصلی در رگرسیون چندکی این است که چگونه چندک τ م متغیر پاسخ y به متغیرهای تشریحی $x = \{x^1, \dots, x^d\}$ وابسته است. برای مطالعه رگرسیون چندکی پارامتری می توان به مطالعات کونکر و باست (۱۹۷۸)، پروچاسکا (۱۹۸۸) و کونکر (۲۰۰۵) مراجعه کرد. رگرسیون چندکی ناپارامتری در مدل های اسپلاین اولین بار توسط کونکر (۱۹۹۴) معرفی گردید که به صورت زیر می باشد.

مسئله مینیم سازی

$$\min_{f \in \mathcal{F}} \sum_{i=1}^n \rho_{\tau}(y_i - f(x_i)) + \lambda V(f')$$

را در نظر بگیرید که در آن $\tau \in (0, 1)$ ، $\rho_{\tau}(t) = t[\tau - I(t < 0)]$ ، λ پارامتر هموارسازی و $V(f')$ کل تغییرات مشتق f می باشد. کونکر و همکارانش (۱۹۹۴) نشان دادند که برای فضای سو بولف مرتبه دوم جواب مسئله فوق یک اسپلاین خطی است. اگر

$$V(f') = \int f''(x)^2 dx$$

در نظر بگیریم جواب حاصل اسپلاین درجه سوم طبیعی خواهد بود. در حالت فضای چند بعدی می توان

$$V(f') = \|f\|_{H_K}^2$$

(روش KQR) تعریف کرد که در آن H_k فضای هیلبرت تابع هسته با هسته k و $\|\cdot\|_{H_K}$ یک نرم در فضای فوق

می باشد.

* سخنران



۲ روشهای هموارسازی SNQR

روش انتخاب متغیرها در رگرسیون چندکی ناپارامتری امری بسیار مشکل می‌باشد. یک دلیل آن انتخاب متغیرها در تمامی چندک‌ها می‌باشد یعنی متغیرهایی باید انتخاب گردند که برای توزیع تمام چندک‌ها به جای میانگین دارای اهمیت هستند. دلیل دیگر در مدل‌های ناپارامتری مسئله چند بعدی بودن و محاسبات پیچیده آن می‌باشد. برای رفع این مشکل به ویژه مسئله دوم از روش‌های هموارسازی (به عنوان نمونه به واهبا، ۱۹۹۰ مراجعه گردد) استفاده می‌گردد. به منظور انتخاب متغیرها و برآورد تابع در رگرسیون چندکی ناپارامتری مسئله بهینه‌سازی زیر مورد بررسی قرار می‌گیرد (روش $SNQR$).

$$\min_{f \in \mathcal{F}} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \rho_{\tau}(y_i - f(x_i)) + \lambda \sum_{j=1}^d w_j \|P^j f\| \quad (1)$$

که در آن p^j ها عملگرهای تصویر متعامد می‌باشند. قضیه ۲ وجود جواب برای مسئله بهینه‌سازی (۱) را تضمین می‌کند.

فرض کنید F یک فضای هیلبرت تابع هسته باشد که قابل تجزیه به صورت:

$$\mathcal{F} = \{1\} \oplus \left\{ \bigoplus_{j=1}^q \mathcal{F}_j \right\}$$

باشد، آنگاه مسئله بهینه‌سازی (۱) دارای جواب می‌باشد.

اثبات: به لین و همکارانش (۲۰۱۳) مراجعه گردد.

مسئله بهینه‌سازی (۱) را می‌توان به طور هم ارز به صورت زیر نیز نوشت (روش $AdaptiveSNQR$)

$$\min \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \rho_{\tau}(y_i - f(x_i)) + \lambda \sum_{j=1}^d w_j \theta_j^{-1} \|P^j f\|^2,$$

طوری که $\sum_{j=1}^d \theta_j \leq M; \forall \theta_j \geq 0$ در آن λ و M پارامترهای هموارسازی هستند.

همچنین می‌توان مسئله بهینه‌سازی (۱) را به صورت زیر نوشت:

$$\min \|y - b\|_n - \sum_{j=1}^d \theta_j w_j^{-1} R_j c \|_{c_{\tau}} + \lambda \cdot c^T \left(\sum_{j=1}^d \theta_j w_j^{-1} R_j \right) c,$$

طوری که $\sum_{j=1}^d \theta_j \leq M, \theta_j \geq 0, \forall j$ در آن $R_j = \left\{ R_{F_j} \left(x_i^{(j)}, x_{i'}^{(j)} \right) \right\}_{i, i'=1}^n$ یک ماتریس $n \times n$ و

$\|b\|_n$ یک بردار ستونی n بعدی، $c = \left(\sum_{j=1}^d w_j^{-1} \theta_j R_j \right) c$ و $f = (f(x_1), \dots, f(x_n))^T = b\|_n + \left(\sum_{j=1}^d w_j^{-1} \theta_j R_j \right) c$ و $\|v\|_{c_{\tau}} = n^{-1} \sum_{i=1}^n \rho_{\tau}(v_i)$ یک بردار با طول n می‌باشد.

۳ تحلیل داده‌های واقعی

در این بخش روش ارائه شده در بخش ۲ برای دو مجموعه داده‌های واقعی مورد استفاده قرار خواهد گرفت. این دو مجموعه داده که به صورت رایگان در R موجود است عبارتند از: (۱) سرطان پروستات (۲) داده‌های ازن. مجموعه داده اول شامل



جدول ۱: برآورد ریسک پیش‌بینی و خطای استاندارد برای داده‌های واقعی.

روش‌ها		$Data$	τ
$AdaptiveSNQR$	$SNQR$		
۰/۲۲۶(۰/۰۰۷)	۰/۲۳۰(۰/۰۰۶)	۰/۲۴۶(۰/۰۰۸)	۰/۲ پروستات
۱/۱۱۷(۰/۰۱۷)	۱/۱۰۰(۰/۰۱۶)	۱/۱۳۰(۰/۰۱۶)	ازن
۰/۳۱۰(۰/۰۰۸)	۰/۳۱۸(۰/۰۰۷)	۰/۳۰۱(۰/۰۰۷)	۰/۵ پروستات
۱/۶۶۹(۰/۰۲۱)	۱/۶۵۷(۰/۰۲۰)	۱/۶۵۶(۰/۰۲۱)	ازن
۰/۱۹۳(۰/۰۰۶)	۰/۲۰۸(۰/۰۰۵)	۰/۲۴۰(۰/۰۰۷)	۰/۸ پروستات
۱/۱۸۸(۰/۰۱۶)	۱/۱۶۹(۰/۰۱۷)	۱/۱۷۵(۰/۰۱۷)	ازن

۹۷ بیمار است که مورد درمان با روش خاصی گردیده‌اند و توسط تبشیرانی (۱۹۹۶) مورد تجزیه و تحلیل قرار گرفته است. داده‌های مربوط به ازن شامل ۳۳۰ مشاهدات می‌باشد که در سال ۱۹۷۶ در لس آنجلس به منظور تعیین رابطه بین میزان ازن و ۸ متغیر تشریحی دیگر مورد تجزیه و تحلیل قرار گرفته‌اند. برای ارزیابی مدل مناسب از معیار $E_{\rho_{\tau}}(Y - f(x))$ استفاده می‌شود. در این روش ۱۰٪ داده‌ها به عنوان داده‌های تست انتخاب گردید و با استفاده از مدل پیش‌بینی گردیده‌اند. پارامتر هموارسازی و تابع هموار بر اساس ۹۰٪ بقیه داده‌ها برآورد گردیده‌اند و بر اساس تابع هموار برآورد شده برای ۱۰٪ داده‌های مورد آزمایش پیش‌بینی انجام گرفته است. این فرآیند برآورد ۱۰۰ بار تکرار گردیده و نتایج در جدول ۱ خلاصه شده است. طبق این جدول روش $AdaptiveSNQR$ برای داده‌های واقعی لزوماً همیشه روش بهتر نمی‌باشد. همچنین نتیجه جالب این‌ست که سه متغیر تشریحی که توسط تبشیرانی (۱۹۹۶) برای داده‌های سرطان پروستات بر اساس میانگین انتخاب گردیده بودند در این روش بر اساس میانه هم انتخاب شده‌اند.

مراجع

- [1] Koenker, R. (2005). Quantile Regression. Cambridge University Press; New York.
- [2] Koenker R., Bassett G. (1978). Regression quantiles. *Econometrica*, 46:33-50.
- [3] Koenker R., Ng P., Portnoy S. (1994). Quantile smoothing splines, *Biometrika*, 81:673-680.
- [4] Lin, C. Y., Bondell, H., Zhang, H. H., Zou, H. (2013). Variable selection for non-parametric quantile regression via smoothing spline analysis of variance. *Stat*, 2(1), 255-268.
- [5] Procházka B. (1988). Regression quantiles and trimmed least squares estimator in the nonlinear regression model. *Computational Statistics and Data Analysis*, 6:385-391.
- [6] Tibshirani R. (1996). Regression shrinkage and selection via the Lasso. *Journal of the Royal Statistical Society Ser. B.*, 58:267-288.
- [7] Wahba, G. (1990). Spline Models for Observational Data. Philadelphia: SIAM

پست الکترونیکی: a.m.mosammam@znu.ac.ir
 پست الکترونیکی: m.mousavi6024@gmail.com



فاکتور بیز برای آزمون تک نمونه ای بردار میانگین با ماتریس کوواریانس معلوم

پریا بهرامی*
دانشگاه اصفهان

منوچهر خردمندینیا
دانشگاه اصفهان

چکیده

در این مقاله براساس یک نمونه تصادفی n تایی از توزیع نرمال p متغیره $N_p(\mu, \Sigma)$ فاکتور بیز را برای آزمون فرض $H_0: \mu = \mu_0$ در مقابل $H_1: \mu \neq \mu_0$ در حالی که Σ معلوم است به دست می آوریم. از طریق شبیه سازی نشان می دهیم که با افزایش اندازه نمونه احتمال تشخیص درست افزایش می یابد. برای برآورد ابر پارامترها از نمونه پرورشی استفاده می کنیم و نشان می دهیم که تغییر محل نمونه پرورشی اثر قابل توجهی روی احتمال درست بودن H_0 نمی گذارد ولی افزایش اندازه نمونه پرورشی احتمال درست بودن H_0 را کاهش می دهد و لذا نمونه پرورشی مینیمال توصیه می شود.

واژه های کلیدی: فاکتور بیز، نمونه پرورشی، احتمال درست بودن یک فرضیه

Mathematics Subject Classification [2010]: 62C10, 62F03

۱ مقدمه

فاکتور بیز معیاری در استنباط بیزی است که برای آزمون فرضها و انتخاب مدل مورد استفاده قرار می گیرد. فرض کنید x یک آرایه تصادفی قابل مشاهده است که توزیع آن به پارامتر θ (یک آرایه تصادفی غیر قابل مشاهده) بستگی دارد. فاکتور بیز برای آزمون فرض $H_0: \theta \in \omega_0$ در مقابل $H_1: \theta \in \omega_1$ به صورت زیر تعریف می شود:

$$B_{0,1} = \frac{p(x|H_0)}{p(x|H_1)} = \frac{\left(\frac{p(H_0|x)}{p(H_1|x)}\right)}{\left(\frac{p(H_0)}{p(H_1)}\right)} \quad (1)$$

که در آن $p(H_i)$ احتمال پیشین درست بودن H_i ، $p(H_i|x)$ احتمال پسین درست بودن H_i و $p(x|H_i)$ چگالی کناری داده ها تحت فرض H_i است ($i = 0, 1$). با توجه به این که $p(H_0|x) + p(H_1|x) = 1$ می توان نوشت:

$$p(H_0|x) = \frac{B_{0,1}}{1 + B_{0,1}(p(H_0)/p(H_1))} = 1 - p(H_1|x) \quad (2)$$

اگر هیچ ترجیح پیشینی بین دو فرض وجود نداشته باشد آن گاه $p(H_0) = p(H_1) = 0.5$ و در نتیجه احتمال پسین درست بودن H_0 برابر است با

$$p(H_0|x) = \frac{B_{0,1}}{1 + B_{0,1}} = 1 - p(H_1|x) \quad (3)$$

که در آن $p(H_1|x)$ احتمال پسین درست بودن H_1 است. برای توضیح بیشتر راجع به فاکتور بیز به مرجع [۲] مراجعه کنید. در حالت چند متغیره کارهای قابل توجهی در رابطه با موضوع مقاله حاضر صورت گرفته است. ولی در حالت یک

متغیره یکی از کارهای مهم انجام شده مقاله [۴] می باشد که براساس فاکتور بیز به آزمون فرضیه $H_0: y_i \sim N(\mu_0, \sigma^2)$ در مقابل $H_1: y_i \sim N(\mu_1, \sigma^2)$ پرداخته است.

* سخنران

۲ فاکتور بیز برای آزمون $\mu = \mu_0$

فرض کنید $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n$ به شرط μ و Σ یک نمونه تصادفی از $N_p(\mu, \Sigma)$ است و قرار دهید $\mathbf{x} = [\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n]^T$ با توجه به فرض نرمال بودن و فرض معلوم بودن Σ فرض $H_0: \mu = \mu_0$ در مقابل $H_1: \mu \neq \mu_0$ را در عمل به صورت زیر می توان نوشت

$$H_0: \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n \text{ is a random sample from } N_p(\mu_0, \Sigma)$$

$$H_1: \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n \text{ is a random sample from } N_p(\mu_1, \Sigma)$$

که در آن μ_1 مخالف μ_0 است.

بر اساس تعریف، فاکتور بیز برای آزمون H_0 در مقابل H_1 عبارتست از

$$B_{0,1} = \frac{p(x|H_0)}{p(x|H_1)} \quad (4)$$

که در آن $p(x|H_0)$ چگالی کناری داده ها تحت H_0 است. با توجه به این که تحت H_0 هیچ پارامتر مجهولی وجود ندارد همان درستنمایی است و عبارتست از

$$p(x|H_0) = (2\pi)^{-\frac{np}{2}} |\Sigma|^{-\frac{n}{2}} \exp\left\{-\frac{n}{2} \text{tr} \Sigma^{-1} S\right\} \exp\left\{-\frac{n}{2} (\bar{\mathbf{x}} - \mu_0)^T \Sigma^{-1} (\bar{\mathbf{x}} - \mu_0)\right\} \quad (5)$$

که در آن $S = n^{-1} \sum (\mathbf{x}_r - \bar{\mathbf{x}})(\mathbf{x}_r - \bar{\mathbf{x}})^T$ ماتریس کواریانس نمونه و $\bar{\mathbf{x}} = n^{-1} \sum \mathbf{x}_r$ بردار میانگین نمونه است. $p(x|H_1)$ چگالی کناری داده ها تحت H_1 است که از طریق انتگرال گیری از توزیع توأم x و μ_1 روی μ_1 حاصل می شود. به عبارت دیگر

$$p(x|H_1) = \int p(x, \mu_1|H_1) d\mu_1 = \int p(x|\mu_1, H_1) p(\mu_1|H_1) d\mu_1 \quad (6)$$

که در آن $p(x|\mu_1, H_1)$ درستنمایی تحت H_1 و $p(\mu_1|H_1)$ توزیع پیشین μ_1 تحت H_1 می باشد. با پیشین مزدوج

$$\mu_1|H_1 \sim N_p(\mathbf{m}_a, \frac{1}{n_a} \Sigma)$$

انتگرال فوق حل می شود و توزیع کناری x تحت H_1 به صورت زیر حاصل می شود.

$$p(x|H_1) = (2\pi)^{-\frac{p}{2}} \left(\frac{n_a}{n_a+n}\right)^{\frac{p}{2}} |\Sigma|^{-\frac{n}{2}} \exp\left\{-\frac{n}{2} \text{tr} \Sigma^{-1} S\right\} \times \exp\left\{-\frac{n_a n}{2(n_a+n)} (\mathbf{m}_a - \bar{\mathbf{x}})^T \Sigma^{-1} (\mathbf{m}_a - \bar{\mathbf{x}})\right\} \quad (7)$$

بنابراین فاکتور بیز عبارتست از

$$B_{0,1} = \frac{p(x|H_0)}{p(x|H_1)} = \left(\frac{n_a}{n_a+n}\right)^{-\frac{p}{2}} \exp\left\{-\frac{1}{2} \chi^2\right\} \times \exp\left\{-\frac{n_a n}{2(n_a+n)} (\mathbf{m}_a - \bar{\mathbf{x}})^T \Sigma^{-1} (\mathbf{m}_a - \bar{\mathbf{x}})\right\} \quad (8)$$



که در آن $\mathcal{X}_0^2 = \left\{ n(\bar{x} - \mu_0)^T \Sigma^{-1} (\bar{x} - \mu_0) \right\}$ آماره کلاسیک خی دو است. در محاسبات فاکتور بیز توصیه می شود که ابتدا لگاریتم فاکتور بیز که آن را با $LB_{0,1}$ نشان می دهیم محاسبه شود و سپس فاکتور بیز از طریق $B_{0,1} = \exp\{LB_{0,1}\}$ محاسبه گردد. براساس مباحث فوق لگاریتم فاکتور بیز عبارتست از

$$LB_{0,1} = \frac{p}{2} \ln \left(\frac{n_a + n}{n_a} \right) - \frac{1}{2} \mathcal{X}_0^2 - \frac{n_a n}{2(n_a + n)} (m_a - \bar{x})^T \Sigma^{-1} (m_a - \bar{x}) \quad (9)$$

برای محاسبه $LB_{0,1}$ به ابر پارامترهای پیشین n_a و m_a نیاز داریم. یک روش عینی مشهور برای برآورد این ابر پارامترها استفاده از ایده نمونه پرورشی مینیمال است [۳]. مقصود از نمونه پرورشی بخشی از داده ها است و مقصود از مینیمال حداقل تعداد معقول داده های لازم برای برآورد ابر پارامترهای پیشین می باشد. در این جا ابر پارامتر m_a برداری 1×3 است، بنابراین حداقل یک مشاهده سه متغیره نیاز داریم. در مثالی که در بخش بعدی ارائه شده، $n_a = 2$ مشاهده اول را به عنوان نمونه پرورشی در نظر گرفته ایم. در عمل می توانیم از ایده فاکتور بیز درونی هم استفاده کنیم [۱]. براساس این ایده تمام نمونه های پرورشی مینیمال ممکن به کار گرفته می شوند و سپس میانگین فاکتور بیز برای تصمیم گیری راجع به H_0 مورد استفاده قرار می گیرد.

۳ مثال شبیه سازی

به طور تصادفی یک نمونه $n = 10$ تایی از $N_3(\mu, \Sigma)$ با پارامترهای

$$\mu = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 9 \end{bmatrix} \quad \Sigma = \begin{bmatrix} 1 & 0.9 & 0.9 \\ 0.9 & 1 & 0.9 \\ 0.9 & 0.9 & 1 \end{bmatrix} \quad (10)$$

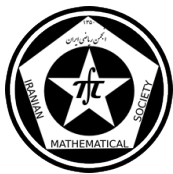
تولید کردیم. به این ترتیب ماتریس 3×10 داده های x به صورت زیر حاصل گردید.

$$x = \begin{bmatrix} 1.79 & -0.13 & 2.13 & 1.14 & 0.59 & 1.71 & 2.52 & 1.77 & 1.11 & 0.90 \\ 5.75 & 3.84 & 6.30 & 4.81 & 4.53 & 5.75 & 6.28 & 6.35 & 4.64 & 5.20 \\ 9.76 & 7.54 & 9.63 & 8.99 & 9.26 & 9.89 & 10.74 & 9.94 & 9.10 & 9.29 \end{bmatrix}^T \quad (11)$$

می خواهیم H_0 را در مقابل H_1 بیازماییم که در آن $\mu_0 = (1, 5, 9)^T$ و Σ معلوم است. برای محاسبه فاکتور بیز به ابر پارامترهای n_a و m_a نیاز داریم، قرار می دهیم $n_a = 2$. بنابراین دو مشاهده اول را به عنوان نمونه پرورشی در نظر می گیریم. به این ترتیب نمونه پرورشی عبارتست از:

$$x_0 = \begin{bmatrix} 1.79 & 5.75 & 9.76 \\ -0.13 & 3.84 & 7.54 \end{bmatrix}$$

با ترکیب پیشین ناسره $p(\mu) \propto \text{constant}$ با درستمایی مبتنی بر x_0 توزیع پسین $\mu | x_0 \sim N_3(\bar{x}_0, \frac{1}{2} \Sigma)$ حاصل می شود که در آن $\bar{x}_0 = (0.83, 4.795, 8.65)^T$ بردار میانگین نمونه پرورشی و برآوردی برای m_a است. به این ترتیب لگاریتم فاکتور بیز طبق رابطه ۹ برابر با $1/470.1$ می شود. بنابراین فاکتور بیز برابر $4/3497$ به دست می آید. در نتیجه طبق رابطه ۳ احتمال پسین درست بودن H_0 برابر است با 0.8131 و لذا احتمال پسین درست بودن H_1 برابر 0.1869 می باشد. اکنون از طریق شبیه سازی اثر افزایش اندازه نمونه، اثر افزایش اندازه نمونه پرورشی و اثر تغییر محل نمونه پرورشی را مورد بررسی قرار می دهیم.



۱.۳ اثر افزایش اندازه نمونه

در جدول زیر نتایج ۱۰۰۰۰ تکرار از مثال شبیه‌سازی فوق برای اندازه‌های نمونه مختلف ارائه شده است. ملاحظه می‌شود که با افزایش اندازه نمونه n احتمال پسین درست بودن H_0 افزایش می‌یابد.

n	۱۰	۳۰	۵۰	۷۰	۹۰	۵۰۰	۱۰۰۰	۱۰۰۰۰
$p(H_0 x)$	۰/۸۳۱۲	۰/۹۴۶۱	۰/۹۶۵۰	۰/۹۷۹۷	۰/۹۸۴۷	۰/۹۹۷۹	۰/۹۹۹۱	۱

۲.۳ اثر افزایش اندازه نمونه پرورشی

در جدول زیر نتایج ۱۰۰۰۰ تکرار از مثال شبیه‌سازی فوق برای اندازه‌های مختلف نمونه پرورشی ارائه شده است. ملاحظه می‌شود که افزایش اندازه نمونه پرورشی باعث کاهش احتمال پسین درست بودن H_0 می‌شود؛ لذا نمونه پرورشی مینیمال برای برآورد ابر پارامتر m_a توصیه می‌شود.

n_a	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰
$p(H_0 x)$	۰/۸۵۲۰	۰/۷۶۵۶	۰/۷۰۱۸	۰/۶۵۸۲	۰/۶۰۸۵	۰/۵۰۱۹	۰/۴۹۲۲	۰/۴۶۵۴	۰/۴۲۳۸

۳.۳ اثر تغییر محل نمونه پرورشی

اثر تغییر محل نمونه پرورشی در جدول زیر که نتیجه ۱۰۰۰۰ شبیه‌سازی متناظر با محل‌های مختلفی برای نمونه پرورشی است، ملاحظه می‌شود. در مثال فوق دو مشاهده اول یعنی x_1 و x_2 به‌عنوان نمونه پرورشی در نظر گرفته شده است، ملاحظه می‌شود که احتمال پسین درست بودن H_0 حساسیت قابل توجهی نسبت به تغییر محل نمونه پرورشی ندارد.

$$n_a = 2 \text{ و } n = 10$$

Training Sample	(x_1, x_2)	(x_3, x_4)	(x_5, x_6)	(x_7, x_8)	(x_9, x_{10})
$p(H_0 x)$	۰/۸۲۶۶	۰/۸۵۱۰	۰/۸۵۲۰	۰/۸۴۴۵	۰/۸۳۸۰

مراجع

- [1] Berger, J.O. and Pericchi, L.R. (1996). The intrinsic Bayes factor for model selection and prediction. *Journals of American Statistical Association*. **91**, 109–122.
- [2] Berger, J.O. (1999). Bayes factor. *Encyclopedia of statistical sciences update vol. 3*, 20-29.
- [3] Berger, J.O. and Pericchi, L.R. (2004). Training samples in objective Bayesian model selection. *Annals of Statistics*. **32**, 841–869.
- [4] Morey, R.D. and Rouder, J.N. (2011) Bayes factor approaches for testing interval null hypotheses. *Psychological Methods*, **16**(4), 406–419.



کاربردهای روش مونت کارلوی چندسطحی در معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی تصادفی

محبوبه سلیمیان*

دانشگاه شاهرود

چکیده

در این مقاله کاربرد روش مونت کارلو در حل عددی معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی در نظر گرفته می‌شود و از روش جدیدی برای کاهش پراکندگی روش مونت کارلو استفاده می‌کنیم که به آن روش مونت کارلوی چندسطحی گفته می‌شود.

واژه‌های کلیدی: محاسبات عدم اطمینان، معادلات دیفرانسیل با ضرایب تصادفی، مدل جریان‌های زیرزمینی، روش مونت کارلوی چندسطحی، بسط کارهونن لووا^۱.

Mathematics Subject Classification [2010]: 13D45, 39B42

۱ مقدمه

روش مونت کارلو در طیف وسیعی از علوم مورد استفاده قرار می‌گیرد و به دلیل نرخ بالای همگرایی نمونه‌گیری و مستقل از بعد مساله، این روش به وفور مورد استفاده قرار می‌گیرد. برای بهبود سرعت همگرایی از روش‌های کاهش پراکندگی استفاده می‌شود که یکی از آنها روش مونت کارلوی چندسطحی است.^۲

ملاحظه ۱.۱. برای راحتی کار از علامت $a \lesssim b$ برای نشان دادن کراننداری یکنواخت a/b استفاده می‌کنیم. همچنین $a \simeq b$ اگر $b \lesssim a$ یا $a \lesssim b$.

۲ شبیه‌سازی مونت کارلوی چند سطحی

فرض می‌کنیم سطوح مختلف $\{M_\ell : \ell = 0 \dots L\}$ یک دنباله صعودی به صورت $M_0 < M_1 < \dots < M_L := M$ باشد، فرض می‌کنیم: $s \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ به طوری که $M_\ell = sM_{\ell-1}$ ، $\ell = 1 \dots L$ که یک فرم چندشبه‌ای است و برای معادلات دیفرانسیل گسسته‌سازی شده به کار می‌رود. به جای برآورد مستقیم $\mathbb{E}[Q_{M_\ell}]$ از فرم $Y_\ell := Q_{M_\ell} - Q_{M_{\ell-1}}$ استفاده می‌کنیم. عملگر خطی امید ریاضی برای $\mathbb{E}[Q_M]$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\mathbb{E}[Q_M] = \mathbb{E}[Q_{M_0}] + \sum_{\ell=1}^L \mathbb{E}[Q_{M_\ell} - Q_{M_{\ell-1}}] = \sum_{\ell=0}^L \mathbb{E}[Y_\ell],$$

برای راحتی کار قرار می‌دهیم $Y_0 := Q_{M_0}$ که \hat{Y}_ℓ یک برآوردگر ناربیب برای $\mathbb{E}[Y_\ell]$ است. پس برآوردگر مونت کارلوی استاندارد برای \hat{Y}_ℓ با N_ℓ نمونه به شکل $\hat{Y}_{\ell, N_\ell}^{MC} := \frac{1}{N_\ell} \sum_{i=1}^{N_\ell} (Q_{M_\ell}^{(i)} - Q_{M_{\ell-1}}^{(i)})$ می‌باشد. برآورد چندسطحی را به

* سخنران

^۱karhunen leove expansion

^۲Multilevel Monte Carlo Simulation



صورت $\hat{Q}_M^{ML} = \sum_{\ell=0}^L \hat{Y}_\ell$ نمایش می‌دهیم. و خطای میانگین مربعات \hat{Q}_M^{ML} برای \hat{Q}_M^{ML} به شکل زیر می‌باشد:

$$e(\hat{Q}_M^{ML})^2 = \sum_{\ell=0}^L N_\ell^{-1} \mathbb{V}[Y_\ell] + (\mathbb{E}[Q_M - Q])^2,$$

پس مقدار برآورد روش مونت کارلوی چندسطحی به صورت $\mathcal{C}(\hat{Q}_M^{ML}) = \sum_{\ell=0}^L N_\ell \mathcal{C}_\ell$ است، به طوریکه: $\mathcal{C}_\ell := \mathcal{C}(Y_\ell^{(i)})$ پراکندگی برآوردگر $MLMC$ با در نظر گرفتن $N_\ell \simeq \sqrt{\mathbb{V}[Y_\ell]/\mathcal{C}_\ell}$ به کمترین مقدار خود می‌رسد بنابراین داریم:

$$\mathcal{C}(\hat{Q}_M^{ML}) \lesssim \sum_{\ell=0}^L \sqrt{\mathbb{V}[Y_\ell] \mathcal{C}_\ell},$$

قضیه ۱.۲. فرض کنید داشته باشیم $\hat{Y}_\ell := \hat{Y}_{\ell, N_\ell}^{MC}$ و مقادیر ثابت مثبت $\alpha, \beta, \gamma > 0$ وجود داشته باشد به طوریکه:

$$\mathcal{C}_\ell \lesssim M_\ell^\gamma, \quad \mathbb{V}[Y_\ell] \lesssim M_\ell^{-\beta}, \quad |\mathbb{E}[Q_{M_\ell} - Q]| \lesssim M_\ell^{-\alpha}, \quad \alpha > \frac{1}{2} \min(\beta, \gamma)$$

آنگاه برای هر $\varepsilon < e^{-1}$ مقدار L و دنباله $\{N_\ell\}_{\ell=0}^L$ وجود دارد به طوریکه:

$$e(\hat{Q}_M^{ML})^2 := \mathbb{E} \left[\left(\hat{Q}_M^{ML} - \mathbb{E}[Q] \right)^2 \right] < \varepsilon^2,$$

که $M = M_L$ و

$$\mathcal{C}(\hat{Q}_M^{ML}) \lesssim \begin{cases} \varepsilon^{-2}, & x < 0, \\ \varepsilon^{-2} (\log \varepsilon)^2, & x = 0, \\ \varepsilon^{-2 - (\gamma - \beta)/\alpha}, & x > 0. \end{cases}$$

□

اثبات. اثبات این قضیه تعمیمی از اثباتی است که [۲] آمده است.

۳ کاربرد در PDE

برای استفاده از روش مونت کارلوی چندسطحی سه مورد

تعریف مدل مساله

نمونه‌گیری از میدان تصادفی ورودی $k(x, w)$

گسسته‌سازی فضایی برای نمونه‌های داده شده و برای w ثابت

را در نظر می‌گیریم.

۱.۳ تعریف مدل مساله

یک مساله معادلات دیفرانسیل با ضرایب تصادفی در D به شکل زیر تعریف می‌شود:

$$-\nabla \cdot (k(x, w) \nabla p(x, w)) = f(x), \quad (1)$$

که $f := -\nabla \cdot g$ و تابع کوواریانس برای میدان تصادفی $k(x, w)$ به شکل زیر تعریف می‌شود:

$$C(x, y) := \sigma^2 \exp\left(-\frac{\|x - y\|_p}{\lambda}\right) \quad x, y \in D, \quad (2)$$

که $\|\cdot\|_p$ به ازای $p = 1$ یا 2 نرم ℓ_p در \mathbb{R}^d است پارامترهای σ^2 و λ به ترتیب کوواریانس و طول همبستگی هستند که در معادلات جریان‌های زیرزمینی $\sigma^2 \geq 1$ و $\lambda \leq \text{diam} D = 1$ را در نظر می‌گیریم.

^۲Mean Square Error

^۴Subsurface Flow Modeling



۲.۳ نمونه‌گیری میدان تصادفی ورودی

برای تولید نمونه‌هایی از میدان تصادفی ورودی K از بسط کارهونن لوو استفاده می‌کنیم قرار می‌دهیم:
 $z(x, w) := \log k(x, w)$.

سپس Z را با در نظر گرفتن متغیرهای تصادفی $\{\xi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ با میانگین صفر بسط می‌دهیم. داریم:

$$Z(x, w) = \mathbb{E}[Z(x, \cdot)] + \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\theta_n} \xi_n(w) b_n(x), \quad (۳)$$

که $\{\xi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ مقادیر ویژه و $\{b_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ توابع ویژه نرمال شده‌ی عملگر کوواریانس با تابع کرنل $C(x, y)$ تعریف شده در (۲) هستند. با در نظر گرفتن $p = 1$ در (۲) و $d = 1$ و $D = (0, 1)^2$ و $\sigma^2 = 1$ مقادیر ویژه و توابع ویژه به صورت زیر در دسترس خواهد بود:

$$\theta_n^{1D} = \frac{2\lambda}{\lambda^2 w_n^2 + 1} \quad n \in \mathbb{N},$$

$$b_n(x)^{1D} = A_n (\sin(w_n x) + \lambda w_n \cos(w_n x)) \quad n \in \mathbb{N},$$

که $\{w_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ جواب معادله غیرجبری زیر خواهد بود:

$$\tan(w) = \frac{2\lambda w}{\lambda^2 w^2 - 1},$$

و ثابت A_n طوری انتخاب می‌شود که رابطه $\|b_n\|_{L^2(0,1)} = 1$ برای $d = 2$ و $D = (0, 1)^2$ برقرار باشد. مقادیر ویژه و توابع ویژه به صورت زیر خواهد بود:

$$\theta_n^{2D} = \theta_{i_n}^{1D} \theta_{j_n}^{1D}, \quad b_n^{2D}(x) = b_{i_n}^{1D}(x_1) b_{j_n}^{1D}(x_2) \quad i_n, j_n \in \mathbb{N}.$$

حال برای محدود کردن بسط (۳) به تعداد m_{KL} عبارت را در نظر می‌گیریم و بسط محدود شده KL در نظر می‌گیریم خطای حاصل از بسط $Z_{m_{KL}}$ به صورت زیر است:

$$\mathbb{E} \left[\|Z - Z_{m_{KL}}\|_{L^2(D)}^2 \right] = \mathbb{E} \left[\left\| \sum_{n=m_{KL}+1}^{\infty} \sqrt{\theta_n} \xi_n(w) b_n \right\|_{L^2(D)}^2 \right] = \sum_{n=m_{KL}+1}^{\infty} \theta_n,$$

۳.۳ گسسته‌سازی فضایی

با بخش بندی $[0, 1]^2$ به‌طور یکنواخت به مشی به صورت واحدهای مربع شکل $m \times m$ که با $D_{i,j}$ نشان می‌دهیم داریم:

$$D_{i,j} = \left(\frac{i-1}{m}, \frac{j}{m} \right) \times \left(\frac{j-1}{m}, \frac{j}{m} \right) \quad i, j = 1, \dots, m,$$

که $x_{i,j}$ مرکز مربعات می‌باشد. برای گسسته‌سازی معادله (۱) از (۱) بر روی هر واحد انتگرال می‌گیریم

$$\int_{D_{i,j}} -\nabla \cdot (k \nabla p) = \int_{D_{i,j}} f \quad 1 \leq i, j \leq m. \quad (۴)$$

با استفاده از قضیه دیورژانس^۵ سمت چپ رابطه (۴) به رابطه $\int_{\partial D_{i,j}} -k \nabla p \cdot n$ تبدیل می‌شود. با استفاده از روش تفاضل متناهی^۶ فرم نهایی (i, j) ام به صورت زیر خواهد بود:

$$-\bar{k}_{i,j-\frac{1}{2}} p_{i,j-\frac{1}{2}} - \bar{k}_{i-\frac{1}{2},j} p_{i-\frac{1}{2},j} + \sum_{i,j} p_{i,j} - \bar{k}_{i+\frac{1}{2},j} p_{i+\frac{1}{2},j} - \bar{k}_{i,j+\frac{1}{2}} p_{i,j+\frac{1}{2}} = f_{i,j}/m^2,$$

$$\sum_{i,j} i, j = \bar{k}_{i,j-\frac{1}{2}} + \bar{k}_{i-\frac{1}{2},j} + \bar{k}_{i+\frac{1}{2},j} + \bar{k}_{i,j+\frac{1}{2}}. \quad \text{که:}$$

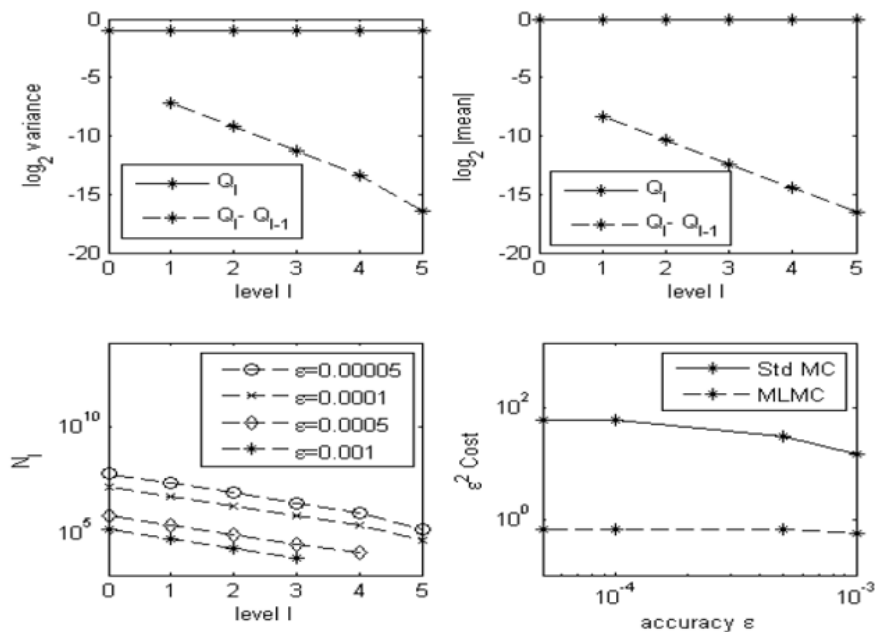
^۵Divergence

^۶Finite Difference



۴ نتایج عددی

معادله (۱) را در $D = [0, 1]$ با شرایط مرزی $p(0) = 1$ و $p(1) = 0$ در نظر بگیرید، با داشتن $Q = -k \frac{\partial p}{\partial x} |_{x=1}$ و در نظر گرفتن فرضیات قضیه ۱.۲ مقدار α و β برآورد می‌شود. شکل مورد نظر نتایج را در حالت $\lambda = 0.3$ و $\sigma^2 = 1$ و $m_0 = 16$ و $m_{KL} = 800$ در نظر گرفته شده:

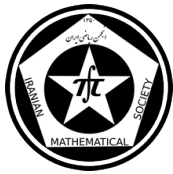


شکل ۱

شکل سمت چپ از بالا واریانس Q_l و واریانس $Q_l - Q_{l-1}$ را برای هر سطح l نشان می‌دهد. شکل سمت راست از بالا امید ریاضی مقدار Q_l و امید ریاضی مقدار $Q_l - Q_{l-1}$ را نشان می‌دهد. دو شکل پایین نیز مقدار بدست آمده از الگوریتم روش مونت کارلو را به ما نشان می‌دهد.

مراجع

- [1] Ullmann, Elisabeth, *Multilevel Monte Carlo Methods and Applications to Uncertainty Quantification in Subsurface Flow* Main Thematic Areas (2012), 145.
- [2] Giles, Michael B. *Multilevel monte carlo path simulation*, Operations Research 56.3 (2008), 607-617.
- [3] Barth, Andrea, Christoph Schwab, Nathaniel Zollinger *Multi-level Monte Carlo finite element method for elliptic PDEs with stochastic coefficients*, Numerische Mathematik, 119.1 (2011), 123-161.
- [4] Grigoriu, Mircea, *Stochastic calculus: applications in science and engineering*, Springer Science and Business Media, 2002, 287-341.



محاسبه‌ی آنتروپی شانن، رنی، تسالیس، شارما-میتال، سوپرا-اکستنسیو برای سیستم صف بندی $M/M/c/s$

مینا کارگر شهری*
دانشگاه صنعتی بیرجند

زهره نیکوروش
دانشگاه صنعتی بیرجند

چکیده

در این مقاله به معرفی سیستم صف بندی $M/M/c/s$ می‌پردازیم و توزیع مانای این سیستم صف بندی را محاسبه می‌کنیم. هدف اصلی محاسبه‌ی آنتروپی‌های شانن^۱، رنی^۲، تسالیس^۳، شارما-میتال^۴ و سوپرا-اکستنسیو^۵ برای سیستم صف بندی $M/M/c/s$ و بررسی وجود رابطه بین هر جفت از این آنتروپی‌ها می‌باشد.

واژه‌های کلیدی: سیستم صف بندی $M/M/c/s$ ، توزیع مانا، آنتروپی

Mathematics Subject Classification [2010]: 60K25, 94A17

۱ مقدمه

یکی از پرکاربردترین شاخه‌های فرآیند تصادفی به ویژه زنجیره‌های مارکف نظریه صف می‌باشد. در اینجا با معرفی سیستم صف بندی $M/M/c/s$ به دنبال محاسبه‌ی آنتروپی‌های مختلف برای آن می‌باشیم. یک مدل صف بندی با c ($1 \leq c \leq \infty$) سرویس دهنده یا باجه به صورت موازی که توزیعهای ورودی بواسون با پارامتر λ ؛ توزیع زمانهای سرویس، نمایی با میانگین نرخ μ ؛ و نظم صف، سرویس به ترتیب ورود یا ($FIFO$) است. که در این سیستم داریم:

$$\forall j ; \lambda_j = \lambda \quad \text{و} \quad \mu_j = \begin{cases} j\mu & 0 \leq j \leq c-1 \\ c\mu & j \geq c \end{cases}$$

برای این فرآیند توزیع مانا به صورت زیر به دست آمده است:

$$P_n = \begin{cases} \frac{(\frac{\lambda}{\mu})^n}{n!} P_0 & 0 \leq n \leq c-1 \\ \frac{(\frac{\lambda}{\mu})^n}{c^{n-c} c!} P_0 & n \geq c \end{cases} \quad \text{و} \quad P_0 = \frac{1}{\sum_{n=0}^{c-1} \frac{(\frac{\lambda}{\mu})^n}{n!} + \frac{\rho^c}{1-\rho}} \quad (1)$$

* سخنران

^۱ Shannon

^۲ Renyi

^۳ Tsallis

^۴ Sharma - Mittal

^۵ Supra - Extensive



که در آن ρ شدت ترافیک و برابر $\frac{\lambda}{c\mu}$ می باشد. [۱]

۲ آنتروپی شانن

برای هر سیستمی آنتروپی شانن از فرمول زیر به دست می آید که در آن p_i همان توزیع مانا است. [۳]

$$S_{Sh}(p) = - \sum_{i=0}^s P_i \log P_i.$$

در این سیستم توزیع مانا مطابق رابطه ی (۱) است، بنابراین آنتروپی مذکور در این حالت به صورت زیر محاسبه می گردد:

$$S_{Sh}(\lambda, \mu) = - \sum_{i=0}^{c-1} \frac{(\frac{\lambda}{\mu})^i}{i!} P_0 \log(\frac{(\frac{\lambda}{\mu})^i}{i!} P_0) - \sum_{i=c}^s \frac{(\frac{\lambda}{\mu})^i}{c^{i-c} c!} P_0 \log(\frac{(\frac{\lambda}{\mu})^i}{c^{i-c} c!} P_0).$$

۳ آنتروپی رنی و تسالیس

این دو نوع آنتروپی به ترتیب از فرمول های زیر محاسبه می گردد:

$$S_R(p, q) = \frac{1}{1-q} \log \sum_{i=1}^N P_i^q \quad \text{و} \quad S_T(p, q) = \frac{\sum_{i=1}^N P_i^q - 1}{1-q}.$$

بنابراین آنتروپی رنی برای این سیستم به قرار زیر است:

$$S_R(\lambda, \mu, q) = \frac{1}{1-q} \log \left[\sum_{i=1}^{c-1} \left(\frac{(\frac{\lambda}{\mu})^i}{i!} P_0 \right)^q + \sum_{i=c}^s \left(\frac{(\frac{\lambda}{\mu})^i}{c^{i-c} c!} P_0 \right)^q \right].$$

چنان چه از عبارت فوق زمانی که $q \rightarrow 1$ میل می کند حد بگیریم آنتروپی شانن حاصل می گردد. اما

$$\lim_{q \rightarrow 1} S_R(\lambda, \mu) = \lim_{q \rightarrow 1} \frac{1}{1-q} \log \left[\sum_{i=1}^{c-1} \left(\frac{(\frac{\lambda}{\mu})^i}{i!} P_0 \right)^q + \sum_{i=c}^s \left(\frac{(\frac{\lambda}{\mu})^i}{c^{i-c} c!} P_0 \right)^q \right] = \circ.$$

با رفع ابهام و حدگیری مجدد از عبارت حاصل رفع ابهام زمانی که $q \rightarrow 1$ میل می کند به آنتروپی شانن خواهیم رسید. علاوه بر این چنان چه از آنتروپی تسالیس همین حدگیری را انجام دهیم آنتروپی شانن را خواهیم داشت:

$$S_T(\lambda, \mu, q) = \frac{\sum_{i=0}^{c-1} \left(\frac{(\frac{\lambda}{\mu})^i}{i!} P_0 \right)^q + \sum_{i=c}^s \left(\frac{(\frac{\lambda}{\mu})^i}{c^{i-c} c!} P_0 \right)^q - 1}{1-q}.$$

$$\lim_{q \rightarrow 1} S_T(\lambda, \mu) = \lim_{q \rightarrow 1} \frac{\sum_{i=0}^{c-1} \left(\frac{(\frac{\lambda}{\mu})^i}{i!} P_0 \right)^q + \sum_{i=c}^s \left(\frac{(\frac{\lambda}{\mu})^i}{c^{i-c} c!} P_0 \right)^q - 1}{1-q} = \circ.$$

و با رفع ابهام به نتیجه مطلوب می رسیم.



۴ آنتروپی شارما-میتال و سوپرا-اکستنسوی

این دو نوع آنتروپی نیز درحالت کلی به ترتیب زیر می‌باشند:

$$S_{SM}(p, q, r) = \frac{1}{1-r} \left[\left(\sum_{i=1}^N P_i^q \right)^{\frac{1-r}{1-q}} - 1 \right] \quad \text{و} \quad S_{SE}(p, q, r) = \frac{[1 + \frac{1-r}{1-q} \log \sum_i P_i^q]^{\frac{1-q}{1-r}} - 1}{1-q}.$$

بنابراین آنتروپی شارما-میتال برای این سیستم صف بندی به قرار زیر است: [۴] و [۵]

$$S_{SM}(\lambda, \mu, q, r) = \frac{1}{1-r} \left[\left(\sum_{i=0}^{c-1} \left(\frac{\lambda}{i!} \right)^i P_0^q + \sum_{i=c}^s \left(\frac{\lambda}{c^{i-c} c!} \right)^i P_0^q \right)^{\frac{1-r}{1-q}} - 1 \right].$$

که با حد گرفتن از عبارت فوق زمانی که $r \rightarrow 1$ میل می‌کند. خواهیم داشت:

$$\lim_{r \rightarrow 1} \frac{1}{1-r} \left[\left(\sum_{i=0}^{c-1} \left(\frac{\lambda}{i!} \right)^i P_0^q + \sum_{i=c}^s \left(\frac{\lambda}{c^{i-c} c!} \right)^i P_0^q \right)^{\frac{1-r}{1-q}} - 1 \right] = 0.$$

پس از رفع ابهام به شیوه قاعده ی هوییتال و حدگیری به فرم آنتروپی رنی می‌رسیم. و اما برای این سیستم صف بندی آنتروپی سوپرا-اکستنسوی به قرار زیر است:

$$S_{SE}(\lambda, \mu, q, r) = \frac{[1 + \frac{1-r}{1-q} \log (\sum_{i=0}^{c-1} (\frac{\lambda}{i!} p_0)^q + \sum_{i=c}^s (\frac{\lambda}{c^{i-c} c!} p_0)^q)]^{\frac{1-q}{1-r}} - 1}{1-q}. \quad (2)$$

که با حد گرفتن از عبارت (۲) زمانی که $r \rightarrow 1$ میل می‌کند آنتروپی تسالیس حاصل می‌گردد. اما برای حل معادله ی مذکور ابتدا y را به صورت زیر در نظر و از این عبارت حد می‌گیریم. در نهایت به آنتروپی تسالیس می‌رسیم.

$$y = [1 + \frac{1-r}{1-q} \log (\sum_{i=0}^{c-1} (\frac{\lambda}{i!} p_0)^q + \sum_{i=c}^s (\frac{\lambda}{c^{i-c} c!} p_0)^q)]^{\frac{1-q}{1-r}}.$$

۵ نتایج اصلی

چنان چه از آنتروپی سوپرا-اکستنسوی زمانی که $q \rightarrow r$ میل کند حد بگیریم آنتروپی رنی و همچنین اگر از آنتروپی شارما-میتال همین حدگیری را انجام دهیم به آنتروپی تسالیس می‌رسیم. علاوه بر این رابطه‌های زیر میان آنتروپی تسالیس و رنی بر قرار است [۲].

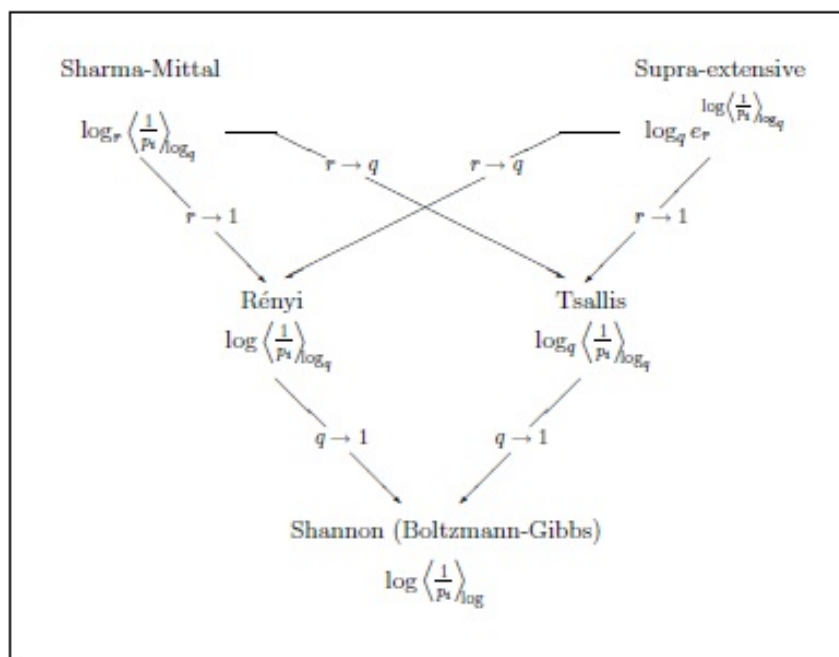
$$S_R(\lambda, \mu, q) = \frac{1}{1-q} \log [1 + (1-q) S_T(\lambda, \mu, q)].$$



همچنین می توان وجود رابطه ی زیر را بین آنتروپی های شارما-میتال و سوپرا-اکستنسیو اثبات کرد.

$$S_{SE}(\lambda, \mu, q, r) = \frac{1}{1-q} \left[(1 + \log(1 + (1-r)S_{SM}(\lambda, \mu, q, r))) \frac{1-q}{1-r-1} \right].$$

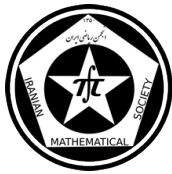
شکل ۱ نشان دهنده ی تمامی روابط بین آنتروپی های متفاوت، که در این مقاله آمده است، می باشد.



شکل ۱: روابط بین آنتروپی ها

مراجع

- [۱] گراس دونالد و هاریس کارل ام.، فاطمی قمی سید محمد تقی، مبانی و اصول نظریه صف، انتشارات دانشگاه امام حسین (ع)، ۱۳۸۰.
- [۲] صانعی طبس منیژه، محتشمی برزادران غلامرضا و امینی محمد، ویژگی ها و مشخصه هایی از آنتروپی رنی ماکزیمم، مجله ی بررسی های آمار رسمی ایران، سال ۲۱، شماره ۱، ۱۳۸۹، صص ۷۵-۸۷.
- [3] Shannon, C. E. *A Mathematical Theory of Communication*, Theoretical Computer Science, Bell System Technical Journal, Vol. 27, (1948), pp. 379-423.
- [4] Sharma, B. D. and Mittal, D. P. *New non-additive measures of entropy for a discrete Probability distributions*, Journal of Mathematical Sciences, 10, 28-40.
- [5] Sharma, B. D. and Mittal, D. P. *Applications of Entropy Measures in Field of Queuing Theory*, World Academy of Science, Engineering and Technology, Vol:51, (2011), 3-22.



محاسبه دقیق متوسط طول دنباله برای نمودار کنترل جمع تجمعی

منوچهر خردمندینیا
دانشگاه اصفهان

هومن کمال زارع*
دانشگاه اصفهان

چکیده

قضاوت راجع به عملکرد یک نمودار کنترل معمولاً براساس متوسط طول دنباله (ARL) صورت می‌گیرد. در متون کنترل فرآیند آماری (SPC) روش‌های مختلفی برای محاسبه مقدار دقیق یا مقدار تقریبی ARL برای نمودار کنترل جمع تجمعی (CUSUM) پیشنهاد شده است. در مقاله حاضر یک روش دقیق مبتنی بر شبیه سازی معرفی شده است. در مقاله حاضر الگوریتمی برای محاسبه دقیق و سریع ARL از طریق شبیه سازی ارائه شده است. با استفاده از نرم افزار MATLAB نتایج اجرای الگوریتم را برای بعضی حالات خاص ارائه کرده‌ایم. نتیجه اجرای روش حاکی از دقت و سرعت زیاد روش پیشنهادی در مقایسه با روش‌های موجود می‌باشد.

واژه‌های کلیدی: تقریب حنیف، تقریب سیگموند، شبیه سازی

Mathematics Subject Classification [2010]: 62N10, 62-04

۱ مقدمه

نمودار کنترل جمع تجمعی (CUSUM) یکی از مهم‌ترین و پرکاربردترین نمودارهای کنترل برای شناسایی انحرافات کوچک در یک خط تولید است. چنین نمودار کنترلی در صنایع تولیدی هر کشوری کاربرد دارد و به کارگیری آن می‌تواند باعث ارتقاء کیفیت محصول و ورود به بازار رقابتی جهانی شود. یکی از مشکلاتی که مسئولین کنترل کیفیت صنایع در استفاده از نمودار CUSUM دارند این واقعیت است که قادر به محاسبه ARL در شرایط متنوع نیستند و لذا نمی‌توانند که راجع به میزان دقت و عملکرد نمودار کنترل قضاوتی دقیق داشته باشند. استفاده کورکورانه از این نمودار کنترل می‌تواند خسارت بار باشد. در متون کنترل فرآیند آماری روش‌های مختلفی برای محاسبه مقدار دقیق و یا مقدار تقریبی ARL پیشنهاد شده است. به نظر می‌رسد که اولین کار مهم و موفقیت آمیز در راستای محاسبه مقدار دقیق ARL توسط مرجع [۱] صورت گرفته است. مقادیر ARL محاسبه شده توسط مرجع [۱] برای بعضی حالات خاص در کتاب [۲] ارائه شده است. با توجه به عدم دسترسی کاربران به برنامه‌های محاسباتی ساده و یا دشواری اجرای برنامه‌های محاسباتی مرجع [۱]، آماردانان روش‌های ساده مختلفی برای محاسبه مقدار تقریبی ARL پیشنهاد کرده‌اند. یکی از روش‌های محاسبه تقریبی ARL روش گفته شده در مرجع [۳] است. این روش در کتب متعددی معرفی شده است ولی مرجع [۴] نشان داده‌اند که هشدارهای خروج از کنترلی که توسط روش جانسون تولید می‌شود بسیار کمتر از آنچه است که مورد انتظار است. به عبارت دیگر نتیجه استفاده از روش تقریبی جانسون اختلاف زیادی با روش دقیق دارد. روش تقریبی مشهور دیگر یک فرمول ریاضی است که توسط مرجع [۵] معرفی شده است. در کتاب [۲] این روش معرفی شده و مثال‌هایی ارائه شده است. روش سیگموند یک روش ساده برای محاسبه مقدار تقریبی ARL است و اهمیت آن به دلیل سادگی آن است ولی مقدار دقیق ARL را به دست نمی‌دهد. فرمول ریاضی دیگری نیز اخیراً توسط مرجع [۶] معرفی شده که به کارگیری آن حتی از فرمول سیگموند هم ساده‌تر است و ما آن را به اختصار

* سخنران



تقریب حنیف می‌نامیم. مرجع [۶] یک مطالعه مقایسه‌ای بین روش پیشنهادی خود با روش سیگموند و نیز با روش دقیق ارائه کرده‌اند. آنها نتیجه گرفته‌اند که روش پیشنهادی‌اشان از لحاظ دقت مشابه روش سیگموند است ولی از لحاظ سادگی برتری دارد.

۲ نمودار کنترل جمع تجمعی

در خطوط تولید صنعتی نمودار کنترل CUSUM به وفور برای کنترل میانگین یک مشخصه کیفی مورد استفاده قرار می‌گیرد. فرض کنید اندازه‌های کیفیت X_1, X_2, \dots به طور متوالی در طول زمان گرفته می‌شود. این اندازه‌ها می‌تواند مشاهدات تکی و یا میانگین‌های نمونه‌ای باشد. فرض می‌شود که این اندازه‌ها مستقلند و X_i دارای توزیع نرمال با میانگین μ_i و واریانس σ^2 است که در آن σ^2 معلوم و ثابت است. شرط $\mu_i = \mu_0$ برای $i = 1, 2, \dots$ مورد بررسی است و هدف کشف انحرافات احتمالی از μ_0 است. نمودار دو طرفه CUSUM بر اساس دو آماره جمع تجمعی زیر استوار است:

$$C_i^+ = \max[0, x_i - (\mu_0 + K) + C_{i-1}^+]$$

$$C_i^- = \min[0, x_i - (\mu_0 - K) + C_{i-1}^-]$$

که در آن مقدار اولیه $C_i^+ = C_i^- = 0$ است. حد بالای کنترل $UCL = H$ و حد پایین کنترل $LCL = -H$ است. پارامتر K و مقدار H باید طوری تعیین شود که متوسط طول دنباله در شرایط کنترل (ARL_0) حتی الامکان بزرگ باشد و متوسط طول دنباله در شرایط خروج از کنترل (ARL_1) حتی الامکان کوچک باشد.

یادآور می‌شویم که متوسط طول دنباله در شرایط کنترل، متوسط تعداد نمونه تا حصول اولین هشدار بناحق خروج از کنترل است و متوسط طول دنباله در شرایط خروج از کنترل، متوسط تعداد نمونه تا مشاهده اولین هشدار بحق خروج از کنترل می‌باشد. طبیعی است که وقتی فرآیند تولید در شرایط کنترل قرار دارد انتظار ما از یک نمودار کنترل خوب این است که خیلی دیر هشدار خروج از کنترل بناحق داشته باشد. به عبارت دیگر انتظار داریم که ARL_0 بزرگ باشد. برعکس وقتی فرآیند تولید از شرایط کنترل خارج شده انتظار ما از یک نمودار کنترل خوب این است که خیلی زود هشدار بحق خروج از کنترل داشته باشد. به عبارت دیگر انتظار داریم که ARL_1 کوچک باشد. کتاب [۲] توصیه کرده که قرار دهید $H = h\sigma$ و $K = k\sigma$. ایشان به کار بردن $h = 4$ یا $h = 5$ و $k = 1/2$ را توصیه کرده است. این‌ها مقادیری هستند که برای شناسایی انحرافی برابر 1σ در میانگین به خوبی عمل می‌کنند. به عبارت دیگر این‌ها مقادیری هستند که از لحاظ ARL مطلوب هستند. در واقع با $h = 4$ و $k = 1/2$ داریم $ARL_0 = 168$ و $ARL_1 = 8.38$ و با $h = 5$ و $k = 1/2$ داریم $ARL_0 = 465$ و $ARL_1 = 10.4$. این دو عدد اخیر به این معنی است که اگر خط تولید در شرایط کنترل باشد به طور متوسط بعد از ۴۶۵ نمونه یک هشدار بناحق خروج از کنترل داریم و اگر خط تولید به اندازه 1σ از کنترل خارج شود به طور متوسط بعد از ۱۰/۴ نمونه یک هشدار بحق خروج از کنترل داریم.

۳ محاسبه ARL از طریق شبیه سازی

پیشنهاد ما این است که به ازاء مقادیر مختلف k, δ, h از طریق شبیه سازی مقدار ARL محاسبه گردد. که δ مقدار انحراف از میانگین برحسب واحد انحراف معیار است. با توجه با این فرض که μ_0 و σ معلومند، به جای کار کردن با X ما می‌توانیم با Z ها که مقادیر استاندارد شده X ها هستند کار کنیم. بنابراین در شرایط کنترل میانگین برابر $\mu_0 = 0$ و انحراف معیار برابر $\sigma = 1$ می‌باشد. بنابراین محاسبه ARL می‌تواند براساس شبیه سازی از توزیع نرمال استاندارد صورت گیرد. پیشنهاد ما الگوریتم زیر است:



گام ۱: ابتدا تعداد $b_1 = 1000$ نمونه $m = 5000$ تایی از $N(0, 1)$ تولید کرده آن را در ماتریس y که یک ماتریس $m \times b_1$ است قرار دهید. به این ترتیب هر یک از سطرها y مشاهدات یک نمونه تصادفی $m = 5000$ تایی از $N(0, 1)$ است.

گام ۲: برای هر سطر y ، مقادیر آماره های کنترل C_i^+ و C_i^- را محاسبه کنید.

گام ۳: برای هر سطر y ، مقادیر محاسبه شده C_i^+ و C_i^- را با H و $-H$ مقایسه کنید. برای هر سطر y برداری $1 \times m$ از صفرها و یک ها درست کنید. اگر $C_i^+ > H$ یا $C_i^- < -H$ قرار دهید ۱ و در غیر این صورت قرار دهید ۰.

گام ۴: برای هر یک از $b_1 = 1000$ سطر y مشخص کنید که اولین هشدار خروج از کنترل بعد از چند نمونه روی داده است. به عبارت دیگر اولین عدد ۱ در بردار گام ۳ را تعیین کنید که متناظر با چندمین مشاهده است.

گام ۵: به این ترتیب به ازاء هر سطر y ، یک برآورد برای طول دنباله (RL) حاصل می شود. با میانگین گیری از این $b_1 = 1000$ برآورد، یک برآورد نه چندان دقیق برای ARL حاصل می شود.

گام ۶: برای دستیابی به برآورد دقیق ARL گام های پنج گانه فوق را $b_2 = 100$ بار تکرار کنید. سپس با میانگین گیری از ۱۰۰ برآورد از ARL برآورد دقیق ARL به دست می آید.

به کارگیری مقادیر $b_1 = 1000$ و $b_2 = 100$ به طور تجربی هم به سرعت بسیار بالا و هم به دقت بسیار بالایی منجر می شود. در صورتی که بخواهیم دقت را باز هم افزایش دهیم می توانیم مقادیر $b_1 = 10000$ و $b_2 = 1000$ یا گزینه های دیگری را انتخاب کنیم. طبیعی است که با این تعداد تکرار سرعت کاهش می یابد. انتخاب $m = 5000$ نیز به طور اغراق آمیزی بزرگ است مقدار m باید طوری تعیین شود که اطمینان حاصل شود که تکیه گاه RL را کاملاً پوشش می دهد. اغلب عددی بسیار کوچکتر از ۵۰۰۰ نیز منجر به برآورد دقیق ARL می شود.

۴ مطالعه مقایسه ای

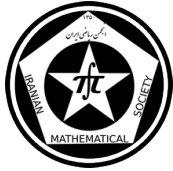
در این بخش برای $h = 4$ و $h = 5$ و به ازاء مقادیر مختلف انحراف در میانگین (δ) مقادیر ARL محاسبه شده توسط مرجع [۱]، مقادیر محاسبه شده براساس روش مرجع [۵]، مقادیر محاسبه شده توسط روش مرجع [۶] و مقادیر محاسبه توسط الگوریتم پیشنهادی مقاله حاضر را مقایسه می کنیم:

جدول ۱: روش دقیق ونس (۱۹۸۶)

δ	۰	۰/۵	۱	۲	۳
$h = 4$	۱۶۸	۲۶/۶	۸/۳۸	۳/۳۴	۲/۱۹
$h = 5$	۴۶۵	۳۸	۱۰/۴	۴/۰۱	۲/۵۷

جدول ۲: روش تقریبی سیگموند (۱۹۸۵)

δ	۰	۰/۵	۱	۲	۳
$h = 4$	۱۶۹	۳۱	۸/۳۴	۳/۲۲	۱/۹۹
$h = 5$	۴۶۹/۱	۴۴	۱۰/۳۴	۳/۸۹	۲/۳۹



جدول ۳: روش حنیف و همکاران (۲۰۱۲)

δ	۰	۰٫۵	۱	۲	۳
$h = 4$	۱۷۶	۲۰٫۷۵	۶٫۱	۲٫۱	۱٫۳۹
$h = 5$	۴۵۸	۴۳٫۷۸	۱۲٫۱۹	۳٫۶۵	۲٫۰۵

جدول ۴: روش شبیه سازی مقاله حاضر

δ	۰	۰٫۵	۱	۲	۳
$h = 4$	۱۶۷٫۸۶۲۹	۲۶٫۶۰۵۰	۸٫۳۷۵۱	۳٫۳۴۳۵	۲٫۱۹۴۸
$h = 5$	۴۶۵٫۳۳۱۹	۳۸٫۰۷۹۰	۱۰٫۳۶۷۲	۴٫۰۰۴۳	۲٫۵۷۵۰

۵ نتیجه گیری

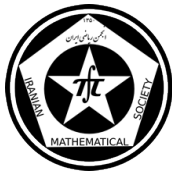
با توجه به جداول ارائه شده در بخش ۴ ملاحظه می‌شود که مقادیر موجود در جدول ۴ که در این مقاله از طریق شبیه سازی محاسبه کردیم تا حد زیادی به مقادیر موجود در جدول ۱ که روش دقیق ونس است نزدیک است و از لحاظ دقت نیز نسبت به روش سیگموند که مقادیر آن در جدول ۲ و روش حنیف و همکاران که در جدول ۳ آمده است دقت بیشتری دارد.

مراجع

- [1] Vance, L.C., *Average Run Length of Cumulative Sum Control Charts for Controlling Normal Mean: Concepts and Application*, Technometrics, 34(3) (1986), pp. 286-288.
- [2] Montgomery, D. C. *Introduction to Statistical Quality Control*, Sixth Edition, John Wiley and Sons, Inc, USA, 2009.
- [3] Johnson, N. L., *A Simple Theoretical Approach to Cumulative Sum Control Charts*, J.Amer. Statist. Assoc. 56 (1961), pp. 835-840.
- [4] Woodall, W. H., Adams, B. M., *The statistical design of CUSUM charts*, Quality Engineering 5(4) (1993), pp. 263-266.
- [5] Siegmund, D., *Sequential Analysis: Test and confidence Interval*, Springer Series in Statistics. Springer-Verlag, New York, 1985.
- [6] Hanif, M., Hussain, A., Jamal, N., Amir, M., *New Approximation of ARL in CUSUM Control Chart*, Far East Journal of Marketing and Management 2 (2) (2012), pp. 73-81.

پست الکترونیکی: hooman101yh@gmail.com

پست الکترونیکی: kheradmand@sci.ui.ac.ir



معرفی مدل‌های STARMA

رویا هادیان دهکردی

دانشگاه آزاد اسلامی واحد خمینی شهر

مریم هاشمی

دانشکده ریاضی و کامپیوتر، دانشگاه اصفهان، واحد خوانسار

چکیده

در این مقاله، پس از تعریف مدل‌های اتورگرسیو و میانگین متحرک فضا-زمان، به معرفی آماری مدل، شناسایی و برآورد پارامترهای مربوط به آن پرداخته شده است.

واژه‌های کلیدی: همبستگی فضا-زمان، STARMA، مدل‌های فضا-زمان

۱ مقدمه

یک جایگزین برای مدل‌های سری زمانی تک متغیره، هنگامی که وابستگی سیستماتیک بین مشاهدات در هر مکان و مکان‌های مجاور وجود داشته باشد، مدل‌های سری زمانی چند متغیره است. این مدل‌ها تلاش می‌کنند تا بطور همزمان مجموعه‌ای از N سری زمانی قابل مشاهده را توصیف و پیش‌بینی کنند. هنگامی که این N سری نشان دهنده الگوهایی از N منطقه باشند، روابط متقابل بین مناطق مختلف را در نظر گرفته و در نتیجه به سیستم بهتری برای توضیحات منجر می‌شود. این مدل‌های سری زمانی چندمتغیره تحت عنوان مدل‌های اتورگرسیو و میانگین متحرک فضا-زمان (STARMA) شناخته می‌شوند. تجزیه و تحلیل سری‌های زمانی به‌طور نظری و عملی از زمان شروع کار اصلی جورج باکس در سال ۱۹۷۰ تحت عنوان «تجزیه و تحلیل سری‌های زمانی، پیشگویی و کنترل» به‌سرعت توسعه پیدا نمود. در ابتدا پس از معرفی مدل‌های سری زمانی تک متغیری، کلیف و ارد در سال ۱۹۷۳ نشان دادند که اگر در یک سیستم بین مشاهدات در هر منطقه و مناطق مجاور وابستگی وجود داشته باشد، مدل‌های سری زمانی چند متغیره کارا تر خواهد بود. آن‌ها این پدیده را «همبستگی فضایی» نامیدند و تعبیر آن‌ها این گونه بود: اگر حضور خصوصیتی خاص در یک شهر از کشوری باعث ایجاد حضور همان خصوصیت در شهرهای مجاور با احتمالی کمتر یا بیشتر شود یک همبستگی فضایی ایجاد شده است. پژوهش‌های آنان زمینه ای را فراهم نمود تا مدل‌های فضا-زمان برای توصیف چنین همبستگی فضایی ایجاد شوند. بسج (۱۹۷۴)، اورد (۱۹۷۵)، انسلین (۱۹۸۸)، هاینینگ (۱۹۹۰) و کرسی (۱۹۹۳) نیز به تحلیل مدل بندی فضایی پرداختند. بطور کلی کلاس مدل‌های STARMA اولین بار در سال ۱۹۸۰ در یک سری از مقالات توسط فیفر و دویچ مطرح و به طور کامل معرفی شدند. آن‌ها از این مدل‌ها برای تحلیل سری‌های وابسته به زمان و مکان از جمله داده‌های مربوط به نوع جرم و جنایت در ایالت بوستون استفاده کردند.

۲ معرفی آماری مدل

فرض کنید که مشاهدات $z_i(t)$ از متغیر تصادفی $Z_i(t)$ در هر یک از مکان‌های ثابت N در فضا $(i = 1, 2, \dots, N)$ ، در T دوره زمانی موجود باشند. برای تدوین یک مدل فضا-زمان، تعریف عملگر تأخیر فضایی زیر مورد نیاز است. فرض کنید $L^{(l)}$ ، عملگر تأخیر فضایی از تأخیر فضایی l ام باشد، بطوری که $l^{(0)} z_i(t) = z_i(t)$ و $l^{(l)} z_i(t) = \sum_{j=1}^N w_{ij}^{(l)} z_j(t)$ باشند که



در آن مجموعه‌ای از وزن‌ها با شرط $\sum_{j=1}^N w_{ij}^{(l)} = 1$ می‌باشد. برای همه‌ی i ها، $w_{ij}^{(l)}$ ها تنها در صورتی که مکان i, j ، l امین مرتبه از همسایگان باشند، غیر صفر می‌باشد. ماتریس نماینده از مجموعه وزن‌های $w_{ij}^{(l)}$ ، ماتریس مربعی $N \times N$ با نام $W^{(l)}$ می‌باشد که مجموع هر سطر آن یک است.

مشابه سری زمانی تک متغیره، $z_i(t)$ به عنوان یک ترکیب خطی از مشاهدات و خطاهای گذشته بیان می‌شود. در این مدل، علاوه بر وابستگی $z_i(t)$ تنها با مشاهدات و خطاهای گذشته در مکان i ، وابستگی با مکان‌های همسایه از جهات مختلف فضایی مجاز می‌باشد. این مدل به صورت زیر بیان می‌شود:

$$z_i(t) = \sum_{k=1}^p \sum_{l=0}^{\lambda_k} \phi_{kl} L^{(l)} z_i(t-k) - \sum_{k=1}^q \sum_{l=0}^{m_k} \theta_{kl} L^{(l)} \epsilon_i(t-k) + \epsilon_i(t) \quad (1)$$

که در آن p مرتبه‌ی اتورگرسیو، q مرتبه‌ی میانگین متحرک، λ_k مرتبه‌ی فضایی از k امین دوره‌ی اتورگرسیو، m_k مرتبه فضایی از k امین دوره‌ی میانگین متحرک و ϕ_{kl} و θ_{kl} پارامترها هستند و $\epsilon_i(t)$ ها خطاهای تصادفی نرمال هستند که در شرایط زیر صدق می‌کنند:

$$E[\epsilon_i(t)] = 0, \quad E[\epsilon_i(t)\epsilon_j(t+s)] = \begin{cases} \sigma^2 & i=j, s=0 \\ 0 & \text{o.w.} \end{cases}$$

این مدل به یک مدل $STARMA(p, \lambda_p, q, m_q)$ اشاره دارد.

۳ شناسایی مدل

در مرحله شناسایی فرایند، یک زیرکلاس از کلاس مدل عمومی انتخاب می‌شود که خواص نظری و نزدیک‌ترین تطبیق آن از برآورد داده‌ها را نمایش می‌دهد. برای شناسایی مدل‌های فضا-زمان، معمولاً یک ایده برای ترکیب N^2 کواریانس متقابل بین تمام جفت مکان‌های ممکن در یک شیوه‌ی مستمر با فرم‌های مرتبط با کلاس مدل بیان شده است. نتیجه ارائه‌ی یک تابع اتوکواریانس فضا-زمان، یعنی بیان کواریانس بین نقاط تاخیر در فضا و زمان به‌عنوان یک تابع است. با استفاده از عملگر تأخیر فضایی که قبلاً به آن اشاره شد، کواریانس بین l امین مرتبه همسایگی و k امین مرتبه همسایگی از یک مکان در زمان تأخیر s به فرم زیر خواهد بود:

$$\gamma_{lk}(s) = E \left\{ \sum_{i=1}^N \frac{L^{(l)} z_i(t) L^{(k)} z_i(t+s)}{N} \right\} \quad (2)$$

که در آن $\gamma_{lk}(s)$ به عنوان کواریانس فضا-زمان بین l امین و k امین مرتبه همسایگان در زمان تأخیر s است. در اینجا فرض می‌شود که $E\{z_i(t)\} = 0$.

۴ برآورد توابع اتوکواریانس و خودهمبستگی

برآورد $\Gamma(s)$ به صورت زیر می‌باشد:

$$\hat{\Gamma}(s) = \sum_{t=1}^{T-s} \frac{z(t)z'(t+s)}{T-s} \quad (3)$$



هم‌چنین برآورد تابع اتوکوریانس فضا-زمان به صورت زیر می‌باشد :

$$\hat{\gamma}_{lk}(s) = \frac{\sum_{i=1}^N \sum_{t=1}^{T-s} L^{(l)} z_i(t) L^{(k)} z_i(t+s)}{N(T-s)} \quad (۴)$$

بنابراین با یک جایگذاری ساده مشاهده می‌شود :

$$\gamma_{\circ\circ}(s) = \frac{1}{N} tr[\Gamma(s)] \quad , \quad \gamma_{1\circ}(s) = \frac{1}{N} tr[W^{(1)}\Gamma(s)]$$

که نشان دهنده‌ی متوسط کوریانس‌ها بین هر مکان و وزن اولین مرتبه همسایگان خود در تأخیر زمانی گذشته‌ی s می‌باشد. تعریف خودهمبستگی فضا-زمان یک موضوع ساده نیست، بلکه منجر به خودهمبستگی نمونه می‌شود که در تمام وقفه‌های فضایی واریانس ثابت دارد. یک فرمول مناسب برای خودهمبستگی فضا-زمان بین r امین و k امین مرتبه همسایگان در وقفه‌ی زمانی s به صورت زیر است :

$$\rho_{lk}(s) = \frac{\gamma_{lk}(s)}{[\gamma_{ll}(\circ)\gamma_{kk}(\circ)]^{\frac{1}{2}}} \quad (۵)$$

برآورد خودهمبستگی فضا-زمان نمونه به صورت زیر است :

$$\hat{\rho}_{lk}(s) = \frac{\hat{\gamma}_{lk}(s)}{[\hat{\gamma}_{ll}(\circ)\hat{\gamma}_{kk}(\circ)]^{\frac{1}{2}}} = \frac{\sum_{i=1}^N \sum_{t=1}^{T-s} L^{(l)} z_i(t) L^{(k)} z_i(t+s)}{[\sum_{i=1}^N \sum_{t=1}^T (L^{(l)} z_i(t))^2 \cdot \sum_{i=1}^N \sum_{t=1}^T (L^{(k)} z_i(t))^2]^{\frac{1}{2}}}$$

۵ برآورد پارامترهای مدل

پس از انتخاب یک مدل از خانواده مدل‌های STARMA در مرحله شناسایی و روش مدل‌سازی آن، برآورد پارامترهای آن لازم است. بهترین برآورد از Φ و Θ با وجود نقاط زیاد، برآورد ماکسیمم درستنمایی می‌باشد. از آنجا که فرمول مدل پایه خط‌هایی دارد که نوفه‌ی سفید هستند، توزیع $\varepsilon = (\varepsilon(1), \varepsilon(2), \dots, \varepsilon(T))'$ نرمال چند متغیره با میانگین صفر و ماتریس واریانس-کوریانس برابر با $\sigma^2 I_{NT}$ می‌باشد. به‌طور کلی:

$$f(\varepsilon | \Phi, \Theta, \sigma^2) = (\pi)^{-\frac{TN}{2}} |\sigma^2 I_{NT}|^{-\frac{1}{2}} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2} \varepsilon' I \varepsilon\right) = (\pi)^{-\frac{TN}{2}} (\sigma^2)^{-\frac{TN}{2}} \exp\left(-\frac{S(\Phi, \Theta)}{2\sigma^2}\right)$$

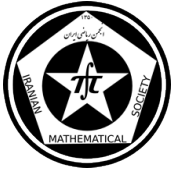
که در آن $S(\Phi, \Theta) = \varepsilon' \varepsilon = \sum_{i=1}^N \sum_{t=1}^T \varepsilon_i(t)^2$ تابع درستنمایی مشروط از Φ, Θ و σ^2 به صورت زیر است :

$$L(\Phi, \Theta, \sigma^2 | z) = (\pi)^{-\frac{TN}{2}} (\sigma^2)^{-\frac{TN}{2}} \exp\left(-\frac{S_*(\Phi, \Theta)}{2\sigma^2}\right)$$

در نتیجه برآورد ماکسیمم درستنمایی به صورت زیر خواهد بود :

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{S_*(\hat{\Phi}, \hat{\Theta})}{TN} \quad (۶)$$

که در آن $\hat{\Phi}$ و $\hat{\Theta}$ تابع $S_*(\hat{\Phi}, \hat{\Theta})$ را مینیمم می‌کنند. ماهیت غیرخطی مدل STARMA، مشکلات خاصی در تعیین نواحی اطمینان برای پارامترهای ارائه شده به وجود می‌آورد. بدین منظور از تابع درستنمایی تقریبی استفاده می‌شود که از آن برای



محاسبه تقریبی ناحیه اطمینان استفاده می‌شود. به‌طور کلی، مجموع مربعات با گسترش برآورد حداقل مربعات به‌صورت زیر می‌تواند تقریب زده شود:

$$S(\Phi, \Theta) = S(\delta) \approx S(\hat{\delta}) + (\delta - \hat{\delta})'Q(\delta - \hat{\delta})$$

که در آن $\hat{\delta} = (\hat{\Phi}, \hat{\Theta})$ و $Q = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial S(\delta)}{\partial \delta_i \partial \delta_j} \right]_{\hat{\delta}}$ که برای $i = 1, 2, \dots, K$ و $j = 1, 2, \dots, K$ برقرار است. K بعد δ و یا همان تعداد پارامترهاست، سپس $S(\delta) = \sum_{t=1}^T \varepsilon(t)\varepsilon'(t)$. بنابراین تابع مجموع مربعات توسط رابطه زیر تقریب زده می‌شود:

$$S(\delta) = S(\hat{\delta}) + (\delta - \hat{\delta})'Q(\delta - \hat{\delta}) \quad (7)$$

یک ناحیه اطمینان تقریبی $100(1 - \alpha)$ درصد برای δ برای $[\phi, \Theta]'$ از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$S(\delta) = S(\hat{\delta}) + \frac{K}{TN - K} S(\hat{\delta}) F_{K, TN-K, \alpha} \quad (8)$$

مراجع

- [۱] محمدزاده، محسن، آمار فضایی و کاربردهای آن، مرکز نشر آثار علمی دانشگاه تربیت مدرس، تهران، ۱۳۹۱.
- [2] Kamarianakis, Y., Prastacos, P., *Space-time modeling of traffic flow*, Computer Geosciences, 31(2005), pp.119-133.
- [3] Pfeifer, P. E., Deutsch, S. J., *Identification and interpretation of first-order space-time ARMA models*, Technometrics, 22 (1980), pp. 397-408.
- [4] Pfeifer, P. E., Deutsch, S. J., *A three-stage iterative procedure for space-time modeling*, Technometrics, 22 (1980), pp. 35-47.

پست الکترونیکی: roya.hadian@iaukhsh.ac.ir



مقایسه چندین آزمون در همگنی واریانس‌ها

دکتر علی‌اکبر جعفری

دانشگاه یزد

مائده بهرام‌نژاد

دانشگاه یزد

چکیده

در آنالیز واریانس یک‌طرفه، یکی از شرایط اساسی فرض برابری واریانس‌ها است. در این مقاله به آزمون همگنی واریانس‌ها برای k جامعه نرمال پرداخته می‌شود و عملکرد چندین آزمون شامل آزمون‌های هارتلی، بارتلت، لون، شومیکر و لیم و لوه را با آزمون تعمیم‌یافته مورد مقایسه قرار می‌دهیم. این مقایسه بر اساس شبیه‌سازی مونت‌کارلو می‌باشد

واژه‌های کلیدی: آزمون بارتلت، آزمون بوت‌استرپ، آزمون لون، شبیه‌سازی مونت‌کارلو، p -مقدار تعمیم‌یافته

Mathematics Subject Classification [2010]: 13D45, 39B42

۱ مقدمه

مدل آنالیز واریانس یک‌طرفه زیر را در نظر بگیرید:

$$X_{ij} = \mu_i + \varepsilon_{ij}, \quad i = 1, 2, \dots, k, \quad j = 1, 2, \dots, n_i, \quad (1)$$

که ε_{ij} ها دوه‌دو مستقل و دارای توزیع $N(0, \sigma_i^2)$ هستند. بنابراین X_{ij} دارای توزیع نرمال با میانگین μ_i و واریانس σ_i^2 است. یک مساله اساسی در آنالیز واریانس یک‌طرفه، فرض برابری واریانس‌ها است چون اگر این فرض برقرار نباشد از آزمون F نمی‌توان استفاده کرد. در این مساله هدف انجام آزمون فرض‌های زیر است:

$$H_0: \sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \dots = \sigma_k^2 \quad \text{vs.} \quad H_1: \text{حداقل یکی از } \sigma_i^2 \text{ها متفاوت باشد} \quad (2)$$

فرض صفر به همگنی واریانس شهرت دارد و در بسیاری از برنامه‌های کاربردی مورد توجه است. همچنین، در حال حاضر به‌طور فزاینده‌ای برای تعیین یکنواختی در کنترل کیفیت، زیست‌شناسی، سیستم‌های تولید محصولات کشاورزی و یا حتی در گسترش روش‌های آموزشی استفاده می‌شود [۳].

برای انجام این آزمون فرض روش‌های متعددی ارائه شده است. یکی از مهم‌ترین روش‌ها آزمون بارتلت [۱] است که براساس آماره نسبت درست‌نمایی عمل می‌کند. [۵] آماره F_{\max} را پیشنهاد کرد که نسبت بزرگترین واریانس به کوچکترین واریانس نمونه است. [۲] نشان داد خطای نوع اول آزمون‌های بارتلت، کوکران و هارتلی زمانی که فرض نرمال بودن کاهش یابد بیشتر از سطح اسمی است. همچنین یک روش جایگزین در مطالعات خود برای آزمون برابری واریانس در چندین جامعه ارائه کرد. [۶] یک روش بر اساس $ANOVA$ با استفاده از قدرمطلق اختلاف مشاهدات با میانگین‌ها ارائه کرد. [۴] آزمون لون اصلاح‌شده را با استفاده از میانه بجای میانگین نمونه‌ها ارائه کرد. [۸] یک آزمون با استفاده از روش p -مقدار تعمیم‌یافته ارائه داد و آن را با آزمون بارتلت با استفاده از شبیه‌سازی مونت‌کارلو مقایسه کرد و نشان داد که روش مناسبی است. [۷] چندین آزمون بوت‌استرپ و [۹] براساس برآورد گشتاور چهارم یک آزمون مجانبی ارائه کرد.



۲ مروری بر چند آزمون

در این بخش چند آزمون را برای انجام بررسی فرض برابری واریانس‌ها ارائه می‌شود. در اینجا فرض کنید که \bar{X}_i و S_i^2 به ترتیب میانگین و واریانس i امین نمونه هستند. همچنین مقادیر مشاهده شده \bar{X}_i و S_i^2 با \bar{x}_i و s_i^2 نمایش داده می‌شوند.

۱.۲ آزمون هارتلی

آزمون هارتلی به عنوان آزمون F_{\max} یا F_{\max} هارتلی شناخته شده که برای تجزیه و تحلیل واریانس گروه‌های مختلف استفاده می‌شود. آماره آزمون، آزمون هارتلی به صورت زیر است:

$$F_{\max} = \frac{\max S_i^2}{\min S_i^2},$$

در صورتی که حاصل این نسبت تقریباً برابر یک شود فرض همگنی واریانس‌ها برقرار است در غیر اینصورت حاصل نسبت با مقادیر بحرانی جدول هارتلی مقایسه می‌شود، اگر نسبت محاسبه شده بزرگتر یا مساوی مقدار بحرانی جدول باشد فرض برابری واریانس‌ها رد می‌شود. برای آزمون هارتلی یک جدول از نقاط بحرانی منحصربه‌فرد وجود دارد.

۲.۲ آزمون لون

لون آزمون همگنی واریانس را برای متغیرهای مقیاس $e_{ij} = |X_{ij} - \bar{X}_i|$ پیشنهاد کرد، که همان آزمون F است با این تفاوت که بجای X_{ij} از e_{ij} استفاده کرده است. آماره آزمون، آزمون لون به صورت زیر است:

$$L_{ts} = \frac{\frac{1}{k-1} \sum_{i=1}^k n_i (\bar{e}_{i.} - \bar{e}_{..})^2}{\frac{1}{(n-k)} \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{n_i} n_i (e_{ij} - \bar{e}_{i.})^2},$$

که $\bar{e}_{..} = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{n_i} e_{ij} / n$ و $\bar{e}_{i.} = \sum_{j=1}^{n_i} e_{ij} / n_i$ است. آزمون لون دارای توزیع تقریبی F با $k-1$ و $n-k$ درجه آزادی است، بنابراین اگر L_{ts} بیشتر از چندک $(1-\alpha) \cdot 100$ درصد از توزیع F با $k-1$ و $n-k$ درجه آزادی باشد فرض برابری واریانس‌ها رد می‌شود.

۳.۲ آزمون بارتلت

این آزمون توسط بارتلت [۱] معرفی شد که آماره آزمون آن به صورت زیر است:

$$B = \frac{M}{1+C},$$

که $M = (n-k) \log S_a^2 - \sum_{i=1}^k (n_i-1) \log S_i^2$ و $S_a^2 = \frac{\sum_{i=1}^k (n_i-1) S_i^2}{n-k}$ و $C = \frac{1}{3(k-1)} \left(\sum_{i=1}^k \frac{1}{n_i-1} - \frac{1}{n-k} \right)$ است. بنابراین زمانی که B بزرگتر از صدک $(1-\alpha) \cdot 100$ درصد از توزیع کی-دو با $k-1$ باشد فرض برابری واریانس‌ها رد می‌شود.



۴.۲ آزمون شومیکر

این آزمون توسط شومیکر [۹] معرفی شد که آماره آزمون آن به صورت زیر است:

$$S_{ts} = \sum_{i=1}^k \frac{(\ln s_i^2 - \overline{\ln s^2})^2}{\widehat{\text{var}}(\ln s_i^2)},$$

که $h_i = \frac{k}{\sum_{i=1}^k 1/n_i}$ ، $\widehat{\sigma}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k (n_i - 1) s_i^2$ ، $\widehat{\text{var}}(\ln s_i^2) = \frac{1}{h_i} \left[\frac{\widehat{\mu}_4'}{\widehat{\sigma}^2} - \frac{(h_i - 3)}{(h_i - 1)} \right]$ ، $\overline{\ln s^2} = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \ln s_i^2$ و

$\widehat{\mu}_4' = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{n_i} (x_{ij} - \bar{x}_i)^4$ فرض H_0 رد می‌شود اگر S_{ts} بیش از صدک $(1 - \alpha) \cdot 100$ درصد از توزیع کی-دو با $k - 1$ درجه آزادی باشد.

۵.۲ آزمون لیم و لوه

لیم و لوه [۷] چندین آزمون بوت‌استرپ و غیربوت‌استرپ را برای ناهمگنی واریانس‌ها مقایسه کردند. نسخه بوت‌استرپ آزمون لون به دلیل برتری از لحاظ توان و نیرومندی خطای نوع اول توصیه شده است. الگوریتم برای محاسبه آزمون لیم و لوه به صورت زیر است:

(۱) محاسبه آماره آزمون از داده‌های x_{ij} .

(۲) مقداردهی اولیه $l = 0$.

(۳) محاسبه باقیمانده $e_{ij} = x_{ij} - \widehat{\mu}_i$ که $\widehat{\mu}_i$ میانه گروه i ام است.

(۴) انتخاب n نقطه از $\bar{R} = \{x_{ij} - \widehat{\mu}_i, i = 1, \dots, k, j = 1, \dots, n_i\}$ که آن‌ها را با e_{ij}^* نشان می‌دهند.

(۵) اگر اندازه نمونه n_i از i امین گروه کمتر از 10 باشد آن‌گاه هموارسازی مشاهدات بوت‌استرپ با قرار دادن x_{ij}^*

$(e_{ij}^* + qU)^{1/5}$ انجام می‌شود، که $q = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{n_i} (x_{ij} - \bar{x}_i)^2$ و U یک متغیر تصادفی یکنواخت روی $(-\frac{1}{q}, \frac{1}{q})$

است، در غیر این صورت $x_{ij}^* = e_{ij}^*$.

(۶) مقدار آماره آزمون L_{ts}^* را بر اساس نمونه‌های x_{ij}^* محاسبه می‌شود. اگر $L_{ts}^* > L_{ts}$ آنگاه $l = l + 1$.

(۷) مرتبه گام‌های ۴، ۵ و ۶ تکرار شوند.

(۸) p -مقدار بوت‌استرپ l/B است. آ فرض صفر رد می‌شود اگر l/B کمتر از α باشد.

۶.۲ آزمون p -مقدار تعمیم یافته

ژو و لی [۱۰] کمیت محوری تعمیم یافته برای $\ln \sigma_i^2$ را به صورت زیر ارائه کردند:

$$R_{\ln \sigma_i^2} = \ln \frac{s_i^2}{S_i^2} \sigma_i^2 = \ln \frac{(n_i - 1) s_i^2}{U_i} = \ln((n_i - 1) s_i^2) - \ln U_i,$$



که $U_i = \frac{(n_i-1)S_i^2}{\sigma_i^2}$ دارای توزیع کی-دو با $n_i - 1$ درجه آزادی است و U_i ها دوه‌دو مستقل هستند. با استفاده از این کمیت محوری، ليو و ژو [۸] یک مقدار- p تعمیم‌یافته برای برابری واریانس‌ها به صورت زیر ارائه کرد:

$$p(\bar{x}, s^2) = P\left(\sum_{i=1}^k \frac{(\log U_i - E(\log U_i))^2}{Var(\log U_i)} - \frac{1}{\sum_{j=1}^k \frac{1}{Var(\log U_j)}} \left(\sum_{i=1}^k \frac{\log U_i - E(\log U_i)}{Var(\log U_i)}\right)^2\right) \\ \geq \sum_{i=1}^k \frac{(\log((n_i-1)s_i^2) - E(\log U_i))^2}{Var(\log U_i)} - \frac{\left(\sum_{i=1}^k \frac{\log((n_i-1)s_i^2) - E(\log U_i)}{Var(\log U_i)}\right)^2}{\sum_{j=1}^k \frac{1}{Var(\log U_j)}}$$

که $Var(\log U_i) = E((\log U_i)^2) - (E(\log U_i))^2$ و

$$E(\log U_i) = \int_0^{\infty} \ln x \frac{1}{\Gamma(\frac{n_i-1}{\nu})} x^{\frac{n_i-2}{\nu}} e^{-\frac{x}{\nu}} dx,$$

$$E((\log U_i)^2) = \int_0^{\infty} (\ln x)^2 \frac{1}{\Gamma(\frac{n_i-1}{\nu})} x^{\frac{n_i-2}{\nu}} e^{-\frac{x}{\nu}} dx.$$

فرض صفر زمانی که $p(\bar{x}, s^2)$ کمتر از سطح معنی دار α باشد رد می‌شود.

مراجع

- [1] M. S. Bartlett, *Properties of sufficiency and statistical tests*, Proceedings of the Royal Society of London. Series A-Mathematical and Physical Sciences, 160.901 (1937), 268-282.
- [2] G. E. Box, *Non-normality and tests on variances*, Biometrika, (1953), 318-335.
- [3] D. D. Boos and C. Brownie, *Comparing variances and other measures of dispersion*, Statistical Science, (2004), 571-578.
- [4] M. B. Brown and A. B. Forsythe, *Robust tests for the equality of variances* Journal of the American Statistical Association, 69.346 (1974), 364-367.
- [5] H. O. Hartley, *The maximum F-ratio as a short-cut test for heterogeneity of variance*, Biometrika, (1950), 308-312.
- [6] H. Levene, *Robust tests for equality of variances*, In contributions to Probability and Statistics: Essays in Honor of Harold Hotelling, ed. I. Olkin, S.G. Ghurye, W. Hoeffding, W. G. Madow and H. B. Mann, 278-292. Menlo park, CA: Stanford University Press, 1960.
- [7] T. S. Lim and W. Y. Loh, *A comparison of tests of equality of variances*, Computational Statistics and Data Analysis, 22.3 (1996), 287-301.
- [8] X. Liu and X. Xu, *A new generalized p-value approach for testing the homogeneity of variances*, Statistics and Probability Letters, 80 (2010), 1486-1491.
- [9] L. H. Shoemaker, *Fixing the F test for equal variances*, The American Statistician, 57.2 (2003), 105-114.
- [10] X. Xu and G. Li, *Fiducial inference in the pivotal family of distributions*, Science in China Series A, 49.3 (2006), 410-432.



مقایسه کلاسی از توزیع های نمایی دو متغیره با چند توزیع دو متغیره دیگر

مرضیه عمادی*
دانشگاه یزد

رسول روزگار
دانشگاه یزد

چکیده

در این مقاله کلاسی از توزیع های نمایی دو متغیره را معرفی کرده و برخی از ویژگی های آن را بیان می کنیم. در بخش کاربرد این توزیع را با چند توزیع نمایی دو متغیره دیگر مقایسه می کنیم. برای نشان دادن برتری این توزیع نسبت به توزیع های مورد نظر این توزیع ها را به مجموعه ای از داده ها برازش داده و با معیارهای $-2\text{Log}L$ و AIC و $AICc$ و BIC با هم مقایسه می کنیم.

واژه های کلیدی: توزیع نمایی دو متغیره، توزیع نمایی تعمیم یافته دو متغیره بلاک و باسو، توزیع نمایی تعمیم یافته دو متغیره، توزیع نمایی محدود خطی دو متغیره، برآورد حداکثر درستنمایی

Mathematics Subject Classification [2010]: 13D45, 39B42

۱ مقدمه

توزیع نمایی یک متغیره در بین محققینی که در زمینه قابلیت اعتماد، آزمون طول عمر و تحلیل بقا کار می کنند معروف است. وقتی که دو متغیره یا بیشتر از دو متغیره بر سیستم موثر باشند در بیشتر موارد تحلیل فرض بر این است که متغیره ها به طور آماری مستقل هستند، هر چند فرض استقلال در عمل برقرار نیست. در نتیجه چند مدل دو متغیره در پیشینه تولید می شود. جزئیات به روز شده بررسی توزیع های دو متغیره و روش های ساخت آن ها همراه با کاربردها در کتابی که توسط بالاکریشن و لای [۲۰۰۹] تالیف شده وجود دارد. چنین توزیع هایی انتخاب های مهمی برای مدل بندی توام متغیره های نامنفی مانند طول عمر، زمان تعمیر تجهیزات، سرعت باد و ارتفاع موج است. برخی از معروف ترین توزیع های نمایی دو متغیره آن هایی هستند که به وسیله گامبل [۱۹۶۰]، فرند [۱۹۶۱]، مارشال و الکین [۱۹۶۷]، بلاک و باسو [۱۹۷۴] معرفی شده اند. در این مقاله کلاسی از توزیع های نمایی دو متغیره را معرفی کرده و برخی از ویژگی های آن را بیان می کنیم. در بخش کاربرد این توزیع با چند توزیع نمایی دو متغیره دیگر مقایسه می شود. در خاتمه این توزیع ها را به مجموعه ای از داده ها برازش داده و با معیارهای $-2\text{Log}L$ و AIC و $AICc$ و BIC با هم مقایسه می کنیم.

۲ توزیع نمایی دو متغیره

بردار تصادفی غیر منفی (X, Y) با تابع بقا زیر را در نظر بگیرید:

$$F(x, y) = P(X > x, Y > y), \quad x \geq 0, \quad y \geq 0.$$

* سخنران



(X, Y) را دارای توزیع دو متغیره معین D گوئیم اگر متغیرهای تصادفی حاشیه ای X و Y دارای توزیع تک متغیره D باشد. $F_Y(\cdot), F_X(\cdot)$ به ترتیب تابع توزیع X, Y است و تعریف می کنیم:

$$Y = X^\alpha Z, \quad 0 < \alpha < 1, \quad (1)$$

که Z متغیر تصادفی نامنفی مستقل از X است. رابطه ۱ در این توزیع برقرار است. برای این که (X, Y) دارای توزیع نمایی دو متغیره باشد وقتی که متغیرهای تصادفی حاشیه ای از طریق رابطه ۱ باهم ارتباط دارند ما باید توزیع Z رامشخص کنیم. تابع بقا توام X و Y به صورت زیر به دست می آید:

$$\begin{aligned} \bar{F}(x, y) &= P(X > x, Y > y) \\ &= \int_x^\infty p[Y > y | X = u] dF_x(u) \\ &= \int_x^\infty p[X^\alpha Z > y | X = u] dF_x(u) \\ &= - \int_x^\infty \bar{F}_z\left(\frac{y}{u^\alpha}\right) d\bar{F}_x(u) \end{aligned}$$

برای سادگی به وسیله انتگرال گیری جز به جز داریم:

$$\bar{F}(x, y) = - \int_0^{\frac{y}{x^\alpha}} \bar{F}_x\left(\left(\frac{y}{z}\right)^{\frac{1}{\alpha}}\right) d\bar{F}_z(z) + \bar{F}_x(x) \bar{F}_z\left(\left(\frac{y}{x^\alpha}\right)\right) \quad (2)$$

اگر توابع چگالی X و Y وجود داشته باشد آن گاه تابع چگالی احتمال توام به صورت زیر بیان می شود:

$$f(x, y) = f_X(x) f_Z\left(\frac{y}{x^\alpha}\right) \frac{1}{x^\alpha}, \quad x > 0, \quad y > 0. \quad (3)$$

تابع چگالی نمایی دو متغیره به صورت زیر تعریف می شود:

$$f(x, y) = (\beta \lambda^{1-\alpha} x^{-\alpha}) \exp(-\lambda x) f_V\left(\frac{\beta y}{(x\lambda)^\alpha}\right). \quad (4)$$

که متغیرهای تصادفی X و Y به ترتیب دارای توزیع نمایی با پارامترهای λ و β هستند. و V به صورت $V = U^{-\alpha}$ تعریف شده است و دارای تابع چگالی احتمال زیر است:

$$f_V(v; \alpha) = \frac{1}{\Pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\Gamma(k\alpha)}{\Gamma(k)} (-v)^{k-1} \sin(k\Pi\alpha), \quad v > 0. \quad (5)$$

توابع چگالی احتمال شرطی به صورت زیر تعریف می شوند:

$$f(y|x) = \left(\frac{\beta}{\lambda^\alpha x^\alpha}\right) f_V\left(\frac{\beta y}{\lambda^\alpha x^\alpha}\right)$$

$$f(x|y) = (\lambda^{1-\alpha} x^{-\alpha}) \exp(-\lambda x + \beta y) f_V\left(\frac{\beta y}{(x\lambda)^\alpha}\right).$$

خواص مرتبه دوم توزیع به طور خلاصه به صورت زیر بیان می شود:

$$E(X) = \lambda^{-1}, \quad E(Y) = \beta^{-1}, \quad E(XY) = (\alpha + 1)(\lambda\beta)^{-1}, \quad \text{Corr}(X, Y) = \alpha. \quad (6)$$



۳ برآورد حداکثر درستنمایی

در این بخش روش حداکثر درستنمایی را برای برآورد بردار پارامتر $\theta = (\alpha, \beta, \lambda)'$ بر اساس نمونه تصادفی $\{(x_i, y_i), i = 1, 2, \dots, n\}$ از نمایی دو متغیره تابع چگالی احتمال رابطه ۴ بررسی می کنیم. نتایج تابع درستنمایی به صورت زیر بیان می شود:

$$L(\theta|x_i, y_i) = \prod_{i=1}^n \frac{\lambda e^{-\lambda x_i}}{\prod y_i} R(x_i, y_i) \frac{n}{\lambda} - \sum_{i=1}^n x_i = 0, \quad (7)$$

که $R(x_i, y_i) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{\Gamma(k\alpha)}{\Gamma(k)} \left(\frac{\beta y_i}{\lambda x_i}\right)^k \sin(k\Pi\alpha)$ برآورد حداکثر درستنمایی $\hat{\theta} = (\hat{\alpha}, \hat{\beta}, \hat{\lambda})'$ می توان به وسیله حل معادلات درستنمایی زیر به دست آورد:

$$\sum_{i=1}^n \frac{R_{\alpha}(x_i, y_i)}{R(x_i, y_i)} = 0, \quad \sum_{i=1}^n \frac{R_{\beta}(x_i, y_i)}{R(x_i, y_i)} = 0, \quad \frac{n}{\lambda} - \sum_{i=1}^n x_i = 0, \quad (8)$$

$$R_{\alpha}(x_i, y_i) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{\Gamma(k\alpha)}{\Gamma(k)} k \left(\frac{\beta y_i}{\lambda x_i}\right)^k [\psi(k\alpha) - \log(\lambda x_i)] \sin(k\Pi\alpha) + \Pi \cos(k\Pi\alpha)$$

$$R_{\beta}(x_i, y_i) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{\Gamma(k\alpha)}{\Gamma(k)} k \beta^{k-1} \left(\frac{y_i}{\lambda x_i}\right)^k \sin(k\Pi\alpha)$$

که $\Psi(\cdot)$ تابع دای گاما به صورت $\Psi(k) = \frac{d}{dk} \ln \Gamma(k) = \frac{\Gamma'(k)}{\Gamma(k)}$ تعریف شده است. معادلات درستنمایی برحسب سری های نامتناهی است و ما احتیاج داریم که آن ها را بر حسب عدد متناهی مناسب قطع کنیم. سری رادر N قطع می کنیم و آن را به صورت زیر می نویسیم:

$$R^N(x_i, y_i) = \sum_{k=1}^N (-1)^{k-1} \frac{\Gamma(k\alpha)}{\Gamma(k)} \left(\frac{\beta y_i}{\lambda x_i}\right)^k \sin(k\Pi\alpha)$$

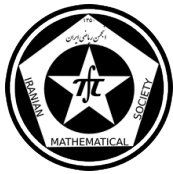
با انتخاب N به این صورت که، $|R^N(x_i, y_i) - R^{N+1}(x_i, y_i)| < \delta$ ، مقدار δ از پیش تعیین شده است. ما $\delta = 10^{-15}$ انتخاب می کنیم. حال ویژگی های مجانبی برآورد حداکثر درستنمایی را خلاصه می کنیم. تحت شرایط نظم وقتی $\sqrt{n}(\hat{\theta} - \theta) \rightarrow N(0, I_{\theta}^{-1})$ ، $n \rightarrow \infty$

$$I_{\theta} = -E\left(\frac{\partial^2 \log L}{\partial \theta \partial \theta'}\right) = \begin{bmatrix} I_{11} & I_{12} & I_{13} \\ I_{21} & I_{22} & I_{23} \\ I_{31} & I_{32} & I_{33} \end{bmatrix}$$

که اعضای ماتریس به صورت زیر به دست می آید:

$$I_{11} = -E\left(\frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} \log L\right); \quad I_{12} = I_{21} = -E\left(\frac{\partial^2}{\partial \alpha \partial \beta} \log L\right);$$

$$I_{13} = I_{31} = -E\left(\frac{\partial^2}{\partial \alpha \partial \lambda} \log L\right); \quad I_{22} = -E\left(\frac{\partial^2}{\partial \beta^2} \log L\right);$$



۴ کاربرد

در این بخش توزیع نمایی دو متغیره و توزیع نمایی تعمیم یافته دو متغیره بلاک و باسو $BBGE$ [۶]، توزیع نمایی تعمیم یافته BGE [۶]، توزیع نمایی محدود خطی دو متغیره $BALE$ [۴] را به مجموعه داده های موجود در [۳] برازش داده ایم. جدول ۱ مقادیر MLE ، $-2LogL$ ، AIC ، $AICc$ ، BIC را برای مدل های برازش یافته نشان می دهد. با توجه به مقادیر داده شده در جدول ۱ توزیع نمایی دو متغیره معرفی شده از توزیع های دیگر بهتر است.

جدول ۱: $MLEs$ ، $-2LogL$ ، AIC ، $AICc$ ، BIC .

BIC	AICc	AIC	$-2LogL$	MLE	Dist
۵۵۸،۵۹۱۶	۵۵۴،۱۰۱	۵۵۳،۳۷۸۵	۵۴۷،۳۷۸۵	$\hat{\alpha} = ۰،۵۹۴۲$ ، $\hat{\beta} = ۰،۰۸۴۵$ ، $\hat{\lambda} = ۰،۱۱۰۱$ ،	BE
۵۸۲،۶۴۰۴	۵۷۸،۰۵۹	۵۷۷،۴۲۷۴	۵۷۱،۴۲۷۴	$\hat{\alpha} = ۰،۱۱۰۱$ ، $\hat{\beta} = ۰،۰۷۴۴$ ، $\hat{\lambda} = ۰،۰۰۰۰$ ،	BALE
۶۱۳،۵۵۵۵	۶۰۸،۹۷۴۱	۶۰۸،۳۴۲۵	۶۰۲،۳۴۲۵	$\hat{\alpha} = ۰،۹۹۹۹$ ، $\hat{\beta} = ۰،۱۳۳۰$ ، $\hat{\lambda} = ۰،۰۸۶۲$ ،	BGE
۱۹۰۲،۵۸۳	۱۸۹۶،۷۱۳	۱۸۹۵،۶۳۲	۱۸۸۷،۶۳۲	$\hat{\alpha} = ۱،۰۴۷۰$ ، $\hat{\beta} = ۱،۰۰۰$ ، $\hat{\lambda} = ۲،۰۰۷۹$ ، $\hat{\theta} = ۱،۰۰۱۴$	BBBGE

مراجع

- [1] Balakrishna, N., and Shiji, K. (2014). On a class of bivariate exponential distributions. *Statistics and Probability Letters*, 85, 153-160.
- [2] Kundu, D., and Gupta, R. D. (2011). Absolute continuous bivariate generalized exponential distribution. *AStA Advances in Statistical Analysis*, 95(2), 169-185.
- [3] Jamalizadeh, A., and Kundu, D. (2013). Weighted Marshall–Olkin bivariate exponential distribution. *Statistics*, 47(5), 917-928.
- [4] Mirhosseini, S. M., Amini, M., Kundu, D., and Dolati, A. (2015). On a new absolutely continuous bivariate generalized exponential distribution. *Statistical Methods and Applications*, 24(1), 61-83.
- [5] Mohsin, M., Kazianka, H., Pilz, J., and Gebhardt, A. (2014). A new bivariate exponential distribution for modeling moderately negative dependence. *Statistical Methods and Applications*, 23(1), 123-148.
- [6] Shoaee, S., and Khorram, E. (2012). A new absolute continuous bivariate generalized exponential distribution. *Journal of Statistical Planning and Inference*, 142(7), 2203-2220.

پست الکترونیکی: memade64@yahoo.com

پست الکترونیکی: rroozegar@yazd.ac.ir



همگرایی کامل مجموع وزنی آرایه‌ای از عناصر تصادفی در فضای باناخ

ابابکر بلوچ*
دانشگاه سیستان و بلوچستان

حسن زارعی
دانشگاه سیستان و بلوچستان

چکیده

در این مقاله ابتدا عناصر تصادفی را در فضای باناخ تعریف می‌کنیم سپس مفهوم همگرایی کامل برای دنباله‌ای از متغیرهای تصادفی که اولین بار توسط اچسو و رابینس بیان شده است، را بیان می‌کنیم و در پایان همگرایی کامل را برای مجموع وزنی آرایه‌ای از عناصر تصادفی در فضای باناخ بیان و در این زمینه نتایج جدیدی که تعمیم کارهای قبلی است بدست می‌آوریم.

واژه‌های کلیدی: آرایه‌ای از عناصر تصادفی در فضای باناخ، همگرایی کامل، مجموع وزنی

Mathematics Subject Classification [2010]: 13D45, 39B42

۱ مقدمه

در این بخش تعاریف و مثالهایی از عناصر تصادفی و خواص آنها که برای مطالعه همگرایی مجموع وزنی ضروری بنظر می‌رسند را بیان و بررسی می‌کنیم.

تعریف ۱.۱. می‌گوییم F, σ - میدان است هرگاه

(الف) F تحت عمل متمم‌گیری بسته است، یعنی اگر $A \in F$ آنگاه $A^c \in F$

(ب) F تحت اجتماع شمارا بسته است، یعنی اگر A_i ها از اعضای F باشند، آنگاه $\cup_i A_i \in F$

تعریف ۲.۱. σ - میدان میدان تولید شده به وسیله مجموعه‌های باز را σ - میدان بورل می‌نامیم. هر عضو این σ -

میدان را مجموعه بورل می‌گوییم. σ - میدان بورل را با نماد B نشان می‌دهیم.

تعریف ۳.۱. اگر F, σ - میدانی از زیر مجموعه‌های Ω باشد، زوج مرتب (Ω, F) را فضای اندازه پذیر می‌گوییم.

تعریف ۴.۱. اگر X یک فضای توپولوژی خطی باشد $B(X)$ عبارت است از کوچکترین σ - میدان شامل مجموعه‌های باز

X ، یعنی $B(X)$ مجموعه زیر مجموعه های بورل X است. تابع $T: X \rightarrow Y$ را اندازه پذیر بورل می‌گوییم اگر به ازای هر

$B \in B(Y)$ داشته باشیم $T^{-1}(B) \in B(X)$.

$\{X_{nj}, j \in N, n \in N\}$ یک آرایه از عناصر تصادفی در فضای باناخ تفکیک پذیر B و $\{a_{nj}, j \in N, n \in N\}$ آرایه‌ای

از اعداد حقیقی باشد $S_n = \sum_{j=1}^{\infty} a_{nj} X_{nj}$ را در نظر می‌گیریم.

فرض کنید $\|\cdot\|$ نرم تعریف شده روی فضای خطی X باشد و $B(X)$ ، σ - میدان بورل روی X و (Ω, A, F) فضای

احتمال باشد یک عنصر تصادفی در X بصورت زیر تعریف می‌شود.

* سخنران



تعریف ۵.۱. تابع $V : \Omega \rightarrow X$ را عنصر تصادفی در فضای خطی X می‌گوییم اگر به ازای هر $B \in \mathcal{B}(X)$ $V^{-1}(B) = \{w \in \Omega : V(w) \in B\} \in \mathcal{A}$ (مرجع [۲])

تعریف ۶.۱. فرض کنید $\{X_{nj}, j \in N, n \in N\}$ یک آرایه از عناصر تصادفی در فضای باناخ تفکیک پذیر B باشد. گوییم این آرایه بطور تصادفی تحت تسلط متغیر تصادفی X است اگر ثابت D وجود داشته باشد بقسمی که برای هر $x > 0$

$$\sup_{j \in N, n \in N} P(\|X_{nj}\| > x) \leq DP(|X| > x).$$

در این حالت می‌نویسیم $\{X_{nj}, j \in N, n \in N\} < X$ (مرجع [۴])

۲ همگرایی کامل و قانون اعداد بزرگ در فضای باناخ

تعریف ۱.۲. دنباله متغیرهای تصادفی $\{X_n, n \in N\}$ را همگرایی کامل به مقدار ثابت C می‌گوییم اگر برای هر $\epsilon > 0$ $\sum_{n=1}^{\infty} P(|X_n - C| > \epsilon) < \infty$ (مرجع [۴])

قضیه ۲.۲. فرض کنید $\{X_k, k \geq 1\}$ دنباله ای از متغیرهای تصادفی مستقل و هم توزیع باشد آنگاه برای $t \geq 1$ ، $E|X_k|^t < \infty$ و $EX_k = \mu$ است اگر و فقط اگر برای هر $\epsilon > 0$ داشته باشیم (مرجع [۳])

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{t-2} P\{|\sum_{k=1}^n X_k - n\mu| > n\epsilon\} < \infty.$$

قضیه ۳.۲. فرض کنید $\{X_{nj}, j \in N, n \in N\}$ یک آرایه از عناصر تصادفی که بطور سطروار مستقل است و $\{X_{nj}, j \in N, n \in N\} < X$ همچنین فرض کنید (مرجع [۴])

الف) وجود داشته باشد $\gamma > 0$ بطوریکه $\sup_{j \geq 1} |a_{nj}| = O(n^{-\gamma})$

ب) وجود داشته باشد $\alpha < \gamma$ بطوریکه $\sum_{j=1}^{\infty} |a_{nj}| = O(n^{\alpha})$

ج) حداقل برای یک $\beta \in (-1, \gamma - \alpha - 1)$ داشته باشیم $E|X|^{1+(1+\alpha+\frac{\beta}{\gamma})} < \infty$

د) $S_n \equiv \sum_{j=1}^{\infty} a_{nj} X_{nj} \rightarrow 0$

آنگاه S_n با نرخ β به صفر همگرایی کامل است یعنی برای هر $\epsilon > 0$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{\beta} P(\|S_n\| > \epsilon) < \infty.$$

لم ۴.۲. برای هر $p \geq 2$ ، یک مقدار ثابت مثبت C_p که فقط به p وابسته است، وجود دارد بقسمی که برای هر دنباله $\{X_n, n \in N\}$ از عناصر تصادفی مستقل از فضای باناخ تفکیک پذیر B که $X_n \in L^p, n \in N$ نامساوی زیر برقرار است (مرجع [۱])

$$E\|\sum_{j=1}^n X_j\|^p - E\|\sum_{j=1}^n X_j\|^2 \leq C_p \left\{ \left(\sum_{j=1}^n E\|X_j\|^2 \right)^{\frac{p}{2}} + \sum_{j=1}^n E\|X_j\|^p \right\}$$

قضیه ۵.۲. فرض کنید $\{X_{nj}, j \in N, n \in N\}$ آرایه ای از عناصر تصادفی باشد بطوریکه $\{X_{nj}, j \in N, n \in N\} < X$ و فرض کنید شرایط قضیه ۳.۲ برقرار باشند و $\beta = -1 - \alpha$ همچنین وجود داشته باشد α و $1 < \theta < \infty$ بطوریکه

$$\sum_{j=1}^{\infty} |a_{nj}|^{\theta} = O(n^{\alpha}) \quad (۱)$$



اگر $E(|X|^\theta \log(1 + |X|)) < \infty$ ، آنگاه برای به ازای هر $\epsilon > 0$ داریم

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^\beta P(\|S_n\| > \epsilon) < \infty. \quad (2)$$

اثبات. طبق قضیه ۳.۲ و رابطه ۱ بدون اینکه به کلیت خللی وارد شود می توان فرض کرد

$$\sup_{j \geq 1} |a_{nj}| = n^{-\gamma} \quad (3)$$

$$\sum_{j=1}^{\infty} |a_{nj}|^\theta = n^\alpha \quad (4)$$

فرض کنید $I(\|a_{nj} X_{nj}\| \leq 1)$ که $Y_{nj} = a_{nj} X_{nj}$ و $j \in N, n \in N$ تابع مشخصه A باشد. آنگاه

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} n^\beta P(\|S_n\| > \epsilon) &\leq \sum_{n=1}^{\infty} n^\beta \sum_{k=1}^{\infty} P(\|a_{nk} X_{nk}\| > 1) \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} n^\beta P(\|\sum_{k=1}^{\infty} Y_{nk}\| > \epsilon) := I_1 + I_2 \end{aligned}$$

بنابراین برای اثبات ۲ کافی است نشان دهیم که $I_1 < \infty$ و $I_2 < \infty$. چون $\alpha + \beta = -1$ و $\theta > 0$ ، با استفاده از لم ۴.۲ و روابط ۳ و ۴ داریم

$$\begin{aligned} I_1 &\leq \sum_{n=1}^{\infty} n^\beta \sum_{k=1}^{\infty} E \|a_{nk} X_{nk}\|^\theta I(\|a_{nk} X_{nk}\| > 1) \\ &\leq C \sum_{n=1}^{\infty} n^\beta \sum_{k=1}^{\infty} E(|a_{nk} X|)^\theta I(|X| > |a_{nk}|^{-1}) \leq C \sum_{n=1}^{\infty} n^{-1} E(|X|)^\theta I(|X| > n^\gamma) \\ &= C \sum_{n=1}^{\infty} n^{-1} \sum_{j=n}^{\infty} E(|X|)^\theta I(j^\gamma < |X| \leq (1+j)^\gamma) \\ &= C \sum_{j=1}^{\infty} E(|X|)^\theta I(j^\gamma < |X| \leq (1+j)^\gamma) \sum_{n=1}^j n^{-1} \\ &\leq C \sum_{j=n}^{\infty} \text{Log } j E(|X|)^\theta I(j^\gamma < |X| \leq (1+j)^\gamma) \\ &\leq CE(|X|)^\theta \text{Log}(1 + |X|) < \infty. \end{aligned} \quad (5)$$

□

فرض کنید $I_{nk} = \{i : (nk)^\gamma \leq |a_{nj}|^{-1} < (n(k+1))^\gamma\}$ ، $n \in N, k \in N$. پس به ازای هر $n \in N$ ، $\cup_{k=1}^{\infty} I_{nk} = N$ ،
ترا طوری انتخاب می کنیم که $1 < t < \theta$. با استفاده نامساوی مارکوف و لم ۴.۲ و رابطه ۵ داریم

$$\begin{aligned} I_2 &\leq \sum_{n=1}^{\infty} n^\beta \sum_{k=1}^{\infty} E \|Y_{nk}\|^t \\ &\leq C \sum_{n=1}^{\infty} n^\beta \sum_{k=1}^{\infty} E\{(|a_{nk} X|)^t I(|X| \leq |a_{nk}|^{-1}) + p(|X| > |a_{nk}|^{-1})\} \\ &\leq C + C \sum_{n=1}^{\infty} n^\beta \sum_{k=1}^{\infty} (I_{nk})(nk)^{-\gamma t} E(|X|)^t I(|X| < (n(k+1))^\gamma) \\ &\leq C + C \sum_{n=1}^{\infty} n^\beta \sum_{k=1}^{\infty} (I_{nk})(nk)^{-\gamma t} \sum_{i=1}^{n(k+1)} E(|X|)^t I((i-1)^\gamma \leq |X| < i^\gamma) \\ &\leq C + C \sum_{n=1}^{\infty} n^\beta \sum_{k=1}^{\infty} (I_{nk})(nk)^{-\gamma t} \sum_{i=1}^n E(|X|)^t I((i-1)^\gamma \leq |X| < i^\gamma) \\ &\quad + C \sum_{n=1}^{\infty} n^\beta \sum_{k=2}^{\infty} (I_{nk})(nk)^{-\gamma t} \sum_{i=2n+1}^{n(k+1)} E(|X|)^t I((i-1)^\gamma \leq |X| < i^\gamma) \\ &:= C + I_3 + I_4. \end{aligned} \quad (6)$$

چونکه $t < \theta$ و $\gamma > 0$ برای هر $k < j$ داریم $\gamma(t-\theta) < k\gamma(t-\theta)$ در آن $k, j \in N$ است. با استفاده از ۴ داریم



$$\begin{aligned} n^\alpha \sum_{i=1}^{\infty} |a_{nj}|^\theta &= \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{i \in I_{nk}} |a_{nj}|^\theta \geq \sum_{k=1}^{\infty} I_{nk} (n(k+1))^{-\gamma t} \\ &\geq \sum_{k=j}^{\infty} I_{nk} (n(k+1))^{-\gamma t} (n(j+1))^{\gamma(t-\theta)} > 2^{-\gamma t} \sum_{k=j}^{\infty} I_{nk} (nk)^{-\gamma t} (nj)^{\gamma(t-\theta)} \end{aligned}$$

در نتیجه

$$\sum_{k=j}^{\infty} (I_{nk})(nk)^{-\gamma t} \leq C n^{\alpha-\gamma(t-\theta)} j^{-\gamma(t-\theta)} \quad \text{for all } j \in N. \quad (7)$$

با استفاده از رابطه ۷ بدست می آوریم

$$\begin{aligned} I_{\Psi} &\leq C \sum_{n=1}^{\infty} n^\beta n^{\alpha-\gamma(t-\theta)} \sum_{i=1}^{\lfloor n \rfloor} E|X|^t I((i-1)^\gamma \leq |X| < i^\gamma) \\ &\leq C \sum_{n=1}^{\infty} n^{-1-\gamma(t-\theta)} + C \sum_{n=1}^{\infty} n^{-1-\gamma(t-\theta)} \sum_{i=2}^{\lfloor n \rfloor} E|X|^t I((i-1)^\gamma \leq |X| < i^\gamma) \\ &\leq C + C \sum_{i=2}^{\infty} E|X|^t I((i-1)^\gamma \leq |X| < i^\gamma) \sum_{n=\lfloor \frac{i}{\Psi} \rfloor}^{\infty} (n)^{-1-\gamma(t-\theta)} \\ &\leq C + C \sum_{i=2}^{\infty} i^{-\gamma(t-\theta)} E|X|^t I((i-1)^\gamma \leq |X| < i^\gamma) \\ &\leq C + C \sum_{i=2}^{\infty} i^{\gamma\theta} E I((i-1)^\gamma \leq |X| < i^\gamma) \leq C + C E|X|^\theta < \infty. \end{aligned}$$

و

$$\begin{aligned} I_{\Psi} &\leq C \sum_{n=1}^{\infty} n^\beta \sum_{i=\lfloor n+1 \rfloor}^{\infty} \sum_{k=\lfloor \frac{i}{n-1} \rfloor}^{\infty} (I_{nk})(nk)^{-\gamma t} E|X|^t I((i-1)^\gamma \leq |X| < i^\gamma) \\ &\leq C \sum_{n=1}^{\infty} n^\beta \sum_{i=\lfloor n+1 \rfloor}^{\infty} (n)^{\alpha-\gamma(t-\theta)} \left(\frac{i}{n}\right)^{-\gamma(t-\theta)} E|X|^t I((i-1)^\gamma \leq |X| < i^\gamma) \\ &\leq C \sum_{i=2}^{\infty} i^{-\gamma(t-\theta)} E|X|^t I((i-1)^\gamma \leq |X| < i^\gamma) \sum_{n=1}^{\lfloor \frac{i}{\Psi} \rfloor} n^{-1} \\ &\leq C \sum_{i=2}^{\infty} i^{-\gamma(t-\theta)} \log i E|X|^t I((i-1)^\gamma \leq |X| < i^\gamma) \\ &\leq C E(|X|^\theta \log(1+|X|)) < \infty \end{aligned}$$

بنابراین رابطه ۲ برقرار و اثبات تمام است.

مراجع

- [1] A. de Acosta, *Inequalities for B-valued random vectors with applications to the strong law of large numbers*, Ann. Probab.,9:157-161, 1981.
- [2] M. Ledoux and M. Talagrand, *Propability in Banach spaces*, Springer, Berlin, 1991.
- [3] L.E. Baum and M. Kat, *Convergence rates in law of large numbers*. Trans. Am. Math. Soc., 120(1):108-123 , 1965.
- [4] T.-C.Hu, D. Li, A. Rosalsky, and A. Volodin, *On the rate of Complete convergence for weighted sumes of arrays of Banach-space-valued random elements*, Theory Probab. Appl., 47(3):455-468, 2002.

پست الکترونیکی: ababakrlastnamebalouch@yahoo.com

سایر زمینہا



ارائه روش مبتنی بر بسط برای حل معادله ی انتگرال کوشی نوع اول

رضا نوین*

وحید معنوی

فرشاد برمکی

دانشگاه آزاد اسلامی تهران مرکز

دانشگاه آزاد اسلامی سما ارومیه

دانشکده فنی و حرفه ای سما واحد ارومیه

چکیده

در این مقاله هسته ی معادله ی انتگرال کوشی نوع اول به وسیله ی چند جمله های چبیشف نوع دوم بسط داده می شود همچنین تابع مجهول نیز با استفاده خاصیت تعامد چند جمله ای های چبیشف حاصل می شود. تابع مجهول زیر علامت انتگرال نیز به وسیله ی چند جمله ای های چبیشف نوع اول بسط داده شده و ضرایب مجهول نیز بدست آورده می شود مزیت این روش در سادگی محاسبات در بدست آوردن ضرایب مجهول مساله است. این روش با ارائه مثالی پیاده سازی خواهد شد.

واژه های کلیدی: معادلات انتگرال کوشی، چند جمله ای چبیشف، روش گالرکین

Mathematics Subject Classification [2010]: E9945

۱ مقدمه

برای معادله ی انتگرال منفرد کوشی به فرم:

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{g(t)dt}{t-x} = f(x), \quad -1 < x < 1 \quad (1)$$

در مرجع [۲]، روش تحلیلی بحث شده است.

فرض کنیم جواب کراندار معادله ی (۱) به صورت زیر باشد

$$g(x) = \frac{1}{\pi} \sqrt{1-t^2} \int_{-1}^1 \frac{f(t)}{\sqrt{1-x^2}(x-t)} dt, \quad (2)$$

که در آن

$$\int_{-1}^1 \frac{f(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt = 0. \quad (3)$$

در این مقاله هر دو قسمت، هسته و تابع مجهول، معادله ی انتگرال منفرد کوشی به وسیله چند جمله ای های چبیشف بسط داده می شود و تابع مجهول نیز به وسیله ی روش گالرکین محاسبه خواهد شد.

*سخنران



۲ نتایج اصلی

۱.۲ بسط تابع مجهول وهسته

با توجه به خاصیت تعامد چند جمله ای های چیشف نوع دوم داریم [۱]:

$$\int_{-1}^1 \sqrt{1-t^2} U_i(t) U_j(t) dt = \frac{\pi}{4} \delta_{ij}, \quad i, j = 0, 1, \dots, \quad (4)$$

که در آن δ_{ij} ، دلتای کرونکر می باشد همچنین:

$$\int_{-1}^1 \frac{\sqrt{1-t^2}}{x-t} U_i(t) dt = \pi T_{i+1}(x) \quad (5)$$

که در آن $T_i(x)$ چند جمله ای های چیشف نوع اول هستند. برای هسته و تابع مجهول معادله ی (۱) داریم:

$$\frac{1}{t-x} = k_0(x) U_0(t) + k_1(x) U_1(t) + \dots + k_n(x) U_n(t) + \dots, \quad (6)$$

$$g(t) = \sqrt{1-t^2} (c_0 U_0(t) + c_1 U_1(t) + \dots + c_n U_n(t) + \dots) \quad (7)$$

که در آن $U_i(x)$ چند جمله ای های چیشف نوع دوم و $K_i(x)$ نیز یک تابع مجهول است. در نتیجه خواهیم داشت:

$$\int_{-1}^1 \frac{U_i(t) \sqrt{1-t^2}}{t-x} = \sum_{j=0}^{\infty} \int_{-1}^1 \sqrt{1-t^2} U_j(t) U_i(t) dt, \quad i = 0, 1, \dots, n. \quad (8)$$

که در این صورت:

$$k_i(x) = -2 T_{i+1}(x). \quad (9)$$

$$\frac{1}{t-x} = -2 \sum_{i=0}^{\infty} T_{i+1}(x) U_i(t). \quad (10)$$

با جایگزاری عبارات (۷) و (۱۰) در (۱) و باتوجه به عبارت (۴) داریم:

$$-(c_0 T_1(x) + c_1 T_2(x) + \dots + c_n T_{n+1}(x) + \dots) = f(x) \quad (11)$$



با اعمال روش گالرکین برای معادله (۱۱) و باتوجه به این که :

$$c_i = -\frac{2}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{f(x)T_{i+1}(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx, \quad i = 0, 1, \dots \quad (12)$$

جواب تقریبی محدود برای معادله ی (۱) به صورت زیر است:

$$g_n(t) = \sqrt{1-t^2} \sum_{j=0}^n c_j U_j(t), \quad (13)$$

که در آن ضرایب مجهول c_j با استفاده از معادله ی (۱۲) قابل محاسبه است.

۳ نتایج عددی

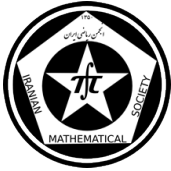
اگر تابع معلوم $f(x)$ یک چند جمله ای از درجه ی دلخواهی باشد، می توانیم به سادگی جواب دقیق آن را حساب کنیم حال فرض کنیم تابع معلوم به صورت $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$ باشد که در این صورت جواب دقیق مساله به صورت زیر است

$$g(x) = -\frac{\sqrt{1-x^2}}{(1+x^2)\sqrt{2}}$$

جدول ۱ مقایسه بین جواب واقعی و جواب تقریبی به ازای $n = 5$ و $n = 10$ بوده و بیانگر کارایی روش پیشنهادی است.

جدول ۱: خطای مطلق برای $n = 5$ و $n = 10$

$n = 10$	$n = 5$	x
0.0000000000	0.0000000000	-1
0.000000855674581	0.000000279497443	-0.9
0.00000014819442705	0.0000002606264150	-0.8
0.0000000907120711	0.0000002265817368	-0.7
0.0000001152424306	0.00000011190978	-0.6
0.0000001077421363	0.000000247428565	-0.5
0.0000001252148573	0.0000003292247387	-0.4
0.00000007903981766	0.0000002139841544	-0.3
0.0000001466607112	0.000000285484091	-0.2
0.000000283749429	0.000000261895787	-0.1
0.0000001554597368	0.000000357132205	0
0.000000283749429	0.000000261895787	0.1
0.0000001466607112	0.000000285484091	0.2
0.00000007903981766	0.0000002139841544	0.3
0.0000001252148573	0.0000003292247387	0.4
0.0000001077421363	0.000000247428565	0.5
0.0000001152424306	0.00000011190978	0.6
0.0000000907120711	0.0000002265817368	0.7
0.00000014819442705	0.0000002606264150	0.8
0.000000855674581	0.000000279497443	0.9
0.0000000000	0.0000000000	1



چهل و ششمین کنفرانس ریاضی ایران
۳-۶ شهریور ۱۳۹۴
دانشگاه یزد



ص: ۴-۴

ارائه روش مبتنی بر بسط برای حل معادله ی انتگرال کوشی نوع اول

پوستر

۴ نتیجه گیری

در این مقاله برای یافتن جواب معادلاتی به فرم (۱) روش بسط برای هسته ی منفرد کوشی و تابع مجهول پیشنهاد و پیاده سازی شد. همچنین با استفاده از روش گالرکین ضرایب مجهول نیز مشخص گردید.

مراجع

- [1] I. S. Gradshteyn, I.M.Ryzhik, *Table of Integrals, Series and Products.*, London, Academic Press, 1980.
- [2] I. K. Lifanov, L.N. Poltavskii, G.M. Vainikko, *Hypersingular singular integral equations and their applications.*, CRC Press, London, 2004.

پست الکترونیکی: reza_novin@ymail.com
پست الکترونیکی: manavivahid@yahoo.com
پست الکترونیکی: barmaki_f@yahoo.com



بررسی همگرایی تعمیمی از ثابت اویلر

محمد رضا اسفندیاری*
دانشگاه زنجان

زهرا حسنلو
دانشگاه زنجان

چکیده

در این مقاله همگرایی تعمیمی از ثابت اویلر را مورد بررسی قرار می‌دهیم، ابتدا با توجه به فرمول مجانبی استرلینگ نامساوی و کران‌های برای تابع پیسای گاوس بیان می‌کنیم، سپس با بیان رابطه تابع پیسای گاوس با تعمیم ثابت اویلر، نامساوی و کران‌های مربوط به تعمیم ثابت اویلر را نشان می‌دهیم.

واژه‌های کلیدی: تعمیم ثابت اویلر، تابع پیسای گاوس، تابع گاما، اعداد برنولی

Mathematics Subject Classification [2010]: 33E50, 11B68

۱ مقدمه

ثابت اویلر به صورت زیر تعریف می‌شود

$$\gamma := \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \log n \right) \cong 0.5772156649.$$

برای تعمیم ثابت اویلر دنباله y_n را به صورت زیر در نظر می‌گیریم

$$y_n = \frac{1}{a} + \frac{1}{a+1} + \dots + \frac{1}{a+n-1} - \log \frac{a+n-1}{a} \quad a > 0,$$

که

$$\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \gamma(a).$$

که به ازای $a = 1$ همان ثابت اویلر می‌باشد. درباره ثابت اویلر و مطالعه تعمیم‌های مختلف ثابت اویلر و نتایج مربوط به آن می‌توان به مراجع [۱] و [۲] رجوع کرد. بخش عمده مرجع [۱] درباره کران‌هایی برای $y_n - \gamma(a)$ است و نامساوی زیر را نشان داده است.

$$\frac{1}{2(a+n)-1} < y_n - \gamma(a) < \frac{1}{2(a+n)-2} \quad a > 0, \quad (1)$$

در این مقاله ما با استفاده از تابع پیسای گاوس و رابطه آن با تعمیم ثابت اویلر این نامساوی را نشان داده و در پایان برای این نامساوی کران‌های بهتری را بدست می‌آوریم و احکام زیر را اثبات می‌کنیم.

* سخنران



قضیه ۱.۱. برای $a \in (0, +\infty)$ داریم

$$\frac{1}{\Gamma(a+n) - 1} < y_n - \gamma(a) < \frac{1}{\Gamma(a+n) - 2}.$$

قضیه ۲.۱. برای $n \geq 2$ داریم

$$\frac{1}{\Gamma(a+n) - (4 - \frac{1}{1-\gamma})} < y_n - \gamma(a) < \frac{1}{\Gamma(a+n) - \frac{5}{3}}. \quad (2)$$

برای اثبات قضایای فوق ابتدا مقدمات و لم‌های مورد نیاز را بیان می‌کنیم.
تابع پیسای گاوس به صورت زیر تعریف می‌شود

$$\psi(z) = \frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)},$$

که در آن

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{x-1} dt \quad x > 0.$$

برای هر $m \geq 1$ فرمول مجانبی استرلینگ به صورت زیر بیان می‌شود

$$\log(\Gamma(x)) = \left(x - \frac{1}{2}\right) \log x - x + \frac{1}{2} \log 2\pi + \sum_{k=1}^m \frac{B_{2k}}{2k(2k-1)x^{2k-1}} - \frac{1}{2m+1} \int_0^{\infty} \frac{B_{2m+1}(t-[t])}{(t+x)^{2m+1}} dt,$$

که در آن B_k اعداد برنولی‌اند. برای اثبات و شرح فرمول مجانبی استرلینگ می‌توان به مرجع [۴] رجوع کرد.
از فرمول مجانبی استرلینگ می‌توان نتیجه گرفت

$$\psi(z) = (\log(\Gamma(s)))' = \frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)} = \log z + O\left(\frac{1}{|z|}\right).$$

در مرجع [۳] نامساوی زیر را برای تابع ψ نشان داده است.

$$\log x - \frac{1}{2x} - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{B_{2k}}{2kx^{2k}} < \psi(x) < \log x - \frac{1}{2x} - \sum_{k=1}^n \frac{B_{2k}}{2kx^{2k}}. \quad (3)$$

لم ۳.۱. برای هر $x > 0$ $\psi(x+1) - \psi(x) = \frac{1}{x}$

اثبات. با انتگرال گیری جز به جز از تابع $\Gamma(x)$ به رابطه ضربی $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ دست می‌یابیم، با گرفتن مشتق لگاریتمی از رابطه اخیر و با توجه به تعریف تابع پیسای گاوس به راحتی اثبات می‌شود. □

لم ۴.۱. قرار می‌دهیم $f_a(n) := y_n - \gamma(a)$ در این صورت داریم

$$f_a(n) = \psi(a+n) - \log(a+n-1).$$



اثبات. با توجه به لم قبل می‌توان نوشت

$$\sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{a+i} = \sum_{i=1}^{n-1} (\psi(a+1+i) - \psi(a+i)),$$

با توجه به خاصیت تلسکوپی در سری سمت راست، داریم

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{a+1} + \dots + \frac{1}{a+n-1} = \psi(a+n) - \psi(a),$$

در نتیجه با توجه به تعریف دنباله y_n می‌توان نوشت

$$y_n = \psi(a+n) - \psi(a) - \log \frac{a+n-1}{a}. \quad (۴)$$

با حد گرفتن از رابطه بالا با توجه به اینکه $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \gamma(a)$ داریم $\gamma(a) = \log(a) - \psi(a)$ بنابراین

$$\begin{aligned} y_n - \gamma(a) &= \psi(a+n) - \psi(a) - \log \frac{a+n-1}{a} - (\log(a) - \psi(a)) \\ &= \psi(a+n) - \log(a+n-1). \end{aligned}$$

□

۲ نتایج اصلی

در این قسمت قضیه های ۱.۱ و ۲.۱ که در واقع نتایج اصلی این مقاله می‌باشند را اثبات می‌کنیم.

اثبات قضیه ۱.۱. در رابطه‌ی (۳) قرار می‌دهیم $n = 1$ و با توجه به اینکه $a > 0$ و $n \geq 1$ تعریف می‌کنیم $x := a + n$ که $x > 1$ لذا داریم

$$\log x - \frac{1}{2x} - \frac{B_2}{2x^2} < \psi(x) < \log x - \frac{1}{2x} - \left(\frac{B_2}{2x^2} + \frac{B_4}{4x^4} \right),$$

با جایگذاری اعداد برنولی $B_2 = \frac{1}{6}$ و $B_4 = -\frac{1}{30}$ داریم

$$\log x - \frac{1}{2x} - \frac{1}{12x^2} < \psi(x) < \log x - \frac{1}{2x} - \frac{1}{12x^2} + \frac{1}{120x^4} \quad (۵)$$

با توجه به لم ۴.۱ صورت قضیه را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$\frac{1}{2x-1} < \psi(x) - \log(x-1) < \frac{1}{2x-2},$$

در نتیجه

$$\log(x-1) + \frac{1}{2x-1} < \psi(x) < \log(x-1) + \frac{1}{2x-2}. \quad (۶)$$



حال برای اثبات درستی کران بالا با توجه به رابطه (۶) و (۷) کافی است نشان دهیم

$$f_1(x) := \left(\log x - \frac{1}{2x} - \frac{1}{12x^2} + \frac{1}{120x^4} \right) - \left(\log(x-1) + \frac{1}{2(x-1)} \right) < 0$$

با توجه به اینکه $f_1(x)$ تابع صعودی ($\frac{d}{dx}f_1(x) > 0$) و $\lim_{x \rightarrow \infty} f_1(x) = 0$ بنابراین $f_1(x) < 0$ به طور مشابه برای اثبات درستی کران پایین قرار می‌دهیم

$$f_2(x) := \left(\log(x-1) + \frac{1}{2(x-1)} \right) - \left(\log x - \frac{1}{2x} - \frac{1}{12x^2} \right).$$

کافی است نشان دهیم $f_2(x) < 0$. نظر به اینکه $f_2(x)$ تابع صعودی و $\lim_{x \rightarrow \infty} f_2(x) = 0$ ، لذا $f_2(x) < 0$. □

اثبات قضیه ۲.۱. با توجه به اینکه $n \geq 1$ و $a > 0$ قرار می‌دهیم $x := a + n$ که $x > 1$ حال با توجه به لم ۴.۱ صورت قضیه (حکم مساله) را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$\frac{1}{2x - \alpha} < \psi(x) - \log(x-1) < \frac{1}{2x - \beta},$$

با قرینه و معکوس کردن رابطه‌ی بالا داریم

$$-2x + \alpha < \frac{-1}{\psi(x) - \log(x-1)} < -2x + \beta,$$

در نتیجه

$$\alpha < 2x - \frac{1}{\psi(x) - \log(x-1)} < \beta.$$

قرار می‌دهیم $h(x) := 2x - \frac{1}{\psi(x) - \log(x-1)}$ تابع $h(x)$ برای $x \geq 2$ ($a > 0, n \geq 2$) به طور اکید صعودی است. بنابراین

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} h(x) < h(x) < \lim_{x \rightarrow \infty} h(x),$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} h(x) = 4 - \frac{1}{1-\gamma} \simeq 1.635, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} h(x) = \frac{5}{3} \simeq 1.667$$

بنابراین قرار می‌دهیم $\alpha = \frac{4}{5} \simeq 1.635$ و $\beta = 4 - \frac{1}{1-\gamma} \simeq 1.667$ که نتیجه مطلوب بدست می‌آید. □

مراجع

- [1] A. Sîntămărian, *A generalization of Euler's constant*, Editura Mediamira Cluj-Napoca, (2008).
- [2] J. C. Lagarias, *Euler's constant: Euler's work and modern developments*. Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.) 50 (2013), no. 4, 527–628.
- [3] C. Mortici, *Accurate estimates of the gamma function involving the PSI function*, Numer. Funct. Anal. Optim. 32 (2011), no. 4, 469–476.
- [4] H. Cohen, *Number Theory. Volume II: Analytic and Modern Tools*, vol. 240 of Graduate Texts in Mathematics, Springer (2007).



بررسی و مدلسازی اندازه گروه ها با استفاده از توزیع پاورلو و تابع اتصال ترجیحی و با استناد به مشاهدات تجربی

یوسف جمالی

دانشگاه تربیت مدرس

منیره رحمانی*

دانشگاه تربیت مدرس

چکیده

رفتار جمعی عبارت است از الگوهای رفتاری بی ساختار، خودانگیخته، هیجانی و پیش‌بینی‌ناپذیر. در این مقاله با توجه به این که بسیاری از توزیع‌های مرتبط با رفتارهای انسان‌ها، توزیع پاورلو^۱ با توان بزرگتر مساوی ۲ را نشان می‌دهند؛ رفتار جمعی حیوانات را در نظر گرفته و به منظور پاسخ به چرایی و چگونگی شکل‌گیری گروه‌های جانوری و توزیع اندازه این گروه‌ها مدلی ارائه می‌کنیم که در آن احتمال پیوستن افراد به گروه، یک تابع خطی افزایشی از اندازه گروه و موقعیت گروه است. در مدل ارائه شده، با فرض اینکه اندازه‌ی جمعیت ثابت باقی می‌ماند، یک توزیع پاورلو با توان تقریباً ۲ خواهیم داشت.

واژه‌های کلیدی: رفتار جمعی، رفتار گروهی، توزیع پاورلو کوتاه شده، مکانیزم ادغام و جدایی، تابع اتصال ترجیحی

۱ مقدمه

رفتار جمعی عبارت است از الگوهای رفتاری بی ساختار، خودانگیخته، هیجانی و پیش‌بینی‌ناپذیر. افرادی که از رفتار جمعی پیروی می‌کنند، در برابر محرک خاصی که ممکن است شخص دیگر یا حادثه معینی باشد، واکنش نشان می‌دهند [۱]. درک این پدیده‌ها بخش مهمی از رشته‌های زیست‌شناسی تکاملی، عصب‌شناسی، اکولوژی رفتاری، جامعه‌شناسی و ... می‌باشد. شورش‌ها، غوغاها، شیفستگی‌ها، شوریدگی‌ها، وحشتزدگی‌ها و شکل‌گیری سریع مدها و افکار عمومی، نمونه‌های رفتار جمعی به‌شمار می‌آیند. هواداران شوریده و شیفته تیم‌های فوتبال در ورزشگاه‌های بزرگ، به آشکارترین و روشن‌ترین شکلی رفتار جمعی را به نمایش می‌گذارند. برای سادگی رفتار جمعی حیوانات را در نظر می‌گیریم. حیوانات معمولاً به شکل گروهی زندگی می‌کنند. گروه ماهی‌ها، دسته پرندگان، دنباله مورچه‌ها و ... مثال‌های واضحی از این دست می‌باشند. قبل از بررسی هر نوع رفتار جمعی، باید به این امر توجه داشت که در ابتدا جانوران باید کنار هم قرار گیرند. در این مقاله به چرایی و چگونگی شکل‌گیری گروه‌های حیوانی و توزیع اندازه این گروه‌ها می‌پردازیم. گروه‌ها همواره در یک اندازه مشخصی دیده نمی‌شوند. اندازه گروه‌ها دارای یک طیف گسترده، هم‌میان‌گونه‌ها و هم‌درون‌گونه‌ها می‌باشد [۲].

این ویژگی موجب چندین سوال جالب می‌شود:

اندازه گروه حیوانات چگونه توزیع می‌شود؟ آیا الگوهای رایجی برای این توزیع‌ها وجود دارد؟ چگونه این توزیع‌های متفاوت فرم می‌گیرند؟ در صورت یافتن پاسخ سؤال‌های فوق، آیا می‌توانیم درباره اندازه گروه‌ها پیش‌بینی‌هایی انجام دهیم؟

* سخنران

^۱power law



طیف گسترده ای از مدل ها برای توزیع اندازه گروه ها پیشنهاد شده است. مطالعات تجربی بسیاری نشان می دهد که اندازه گروه ها از توزیع پاورلو پیروی می کند.

تعریف ۱.۱. توزیع پاورلو

از جمله ویژگی های توزیع پاورلو اریب بودن آن می باشد، یعنی توزیعی با دنباله بلند که در آن تعداد زیادی گروه کوچک و تعداد خیلی کم گروه خیلی بزرگ وجود دارد. البته چون محدودیتی برای بزرگ بودن بیش از حد اندازه گروه ها وجود دارد انتظار می رود که این توزیع پاورلو یک جایی قطع شود که به آن توزیع پاورلوی کوتاه شده می گویند. یک آزمایش ساده که نشان می دهد توزیع اندازه گروه ممکن است پاورلو باشد این است که لگاریتم اندازه گروه را در برابر لگاریتم فرکانس رسم کنیم اگر اطلاعات در این نمودار $\log \log$ بوسیله خط مستقیم برازش شوند آنگاه گفته می شود توزیع داده ها پاورلو می باشد.

حال به بررسی این مطلب می پردازیم که چه فرضیاتی می تواند مدل ریاضی پاورلو را تولید می کند. چندین مدل ریاضی وجود دارد که بر پایه فرضیات زیستی معقول هستند و می توانند پاورلو را تولید کنند و با داده های تجربی هم سازگاری خوبی داشته باشند.

ساده ترین فرض این است که وقتی گروه ها به یکدیگر می رسند همواره ادغام شوند تا یک گروه بزرگتر را شکل دهند [۳]. مدل شامل s سایت می باشد که هر کدام شامل گروهی با اندازه $n_i(t)$ در هر گام زمانی می باشد. در هر گام زمانی هر گروهی یک سایت را تصادفی انتخاب می کند تا آن را ویزیت کند. اگر دو یا تعداد بیشتری گروه یک سایت را انتخاب کرده باشند آنگاه آنها با یکدیگر یک گروه جدید با اندازه زیر شکل می دهند :

$$n_k(t+1) = n_i(t) + n_j(t) \quad (1)$$

طبق این فرضیات احتمال اینکه گروهی با اندازه n داشته باشیم متناسب با $n^{-3/2}$ است. با این حال توانی که به طور تجربی اندازه گیری شده است رنجی بین -1.7 و -1.8 دارد [۴]. این مدل همه مشاهدات تجربی را پشتیبانی نمی کند. احتمالی که داده شد، این بود که ممکن است ادغام و جدایی تابعی از اندازه گروه باشد [۵].

تعریف ۲.۱. اتصال ترجیحی

یک چارچوب کلی برای مدل هایی که ادغام و جدایی تابعی از اندازه گروه هست تابع اتصال ترجیحی^۲ می باشد [۶]. احتمال اینکه دو گروه با اندازه y و x ادغام شوند می تواند به صورت زیر در نظر گرفته شود :

$$\psi(x, y) = \alpha a(x)a(y) \quad (2)$$

درحالی که احتمال اینکه گروهی از اندازه x جدا شود متناسب است با :

$$\rho(x) = \beta x a(x) \quad (3)$$

یکی از توابع کاندید برای ادغام، تابع اتصال ترجیحی می باشد. اتصال ترجیحی جایی کاربرد دارد که احتمال اینکه افراد به گروه بپیوندند تابعی از اندازه گروه باشد.

^۲Preferential Attachment

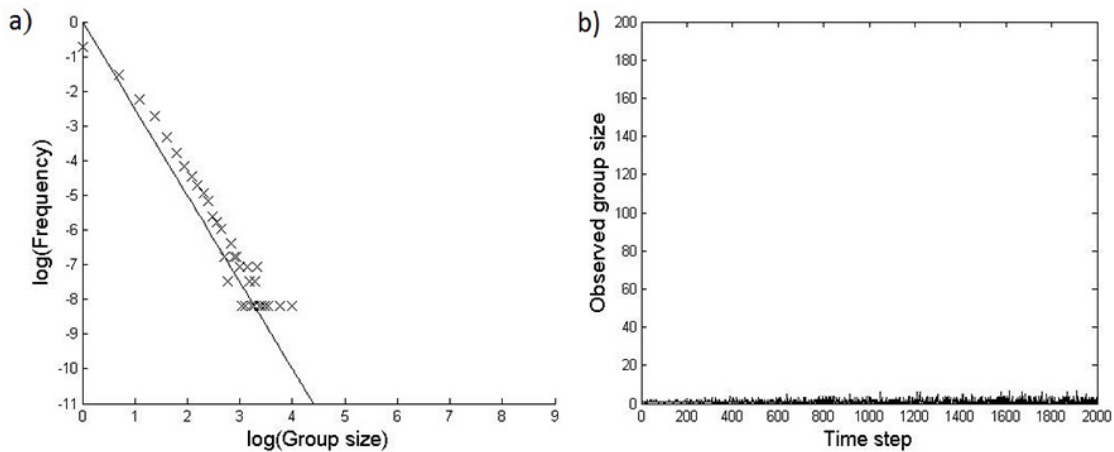


۲ نتایج اصلی

در مدلی که ما ارائه دادیم احتمال اینکه افراد به گروه بپیوندند یک تابع افزایشی خطی از اندازه گروه و موقعیت گروه می باشد. این مدل یک توزیع پاورلو با توان حدوداً ۲ تولید می کند. در این مدل فرض کرده ایم که اندازه جمعیت ثابت باقی می ماند.

بسیاری از توزیع های مرتبط با رفتار انسانها توزیع پاورلو با توان بزرگتر یا مساوی ۲ را نشان میدهد. به عنوان مثال رشد و اتصال به وبسایت ها به شبکه جهانی وب که توان ۲/۱ و سایت شدن مقالات توان حدود ۳ گزارش شده است [۷]. در مدل ارائه شده اتصال گروه ها براساس تابع زیر می باشد که m مجموع کل افراد می باشد.

$$\frac{n_i + c}{\sum_{j=1}^m n_j + c} \quad (۴)$$

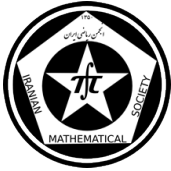


شکل ۱: (a) توزیع اندازه گروه تولید شده به وسیله این شبیه سازی روی ۱۰۰۰۰ گام زمانی (b) سری زمانی تعداد افرادی که یک سایت رندم انتخاب شده را اشغال کرده اند.

در حالت کلی نمی توانیم انتظار داشته باشیم که این فرضیات دقیقاً برای همه گونه هایی که علاقه مند هستیم صدق کند، اما می توانیم انتظار داشته باشیم تا یک تقریب مناسب از واقعیت باشند. از طرفی گروه بندی ممکن است که براساس برهم کنش حیوانات نبوده و بر اساس جاذبه های فیزیکی محیط باشد. احتمال دیگر این است که توزیع یک گونه شکارچی بسادگی بازتابی از شکار می باشد. برای مثال ماهی درنده ممکن است به تنهایی بیشترین سازگاری را داشته باشد اما با توجه به توزیع خوشه ای شکارش، در توزیع اندازه گروه مشابه شکارش دیده می شود.

در این مطالعات روندی که به وسیله آن گروه ها را تشکیل داده اند، کمتر مورد توجه قرار گرفته است. ممکن است به دلیل این حقیقت باشد که بدون درک جنبه هایی نظیر انتقال اطلاعات، تصمیم گیری و هماهنگ سازی قادر به تشخیص هزینه ها و منافع گروه بندی نباشیم. به هر حال، مدل های معرفی شده در این زمینه ما را تشویق می کند که بتوانیم پیش بینی هایی درباره آمدن افراد به سمت همدیگر بدون دانستن جزئیاتی از شکل گیری گروه را انجام دهیم.

تا کنون این نتایج به دست آمد که پیوستن عضو به گروه ها و یا جدایی اش از یک گروه، به عنوان تابعی از اندازه گروه می باشد، و این که نتایج توزیع اندازه گروه، بازتابی از این رفتار خواهد بود.

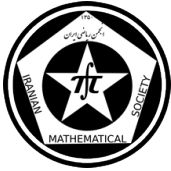


مراجع

- [۱] کوئن، بروس؛ ، غلامعباس توسلی و رضا فاضل، مبانی جامعه‌شناسی، تهران، سمت، ۱۳۸۴، چاپ شانزدهم، ص ۳۲۳.
- [2] Bonabeau, E., Dagorn, L., Freon, P., 1999, *Scaling in animal group size distributions*, Proc. Natl. Acad. Sci. USA 96, 4472-4477.
- [3] Bonabeau, E., Dagorn, L., 1995, *Possible universality in the size distribution of fish schools*, Phys. Rev. E 51, 5220-5223.
- [4] Niwa, H. S. 1998, *School size statistics of fish*, Journal of Theoretical Biology 195, 351-361.
- [5] Niwa, H. S. 2003, *Power-law versus exponential distributions of animal group sizes*, Journal of Theoretical Biology 224, 451-457.
- [6] Gueron, S., Levin, S.A., 1995, *The dynamics of group formation*, Math. Biosci. 128, 243-264.
- [7] Barabasi, A. L., Albert, R., Jeong, H. 1999, *Mean-field theory for scale-free random networks*, Physica A 272, 173-187.

پست الکترونیکی: rahmani_monireh@yahoo.com

پست الکترونیکی: y.jamali@gmail.com



بررسی و مقایسه دو عملگر تقریب دوزنقه‌ای برای اعداد فازی

فاطمه فخریان*

امید سلیمانی فرد

دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر، دانشگاه دامغان

دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر، دانشگاه دامغان

چکیده

در این مقاله به بررسی و مقایسه دو عملگر تقریب برای اعداد فازی می‌پردازیم. این دو عملگر با دقت بسیار خوبی اعداد فازی را تقریب می‌زنند، عملگرهای مذکور تضمین می‌نمایند حاصل تقریب، عدد فازی دوزنقه‌ای است و برای اعداد فازی همراه با ارب بسیار مناسب است. عملگر نخست، اصلاح عملگر نزدیک‌ترین تقریب دوزنقه‌ای با پایایی بازه انتظار است و عملگر دوم، عملگر نزدیک‌ترین تقریب دوزنقه‌ای بدون پایایی بازه انتظار است که در هر دو عملگر شرایط لازم برای یکسان بودن تکیه‌گاه و هسته عدد فازی و تقریب آن لحاظ می‌شود.

واژه‌های کلیدی: (عدد فازی، تقریب دوزنقه ای، بازه انتظار)

۱ مقدمه

موضوع وجود و یکتایی بهترین تقریب روی یک مجموعه، یکی از مباحث در نظریه تقریب است. با توجه به اینکه تابع عضویت یک عدد فازی در بردارنده اطلاعات کامل یک عدد فازی است، سادگی شکل تابع عضویت تاثیر به‌سزایی در کاهش محاسبات دارد. به سبب آنکه تابع عضویت دوزنقه‌ای تعمیم یافته انواع اشکال خطی مانند مثلثی و راست گوشه است، تابع عضویت دوزنقه‌ای با دو حاشیه چپ و راست خطی نسبت به توابع دیگر کمترین پیچیدگی محاسبات را دارد. در این مقاله دو عملگر نزدیک‌ترین تقریب دوزنقه‌ای را مورد بررسی قرار می‌دهیم که تضمین می‌کنند تقریب مورد نظر حتی برای اعداد فازی همراه با ارب مناسب است و نتیجه حاصل عدد فازی دوزنقه‌ای است. لازم به ذکر است این تقریب‌ها برخلاف عملگر نزدیک‌ترین تقریب دوزنقه‌ای با پایایی بازه انتظار که توسط گرزگروسکی در سال ۲۰۰۵ ارائه شد [۱]، که نتیجه تقریب همیشه عدد فازی دوزنقه‌ای نبود، حاصل تقریب عملگرهای مذکور عددی فازی دوزنقه‌ای است. ساختار مقاله به این شرح است که در بخش ۲ مفاهیم مقدماتی را معرفی می‌کنیم، در بخش ۳ عملگر نزدیک‌ترین تقریب دوزنقه‌ای اصلاح شده را بیان می‌کنیم و در بخش ۴ عملگر نزدیک‌ترین تقریب دوزنقه‌ای بدون پایایی بازه انتظار را بیان می‌کنیم و در نهایت با ارائه مثالی نتایج با هم مقایسه می‌شوند.

۲ مفاهیم مقدماتی

تعریف ۱.۲. مجموعه‌ی اعداد حقیقی را با \mathbb{R} و فضای اعداد فازی $[0, 1] : \mathbb{R} \rightarrow A(x)$ را با \mathbb{F} نشان می‌دهیم که در موارد زیر صدق می‌کند،

۱. $A(x)$ نرمال باشد،

* سخنران



۲. محدب فازی باشد،

۳. تکیه‌گاه $A(x)$ فشرده باشد،

۴. از بالا نیمه پیوسته باشد.

تعریف ۲.۲. متر فازی $d: \mathbb{F} \times \mathbb{F} \rightarrow \mathbb{R}$ را فاصله L_2 (فاصله اقلیدسی^۱) بین دو عدد فازی A و B می‌نامیم و به صورت

$$d(A, B) = \sqrt{\int_0^1 (|A_l(\alpha) - B_l(\alpha)|^2 + |A_u(\alpha) - B_u(\alpha)|^2) d\alpha}. \quad (1)$$

تعریف می‌کنیم.

تعریف ۳.۲. عدد فازی A را دوزنقه‌ای^۲ گوئیم اگر و فقط اگر $-\alpha$ برش آن به صورت زیر باشد،

$$[t_1 + (t_2 - t_1)\alpha, t_4 - (t_4 - t_3)\alpha], \quad t_i \in \mathbb{R}, (i = 1, \dots, 4), \quad (2)$$

و t_i ها، $i = 1, \dots, 4$ در شرط

$$t_1 \leq t_2 \leq t_3 \leq t_4 \quad (3)$$

صدق کنند.

تعریف ۴.۲. بازه انتظار عدد فازی

$$EI(A) = [EI_L(A), EI_U(A)] = \left[\int_0^1 A_l(\alpha) d\alpha, \int_0^1 A_u(\alpha) d\alpha \right]. \quad (4)$$

روابط بین کران‌های پایین تکیه‌گاه و هسته عدد فازی را به صورت زیر نمایش می‌دهیم [۲]،

$$LSP(A) = 6 \int_0^1 \alpha A_l(\alpha) d\alpha - 3EI_L(A);$$

$$USP(A) = 3EI_U(A) - 6 \int_0^1 \alpha A_u(\alpha) d\alpha.$$

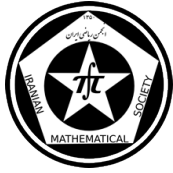
۳ عملگر نزدیک‌ترین تقریب دوزنقه‌ای اعداد فازی با پایایی بازه انتظار اصلاح شده [۲]

عملگر نزدیک‌ترین تقریب دوزنقه‌ای با پایایی بازه انتظار اصلاح شده را با $T^*(A)$ نشان می‌دهیم که در واقع این عملگر شرایط لازم برای یکسان بودن تکیه‌گاه و هسته عدد فازی و تقریب آن را علاوه بر پایایی بازه انتظار لحاظ می‌کند. گزرگروسکی [۳، ۲]، این راه حل را با محدودیت بر تکیه‌گاه و هسته با اعمال شرایط زیر بهبود بخشید،

$$core(A) \subseteq core(T(A)),$$

^۱Euclidean

^۲Trapezoidal



$$\text{supp}(T(A)) \subseteq \text{supp}(A).$$

که این شرایط تضمین می‌کند نتیجه تقریب حتی برای اعداد فازی همراه اریب نیز عددی فازی دوزنقه‌ای است. عملگر نزدیک‌ترین تقریب دوزنقه‌ای با پایایی بازه انتظار اصلاح شده [۳]، توسط گرزگروسکی^۳ و وینیارسکا^۴ ارائه شد که در بخش زیر همراه با عملگر نزدیک‌ترین تقریب دوزنقه‌ای بدون پایایی بازه انتظار معرفی می‌کنیم.

۴ عملگر نزدیک‌ترین تقریب دوزنقه‌ای بدون پایایی بازه انتظار [۴]

پایایی بازه انتظار مفید است چرا که ویژگی‌های مفید دیگر را مانند مقدار انتظار و ... تضمین می‌کند. اما گاه کاربر تمایل به حذف الزامات اضافی و یا کاهش محاسبات دارد زیرا تقریب هم باید نسبت به بازه انتظار پایا باشد و هم محدودیت بر تکیه‌گاه و هسته را اعمال کند. بنابراین عملگر نزدیک‌ترین تقریب دوزنقه‌ای بدون پایایی بازه انتظار را با نماد $T^{**}(A)$ نمایش می‌دهیم. [۲]، قضیه زیر رابطه بین عملگر نزدیک‌ترین تقریب دوزنقه‌ای بدون پایایی بازه انتظار با عملگر نزدیک‌ترین تقریب دوزنقه‌ای با پایایی بازه انتظار را بیان می‌کند. قبل از بیان قضیه، تعریف زیر را که پیش نیاز قضیه است بیان می‌کنیم. **تعریف ۱.۴.** عدد فازی A را با تکیه‌گاه $[a_1, a_4]$ و هسته $[a_2, a_3]$ فرض کنید، شانزده ترکیب متفاوت از عملگرهای تقریب عبارتند از جایگشت هشت مورد زیر

$$۱. A \in \mathbb{F}(l_1, .) \text{ اگر و تنها اگر } a_1 \leq EI_L(A) - LSP(A) \text{ و } a_2 \geq EI_L(A) + LSP(A)$$

$$\text{که } T^*(A) = T^{**}(A) \text{ برابر است با } t_1 = EI_L(A) - LSP(A), t_2 = EI_L(A) + LSP(A)$$

$$۲. A \in \mathbb{F}(l_2, .) \text{ اگر و تنها اگر } a_1 > EI_L(A) - LSP(A) \text{ و } a_2 \geq EI_L(A) + LSP(A)$$

$$\text{که } T^*(A) \text{ برابر است با } t_1 = a_1, t_2 = 2EI_L(A) - a_1$$

$$\text{و } T^{**}(A) \text{ برابر است با } t_1 = a_1, t_2 = \frac{3}{4}EI_L(A) + \frac{1}{4}LSP(A) - \frac{1}{4}a_1$$

$$۳. A \in \mathbb{F}(l_3, .) \text{ اگر و تنها اگر } a_1 \leq EI_L(A) - LSP(A) \text{ و } a_2 < EI_L(A) + LSP(A)$$

$$\text{که } T^*(A) \text{ برابر است با } t_1 = 2EI_L(A) - a_2, t_2 = a_2$$

$$\text{و } T^{**}(A) \text{ برابر است با } t_1 = \frac{3}{4}EI_L(A) - \frac{1}{4}LSP(A) - \frac{1}{4}a_2, t_2 = a_2$$

$$۴. A \in \mathbb{F}(l_4, .) \text{ اگر و تنها اگر } a_1 > EI_L(A) - LSP(A) \text{ و } a_2 < EI_L(A) + LSP(A)$$

$$\text{که } T^*(A) = T^{**}(A) \text{ برابر است با } t_1 = a_1, t_2 = a_2$$

$$۵. A \in \mathbb{F}(., r_1) \text{ اگر و تنها اگر } a_3 \leq EI_U(A) - USP(A) \text{ و } a_4 \geq EI_U(A) + USP(A)$$

$$\text{که } T^*(A) = T^{**}(A) \text{ و } t_3 = EI_U(A) - USP(A), t_4 = EI_U(A) + USP(A)$$

$$۶. A \in \mathbb{F}(., r_2) \text{ اگر و تنها اگر } a_3 > EI_U(A) - USP(A) \text{ و } a_4 \geq EI_U(A) + USP(A)$$

$$\text{که } T^*(A) \text{ برابر است با } t_3 = a_3, t_4 = 2EI_U(A) - a_3$$

$$\text{و } T^{**}(A) \text{ برابر است با } t_3 = a_3, t_4 = \frac{3}{4}EI_U(A) + \frac{1}{4}USP(A) - \frac{1}{4}a_3$$

$$۷. A \in \mathbb{F}(., r_3) \text{ اگر و تنها اگر } a_3 \leq EI_U(A) - USP(A) \text{ و } a_4 < EI_U(A) + USP(A)$$

$$\text{که } T^*(A) \text{ برابر است با } t_3 = 2EI_U(A) - a_4, t_4 = a_4$$

$$\text{و } T^{**}(A) \text{ برابر است با } t_3 = \frac{3}{4}EI_U(A) - \frac{1}{4}USP(A) - \frac{1}{4}a_4, t_4 = a_4$$

^۳Przemyslaw Grzegorzewski

^۴Karolina Pasternak-Winiarska



۸. $A \in \mathbb{F}(\cdot, r_4)$ اگر و تنها اگر $a_4 < EI_U(A) + USP(A)$ و $a_3 > EI_U(A) - USP(A)$.
 $T^*(A) = T^{**}(A)$ که برابر است با $t_4 = a_4$, $t_3 = a_3$.

قضیه ۲.۴. عدد فازی A را با تکیه‌گاه $[a_1, a_4]$ و هسته $[a_2, a_3]$ در نظر بگیرید، روابط زیر برای دو عملگر تقریب برقرار است،

$$(1) \quad T^*(A) = T^{**}(A) \text{ اگر و تنها اگر } A \in \mathbb{F}(l_1, r_1) \cup \mathbb{F}(l_1, r_4) \cup \mathbb{F}(l_4, r_1) \cup \mathbb{F}(l_4, r_4)$$

$$(2) \quad T^*(A) \subset T^{**}(A) \text{ اگر و تنها اگر } A \in \mathbb{F}(l_1, r_2) \cup \mathbb{F}(l_3, r_1) \cup \mathbb{F}(l_3, r_2) \cup \mathbb{F}(l_3, r_4) \cup \mathbb{F}(l_4, r_2)$$

اکنون با ارائه مثالی به مقایسه دو عملگر می‌پردازیم.

مثال ۳.۴. عدد فازی A را با تابع عضویت ذیل در نظر بگیرید

$$\mu_{T(A)}(x) = \begin{cases} (X+1)^2 & \text{if } -1 \leq x \leq 0, \\ 1 & \text{if } 0 \leq x \leq 1, \\ \left(\frac{40-x}{39}\right)^2 & \text{if } 1 \leq x \leq 40, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

با محاسبه α برش $A_\alpha = [\sqrt{\alpha} - 1, 40 - 39\sqrt{\alpha}]$ مشخصه‌های عدد فازی را به دست می‌آوریم که عبارتند از

$$LSP(A) = \frac{2}{5}, \quad EI_U(A) = 14, \quad EI_L(A) = -\frac{1}{3}, \quad USP(A) = \frac{78}{5} \text{ است.}$$

در نتیجه $a_1 = -1 < EI_L(A) - LSP(A) = -\frac{11}{15} > a_2 = 0$ و $a_3 = 1 < EI_U(A) - USP(A) = -\frac{8}{5} < a_4 = 40$

و مشخصه‌های تقریب عبارتند از $t_1 = 2EI_L(A) - a_2$ و $t_2 = a_2 = 0$ و $t_3 = a_3 = 1$ و $t_4 = 2EI_U(A) - a_4$.

بنابراین $T^*(A)$ برابر است با $T^*(A) = (-\frac{2}{3}, 0, 1, 27)$. و با محاسباتی مشابه فوق $T^{**}(A)$ برابر است با $T^{**}(A) = (-\frac{2}{3}, 0, 1, 28)$.

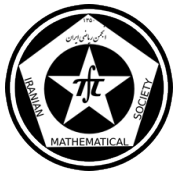
با توجه به روابط $EI_L(A) + LSP(A) \geq a_1$ و $EI_U(A) - USP(A) \leq a_4$ داریم $T^*(A) \subseteq T^{**}(A)$ بنابراین $T^*(A) \subseteq T^{**}(A)$ برقرار است.

نتیجه

در این مقاله تقریب دوزنقه‌ای اعداد فازی را مطرح کردیم که هر دو الزامات اضافی بر تکیه‌گاه و هسته اعمال می‌کند که این الزامات اضافی سبب بهبود تقریب می‌شود و تقریب اعداد فازی به وسیله‌ی اعداد دوزنقه‌ای را حتی برای اعداد فازی با تابع عضویت اریب تضمین می‌کند. با توجه به قضیه ذکر شده در می‌یابیم که هنگامی عدد فازی با اریب کمی همراه باشد در نظر گرفتن الزامات اضافی بر روی هسته و تکیه‌گاه نیاز نیست و نتیجه تقریب با پایایی بازه انتظار و بدون پایایی بازه انتظار یکسان و عددی فازی دوزنقه‌ای است.

مراجع

- [۱] Przemyslaw Grzegorzewski, Karolina Pasternak-Winiarska, Natural trapezoidal approximations of fuzzy numbers. Fuzzy Sets and Systems
- [۲] P. Grzegorzewski, K. Pasternak-Winiarska, Natural trapezoidal approximations of fuzzy numbers. Fuzzy Sets Syst.
- [۳] A.I. Ban, Approximation of fuzzy numbers by trapezoidal fuzzy numbers preserving the expected interval. Fuzzy Sets Syst. ۱۵۹. ۱۳۲۷-۱۳۴۴ (۲۰۰۸)
- [۴] P. Grzegorzewski, E. Mrówka, Trapezoidal approximations of fuzzy numbers. Fuzzy Sets Syst. ۱۵۳ (۲۰۰۵) ۱۳۵-۱۱۵



پیش‌بینی خاموشی‌های ناخواسته فیدهای برق استان یزد با استفاده از سیستم‌های فازی

اسما روشنی*

شرکت توزیع برق استان یزد

ولی درهمی

دانشگاه یزد، دانشکده برق و کامپیوتر

فاطمه اعلم

شرکت توزیع برق استان یزد

چکیده

شرکت‌ها زمان و هزینه‌های بالایی را برای مواد، نیروی انسانی و ترمیم خاموشی‌های برق ناشی از شرایط نامناسب جوی می‌پردازند. هدف ما در این مقاله ارائه راهکاری است که بتوان، خاموشی‌های ناخواسته را پیش‌بینی کرده و قبل از وقوع آن، اقدامات لازم را جهت عدم وقوع خاموشی، مرمت برق و کاهش هزینه‌ها انجام داد. برای این کار، از اطلاعات آب‌وهوای دو روز قبل استفاده شده است. ابتدا پیش‌پردازش روی داده‌ها انجام گرفته، عوامل و ویژگی‌های موثر که باعث خاموشی می‌شوند شناسایی شده، سپس با استفاده از روش دسته‌بندی فازی و سیستم استنتاج فازی، خاموشی روز بعد پیش‌بینی می‌شود. در انتها، سیستم، با داده‌های منطقه‌ای شهرستان میبد و منطقه یک یزد، تست شده و دقت ۹۰/۰۳ بدست آمده است.

واژه‌های کلیدی: پیش‌بینی خاموشی، سیستم فازی، عوامل خاموشی، دسته‌بندی فازی.

۱ مقدمه

امروزه یک کشور را به‌عنوان یک کشور جهان سوم می‌شناسند، اگر قادر به تامین برق ایمن و باکیفیت به مردم خود، در زمان موردنیاز نباشد [۱]. معمولاً شرکت‌های برق برای بازگرداندن خدمات در طی یک خاموشی برق، زمان و هزینه‌های بالایی را می‌پردازند، بنابراین می‌توان با پیش‌بینی دقیق وقوع خاموشی، هزینه‌ها و خسارت‌های وارده بر شبکه را کاهش داد [۲]. بر اساس آمار ۶۰ ساله اداره هواشناسی یزد، این شهرستان سالانه به‌طور متوسط بیش از ۶۲ روز طوفان‌های همراه با گردوخاک را تجربه می‌کند. همچنین علاوه بر طوفان، تغییرات درجه حرارت، اولین بارش‌ها و بارندگی‌های با حجم کم نیز یکی از عوامل مهم بروز خاموشی در شبکه‌های توزیع هستند. این عوامل درکل نزدیک به ۲۰ درصد از میزان خاموشی‌های سه سال اخیر شرکت توزیع را تشکیل می‌دهند. تاکنون روش‌های متعددی برای تعیین نرخ و پیش‌بینی خاموشی انجام شده است. تعدادی از این روش‌ها بر مبنای روش‌های آماری هستند، که با استفاده از روش‌های خطی دو جمله‌ای منفی [۲]، یا الگوریتم رگرسیون [۳] به پیش‌بینی خاموشی برای یک طوفان خاص می‌پردازند. بر اساس روش آماری سه عامل اصلی، درختان، تماس حیوانات و رعدوبرق بیشترین تاثیر را در خرابی دستگاه داشته‌اند. این عامل‌ها با استفاده از روش دسته‌بندی فازی در [۴] و روش k همسایه نزدیک در [۵]، خاموشی‌های ناشی از سه عامل را پیش‌بینی می‌کنند. طی تحقیقات انجام شده، تاکنون پیش‌بینی خاموشی‌های برق، در مناطق مختلفی از جمله مناطق جنوب غربی نیجریه، ساحل خلیج فارس، شمال شرقی ایالات متحده آمریکا، انجام شده است [۱][۲][۳]. هدف ما در این مقاله، پیش‌بینی خاموشی‌هایی است که به علت شرایط نامناسب جوی رخ می‌دهند، تا از این طریق بتوان قبل از وقوع خاموشی، اقدامات لازم را، انجام داد. در ادامه این مقاله در بخش ۲، روش پیاده‌سازی شده بیان می‌شود و در بخش ۳ نتایج تست سیستم در چند منطقه استان یزد، بیان می‌شود.

* سخنران



۲ روش پیاده‌سازی شده

در این مقاله، از دو مجموعه داده‌های تاریخچه‌ای ۵ ساله استان یزد استفاده می‌کنیم: داده‌های خاموشی برق و داده‌های آب‌وهوا. داده‌های آب‌وهوا شامل ۵۰ ویژگی از اطلاعات آب‌وهوای روزانه است که از ۱۱ ایستگاه آب‌وهواشناسی اندازه‌گیری و ثبت شده است و داده‌های خاموشی برق شامل ۱۵ ویژگی است که اطلاعات کلیه خاموشی‌های رخ داده را بیان می‌کند.

۱.۲ پیش‌پردازش داده‌ها

داده‌های دنیای واقعی، ناقص، ناسازگار و دارای نویز هستند. تکنیک‌های پیش‌پردازش داده‌ها، کیفیت داده‌ها را بهبود می‌دهد و در نتیجه دقت و بهره‌وری فرایند تصمیم‌گیری بهبود می‌یابد [۶]. نمونه‌ای از پیش‌پردازش‌های انجام شده به قرار زیر است.

- از مجموعه داده‌های خاموشی، نمونه خاموشی‌هایی که علت آن‌ها شرایط نامناسب آب‌وهوا قید نشده، حذف می‌شوند.
- داده‌های هر دو مجموعه داده بر اساس تاریخ روزانه ادغام می‌شوند و روزهایی که طبق مجموعه داده‌های خاموشی برق، خاموشی رخ داده است، برچسب کلاس یک (کلاس خاموشی) و بقیه نمونه‌ها برچسب کلاس صفر می‌گیرند.
- میانگین وزن دار ویژگی‌های آب‌وهوای دو روز قبل، طبق فرمول زیر محاسبه شده و مقادیر به دست آمده، جایگزین آب‌وهوای همان روز می‌شود. w_1 و w_2 به ترتیب اطلاعات آب‌وهوای یک روز قبل و دو روز قبل را نشان می‌دهد.

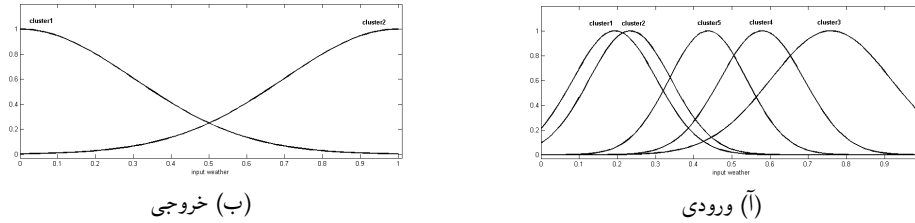
$$w = ((w_1 \times 2) + w_2) / 2$$

- با استفاده از روش انتخاب ویژگی SFS^۱ ویژگی‌های موثر آب‌وهوا، شامل ۵ ویژگی، بیشینه تغییرات فشار، دمای حداکثر مطلق، میانگین رطوبت، میانگین دمای ۲۰ سانتی خاک، میانگین دمای ۱۰۰ سانتی خاک انتخاب شده است. معیار ارزیابی این روش، به ترتیب بر اساس تشخیص^۲ و حساسیت^۳ تنظیم شده و به منظور محاسبه دقیق‌تر معیارهای ارزیابی، از روش k-fold برای تقسیم‌بندی داده‌های آموزش و تست استفاده شده است [۶].

۲.۲ سیستم فازی

سیستم استنتاج فازی دارای دو عنصر کلیدی مجموعه‌های فازی و قوانین فازی است [۷]. در دنیای واقعی تعداد نمونه‌های ورودی بالاست، بنابراین برای جلوگیری از انفجار ابعاد، از روش کلاسترینگ c-means فازی، برای دسته‌بندی داده‌های ورودی استفاده می‌شود [۸]. در اینجا از داده‌های خروجی به‌عنوان راهنمایی برای دسته‌بندی بهتر داده‌ها استفاده می‌شود. در مرحله بعد، مراکز دسته‌ها و درجه تعلق داده‌ها به هر کلاستر، به‌عنوان ورودی به سیستم استنتاج فازی، داده می‌شود. این عوامل، برای تعیین خصوصیات عضویت فازی در ارتباط با مجموعه‌های فازی مقدم مختلف، استفاده می‌شوند. توابع عضویت ورودی‌ها و خروجی سیستم را گوسی، در نظر گرفته‌ایم. نمونه‌ای از شکل توابع عضویت، در شکل ۱ نشان داده شده است. در این مقاله، از مدل فازی ممدانی استفاده شده است. این مدل، بر اساس قوانین "اگر-آنگاه" است و هر دو قسمت مقدم و تالی، فازی هستند. برای تنظیم تالی قواعد از روش ونگ، استفاده شده است. در این روش درجه تعلق هر نمونه، به هر قاعده محاسبه می‌شود و خروجی آن، برابر بزرگ‌ترین درجه تعلق داده به قواعد است. این خروجی، عددی بین ۰ تا ۱ است که احتمال خاموشی را نشان می‌دهد. اگر احتمال به دست آمده کوچک‌تر از یک حد آستانه باشد، خروجی برابر صفر و اگر

^۱Sequential Forward Selection^۲Specificity^۳Recall



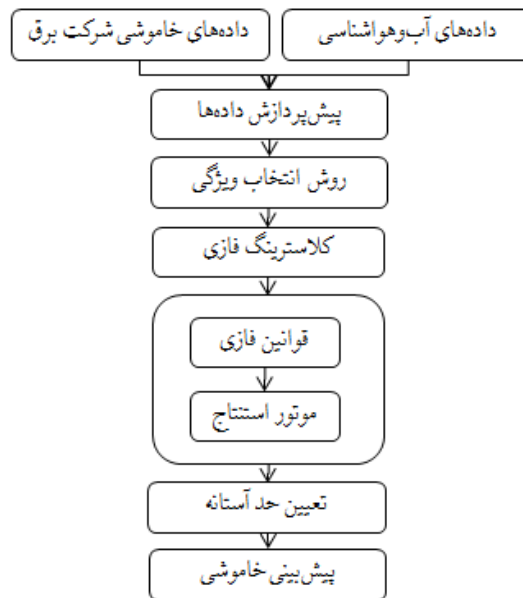
شکل ۱: توابع عضویت ورودی و خروجی سیستم

بزرگ‌تر باشد خروجی برابر یک می‌شود و سیستم، خاموشی را پیش‌بینی می‌کند. این حد آستانه بر اساس آستانه‌گذاری‌های مختلف و بهترین معیار اندازه F^4 به‌دست‌آمده، تعیین می‌شود. نمونه‌ای از قواعد فازی به‌صورت زیر بیان شده‌اند:

R1: IF weather1 is cluster1 and weather2 is cluster1 and ... and weather5 is cluster1 then outage is cluster1

R2: IF weather1 is cluster2 and weather2 is cluster2 and ... and weather5 is cluster2 then outage is cluster2

در شکل ۲ فلوچارت مراحل انجام‌شده در این مقاله نشان داده شده‌است.

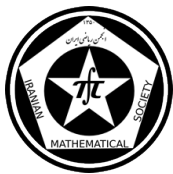


شکل ۲: فلوچارت روش پیاده‌سازی شده

۳ نتایج

با تحلیل داده‌ها و تست سیستم، نتایج زیر به‌دست‌آمده است:
۱ - بیشترین پدیده‌های تاثیرگذار روی خاموشی‌های برق، به ترتیب طوفان، باران شدید، باران‌ریزه و گردوخاک است.

^۴Fmeasure



۲ - بیشترین ماه‌های خاموشی، به ترتیب ماه‌های آذر، اسفند و فروردین و اردیبهشت و آبان، دی و بهمن، است.
 ۳ - با روش سیستم فازی، مشکل نامتعادل بودن داده‌ها، برطرف شده است و کلاس یک دارای دقت پایینی نیست.
 ۴ - روش گفته‌شده، بر روی داده‌های ۲۷ فیدراز دو منطقه شهرستان میبد و منطقه یک یزد، تست شده است. تعداد نمونه‌ها در هر فیدر تقریباً ۱۵۷۸ روز است و داده‌های سال ۹۳ به عنوان تست سیستم انتخاب شده‌است. جدول ۱، میانگین معیارهای ارزیابی تست سیستم را در ۳ منطقه نشان می‌دهد.

جدول ۱: میانگین معیارهای ارزیابی تست سیستم

پست فوق توزیع-منطقه	صحت %	تشخیص %	حساسیت %
جهان‌آباد-میبد	۹۰/۲	۹۰/۴	۸۴/۶
اردکان-میبد	۹۲	۹۱/۵	۱۰۰
دروازه قرآن-منطقه یک یزد	۸۷/۹	۸۸/۴	۸۵/۸
میانگین	۹۰/۰۳	۹۰/۱	۹۰/۱۳

سپاس‌گزاری

این تحقیق با حمایت شرکت توزیع برق استان یزد، انجام شده‌است و بدین وسیله از آن شرکت محترم قدردانی می‌گردد.

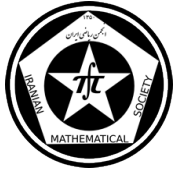
مراجع

- [1] I. Olu, *The Development of Time-Series Based Outage Distribution Models For Feeder Lines In South Western Nigeria*, IOSR J. Eng., vol. 3, no. 7, pp. 47-54, 2013.
- [2] S.-R. Han, S. D. Guikema, S. M. Quiring, K.-H. Lee, D. Rosowsky, and R. A. Davidson, *Estimating the spatial distribution of power outages during hurricanes in the Gulf coast region*, Reliab. Eng. Syst. Saf., vol. 94, no. 2, pp. 199-210, 2009.
- [3] H. Li, L. A. Treinish, and J. R. M. Hosking, *A statistical model for risk management of electric outage forecasts*, IBM J. Res. Dev., vol. 54, no. 3, pp. 1-8, 2010.
- [4] L. Xu, M.-Y. Chow, and L. S. Taylor, *Power distribution fault cause identification with imbalanced data using the data mining-based fuzzy classification e-algorithm*, Power Syst. IEEE Trans., vol. 22, no. 1, pp. 164-171, 2007.
- [5] M.-Y. Chow, L. Xu, J. Timmis, and L. S. Taylor, *Power distribution outage cause identification with imbalanced data using artificial immune recognition system (AIRS) algorithm*, Power Syst. IEEE Trans., vol. 22, no. 1, pp. 198-204, 2007.
- [6] M. Kamber, J. Han, and J. Pei, *Data mining: concepts and techniques: concepts and techniques*, Elsevier, 2011.
- [7] L.-X. Wang, *A course in fuzzy systems*. Prentice-Hall press, USA, 1999.
- [8] W.-H. Chen, Q.-Y. Jiang, Z.-Y. Wang, and Y.-J. Cao, *Risk assessment of cascading outages in power systems using fuzzy neural network*, in *Advances in Neural Networks-ISBNN 2006*, Springer, 2006, pp. 1422-1427.

پست الکترونیکی: a.roshani@stu.yazd.ac.ir

پست الکترونیکی: vderhami@yazd.ac.ir

پست الکترونیکی: aalam.f@gmail.com



توسعه روش RSF با یک الگوریتم محلی

پرستو رام بجنیدی*
دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر دانشگاه دامغان

امید سلیمانی فرد
دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر دانشگاه دامغان

چکیده

در این مقاله یکی از روش های مرزهای فعال مبتنی بر ناحیه، مدل تطبیق مقیاس گذاری ناحیه (RSF)^۱ را در ساختار محلی قرار می دهیم. محلی کردن مدل های مبتنی بر ناحیه برای هدایت کردن مرزها به کار می رود. این روش سبب می شود که در یک تصویر شامل چندین زیر ناحیه با شدت روشنایی یکسان، فقط ناحیه ای را که مورد نظر کاربر است ناحیه بندی شود.

واژه های کلیدی: ناحیه بندی تصاویر، مرزهای فعال، محلی کردن

۱ مقدمه

مدل های مرزهای فعال با استفاده از اطلاعات تصویر ناحیه بندی را انجام می دهند به طوریکه از اطلاعات تصویر به عنوان نیرو برای تغییر شکل و رشد مرزها فعال استفاده می کنند. مدل مرز فعال اولین بار در سال ۱۹۸۸ توسط Kass در [۱] با ارائه یک مدل پارامتری معرفی شد. بارزترین نقاط ضعف این روش آن است که خاصیت ادغام شدن و جدا شدن ندارد و همچنین مکانیزمی برای تغییرات توپولوژی ندارد. برای حل این مشکلات مدل سطوح همتراز [۲] و [۸] پیشنهاد شد. کار اصلی این مدل حرکت منحنی فرم پذیر در صفحه توسط تابع انرژی است که این تابع انرژی از اطلاعات تصویر نشأت می گیرد. مدل مرزهای فعال به دو دسته مبتنی بر لبه و مبتنی بر ناحیه تقسیم می شود. مدل های مبتنی بر لبه بر روی لبه های شکل توقف می کنند. مدل های مبتنی بر ناحیه بر شدت روشنایی تصاویر تکیه می کند. این مدل اولین بار در سال ۲۰۰۱ با عنوان مرزهای فعال بدون لبه توسط Chan و Vese [۳] معرفی شد. حالت توقف آن پایه ای روی تکنیک ناحیه بندی Mumford-Shah [۱۰] است. اما این مدل بر شدت روشنایی ناهمگن غلبه نمی کند و برای اصلاح شدت روشنایی ناهمگن نیاز به حالت پیش پردازش [۹] دارد. برای غلبه بر شدتهای روشنایی ناهمگن می توان از مدل های کرنلی (قایی) استفاده کرد [۴]، [۶]، [۷]. این مدل ها با استفاده از تعریف کرنلی روی مرز، اطلاعات محلی شدت روشنایی را از تصویر استخراج می کنند و از این اطلاعات برای ناحیه بندی تصویر استفاده می کنند. یک نوع از مدل های کرنلی مدل RSF است که در سال ۲۰۰۸ توسط Li و همکارانش [۴] پیشنهاد شد. در این مقاله ما روش مرزهای فعال مبتنی بر ناحیه RSF را با فرمول محلی ترکیب می کنیم. در بخش دو مدل مرزهای فعال RSF و مدل محلی کردن را مرور می کنیم. در بخش سوم مدل پیشنهادی را شرح می دهیم. در بخش نهایی به کمک یک مثال روش را می آزمایشیم.

* سخنران

^۱Region-Scalable Fitting



۲ پیش زمینه

مدل RSF

Li و همکارانش در [۴] مدل مرزهای مبتنی بر ناحیه ای پیشنهاد دادند که در این مدل اطلاعات شدت محلی در یک روش مقیاس پذیر به کار می رود. تابع انرژی آن به صورت زیر تعریف می شود:

$$\varepsilon(C, f_1(x), f_2(x)) = \sum_{i=1}^2 \lambda_i \int \left(\int_{\Omega_i} k(x-y) |I(y) - f_i(x)|^2 dy \right) dx + \nu |C| \quad (1)$$

در اینجا $I(y)$ شامل بخشی از تصویر است که شدت های محلی را در خود دارد یعنی شامل y هایی است که در همسایگی x (نقاط روی مرز) قرار دارد و اندازه آن توسط کرنل k کنترل می شود. Ω_1 خارج منحنی C و Ω_2 داخل منحنی C ، λ_1 و λ_2 ثابت های مثبت، دو مقدار $f_1(x)$ و $f_2(x)$ شدت تصویر را به ترتیب در Ω_1 و Ω_2 تقریب میزند. هدف از تابع کرنل k گذاشتن وزن های سنگین روی نقطه y که اطراف نقطه مرکزی x قرار دارد، است. برای سادگی می توان از کرنل گوسین با پارامتر مقیاس $\sigma > 0$ به صورت زیر استفاده کرد

$$k_\sigma = \frac{1}{(2\pi)^{n/2} \sigma^n} e^{-|u|^2 / 2\sigma^2}.$$

با توجه به روش سطوح همتراز بیان شده در [۲]، انرژی ε در معادله (۱) را به صورت زیر باز نویسی می شود

$$\varepsilon(C, f_1(x), f_2(x)) = \sum_{i=1}^2 \lambda_i \int \left(\int_{\Omega_i} k(x-y) |I(y) - f_i(x)|^2 M_i^\varepsilon(\phi(y)) dy \right) dx + \nu \int |\nabla H_\varepsilon(\phi(x))| dx.$$

در آن $M_1^\varepsilon(\phi) = H_\varepsilon(\phi)$ و $M_2^\varepsilon(\phi) = 1 - H_\varepsilon(\phi)$ تابع هموار از تخمین تابع هوی ساید H است که به صورت زیر تعریف می شود

$$H_\varepsilon(x) = \frac{1}{2} \left[1 + \frac{1}{\pi} \arctan\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \right]$$

با محاسبه تغییرات برای تابع سطوح همتراز ϕ ، تابع های بهینه $f_i(x)$ برای $i = 1, 2$ به صورت زیر حاصل می شوند

$$f_i(x) = \frac{k_\sigma(x) * [M_i^\varepsilon(\phi) I(x)]}{k_\sigma(x) * M_i^\varepsilon(\phi)}.$$

الگوریتم محلی کردن

Lankton و همکارانش در [۵] فرمولی برای محلی کردن مرزهای فعال مبتنی بر ناحیه پیشنهاد کرده اند. در این ساختار، انرژی محلی در هر نقطه ای به طور جداگانه محاسبه می شود. فرض می کنیم I تصویر داده شده روی قلمرو Ω باشد و C منحنی بسته ای است که مانند سطوح همتراز صفر از تابع فاصله نشانه ϕ نمایش داده می شود یعنی $C = \{x | \phi(x) = 0\}$. داخل منحنی C را به وسیله تقریب زیر از تابع هوی ساید هموار ذیل تعیین می شود

$$H\phi(x) = \begin{cases} 1 & \varphi(x) < -\varepsilon \\ 0 & \varphi(x) > \varepsilon \\ \frac{1}{2} \left\{ 1 + \frac{\varphi}{\varepsilon} + \frac{1}{\pi} \sin\left(\frac{\pi\varphi(x)}{\varepsilon}\right) \right\} & \text{otherwise.} \end{cases}$$



به طور مشابه، برای خارج منحنی C ، $(1 - H\varphi(x))$ تعریف می شود. برای اینکه ناحیه ای را که فقط در اطراف منحنی C است، تعیین کند، از مشتق تابع $H\varphi(x)$ به صورت زیر استفاده می شود:

$$\varphi\delta(x) = H'\varphi(x)$$

یک متغیر y که اطراف نقطه مرکزی x قرار دارد، معرفی می کند. این متغیر در تابع مشخصه ای با شعاع r به صورت زیر به کار می رود

$$\beta(x, y) = \begin{cases} 1 & \|x - y\| < r \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

$\beta(x, y)$ را در تعریف تابع انرژی و در شرایط تابع نیرو سراسری به صورت زیر به کار برده شده است،

$$\int_{\Omega_x} \delta\varphi(x) \int_{\Omega_y} \beta(x, y) \cdot F(I(y), \varphi(y)) dy dx$$

که در آن F اندازه انرژی است که باعث حرکت مرزها می شود.

۳ مدل پیشنهادی

در این پژوهش انرژی RSF در حرکت مرزها با گرفتن ایده از مدل Lankton و همکارانش [۵] به طور مکانی محلی در نظر گرفته می شود. در این مدل علاوه بر اینکه انتشار مرز در تصویر نسبت به شدت روشنایی محلی می شود، نسبت به مکان حرکت مرز هم محلی می شود. به طور ساده تر رشد مرز در محدوده های از شدت روشنایی و مکانی انجام می شود. تابع $f(x)$ برای هر نقطه x روی مرز C نسبت به کرنل k و در همسایگی به شعاع r به صورت زیر تعریف می شود

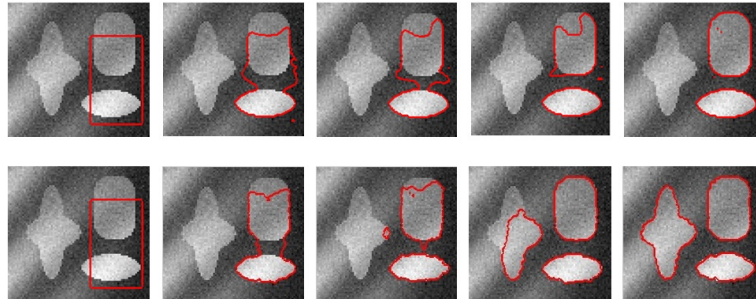
$$f_{xi}(x) = \frac{\int_{\Omega_y} \beta(x, y) * k(x) * [M_i^\varepsilon(\phi(x))I(x)] dy}{\int_{\Omega_y} \beta(x, y) * k(x) * M_i^\varepsilon(\phi(x)) dy}$$

حال نیروی RSF جدید به صورت زیر پیشنهاد می شود

$$\varepsilon(C, f_1(x), f_2(x)) = \sum_{i=1}^2 \lambda_i \int (\int_{\Omega_i} \beta(x, y) * k(x - y) |I(y) - f_{xi}(x)|^2 dy) dx.$$

۴ بررسی الگوریتم به کمک یک مثال

در بخش الگوریتم تشریح شده، در بخش قبل را برای یک مثال ارائه می دهیم. در شکل (۱) قصد داریم دو شکل سمت راست تصویر را ناحیه بندی کنیم، به همین دلیل مرز اولیه را روی دو شکل سمت راست می اندازیم. ردیف اول اجرای مدل پیشنهادی ما است که موفق می شود دو شکل سمت راست تصویر به درستی ناحیه بندی کند اما ردیف دوم اجرای مدل RSF است، همان طور که دیده می شود شکل سمت چپ را هم که از نظر شدت روشنایی و بافت مشابه شکل های سمت راست است، جدا می کند. در نتیجه مدل ما در شکل (۱) ردیف اول، با محدود کردن مکان حرکت مرز، شکل مورد نظر را جدا می کند.



شکل ۱: ردیف اول مراحل اجرا مدل پیشنهادی ما است. ردیف دوم مراحل اجرا با مدل RSF است.

مراجع

- [1] M. Kass, A. Witkin, and D. Terzopoulos, "Snakes: Active contour models," *Int. J. Comput. Vis.*, 1988.
- [2] S. Osher and J. A. Sethian, "Fronts propagating with curvature dependent speed: algorithms based on Hamilton-Jacobi formulations", *J. Computational Physics*, vol. 79, no. 1, pp. 12– 49, 1988.
- [3] T. Chan and L. Vese, "Active contours without edges," *IEEE Trans. Image. Process.*, vol. 10, no. 2, pp. 266–277, 2001.
- [4] Li, C., Kao, C., Gore, J.C., Ding, Z.: Minimization of region-scalable fitting energy for image segmentation. *IEEE Trans. Imag. Proc.* 17 (2008) 1940–1949.
- [5] S. Lankton and A. Tannenbaum, "Localizing region-based active contours", *IEEE Trans Image Processing*, vol. 17, no. 11, pp. 2029–2039, 2008.
- [6] C. Li, C. Y. Kao, J. C. Gore, and Z. Ding, "Implicit active contours driven by local binary fitting energy," *Proceedings of the IEEE Computer Society Conference on Computer Vision and Pattern Recognition (CVPR '07)*, pp. 1–7, Washington, DC, USA, June 2007.
- [7] K. Zhang, "Active contours driven by local image fitting energy", *Pattern Recognition*, vol. 43, no. 4, pp. 1199–1206, 2010.
- [8] S. Osher and R. Fedkiw, *Level Set Methods and Dynamic Implicit Surfaces*. Springer-Verlag, 2002.
- [9] Hou Z. A review on mr image intensity inhomogeneity correction. *Int. J. Biomed. Imag.* 2006.
- [10] D. Mumford and J. Shah, "Optimal approximations by piecewise smooth functions and associated variational problems," *Comm. Pure Appl. Math*, vol. 42, pp. 577–685, 1989.

پست الکترونیکی: Osfard@du.ac.ir
پست الکترونیکی: prbejandi@gmail.com



حل عددی رده ای از معادلات انتگرال فوق منفرد

محمدعلی فریبزی عراقی
دانشگاه آزاد اسلامی تهران مرکز

یعقوب محمودی
دانشگاه آزاد اسلامی تبریز

رضا نوین*
دانشگاه آزاد اسلامی تهران مرکز

چکیده

بسیاری از مسائل مهم در علوم مهندسی، به حل معادلات انتگرال خاصی، به نام معادلات انتگرال فوق منفرد منجر می‌شوند. حل تحلیلی این نوع معادلات، در حالت کلی به سختی قابل انجام است به همین دلیل و با توجه به کاربردهای آن، نیازمند حل عددی این معادلات می‌باشیم. چندجمله‌ای چبیشف در تئوری تقریب از اهمیت ویژه‌ای برخوردارند. در این مقاله نیز جواب عددی رده‌ای خاص از معادلات انتگرال فوق منفرد را با استفاده از چندجمله‌ای‌های چبیشف تقریب زده و با ارائه‌ی مثالی، روش ارائه شده را پیاده‌سازی خواهیم نمود.

واژه‌های کلیدی: معادلات انتگرال فوق منفرد - چندجمله‌ای‌های چبیشف - جواب تقریبی

Mathematics Subject Classification [2010]: 65R20, 78W23, 45E05

۱ مقدمه

در این مقاله فرض می‌کنیم فرم کلی معادله‌ی انتگرال فوق منفرد مورد نظر به صورت زیر باشد:

$$\int_{-1}^1 \frac{k(x, t)}{(t-x)^2} \varphi(t) dt + \int_{-1}^1 L(x, t) \varphi(t) dt = f(x), \quad -1 \leq x \leq 1 \quad (1)$$

که در آن $k(x, t)$ ، $L(x, t)$ و $f(x)$ به ترتیب توابع پیوسته‌ی تعریف شده روی مجموعه‌های $[-1, 1] \times [-1, 1]$ ، $[-1, 1] \times [-1, 1]$ و $[-1, 1]$ هستند و $\varphi(t)$ نیز تابع مجهول بوده و داریم $\varphi(\pm 1) = 0$. فرض کنیم فرم معادله‌ی انتگرال فوق منفرد در معادله‌ی (۱) به صورت زیر باشد:

$$\int_{-1}^1 \frac{\varphi(t)}{(t-x)^2} dt = f(x), \quad (2)$$

در این صورت داریم:

$$\int_{-1}^1 \frac{\varphi(t)}{(t-x)^2} dt = \frac{d}{dx} \int_{-1}^1 \frac{\varphi(t)}{t-x} dt. \quad (3)$$

بنابراین عبارت (۲) به فرم زیر بازنویسی می‌شود:

$$\frac{d}{dx} \int_{-1}^1 \frac{\varphi(t)}{t-x} dt = f(x). \quad (4)$$

با انتگرال گیری از طرفین معادله‌ی (۴) داریم:

$$\int_{-1}^1 \frac{\varphi(t)}{t-x} dt = F(x), \quad (5)$$



که در آن

$$F(x) = \int f(x)dx. \quad (۶)$$

که جواب دقیق معادله‌ی (۵) به صورت زیر است:

$$\varphi(x) = -\frac{\sqrt{1-x^2}}{\pi^2} \int_{-1}^1 \frac{F(t)}{\sqrt{1-t^2}(t-x)} dt. \quad (۷)$$

و جواب معادله‌ی فوق وجود دارد اگر و تنها اگر داشته باشیم [۲]:

$$\int_{-1}^1 \frac{F(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt = 0. \quad (۸)$$

۲ یافتن جواب تقریبی

در این قسمت جواب تقریبی معادله‌ی (۱) را به دست خواهیم آورد. از آن جایی که برای تابع مجهول $\varphi(x)$ داریم $\varphi(\pm 1) = 0$ ، بنابراین داریم:

$$\varphi(x) = \sqrt{1-x^2} \Phi(x), \quad -1 \leq x \leq 1 \quad (۹)$$

که در آن $\Phi(x)$ تابعی خوش رفتار بوده و $x \in [-1, 1]$ می‌باشد. فرض کنید تابع مجهول $\Phi(x)$ به صورت یک چندجمله‌ای درجه‌ی n به فرم زیر تقریب زده شود:

$$\Phi(x) \approx \sum_{j=0}^n c_j x^j, \quad (۱۰)$$

که در آن c_j برای $j = 0, 1, 2, \dots, n$ مقادیر ثابت مجهول هستند. با جایگزاری عبارت‌های (۹) و (۱۰) در معادله‌ی (۱) داریم:

$$\sum_{j=0}^n c_j \left[\int_{-1}^1 \frac{\sqrt{1-t^2} k(x,t) t^j}{(t-x)^2} dt + \int_{-1}^1 \sqrt{1-t^2} L(x,t) t^j dt \right] = f(x), \quad -1 \leq x \leq 1. \quad (۱۱)$$

با استفاده از چندجمله‌ای‌های چبیشف برای تقریب هسته‌های $k(x,t)$ و $L(x,t)$ خواهیم داشت:

$$\left. \begin{aligned} k(x,t) &\approx \sum_{p=0}^m k_p(x) t^p, \\ L(x,t) &\approx \sum_{q=0}^s L_q(x) t^q, \end{aligned} \right\} \quad (۱۲)$$

در این صورت معادله‌ی (۱۱) به فرم زیر خواهد بود:

$$\sum_{j=0}^n c_j \left[\sum_{p=0}^m k_p(x) u_{p+j}(x) + \sum_{q=0}^s L_q(x) \gamma_{q+j} \right] = f(x), \quad -1 \leq x \leq 1 \quad (۱۳)$$

که در آن

$$u_{p+j}(x) = \int_{-1}^1 \frac{\sqrt{1-t^2} t^{p+j}}{(t-x)^2} dt \quad (۱۴)$$



$$\gamma_{q+j} = \int_{-1}^1 \sqrt{1-t^2} t^{q+j} dt. \quad (15)$$

با استفاده از صفرهای x_k چندجمله‌ای‌های چبیشف $T_{n+1}(x)$ برای معادله‌ی (۱۳) دستگاه معادلات خطی به فرم زیر را خواهیم داشت:

$$\sum_{j=0}^n c_j \alpha_j(x_k) = f(x_k), \quad (16)$$

که در آن

$$x_k = \cos\left(\frac{(2k-1)\pi}{2(n+1)}\right), \quad k = 1, 2, 3, \dots, n+1 \quad (17)$$

$$\alpha_j(x_k) = \sum_{p=0}^m k_p(x_k) u_{p+j}(x_k) + \sum_{q=0}^s L_q(x_k) \gamma_{q+j}. \quad (18)$$

با حل دستگاه فوق، مقادیر مجهول c_j مشخص شده و با جایگزاری در معادلات (۹) و (۱۰) جواب تقریبی معادله‌ی (۱) حاصل می‌شود.

۳ مثال عددی

فرض کنید معادله‌ی انتگرال فوق منفرد به صورت زیر باشد:

$$\int_{-1}^1 \frac{\varphi(t)}{(t-x)^2} dt + \int_{-1}^1 xt\varphi(t) dt = x + x^3, \quad -1 \leq x \leq 1. \quad (19)$$

معادله‌ی فوق به صورت زیر قابل بازنویسی است:

$$\int_{-1}^1 \frac{\varphi(t)}{(t-x)^2} dt = (1+\mu)x + x^3, \quad (20)$$

که در آن

$$\mu = - \int_{-1}^1 t\varphi(t) dt.$$

معادله‌ی (۲۰) دارای جواب دقیق به فرم زیر است، [۱]:

$$\varphi(x) = -\frac{1}{4\pi} \sqrt{1-x^2} [10x^3 + 27x]. \quad (21)$$

با توجه به روش ارائه شده داریم:

$$\left. \begin{aligned} k_0(x) = 1, \quad k_1(x) = k_2(x) = \dots = k_m(x) = 0 \\ L_1(x) = x, \quad L_0(x) = L_2(x) = \dots = L_s(x) = 0 \end{aligned} \right\} \quad (22)$$



که با جایگزاری عبارت (۲۲) در عبارت (۱۸) خواهیم داشت:

$$\alpha_j(x_k) = u_j(x_k) + x_k \gamma_{j+1}, \quad (j = 0, 1, 2, \dots, n) \quad (23)$$

با استفاده از فرم زیر:

$$\int_{-1}^1 \frac{\sqrt{1-t^2} U_j(t)}{(t-x)^2} dt = -\pi(j+1) U_j(x) \quad (24)$$

که در آن $U_j(x)$ چندجمله‌ای چیبشف نوع دوم است. در این صورت فرم (۱۴) و (۲۴) به صورت زیر بوده:

$$\begin{aligned} u_0(x) &= -\pi, & u_1(x) &= -2\pi x, \\ u_2(x) &= -\pi(3x^2 - \frac{1}{2}), & u_3(x) &= -\pi(4x^3 - x), \\ u_4(x) &= -\pi(5x^4 - \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{8}), & u_5(x) &= -\pi(6x^5 - 2x^3 - \frac{1}{4}x), \dots \end{aligned} \quad (25)$$

و برای فرم (۱۵) نیز خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} \gamma_0 &= \frac{\pi}{2}, & \gamma_2 &= \frac{\pi}{8}, & \gamma_4 &= \frac{\pi}{16}, & \gamma_6 &= \frac{5\pi}{128}, & \gamma_8 &= \frac{7\pi}{256}, \\ \gamma_1 &= 0, & \gamma_3 &= 0, & \gamma_5 &= 0, & \gamma_7 &= 0, & \gamma_9 &= 9. \end{aligned} \quad (26)$$

با جایگزاری عبارت‌های (۲۵) و (۲۶) در عبارت (۱۸) و با فرض $n = 5$ دستگاه معادلات خطی به فرم زیر را خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} -\pi \left[c_0 + \frac{15}{8} c_1 x_k + c_2 (3x_k^2 - \frac{1}{2}) + c_3 (4x_k^3 - \frac{1}{2} x_k) + c_4 (5x_k^4 - \frac{3}{2} x_k^2 - \frac{1}{8}) \right. \\ \left. + c_5 (6x_k^5 - 2x_k^3 - \frac{37}{128} x_k) \right] = x_k + x_k^3, \quad (k = 1, 2, \dots, 6). \end{aligned} \quad (27)$$

با حل دستگاه فوق به وسیله‌ی صفرهای x_k چندجمله‌ای‌های چیبشف $T_{n+1}(x)$ خواهیم داشت:

$$\left\{ c_0 = c_2 = c_4 = c_5 = 0, c_1 = \frac{-27}{40\pi} \text{ و } c_3 = \frac{-1}{4\pi} \right\}. \quad (28)$$

که با جایگزاری عبارت (۲۸) در عبارت (۹) و (۱۰) جواب تقریبی معادله به صورت

$$\varphi(x) = -\frac{1}{40\pi} \sqrt{1-x^2} (10x^3 + 27x).$$

حاصل می‌شود.

مراجع

- [1] I.V. Boykova, E.S. Ventselb, V.A. Roudnevc and A.I. Boykovaa, *An approximate solution of nonlinear hypersingular integral equations*, Applied Numerical Mathematics, Volume 86, December (2014), pp. 1-21.
- [2] Suzan J. Obaiys, Z. K. Eskhuvatov, N. M. A. Nik long and M. A. Jamaludin, *Galerkin Method for the Numerical Solution of Hypersingular Integral Equations Based Chebyshev Polynomials*, Int. Journal of Math. Analysis, Vol. 6, (2012), no. 54, pp. 2653-2664.



کشف ناسازگاری در قواعد سیستمهای خبره

محمد قاسم زاده
دانشگاه یزد

ولی درهمی
دانشگاه یزد

سعید دهقانی اشکذری
دانشگاه یزد

چکیده

قسمت اصلی یک سیستم خبره را پایگاه قواعد آن تشکیل می‌دهد که دانش را از خبرگان قلمرو دریافت و به شکل قواعد استنتاج کد می‌کند. بدیهی است که پایگاه قواعد در گذر زمان، ایجاد و یا پالایش می‌شوند. با توجه به دیدگاه متفاوت خبرگان قلمرو و تغییرات پایگاه قواعد در طول زمان، یک پایگاه قواعد ممکن است دستخوش خطاهای ساختاری متعددی شود. انواع معمول خطاهای ساختاری شامل ناسازگاری (قواعد متناقض)، ایجاد حلقه (قواعد وابسته چرخه‌ای)، زیرفرض بودن، شروط اضافی در مقدم و افزونگی می‌باشند. در این پژوهش، مدل مناسبی به کمک ماشین خودکار متناهی برای کشف ناسازگاری در قواعد ارائه شده است که پیاده‌سازی و بکارگیری آن، کاملاً کارآمد و موثر است.

واژه‌های کلیدی: سیستم‌های خبره، پایگاه قواعد، ناسازگاری، ماشین خودکار متناهی.

۱ مقدمه

یکی از روش‌هایی که می‌توان دانش را در یک سیستم خبره ارائه نمود بکارگیری قواعد است. یک قاعده از ساختار اگر/آنگاه (if/then) پیروی می‌کند و اطلاعاتی که در قسمت if می‌آیند، بطور منطقی با اطلاعاتی که در قسمت then هستند مرتبط می‌باشند [۴]. پایگاه دانش شامل واقعیتها، قواعد و ارتباط بین آنهاست و موتور استنتاج براساس دانش موجود برای یک مساله نتیجه‌گیری می‌کند یا پیشنهادهایی را ارائه می‌دهد [۵].

تبدیل دانش افراد خبره به قواعد (مخصوصاً اگر هیچگاه دانش فرد خبره به طور اصولی و منظم توضیح داده نشده باشد) کار آسانی نیست. در دانش فرد خبره ممکن است ناسازگاری، ابهام، دوگانگی و یا مشکلات دیگری وجود داشته باشد، خبرگان نظر مشابهی در زمینه مورد نظر نداشته باشند یا ثبت و ضبط دانش به درستی و به‌دقت انجام نگیرد و تا زمانی که این دانش در یک سیستم خبره درج نشده باشد مشکلات آن ظاهر نمی‌شوند.

۲ نتایج اصلی

رفع تناقض بخشی از یک منبع بزرگتر عدم اطمینان است که به واسطه تداخل قواعد ایجاد می‌شود. تداخل میان قواعد بستگی به رفع تناقض و سازگاری قواعد دارد. سازگاری قواعد بدلیل وجود پنج علت اصلی دارای عدم قطعیت است: الف. یکی از علل بالقوه عدم قطعیت تضاد قواعد است، یعنی قواعدی که اجرا می‌شوند ممکن است عملکردهای متضادی داشته باشند:

۱. اگر حریق رخ داد، آنگاه روی آن آب بریزید.

۲. اگر حریق رخ داد، آنگاه روی آن آب نریزید.

اگر واقعیتی بصورت "حریق رخ داده است" وجود داشته باشد آنگاه هر دو قاعده اجرا خواهند شد که نتیجه آن عملکردهای متناقض و افزایش عدم اطمینان خواهد بود [۱].



بطور کلی، در منطق گزاره‌ای یک پایگاه دانش ناسازگار نامیده می‌شود اگر بتوان یک تناقض بصورت A و $\sim A$ را از آن بدست آورد [۶].

ب. دومین منبع عدم قطعیت، زیرفرض (زیرمجموعه) بودن قواعد است:

۳. اگر E_1 آنگاه H

۴. اگر E_1 و E_2 آنگاه H

اگر فقط E_1 وجود داشته باشد مشکلی پیش نخواهد آمد چون فقط قاعده ۳ فعال می‌شود ولی اگر هم E_1 و هم E_2 وجود داشته باشند آنگاه دو قاعده ۳ و ۴ فعال خواهند شد و لازم است از آنها رفع تناقض شود.

ج. عامل سوم، مازاد یا اضافی بودن قواعد است بطوریکه دو قاعده مقدم و تالی یکسان داشته باشند:

۵. اگر E_1 و E_2 آنگاه H

۶. اگر E_1 و E_2 آنگاه H

همانگونه که Scott، Suwa و Shortliffe [۱۹۸۲] خاطرنشان کرده‌اند، افزونگی قواعد در پایگاه دانش لزوماً مشکلات منطقی ایجاد نمی‌کند بلکه ممکن است بر بازدهی استنتاج تاثیر منفی بگذارد.

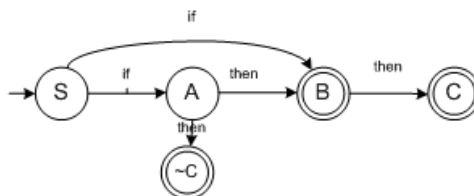
د. شرایط غیرضروری IF زمانی رخ می‌دهد که قواعد تالی یکسان دارند ولی یکی از شروط بیان شده در مقدم تاثیری در تحریک آن قواعد ندارد. بعنوان مثال، اگر قواعدی به شکل $p \text{ and } q \rightarrow r$ و $p \text{ and not } q \rightarrow r$ داشته باشیم، شرط q غیرضروری است و می‌توان آن را حذف نمود.

ه. در نهایت، قواعد موجود در پایگاه قواعد ممکن است دچار حلقه شوند که می‌تواند مشکل ساز باشد. بعنوان مثال، اگر قواعدی به شکل $p \rightarrow q$ و $q \rightarrow r$ و $r \rightarrow p$ باشد و هدف r باشد، آنگاه سیستم به یک حلقه بی‌نهایت دچار می‌شود. در این پژوهش، قواعد را بصورت ماشین خودکار نمایش داده، با قطعی کردن آن (تبدیل NFA به DFA)، به وجود یا عدم وجود خطاهای ساختاری پی می‌بریم. یک پذیرنده متناهی، یک ابزار ریاضی برای توصیف پردازش توسط یک ماشین است. یک FA می‌تواند در یکی از تعداد متناهی حالت‌های مفروض باشد و با دریافت هر ورودی، بین این حالتها حرکت کند [۲].

مثال ۱. ناسازگاری قواعد: وجود قواعدی بصورت $p \rightarrow q$ و $p \rightarrow \text{not } q$ باعث ایجاد ناسازگاری می‌شود. تعیین قواعد حلقه‌ای برای تعیین ناسازگاری غیرمستقیم در قواعدی به شکل $p \rightarrow q$ و $q \rightarrow r$ و $r \rightarrow \text{not } p$ ضروری است.

- R1. if A then B
- R2. if B then C
- R3. if A then $\sim C$

شکل زیر، ماشین خودکار غیرقطعی این مثال را نشان می‌دهد:



شکل ۱: ماشین خودکار مثال ۱

در صورتیکه جدول انتقال وضعیت ماشین خودکار فوق را تشکیل دهیم و آن را قطعی کنیم، جدول شماره ۱ حاصل خواهد شد. در این جدول انتقال، درایه $\{B, \sim C, C\}$ در ستون then ایجاد شده است که وجود ناسازگاری را نشان می‌دهد.

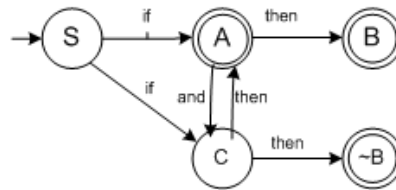


جدول ۱: جدول انتقال وضعیت مثال ۱

	if	then
S	{A,B}	-
A	-	{B, ~C}
B	-	C
C	-	-
~C	-	-
{A,B}	-	{B, ~C, C}
{B, ~C}	-	C
{B, ~C, C}	-	C

مثال ۲. ناسازگاری ممکن است به طور غیرمستقیم در قواعدی به شکل زیر نهفته باشد:

- R4. if A then B
- R5. if A and C then ~B
- R6. if C then A



شکل ۲: ماشین خودکار مثال ۲

تشخیص ناسازگاری از روی جدول تغییر وضعیت ماشین خودکار فوق و نحوه قطعی کردن آن، واضح و بدیهی است:

جدول ۲: جدول انتقال وضعیت مثال ۲

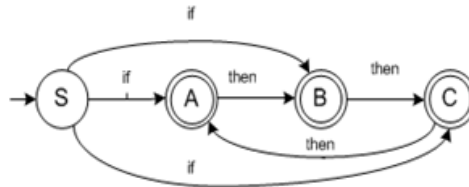
	if	and	then
S	{A,C}	-	-
A	-	C	B
B	-	-	-
~B	-	-	-
C	-	-	{A, ~B}
{A,C}	-	C	{B, A, ~B}
{B, A, ~B}	-	C	B

مثال ۳. اگر قواعدی به شکل $q \rightarrow r$ ، $p \rightarrow q$ و $r \rightarrow p$ وجود داشته باشد و هدف r باشد، آنگاه سیستم به یک حلقه بی‌نهایت دچار می‌شود. این موضوع می‌تواند باعث ایجاد پاسخ نادرست یا نوسان بین دو وضعیت خاص شود [۳].

- R7. if A then B
- R8. if B then C
- R9. if C then A



ماشین خودکار غیرقطعی این مثال نیز به شکل زیر است:



شکل ۳: ماشین خودکار مثال ۳

جدول تغییر وضعیت ماشین خودکار فوق و نحوه قطعی کردن آن عبارت است از:

جدول ۳: جدول انتقال وضعیت مثال ۳

	if	then
S	{A,B,C}	-
A	-	B
B	-	C
C	-	A
{A,B,C}	-	{A,B,C}

مشاهده می‌شود که از وضعیت ترکیبی $\{A,B,C\}$ به ازای ورودی then، به همان وضعیت $\{A,B,C\}$ انتقال می‌یابیم که نشان‌دهنده وجود حلقه (cycle) در مجموعه قواعد فوق است.

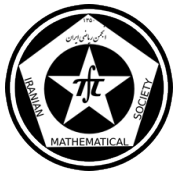
مراجع

- [۱] غضنفری، مهدی و کاظمی، زهره، اصول و مبانی سیستم‌های خبره، انتشارات دانشگاه علم و صنعت، تبریز، ۱۳۸۹.
- [۲] لینز، پیتز، نظریه زبانها و ماشینها، ویراست پنجم، ترجمه قاسم‌زاده، محمد، حسن‌پور، حمید و میبیدی، محمدرضا، انتشارات دانشگاه شاهرود، ۱۳۹۲.
- [3] C. Sinz, W. Kuchlin, T. Lump, *Towards a Verification of Rule-based Expert System of the IBM SA for OS/390 Automation Manager*, Second Asia-Pacific conference on Quality Software, 2001.
- [4] J. Durkin, *Expert Systems, Design and Development*, Macmillan publishing company, 1991.
- [5] M. Sasikumar, S. Ramani, S. M. Raman, A. KSR, R. Chanrasekar, *A practical introduction to rule-based expert systems*, Narosa publishing house, 2007.
- [6] M. Yang, D. C. Wilkins, *Improving the Performance of Inconsistent Knowledge Bases via Combined Optimization Method*, Eight International Machine Learning Workshop, 1991.

پست الکترونیکی: sdeghani@stu.yazd.ac.ir

پست الکترونیکی: vderhami@yazd.ac.ir

پست الکترونیکی: m.ghasemzadeh@yazd.ac.ir



مدلسازی و پیشبینی رفتار شاهدین یک حادثه با استفاده از نظریه‌ی بازیها

مجید زراعتی*
دانشگاه امام حسین (ع)

محسن شاه‌رضایی
دانشگاه امام حسین (ع)

اردشیر احمدی
دانشگاه امام حسین (ع)

چکیده

با گذشت بیش از نیم قرن از معرفی مفاهیم پایه‌ی نظریه بازی‌ها توسط جان نش و ون نویمان، اخیراً شاهد رشد قابل توجه تحقیقات در زمینه‌ی کاربردهای این نظریه در ریاضیات هستیم. در این مقاله، ابتدا عکس‌العمل شاهدین یک حادثه را در قبال گزارش کردن و یا گزارش نکردن حادثه به مراجع ذی‌صلاح با استفاده از نظریه بازی‌ها مدل‌سازی می‌کنیم، سپس بهترین عکس‌العمل عاقلانه شاهدین را با استفاده از تعادل نش پیش‌بینی کرده، به طوری که هیچ یک از شاهدین انگیزه‌ای برای انجام عکس‌العمل دیگری را نداشته باشند. در نهایت رابطه‌ی بین تعداد شاهدین و احتمال گزارش شدن این حادثه را در حالتی که هزینه و منفعت ثابت بوده و شاهدین متقارن باشند، پیدا کرده و آن را در قالب مثال واقعی بررسی می‌کنیم.

واژه‌های کلیدی: حادثه، شاهدین، استراتژی، نظریه بازی‌ها، تعادل نش

Mathematics Subject Classification [2010]: 13D45, 39B42

۱ مقدمه

یکی از شاخه‌های مهم دانش بشری که در بستر علم اقتصاد و ریاضیات پرورش و تکامل یافته، نظریه بازی‌هاست که امروزه کاربرد بسیار وسیعی در شاخه‌های مختلف علوم انسانی، مهندسی، علوم محض و پایه پیدا کرده است؛ به‌علاوه کاربردهای این نظریه تا آن جا پیش رفته است که در توصیف و تحلیل بسیاری از رفتارها در فلسفه و اخلاق ظاهر می‌شود.

پژوهش‌ها در این زمینه اغلب بر مجموعه‌ای از راهبردهای شناخته شده به‌عنوان تعادل در بازی‌ها استوار است. این راهبردها اصولاً از قواعد عقلانی استنتاج می‌شوند. مشهورترین تعادل‌ها، تعادل نش می‌باشد. براساس نظریه‌ی تعادل نش، اگر فرض کنیم در هر بازی با استراتژی مختلط بازیکنان به طریق منطقی و معقول راهبردهای خود را انتخاب کنند و به دنبال حداکثر سود در بازی باشند، دست کم یک راهبرد برای بدست آوردن بهترین نتیجه برای هر بازیکن قابل انتخاب است و چنان‌چه بازیکن راهکار دیگری به غیر از آن را انتخاب کند، نتیجه‌ی بهتری بدست نخواهد آورد.

در نظریه بازی‌ها استراتژی برای یک بازیکن خاص، طرحی است که عمل او را در مقابل بازیکن دیگر مشخص می‌کند. اگر تعداد استراتژی‌های هر بازیکن عدد محدودی باشد، بازی را محدود و در صورت نامحدود بودن بازی را نامحدود می‌نامند [۳].

۲ بیان موضوع

پیرامون ما حوادث مختلفی روی می‌دهند، در جریان این حوادث افرادی شاهد این حوادث هستند که از بین این افراد تعدادی حادثه را به مراجع ذی‌صلاح گزارش می‌دهند و گروهی از انجام این کار خودداری می‌کنند. در این مقاله می‌خواهیم ببینیم در

* سخنران



حالتی که هزینه (به عنوان مثال هزینه‌ی یک تماس تلفنی) و منفعت (به عنوان مثال در امان ماندن جان یک فرد) ثابت باشند آیا می‌توان رابطه‌ای بین احتمال گزارش کردن حادثه و تعداد شاهدین را به وسیله‌ی نظریه بازیها پیدا کرد [۱]؟ برای این منظور فرض می‌کنیم n نفر شاهد یک حادثه باشند و هر یک از این شاهدین به صورت همزمان تصمیم بگیرند که حادثه را گزارش کنند ($R = \text{report}$) و یا گزارش نکنند ($N = \text{no report}$). هر یک از شاهدین گزارش شدن حادثه را ترجیح می‌دهند لذا مطلوبیت حاصل از این که حادثه گزارش شود (یا مثلاً این که آن فرد کشته نشود) (V) از هزینه گزارش کردن حادثه (یا مثلاً هزینه تماس تلفنی برای فرد و ...) (C) بالاتر می‌باشد، یعنی ($C < V$). در نتیجه تابع payoff یا نتیجه به این صورت خواهد بود

$$u_i(s) = \begin{cases} 0 & \forall s_j \in S \\ V - C & \forall s_i \in S \\ V & s_i = N, \exists s_j \in S_{-i} \quad s.t. \quad s_j = R \end{cases}, \quad (1)$$

که در آن مجموعه‌ی تمام استراتژی‌های شاهدین در S قرار دارند و s_i استراتژی شاهد i ام می‌باشد و u_i مطلوبیت یا سود شاهد i ام در قبال انتخاب استراتژی s_i می‌باشد.

حال بر اساس این مدل‌بندی و تعادل نش یک استراتژی ناب (pure) [۴] داریم که در طی آن فقط یک شاهد، حادثه را گزارش کند و بقیه هیچ‌کدام گزارش نکنند ($\forall j \neq i \quad s_j = N$ و $s_i = R$) لذا فردی که گزارش کرده است نتیجه یا سودش $V - C$ می‌باشد و اگر تخطی کند نتیجه او برابر با صفر خواهد بود، لذا انگیزه‌ی تخطی ندارد و فردی که گزارش نکرده است نتیجه‌اش برابر V می‌باشد و اگر گزارش کند نتیجه‌اش برابر با $V - C$ خواهد بود لذا انگیزه‌ی تخطی ندارد، در نتیجه این یک استراتژی ناب می‌باشد. به علاوه هیچ استراتژی نابی وجود ندارد که بیش از یک نفر گزارش کند چون در این صورت اگر دو نفر گزارش کنند نتیجه‌ی آن‌ها $V - C$ خواهد بود و یکی از آن‌ها انگیزه‌ی این را خواهد داشت که تخطی کرده و گزارش نکند و $V - C$ را با V جایگزین کند. همچنین هیچ استراتژی نابی وجود نخواهد داشت که در آن هیچ کس گزارش ندهد، در این حالت همگی صفر می‌گیرند و یکی انگیزه دارد که گزارش کرده و $V - C > 0$ را دریافت کند. پس این بازی n تا استراتژی ناب دارد که طی آن یکی از افراد گزارش دهد و بقیه گزارش ندهند.

البته این مطلب ما را به هدف اصلی (اطلاع از این که بقیه گزارش کردند یا گزارش نکردند) نمی‌رساند، از این رو بهتر است که ما وارد فضای احتمال شده و حالتی که در آن با افزایش تعداد احتمال این که یک فرد گزارش کند چه تغییری می‌کند را در استراتژی‌های مخلوط بررسی کنیم [۲]، چون تعداد بازیکنان زیاد می‌باشند فرض می‌کنیم که فضای بازی و بازیکنان متقارن باشند، در این صورت اگر احتمال این که یک نفر گزارش کند برابر با p و احتمال این که یک نفر گزارش نکند برابر $1 - p$ باشد، چون شاهدین یا همان بازیکنان مستقل از هم در نظر گرفته شده‌اند، لذا احتمال این که $1 - n$ نفر گزارش نکنند برابر $(1 - p)^{n-1}$ می‌باشد. حال برای مطلوبیت یا سود هر فرد دو حالت رخ می‌دهد یا آن فرد گزارش نمی‌کند که در این صورت مطلوبیت او برابر خواهد بود با [۵]:

$$\begin{aligned} u & \left(\text{احتمال گزارش دادن } p, \text{ تعداد افراد } n, \text{ استراتژی آن فرد } N \right) \\ & = p \times V \quad (\text{احتمال این که حداقل یک نفر دیگر گزارش دهد}) \\ & + (1 - p)^{n-1} \times 0 \quad (\text{احتمال این که هیچ کس گزارش ندهد}) \\ & = \left(1 - (1 - p)^{n-1} \right) V \end{aligned} \quad (2)$$

و یا آن فرد گزارش می‌کند که در این صورت مطلوبیت او بدین صورت می‌باشد:

$$u(R, n, p) = V - C$$



در استراتژی ناب باید بازیکن بین N و R بی تفاوت شود، بدین منظور باید

$$p \text{ (احتمال این که حداقل یک نفر دیگر گزارش دهد)} = \frac{V - C}{V} \quad (۳)$$

و

$$\begin{aligned} p \text{ (احتمال این که } n - 1 \text{ نفر دیگر گزارش ندهند)} &= p \text{ (احتمال این که جنایت اصلاً گزارش نشود)} \\ &+ p \text{ (احتمال این که من هم گزارش ندهم)} \\ &= (1 - p)^n \end{aligned} \quad (۴)$$

حال اگر مقدار p با افزایش n کاهش پیدا کند آن گاه احتمال این که هیچ کس گزارش ندهد نیز کاهش پیدا می کند و از (۳) داریم:

$$1 - (1 - p)^{n-1} = \frac{V - C}{V} \implies V - (1 - p)^{n-1} V = V - C, \quad (۵)$$

آن گاه

$$p \text{ (احتمال این که هر فرد گزارش کند)} = 1 - \left(\frac{C}{V}\right)^{\frac{1}{n-1}}. \quad (۶)$$

۱.۲ یک مثال شهودی

گزارش کردن یک جنایت (بر اساس یک داستان واقعی) [۸]

یک زن ۲۸ ساله آمریکایی در دهه ۶۰ در نیویورک زندگی می کرد. وی در حالی که شبانه در یکی از محله های نیویورک در حال قدم زدن بود در طول ۳۰ دقیقه ۳ بار مورد حمله ی یک مرد ناشناس قرار گرفت، در طول این ۳۰ دقیقه ۳۸ نفر متفاوت در مکان های متفاوت شاهد این ماجرا بوده اند. از این ۳۸ نفر، ۳۷ نفر هیچ گزارشی به پلیس ندادند و نفر ۳۸ام با اکراه به پلیس گزارش داد. پلیس در عرض ۲ دقیقه در صحنه حاضر شد در حالی که دیگر آن زن فوت کرده بود [۶]، [۷].

اگر در یک حالت خاص $C = \frac{V}{3}$ باشد، آن گاه با قرار دادن $n = 2$ (تعداد شاهدین) و با توجه به (۶) خواهیم داشت

$$p = 1 - \left(\frac{V}{3}\right)^{\frac{1}{2-1}} = 1 - \left(\frac{V}{3} \times \frac{1}{V}\right)^1 = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}, \quad (۷)$$

در نتیجه بر حسب درصد، احتمال این که هر فرد گزارش کند برابر

$$p \text{ (احتمال این که هر فرد گزارش کند)} = \frac{2}{3} \times 100 = 66.7\% \quad (۸)$$

خواهد بود. از طرف دیگر با قرار دادن n و p حاصل شده در معادله ی (۷) و فرض $C = \frac{V}{3}$ داریم:

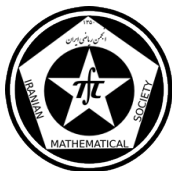
$$p \text{ (احتمال این که جنایت اصلاً گزارش نشود)} = (1 - p)^n = \left(1 - \frac{2}{3}\right)^2 = \frac{1}{9}, \quad (۹)$$

در نتیجه بر حسب درصد، احتمال این که جنایت اصلاً گزارش نشود برابر

$$p \text{ (احتمال این که جنایت اصلاً گزارش نشود)} = \frac{1}{9} \times 100 = 11.1\% \quad (۱۰)$$

خواهد بود.

با ادامه ی این روند و با مقداردهی به n جدول زیر حاصل می شود.



جدول ۱: بررسی اثر افزایش شاهدین بر گزارش شدن یک جنایت

تعداد شاهدین (n)	(احتمال این که هر فرد گزارش کند) p	(احتمال این که جنایت اصلاً گزارش نشود) p
۲	۶۶٫۷٪	۱۱٫۱٪
۳	۴۲٫۳٪	۱۹٫۲٪
۵	۲۴٫۰٪	۲۵٫۳٪
۱۰	۱۱٫۵٪	۲۹٫۵٪
۳۸	۲٫۹٪	۳۲٫۴٪

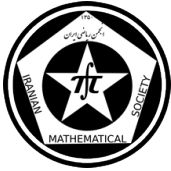
۳ نتیجه‌گیری

با توجه به معادله‌ی (۶) و ستون اول جدول ۱ به این نتیجه می‌رسیم که با افزایش تعداد شاهدین (n)، (احتمال این که هر فرد گزارش کند) p کاهش پیدا می‌کند و با ملاحظه‌ی معادله‌ی (۴) و ستون دوم جدول ۱ به این نتیجه می‌رسیم که با افزایش تعداد شاهدین (n)، (احتمال این که جنایت اصلاً گزارش نشود) p افزایش پیدا می‌کند. به طور کلی هر چه تعداد شاهدین افزایش پیدا کند احتمال این که هر فرد جنایت را گزارش دهد، کاهش پیدا می‌کند.

مراجع

- [۱] احمدی، اردشیر و معماریانی، عزیزالله، نظریه بازی، انتشارات جهان جام جم، ۱۳۸۳.
- [۲] اخوان تباکی، تقی، نظریه احتمال و کاربرد آن، انتشارات دانشگاه شریف، ۱۳۸۹.
- [۳] دریسای بهمنشیر، رضا و دریسای بهمنشیر، حسین، تحلیل کاربرد تئوری بازیها در فنون مذاکره و قراردادهای بین‌المللی.
- [۴] عبدلی، قهرمان، نظریه بازیها و کاربردهای آن، سازمان مطالعه و تدوین کتب علوم انسانی دانشگاهها (سمت)، مرکز تحقیق و توسعه‌ی علوم انسانی، ۱۳۹۱.
- [۵] فروند، جان، آمار ریاضی، انتشارات مرکز نشر دانشگاهی، ۱۳۸۷.
- [6] JM. Darley, B. Latane, *Bystander Intervention in Emergencies: Diffusion of Responsibility*, Journal of Personality and Social Psychology, 8 (1968), pp. 377–38.
- [7] A.M. Rosenthal, *Thirty-eight witnesses*, Berkeley: University of California Press, 1999.
- [8] A.M. Rosenthal, *Thirty-eight witnesses*, The Kitty Genovese case, MC Grow Hill, 1964.

پست الکترونیکی: g9218740513@ihu.ac.ir
 پست الکترونیکی: mshahrezaee@iust.ac.ir
 پست الکترونیکی: ardeshir79@yahoo.com



معرفی روش ممان متغیر در تشخیص و طبقه بندی انواع مختلف هواپیما

محمد سعید علمداری*
دانشگاه جامع امام حسین (ع)

محسن شاه رضایی
دانشگاه جامع امام حسین (ع)

چکیده

در این مقاله روش ممان متغیر معرفی و سپس به کمک آن به شناسایی و طبقه بندی ۶ مدل هواپیما Phantom، Mirage، MIG، F105، F104، B57 در زاویه های دید دلخواه می پردازیم. در هر مدل ۲۲ نمونه تصویر در زوایای دید متفاوت در نظر گرفته شد و در مجموع ۱۳۲ تصویر مورد آزمایش قرار گرفتند. معیار شناسایی برای طبقه بندی ۶ مدل هواپیما بر اساس قانون بیز و قانون نزدیکترین همسایگی در نظر گرفته شد و بر اساس آزمایشات انجام شده، بدین نتیجه رسیدیم که بهترین طبقه بندی به قانون نزدیکترین همسایگی متعلق است که در ۶ مورد طبقه بندی نادرست داشت، سایر نتایج نیز ارائه شده است.

واژه های کلیدی: تشخیص الگو، قانون بیز، قانون نزدیکترین همسایگی، ممان متغیر، طبقه بندی هواپیما

Mathematics Subject Classification [2010]: 13D45, 39B42

۱ مقدمه

تابع پیوسته دو بعدی نظیر $f(x,y)$ را در نظر می گیریم و حال ممان مرتبه $p+q$ برای این تابع به شکل زیر تعریف می شود:

$$m_{pq} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x^p y^q f(x,y) dx dy \quad \text{for } p, q = 0, 1, 2, \dots$$

بر اساس تئوری یکتایی اگر یک تابع چندقسمتی پیوسته و دارای مقادیر غیر صفر باشد، ممان های تمامی مرتبه ها وجود داشته و سلسله ممان های m_{pq} بطور یکتا توسط $f(x,y)$ تعیین می شوند نکته قابل ذکر این است که عکس این مطلب نیز برقرار است، یعنی از روی m_{pq} می توان یک تابع $f(x,y)$ بدست آورد. ممان های مرکزی به فرم زیر تعریف می شوند.

$$m_{pq} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x - \bar{x})^p (y - \bar{y})^q f(x,y) dx dy \quad \text{for } p, q = 0, 1, 2, \dots$$

که در آن :

$$\bar{x} = \frac{m_{10}}{m_{00}}$$

$$\bar{y} = \frac{m_{01}}{m_{00}}$$

* سخنران



برای تصاویر دیجیتال رابطه بالا بصورت زیر درمی آید:

$$\mu_{pq} = \sum_x \sum_y (x - \bar{x})^p (y - \bar{y})^q f(x, y)$$

و ممان های مرکزی تا مرتبه سوم عبارتند از:

$$\mu_{00} = m_{00}$$

$$\mu_{10} = \sum_x \sum_y (x - \bar{x})^1 (y - \bar{y})^0 f(x, y) = \mu_{01} = 0$$

$$\mu_{11} = \sum_x \sum_y (x - \bar{x})^1 (y - \bar{y})^1 f(x, y) = m_{11} - \bar{y}m_{10}$$

$$\mu_{20} = \sum_x \sum_y (x - \bar{x})^2 (y - \bar{y})^0 f(x, y) = m_{20} - \bar{x}m_{10}$$

$$\mu_{02} = \sum_x \sum_y (x - \bar{x})^0 (y - \bar{y})^2 f(x, y) = m_{02} - \bar{y}m_{01}$$

$$\mu_{30} = \sum_x \sum_y (x - \bar{x})^3 (y - \bar{y})^0 f(x, y) = m_{30} - 3\bar{x}m_{20} + 2\bar{x}^2 m_{10}$$

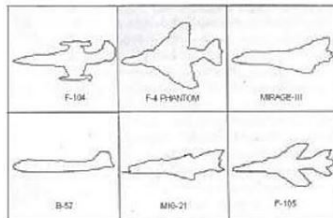
$$\mu_{12} = \sum_x \sum_y (x - \bar{x})^1 (y - \bar{y})^2 f(x, y) = m_{12} - 2\bar{y}m_{11} - \bar{x}m_{02} + 2\bar{y}^2 m_{10}$$

$$\mu_{21} = \sum_x \sum_y (x - \bar{x})^2 (y - \bar{y})^1 f(x, y) = m_{21} - 2\bar{x}m_{11} - \bar{y}m_{20} + 2\bar{x}^2 m_{10}$$

$$\mu_{03} = \sum_x \sum_y (x - \bar{x})^0 (y - \bar{y})^3 f(x, y) = m_{03} - 3\bar{y}m_{02} + 2\bar{y}^2 m_{01}$$

۲ استفاده از ممان برای تشخیص الگوی هواپیما

استفاده از ممان ها برای شناسایی الگوی هواپیماها ، اولین بار توسط دکتر دودانی و همکاران ایشان انجام گرفت. شکل زیر تصاویر هواپیماهایی را که در این آزمایش مورد شناسایی قرار گرفتند نشان می دهد:



شکل ۱: ۶ مدل هواپیما نمونه جهت انجام آزمایش

در این مقاله دو دستگاه مختصات ، اولی دستگاه XYZ که متصل به هواپیماست و در اینصورت جهت مثبت محور X به سمت دماغه ، جهت مثبت محور Y به سمت بال راست و جهت مثبت محور Z به سمت کف هواپیماست و دومی دستگاه XYZ به طوری که XZ بیانگر طول و عرض نمایشگر و محور Y در راستای محور بینایی دوربین است.



بردار ویژگی را بصورت یک بردار ۱۴ مولفه ای تعریف می کنیم که ۷ مولفه اول آن ، ممان های بدست آمده از شکل مرزی و ۷ مولفه بعدی ممان های بدست آمده از تصویر سایه ای می باشند.

$$\rho^i = \rho^i_{1}, \rho^i_{2}, \dots, \rho^i_{14}$$

$$\rho^i_{i} = M^i_{i} \quad i = 1, 2, \dots, 7$$

$$\rho^i_{i+7} = M^i_{i} \quad i = 1, 2, \dots, 7$$

پس از تعریف بردار ویژگی ، نوبت به تعریف تصاویری می رسد که در نظر داریم بردار ویژگی را برای آنها تعیین کنیم. برای این منظور « دامنه موثر » برای چرخش φ و برای زاویه سمت ψ را تعریف می کنیم. پس از تعریف و ذخیره ویژگی های هر تصویر ، نوبت به انتخاب معیار برای شناسایی آنها می رسد.

۳ معیار شناسایی با استفاده از قانون بیز برای طبقه بندی هواپیما

فرض کنید

$$w = (i, \psi, \varphi)i$$

φ, ψ به ترتیب زاویه های فراز و چرخش آن هستند.

همچنین فرض می کنیم، فضایی که این متغیر در آن تعریف شده است ، بصورت زیر باشد:

$$\Omega = (i \in 1, 2, \dots, 6) \times \left(-\frac{\pi}{4} \leq \psi \leq \frac{\pi}{4}\right) \times \left(0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4}\right)$$

با داشتن یک ρ^i معلوم و اطلاعات قبلی w ، لازم است که w عضو Ω را به گونه ای تعیین نماییم که احتمال بعدی $P(w/\rho^i)$ حداکثر شود.

بر اساس معیار بیس داریم:

$$P(w/\rho^i) = \frac{P(\rho^i/w)P(w)}{P(\rho^i)}$$

که در آن $P(w)$ احتمال پیشین w و $P(\rho^i/w)$ احتمال وقوع ρ^i به شرط وقوع متغیر تصادفی w است. $P(\rho^i)$ نیز احتمال وقوع ρ^i مستقل از w می باشد. در این مقاله برای تعیین $P(w)$ فرض می کنیم:

$$P(w) = P(i)P(\psi/\psi_0)P(\varphi/\varphi_0)$$

که در آن ψ_0, φ_0 به ترتیب زاویه چرخش و سمت می باشند.

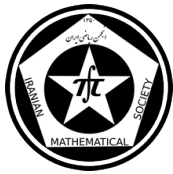
برای تعیین $P(\rho^i/w)$ فرض می کنیم که توزیع ρ^i بر اساس مقدار متوسط ρ_0 و ماتریس کوواریانس \sum_n است که اولی به

$$P(\rho^i/w) = N(\rho_0(w), \sum_n)$$

یعنی: W مستقل از ψ است

(w) از همان مجموعه تصاویر ذخیره شده بدست می آید و ماتریس کوواریانس نوین بر اساس تجربه تعیین می گردد، حال

با تعیین w به گونه ای که احتمال $P(w/\rho^i)$ را حداکثر کند ، مشخص می شود که w متعلق به کدام طبقه می باشد.



۴ معیار شناسایی با استفاده از قانون نزدیکترین همسایگی برای طبقه بندی هواپیما

فرض کنیم ρ_l مشاهده ناشناخته ای باشد برای کلاس بندی آن ابتدا فرض کنیم فاصله متناظر با همسایگی ها حول مشاهده ناشناخته ρ_l را با d_i که $i=1,2,\dots,k$ نشان می دهیم و وزن مرتبط با z امین نزدیک ترین همسایگی بصورت زیر تعریف می گردد:

$$\omega_j = \begin{cases} \frac{d_k - d_j}{d_k - d_1} & \text{if } d_k \neq d_1 \\ 1 & \text{if } d_k = d_1 \end{cases}$$

پس از محاسبه وزن های ω_j که محدوده بین صفر و یک می باشند، مشاهده ناشناخته ρ_l به کلاسی متعلق است که وزن ها در میان مجموع k نزدیکترین همسایگی بیشترین مقدار را دارد.

۵ نتایج

آزمایشات بر اساس قانون بیز و قانون نزدیکترین همسایگی و تکنیک های اول تا چهارم بر روی ۱۳۲ تصویر نمونه که شامل ۶ مدل هواپیما Phantom، Mirage، MIG، F۱۰۵، F۱۰۴، B۵۷ بود انجام شده است. نتیجه آزمایشات بصورت جدول زیر می باشد:

جدول ۱: نتایج آزمایش شناسایی ۶ نمونه هواپیما برای ۱۳۲ تصویر نمونه

مجموع	Phantom	Mirage	MIG	F۱۰۵	F۱۰۴	B۵۷	مشاهده گر مورد استفاده
۶	۱	۰	۰	۲	۳	۰	قانون نزدیکترین همسایگی
۹	۲	۰	۲	۲	۲	۱	قانون بیز
۱۰	۲	۱	۳	۲	۲	۰	تکنیک اول
۱۰	۲	۱	۳	۲	۲	۰	تکنیک دوم
۱۴	۳	۲	۴	۰	۳	۲	تکنیک سوم
۲۸	۵	۲	۱۰	۲	۷	۲	تکنیک چهارم

بهترین طبقه بندی زمانی انجام می گیرد که تعداد طبقه بندی نادرست کمترین باشد و طبق نتایج ثبت شده در جدول مشاهده می گردد بهترین طبقه بندی برای قانون نزدیکترین همسایگی است.

مراجع

- [1] S.A.Dudani, K. J.Breeding and R.B.Mc Ghee, "Aircraft Identification by Moment Invariants", IEEE Transaction on Computers.
- [2] M. K. Hu, "Visual pattern recognition by moment invariants"IRE Trans. Informatin
- [3] J. Sklansky and G. A. Davidson, "Recognizing three-dimensional objects by their silhouettes" J. Soc. Photo-Opt. Instrum.
- [4] FRANK Y. SHIH " Image Processing and Pattern Recognition Fundamentals and Techniques"