فرض می کنیم که سیستم خطی دارای n معادله و n مجهول باشد و ماتریس ضرایب سیستم نامنفرد باشد و کهادهای اصلی پیشرو آن ناصفر باشند. در این صورت ماتریس ضرایب سیستم رامی توان به دو سیستم بالا و پایین مثلثی به صورت زیر تجزیه کنیم.

$$A = LU$$

$$L = \begin{bmatrix} l_{11} & & & 0 \\ l_{21} & l_{22} & & \\ \vdots & & \ddots & \\ l_{n1} & l_{n2} & \cdots & l_{nn} \end{bmatrix} \quad , \quad U = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & \cdots & u_{1n} \\ & u_{22} & \cdots & u_{2n} \\ & & \ddots & \\ & 0 & & u_{nn} \end{bmatrix}$$

با استفاده از قانون ضرب ماتریسی ، L را در U ضرب می کنیم و عناصر حاصله را با درایه های متناظر ماتریس A مقایسه می کنیم.

حاصل ضرب سطر i ام از L وستون j ام از U عبارت است از:

$$\begin{aligned} &l_{i1}u_{1j} + l_{i2}u_{2j} + \ldots + l_{in}u_{nj} = a_{ij} && i, j = 1(1)n \\ &l_{ij} = 0 && j \succ i \\ &u_{ij} = 0 && i \succ j \end{aligned}$$

در رابطه فوق تعداد مجهولات از تعداد روابط بیشتر است (n مجهول بیشتر) لذا برای این که درایه هایی به صورت منحصر به فرد بیابیم لازم است که:

$$u_{ii} = 1 \; i = 1(1)n$$

در این صورت می دانیم که همه درایه های اولین ستون U معلوم هستند .لذا می توان همه سطرهای L را در ستون اول U ضرب کرد .بنابراین داریم :

$$\begin{aligned} &l_{i1} = a_{i1} && i = 1(1)n \\ &u_{1j} = {a_{1j}}/{l_{11}} && j = 2(1)n \end{aligned}$$

ابتدا اولین ستون L و سپس اولین سطر U را تعیین کردیم.حال دومین ستون L و آنگاه دومین سطر U را پیدا می کنیم.

$$\begin{aligned} &l_{i2} = a_{i2} - l_{i1}u_{12} && i = 2(1)n \\ &u_{2j} = {(a_{2j} - l_{21}u_{1j})}/{l_{22}} && j = 3(1)n \end{aligned}$$

$$l_{ij} = a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{ik} u_{kj} \qquad i \geq j$$

$$u_{ij} = \frac{\left(a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik} u_{kj}\right)}{l_{ii}} \qquad i < j$$

و سپس سومین ستون L و

سومین سطر U را محاسبه می کنیم و ادامه می دهیم .یعنی به ترتیب:

پس از تعیین درایه های L و U سیستم را به صورت زیر تجزیه می کنیم.

$$AX = b$$
$$LUX = b$$

وسیستم را به دو سیستم بالا و پائین مثلثی تبدیل می کنیم.

$$UX = Z \qquad (1)$$
$$LZ = b \qquad (2)$$

ابتدا سیستم (2) را که سیستم پائین مثلثی است حل کرده و با استفاده از الگوریتم جایگزینی از بالا $z_1, z_2, ..., z_n$ را می یابیم.سپس سیستم (1) را با استفاده از الگوریتم جایگزینی از پائین حل می کنیم و $x_1, ..., x_{n-1}, x_n$ را به دست می آوریم.

مثال۱:

سیستم داده شده زیر را با روش تجزیه مثلثی حل کنید.

$$\begin{cases} 8x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 8 \\ x_1 - 8x_2 + 3x_3 = -4 \\ 2x_1 + x_2 + 9x_3 = 12 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} l_{11} & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & u_{12} & u_{13} \\ 0 & 1 & u_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 2 & -2 \\ 1 & -8 & 3 \\ 2 & 1 & 9 \end{bmatrix}$$

$$l_{11} = 8 \quad , \quad l_{21} = 1 \quad , \quad l_{31} = 2$$

$$u_{12} = \frac{a_{12}}{l_{11}} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4} \quad , \quad u_{13} = \frac{a_{13}}{l_{11}} = \frac{-2}{8} = -\frac{1}{4}$$

$$l_{22} = a_{22} - l_{21}u_{12} = -8 - 1\times\frac{1}{4} = \frac{-33}{4}$$

$$l_{32} = a_{32} - l_{31}u_{13} = 1 - 2\times(\frac{1}{4}) = \frac{1}{2}$$

$$u_{23} = (a_{23} - l_{21}u_{13}) / l_{22} = \frac{3 - 1\times(-\frac{1}{4})}{-\frac{33}{4}} = -\frac{13}{33}$$

$$l_{31}u_{13} + l_{32}u_{23} + l_{33} = 9 \quad \Rightarrow \quad l_{33} = 9 - l_{31}u_{13} - l_{32}u_{23} = 9 - 2(\frac{-1}{4}) - \frac{1}{2}(-\frac{13}{33}) = \frac{320}{33}$$

$$\begin{cases} LZ = b \\ UX = Z \end{cases} \qquad \begin{bmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 1 & -\frac{33}{4} & 0 \\ 2 & \frac{1}{2} & \frac{320}{33} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ -4 \\ 12 \end{bmatrix} \Rightarrow z_1 = 1 \quad , z_2 = \frac{20}{33} \quad , z_3 = 1$$

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 1 & -\frac{13}{33} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{20}{33} \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_3 = 1 \\ x_2 = 1 \\ x_1 = 1 \end{cases}$$

مثال۲:

سیستم داده شده زیر را با روش تجزیه مثلثی حل کنید.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ 4x_1 + 3x_2 - x_3 = 6 \\ 3x_1 + 5x_2 + 3x_3 = 4 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & -1 \\ 3 & 5 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_{11} & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & u_{12} & u_{13} \\ 0 & 1 & u_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$l_{11} = 1 \quad , \quad l_{21} = 4 \quad , \quad l_{31} = 3$$

$$u_{12} = {a_{21}}/{l_{11}} = \frac{1}{1} = 1$$

$$u_{13} = \frac{a_{31}}{l_{11}} = \frac{1}{1} = 1$$

$$l_{22} = a_{22} - l_{21}u_{12} = 3 - 4(1) = -1$$

$$l_{32} = a_{32} - l_{31}u_{12} = 5 - 3 = 2$$

$$u_{13} = \frac{a_{13}}{l_{11}} = 1$$

$$u_{23} = {(a_{23} - l_{21}u_{13})}/{l_{22}} = \frac{-1-4}{-1} = 5$$

$$l_{33} = a_{33} - l_{31}u_{13} - l_{32}u_{23} = 3 - 3 - 2\times 5 = -10$$

$$LZ = b \quad \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & -10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 6 \\ 4 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow z_1 = 1 \quad , z_2 = -2 \quad , z_3 = -\frac{1}{2}$$

$$UX = Z \quad \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \quad \Rightarrow x_3 = -\frac{1}{2} \quad , x_2 = {1}/{2} \quad , x_1 = 1$$