جزوه مدارهای الکتریکی ۲

بهروز آدینه

فصل ۴

تبدیل لاپلاس

۴-۱ مقدمه

هدف از این فصل، بحث و توسعه درست آن مقدار از روش تبدیل لاپلاس است که ما را به استفاده از این روش در مطالعه شبکه‌های خطی تغییرناپذیر با زمان، قادر می‌سازد. تبدیل لاپلاس (با فامیل نزدیکش، تبدیل فوریه) یک وسیله اساسی برای مطالعه سیستم‌های خطی تغییرناپذیر بازمان است. به عنوان مثال، در سیستم‌های الکترومکانیکی (میکروفون‌ها، بلندگوها، مبدل‌های الکترومغناطیسی و غیره) یا در سیستم‌های ارتباطی، که در آن‌جا خواص به هم پیوستن شبکه‌ها، آنتن‌ها و محیط‌های انتشار را مطالعه می‌کنیم. تنها آن خواص تبدیل لاپلاس را توسعه خواهیم داد که منظور کنونی ما را برمی‌اورد، لیکن دانشجویان در سایر درس‌های خود، با جنبه‌های دیگر تبدیل لاپلاس آشنا شده و فرصتی برای درک عمیق این موضوع، به دست خواهند آورد [۱].

باید تاکید شود که تبدیل لاپلاسریال یک وسیله بسیار مهم و یک روش موثر برای مطالعه شبکه‌های خطی تغییرناپذیر بازمان می‌باشد، اما در مورد شبکه‌های تغییرپذیر بازمان و یا غیرخطی، تقریبا بی‌فایده است [۱].

تبدیل لاپلاس، حل معادلات دیفرانسیل خطی را به حل معادلات جبری خطی کاهش می‌دهد. برای یک تابع زمانی که در فاصله $[0,\infty)$ تعریف می‌گردد، تبدیل لاپلاس، تابع دیگری را که در صفحه فرکانس مختلط، یعنی صفحه s، تعریف می‌شود ارتباط می‌دهد [۱].

اهمیت تبدیل لاپلاس، از حقایق دیگری نیز ناشی می‌شود: (۱) نظریه تبدیل لاپلاس مفهوم تابع شبکه را بکار می‌برد. از آنجایی که توابع شبکه را می‌توان به طور تجربی با سنجش حالت دایمی سینوسی (با دقت بسیار زیاد) بدست آورد، تبدیل لاپلاس به ما کمک می‌کند که مسائل را برحسب

توابع شبکه که کار کردن با آن‌ها اغلب راحت‌تر از کار کردن با پاسخ‌های ضربه می‌باشد، تصور کنیم.
(۲) تبدیل لاپلاس رابطه نزدیکی را که میان رفتار حوزه زمانی شبکه (مثلا مانند شکل‌موج‌های روی اسیلوسکوپ) و رفتار حالت دایمی سینوسی آن وجود دارد، نمایش می‌دهد [۱].

۴-۲ تعاریف، روابط و قضیه‌های تبدیل لاپلاس

چنانچه قبلا گفته شد، ایده اصلی تبدیل لاپلاس در این است که در مقابل یک تابع زمانی f که در فاصله زمانی $[\circ, \infty)$ تعریف می‌شود، تابع F از صفحه فرکانس مختلط s را مربوط می‌سازد. این تبدیل به طریق زیر ساخته می‌شود: ابتدا $f(t)$ را در عبارت e^{-st} ضرب می‌کنیم و از تابع بدست آمده برحسب t، یعنی $f(t)e^{-st}$، در فاصله $\circ$ تا ∞ انتگرال می‌گیریم و چنین بدست می‌آوریم [۱]:

$$\mathcal{L}[f(t)] = F(s) \triangleq \int_{\circ}^{+\infty} f(t)e^{-st}dt \tag{۴-۱}$$

$F(s)$ را تبدیل لاپلاس $f(t)$ و متغیر s را فرکانس مختلط می‌نامند [۱].

برای نشان دادن تبدیل‌های لاپلاس، در همه‌جا حروف بزرگ را به کار خواهیم برد. بنابراین، تبدیل‌های لاپلاس $v(t)$ و $j(t)$ به ترتیب $V(s)$ و $J(s)$ می‌باشند.

مثال ۴-۱ تبدیل لاپلاس $f(t) = ۱$ را بدست آورید.

حل- داریم:

$$L\{۱\} = \int_{\circ}^{\infty} ۱ \times e^{-st}dt = \left[\frac{e^{-st}}{-s}\right]_{\circ}^{\infty} = \frac{۱}{s}$$

در جدول ۴-۱، تبدیل لاپلاس‌های مهمی که در این درس موردن نیاز خواهد شد آورده شده است. در جدول ۴-۲، برخی خواص مهم و اساسی تبدیل لاپلاس بیان شده است.

جدول ۴-۱: تبدیل لاپلاس‌های مهم t4-1

ردیف	$f(t)$	$F(s)$
۱	a	$\frac{a}{s}$
۲	e^{at}	$\frac{۱}{s-a}$

۳	$\sin \omega t$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$
۴	$\cos \omega t$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$
۵	t^n	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
۶	$u(t)$	$\frac{1}{s}$
۷	$\delta(t)$	1
۸	$e^{-at}\sin \omega t$	$\frac{\omega}{(s+a)^2+\omega^2}$
۹	$e^{-at}\cos \omega t$	$\frac{s+a}{(s+a)^2+\omega^2}$
۱۰	$t^n e^{-at}$	$\frac{n!}{(s+a)^{n+1}}$

قضیه ۴-۱ (خاصیت خطی بودن)- فرض کنید $f_1(t)$ و $f_2(t)$ دو تابع باشند که تبدیل لاپلاس آن‌ها موجود است. اگر c_1 و c_2 دو ثابت دلخواه باشند، آنگاه [۳]:

$$L\{c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t)\} = c_1 L\{f_1(t)\} + c_2 L\{f_2(t)\}$$

مثال ۴-۲ لاپلاس عبارت مقابل را بدست آورید [۳]. $f(t) = 4t^2 - 3\cos 2t + 5e^{-t}$

حل- داریم:

$$L\{4t^2 - 3\cos 2t + 5e^{-t}\} = 4L\{t^2\} - 3L\{\cos 2t\} + 5L\{e^{-t}\} = \frac{8}{s^3} - \frac{3s}{s^2+4} + \frac{5}{s+1}$$

قضیه ۴-۲ (قضیه اول انتقال) اگر $L\{f(t)\} = F(s)$ آنگاه:

$$L\{e^{at} f(t)\} = F(s-a)$$

مثال ۴-۳ لاپلاس عبارت زیر را حساب کنید [۳]. $f(t) = e^{-t}\cos 2t$

حل- می‌دانیم: $L\{\cos 2t\} = \frac{s}{s^2+4}$ پس:

$$L\{e^{-t}\cos 2t\} = \frac{s+1}{(s+1)^2+4}$$

مثال ۴-۴ لاپلاس عبارت زیر را حساب کنید [۳]. $f(t) = t^{۲}e^{۳t}$

حل- می‌دانیم: $L\{t^{۲}\} = \frac{۲}{s^{۳}}$ پس:

$$L\{t^{۲}e^{۳t}\} = \frac{۲}{(s-۳)^{۳}}$$

قضیه ۴-۳ (تبدیل لاپلاس مشتق)- فرض کنید $f(t)$ برای $t \geqslant ۰$ پیوسته و $f'(t)$ برای $t \geqslant ۰$ پیوسته قطعه‌ای باشد و تبدیل لاپلاس هر دو تابع برای $s > s_۰$ موجود باشند که $s_۰$ عددی مفروض است.در این صورت:

$$L\{f'(t)\} = sL\{f(t)\} - f(۰^{-})$$

همچنین داریم:

$$L\{f''(t)\} = s^{۲}L\{f(t)\} - sf(۰^{-}) - f'(۰^{-})$$
$$L\{f^{(n)}(t)\} = s^{n}L\{f(t)\} - s^{n-۱}f(۰^{-}) - s^{n-۲}f'(۰^{-}) - \cdots - f^{(n-۱)}(۰^{-})$$

مثال ۴-۵ لاپلاس عبارات زیر را محاسبه کنید.

$$i = ۲\frac{dv}{dt}, \quad v = ۰/۵\frac{di}{dt} \qquad (۴-۲)$$

حل- داریم:

$$L\{i = ۲\frac{dv}{dt}\} \Rightarrow I = ۲\left(sV - v(۰^{-})\right) = ۲sV - ۲v(۰^{-})$$
$$L\{v = ۰/۵\frac{dv}{dt}\} \Rightarrow V = ۰/۵\left(sI - i(۰^{-})\right) = ۰/۵sI - ۰/۵i(۰^{-})$$

در جدول ۴-۲، برخی خواص مهم و اساسی دیگر تبدیل لاپلاس بیان شده است.

جدول ۴-۲: خواص مهم تبدیل لاپلاس t4-2

ردیف	خاصیت	حوزه زمان	حوزه لاپلاس
۱	انتقال حوزه زمان	$f(t-t_۰)$	$e^{-t_۰ s}F(s)$
۲	انتقال حوزه s	$e^{s_۰ t}f(t)$	$F(s-s_۰)$
۳		$f(at)$	$\frac{۱}{\|a\|}F(\frac{s}{a})$
۴	انتگرال‌گیری	$\int_۰^t f(\tau)d\tau$	$\frac{F(s)}{s}$

۴-۳ مدل‌سازی عناصر مدار الکتریکی در حوزه لاپلاس

۴-۳-۱ منابع

۴-۳-۱-۱ منابع مستقل

در حالت کلی، برای انتقال منابع مستقل به حوزه لاپلاس، مقدار این منابع را به حوزه لاپلاس انتقال می‌دهید. به عنوان مثال، منبع ولتاژ مستقل $۲\,\mathrm{V}$ در حوزه لاپلاس با منبع ولتاژ مستقل $\frac{۲}{s}$ مدل می‌شود. منبع جریان مستقل $۳\cos ۲t$ در حوزه لاپلاس با منبع جریان مستقل $\frac{۳s}{s^۲+۴}$ مدل خواهد شد.

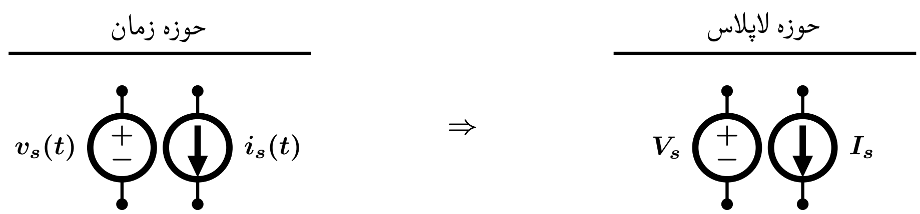


fig4-1

شکل ۴-۱: تبدیل لاپلاس منابع مستقل

۴-۳-۱-۲ منابع وابسته

این منابع در حوزه لاپلاس بدون تغییر باقی می‌مانند. فقط از حروف بزرگ برای نمایش آن‌ها استفاده می‌کنیم.

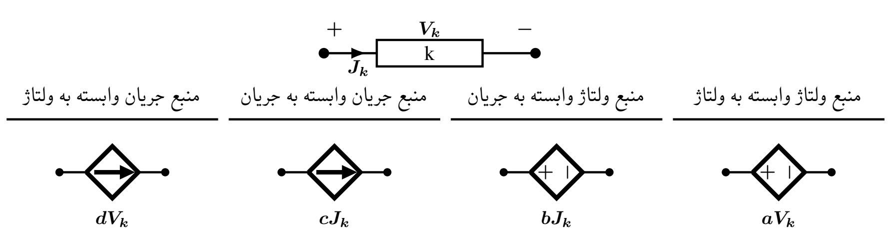


fig4-2

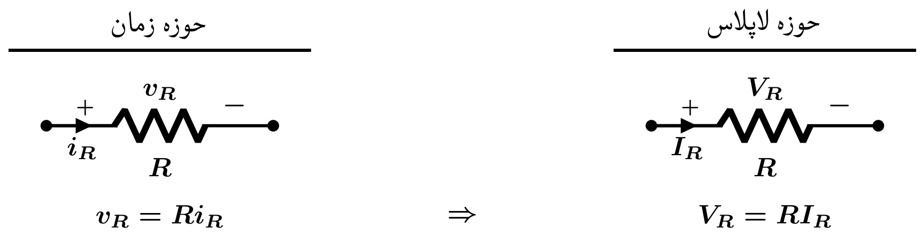
شکل ۴-۲: تبدیل لاپلاس منابع وابسته

۴-۳-۲ مقاومت، سلف و خازن

۴-۳-۲-۱ مقاومت

طبق رابطه زیر، مقاومت R در حوزه لاپلاس با امپدانس R نمایش داده می‌شود.

$$\mathcal{L}\left[v_R = Ri_R\right] \Rightarrow V_R = RI_R \tag{۴-۳}$$



شکل ۴-۳: مقاومت در حوزه زمان و لاپلاس fig4-3

۴-۳-۲-۲ خازن

طبق رابطه زیر، خازن C را در حوزه لاپلاس با امپدانس $\frac{1}{Cs}$ موازی با منبع جریان $Cv_C(0^-)$ مدل می‌کنیم. در صورتی که ولتاژ اولیه خازن صفر باشد، آنگاه خازن تنها به صورت امپدانس $\frac{1}{Cs}$ ظاهر می‌گردد.

$$\mathcal{L}\left[i_C = C\frac{dv_C}{dt}\right] \Rightarrow I_C = CsV_C - Cv_C(0^-) \tag{۴-۴}$$ eq4-3

همانطور که در شکل ۴-۴ نشان داده شده است، در حوزه لاپلاس خازن را می‌توان به دو صورت مدل نمود. به جهت منبع ولتاژ و جریان در مدل‌های لاپلاس خازن توجه کنید. از آنجایی که در هر دو مدل، امپدانس خازن مد نظر بوده است، مقدار آن $\frac{1}{Cs}$ خواهد بود. که از هر دو مدل ارائه شده بدست خواهد آمد. مدل سمت راست را می‌توان با محاسبه V_C از رابطه (۴-۴) بدست آورد.

۴-۳-۲-۳ سلف

طبق رابطه زیر، سلف L را در حوزه لاپلاس با یک امپدانس Ls سری با منبع ولتاژ $Li_L(0^-)$ مدل می‌کنیم. در صورتی که جریان اولیه سلف صفر باشد، آنگاه سلف تنها به صورت یک امپدانس Ls ظاهر می‌گردد.

$$\mathcal{L}\left[v_L = L\frac{di_L}{dt}\right] \Rightarrow V_L = LsI_L - Li_L(0^-) \tag{۴-۵}$$ eq4-4

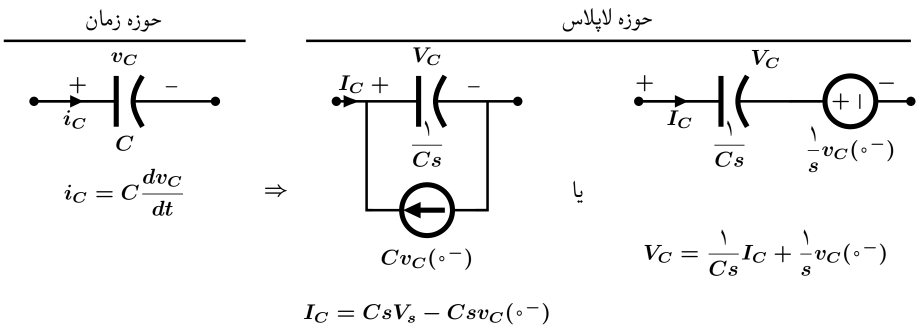


fig4-4

شکل ۴-۴: خازن در حوزه زمان و لاپلاس

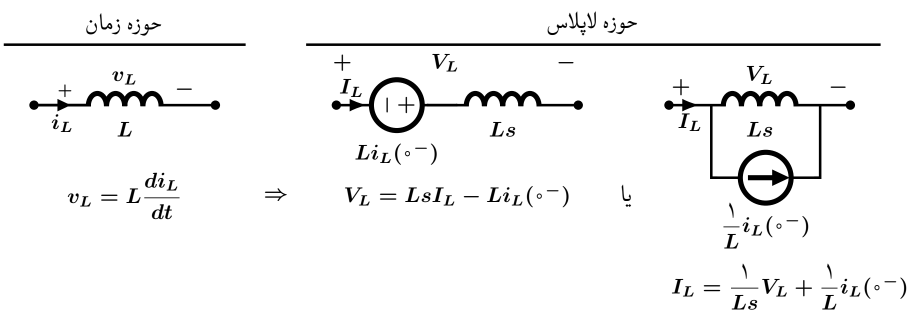


fig4-5

شکل ۴-۵: سلف در حوزه زمان و لاپلاس

همانطورکه در شکل ۴-۵ نشان داده شده است، در حوزه لاپلاس سلف را می‌توان به دو صورت مدل نمود. به جهت منبع ولتاژ و جریان در مدل‌های لاپلاس سلف توجه کنید. از آنجایی که در هر دو مدل، امپدانس سلف مد نظر بوده است، مقدار آن Ls خواهد بود، که از هر دو مدل ارائه شده بدست خواهد آمد. مدل سمت راست را می‌توان با محاسبه I_L از رابطه (۴-۵) بدست آورد.

۴-۴ تحلیل مدارهای الکتریکی به روش تبدیل لاپلاس

یکی از استفاده‌های اصلی تبدیل لاپلاس، حل معادلات انتگرال دیفرانسیل خطی با ضرایب ثابت است [۱]. در مدارهای الکتریکی، ابتدا باید معادلات مدار را در حوزه زمان بنویسید و سپس، از این معادلات تبدیل لاپلاس گرفته شود. درواقع، از این طریق حل معادلات دیفرانسیل خطی حاصل از مدارهای الکتریکی بسیار آسان خواهد بود. اما در این جزوه ما از این روش استفاده نمی‌کنیم.

روش دیگر استفاده از تبدیلات لاپلاس برای حل مدارهای الکتریکی به صورت زیر است:

۱- با جایگذاری المان‌های مدار با حوزه لاپلاس آن‌ها طبق شکل‌های، ۴-۱، ۴-۲، ۴-۳ و ۴-۴، مدار را از حوزه زمان به حوزه لاپلاس منتقل می‌کنیم.

۲- معادلات مدار را در حوزه لاپلاس می‌نویسیم.

۳- پس از محاسبه پاسخ مورد نظر، با استفاده از عکس تبدیل لاپلاس، معادل حوزه زمانی متغیر مورد نظر را بدست می‌آوریم.

نکته

پاسخ پله: پاسخ حالت صفر مدار به ورودی پله واحد ($u(t)$) را اصطلاحا پاسخ پله می‌نامند.

پاسخ ضربه: پاسخ حالت صفر مدار به ورودی ضربه واحد ($\delta(t)$) را اصطلاحا پاسخ ضربه می‌نامند.

بنابراین، اگر اصطلاحات پاسخ حالت صفر، پاسخ پله یا پاسخ ضربه در سوال ذکر شد، داریم:

$$i_L(0^-) = v_C(0^-) = 0$$

ex4-3 **مثال ۴-۶** در مدار شکل ۴-۶ پاسخ ضربه $v_o(t)$ را در $t \geqslant 0$ تعیین کنید (از روش تحلیل گره استفاده کنید).

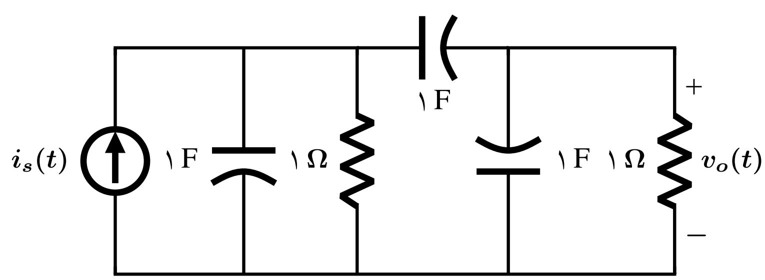


fig4-8 شکل ۴-۶: مدار مثال ۴-۶

حل: از آنجایی که پاسخ ضربه خواسته شده است ولتاژهای اولیه خازن‌ها صفر خواهد بود:

$$v_{c1}(0) = v_{c2}(0) = v_{c3}(0) = 0, \quad i_s(t) = \delta(t)$$

در ادامه مدار را در حوزه لاپلاس رسم می‌کنیم. مدار در حوزه لاپلاس در شکل ۴-۷ نشان داده شده است.

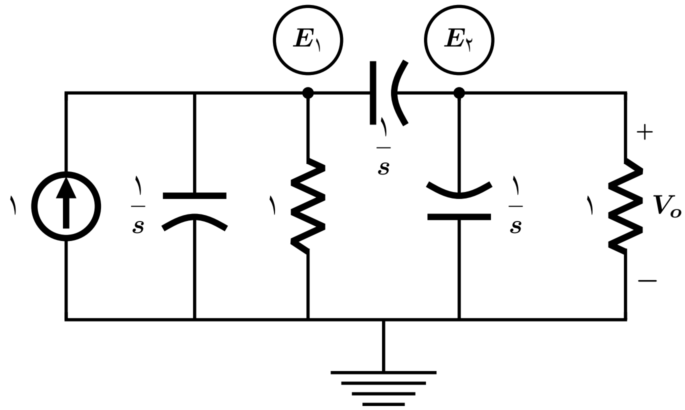


fig4-9

شکل ۴-۷: مدار مثال ۴-۶ در حوزه لاپلاس

با توجه به معادلات روش گره داریم:

$$Y_nE = I_s \Rightarrow \begin{bmatrix} ۲s+۱ & -s \\ -s & ۲s+۱ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_۱ \\ E_۲ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱ \\ ۰ \end{bmatrix}$$

$$V_o = E_۲ = \frac{\begin{vmatrix} ۲s+۱ & ۱ \\ -s & ۰ \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} ۲s+۱ & -s \\ -s & ۲s+۱ \end{vmatrix}} = \frac{s}{(۲s+۱)(۲s+۱)-(-s)(-s)}$$
$$= \frac{s}{۴s^۲+۴s+۱-s^۲} = \frac{s}{۳s^۲+۴s+۱}$$

ضریب بزرگترین توان s، در اینجا بزرگترین توان $s^۲$ است، یک نیست. بنابراین، باید صورت و مخرج بر آن، یعنی ۳، تقسیم کنیم. همچنین، مخرج دارای دو ریشه ۱− و $-\frac{۱}{۳}$ است. پس داریم:

$$V_o(s) = \frac{\frac{s}{۳}}{s^۲+\frac{۴}{۳}s+\frac{۱}{۳}} = \frac{\frac{s}{۳}}{(s+۱)(s+\frac{۱}{۳})} = \frac{A}{s+۱} + \frac{B}{s+\frac{۱}{۳}}$$

با روش‌های ارائه شده در بخش ۴-۵ مقادیر A و B را به صورت زیر محاسبه می‌کنیم:

$$A = (s+۱)V_o(s)\Big|_{s=-۱} = \frac{\frac{s}{۳}}{s+\frac{۱}{۳}}\Big|_{s=-۱} = \frac{-\frac{۱}{۳}}{-\frac{۲}{۳}} = \frac{۱}{۲}$$

$$B = (s+\frac{۱}{۳})V_o(s)\Big|_{s=-\frac{۱}{۳}} = \frac{\frac{s}{۳}}{s+۱}\Big|_{s=-\frac{۱}{۳}} = \frac{-\frac{۱}{۹}}{\frac{۲}{۳}} = -\frac{۱}{۶}$$

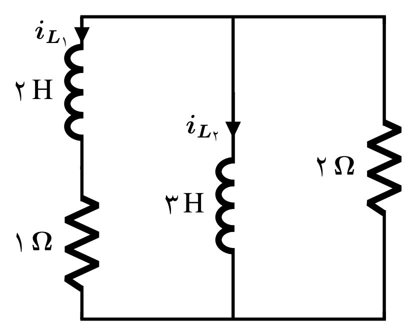
بنابراین، گسترش یافته $V_o(s)$ به صورت کسرهای جزئی به صورت زیر خواهد بود:

$$V_o(s) = \frac{۱}{۲}\frac{۱}{s+۱} - \frac{۱}{۶}\frac{۱}{s+\frac{۱}{۳}}$$

پاسخ ضربه ولتاژ خروجی در حوزه زمان به صورت زیر خواهد بود:

$$v_o(t) = L^{-۱}\left[\frac{۱}{۲}\frac{۱}{s+۱} - \frac{۱}{۶}\frac{۱}{s+\frac{۱}{۳}}\right] = \frac{۱}{۲}e^{-t} - \frac{۱}{۶}e^{-\frac{۱}{۳}t}, \quad t \geqslant ۰ \text{ برای}$$

ex4-4 **مثال ۴-۷** در مدار شکل زیر با فرض $i_{L_۱}(۰^-) = ۱۱\ \mathrm{A}$ و $i_{L_۲}(۰^-) = ۱۱\ \mathrm{A}$، پاسخ‌های $i_{L_۱}(t)$ و $i_{L_۲}(t)$ را در $t \geqslant ۰$ تعیین کنید (از روش مش برای بدست آوردن پاسخ‌ها استفاده کنید).



شکل ۴-۸: مدار مثال ۴-۷

fig4-10

حل: ابتدا باید مدار را در حوزه لاپلاس رسم کنیم. از آنجایی که روش مش باید استفاده شود، مدل سلف با منبع ولتاژ سری، که مقدار آن $Li_L(۰^-)$ است، استفاده شده است. این مدار در شکل ۴-۹ رسم شده است.

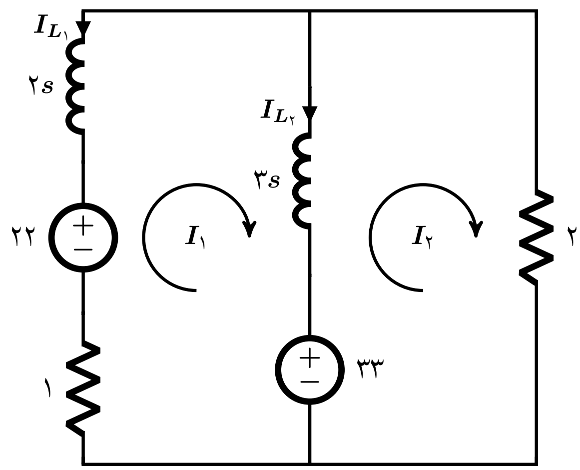


fig4-11

شکل ۴-۹: مدار مثال ۴-۷ در حوزه لاپلاس

از روابط مش استفاده می‌کنیم و جریان مش‌ها را بدست می‌آوریم:

$$
\begin{aligned}
&Z_m I = V_s \Rightarrow \begin{bmatrix} 5s+1 & -3s \\ -3s & 3s+2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 33-22 \\ -33 \end{bmatrix} \\
&I_1 = \frac{\begin{vmatrix} 11 & -3s \\ -33 & 3s+2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 5s+1 & -3s \\ -3s & 3s+2 \end{vmatrix}} = \frac{11(3s+2)-(-3s)(-33)}{(5s+1)(3s+1)-(-3s)(-3s)} \\
&\quad = \frac{33s+22-99s}{15s^2+10s+3s+2-9s^2} = \frac{-66s+22}{6s^2+13s+2} \\
&I_2 = \frac{\begin{vmatrix} 5s+1 & 11 \\ -3s & -33 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 5s+1 & -3s \\ -3s & 3s+2 \end{vmatrix}} = \frac{(5s+1)(-33)-(-3s)(11)}{6s^2+13s+2} = \frac{-165s-33+33s}{6s^2+13s+2} \\
&\quad = \frac{-132s-33}{6s^2+13s+2}
\end{aligned}
$$

با توجه به شکل مدار می‌توان جریان‌های خواسته شده را برحسب جریان مش بدست آورد. جریان

$I_{L_۱}$ به صورت زیر خواهد بود:

$$I_{L_۱}(s) = -I_۱ = \frac{۶۶s - ۲۲}{۶s^۲ + ۱۳s + ۲} = \frac{۱۱s - \frac{۲۲}{۶}}{s^۲ + \frac{۱۳}{۶}s + \frac{۲}{۶}}$$

$$\Rightarrow I_{L_۱} = \frac{۱۱s - \frac{۲۲}{۶}}{(s+۲)(s+\frac{۱}{۶})} = \frac{A}{s+۲} + \frac{B}{s+\frac{۱}{۶}}$$

$$A = (s+۲)I_{L_۱}\Big|_{s=-۲} = \frac{۱۱s - \frac{۲۲}{۶}}{(s+\frac{۱}{۶})}\Big|_{s=-۲} = \frac{-۲۲ - \frac{۲۲}{۶}}{-۲ + \frac{۱}{۶}} = \frac{-۱۳۲ - ۲۲}{-۱۲ + ۱} = \frac{۱۵۴}{۱۱} = ۱۴$$

$$B = (s+\frac{۱}{۶})I_{L_۱}\Big|_{s=-\frac{۱}{۶}} = \frac{۱۱s - \frac{۲۲}{۶}}{(s+۲)}\Big|_{s=-\frac{۱}{۶}} = \frac{-\frac{۱۱}{۶} - \frac{۲۲}{۶}}{-\frac{۱}{۶} + ۲} = \frac{-۳۳}{۱۱} = -۳$$

$$\Rightarrow I_{L_۱}(s) = \frac{۱۴}{s+۲} + \frac{-۳}{s+\frac{۱}{۶}}$$

برای محاسبه $I_{L_۲}(s)$ داریم:

$$I_{L_۲}(s) = I_۱ - I_۲ = \frac{-۶۶s + ۲۲ + ۱۳۲s + ۳۳}{۶s^۲ + ۱۳s + ۲} = \frac{۶۶s + ۵۵}{۶s^۲ + ۱۳s + ۲} = \frac{۱۱s + \frac{۵۵}{۶}}{s^۲ + \frac{۱۳}{۶}s + \frac{۲}{۶}}$$

$$\Rightarrow I_{L_۲} = \frac{۱۱s + \frac{۵۵}{۶}}{(s+۲)(s+\frac{۱}{۶})} = \frac{C}{s+۲} + \frac{D}{s+\frac{۱}{۶}}$$

$$A = (s+۲)I_{L_۲}\Big|_{s=-۲} = \frac{۱۱s + \frac{۵۵}{۶}}{s+\frac{۱}{۶}}\Big|_{s=-۲} = \frac{-۲۲ + \frac{۵۵}{۶}}{-۲ + \frac{۱}{۶}} = \frac{-۱۳۲ + ۵۵}{-۱۲ + ۱} = \frac{۷۷}{۱۱} = ۷$$

$$B = B = (s+\frac{۱}{۶})I_{L_۲}\Big|_{s=-\frac{۱}{۶}} = \frac{۱۱s + \frac{۵۵}{۶}}{s+۲}\Big|_{s=-\frac{۱}{۶}} = \frac{-\frac{۱۱}{۶} + \frac{۵۵}{۶}}{-\frac{۱}{۶} + ۲} = \frac{۴۴}{۱۱} = ۴$$

$$\Rightarrow I_{L_۲}(s) = \frac{۷}{s+۲} + \frac{۴}{s+\frac{۱}{۶}}$$

برای بدست آوردن این دو جریان در حوزه زمان داریم:

$$i_{L_1}(t) = L^{-1}\left[\frac{14}{s+2} + \frac{-3}{s+\frac{1}{6}}\right] = 14e^{-2t} - 3e^{-\frac{1}{6}t} \quad t \geqslant 0$$

$$i_{L_2}(t) = L^{-1}\left[\frac{7}{s+2} + \frac{4}{s+\frac{1}{6}}\right] = 7e^{-2t} + 4e^{-\frac{1}{6}t} \quad t \geqslant 0$$

ex4-2 **مثال ۴-۸** مدار شکل ۴-۱۰ را با روش تبدیل لاپلاس حل کنید و $i(t)$ را برای $t > 0$ بدست آورید [۱].

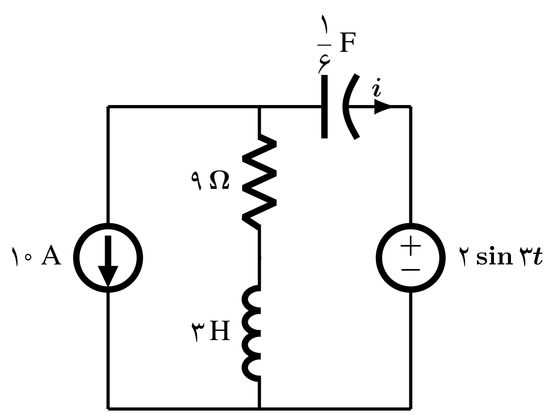


fig4-6

شکل ۴-۱۰: مدار مثال ۴-۸

حل: ابتدا شکل مدار در حوزه لاپلاس را، شکل ۴-۱۱، رسم می‌کنیم. دقت شود، از آنجایی که هیچ اطلاعاتی در مورد مقادیر اولیه سلف و خازن (نه کلید در مدار وجود دارد و نه در صورت سوال مقادیر داده شده است) وجود ندارد، مقادیر آن‌ها را صفر در نظر می‌گیریم. سپس، برای مش ۱ معادله KVL را می‌نویسیم.

$$(3s+9)\left(I(s) + \frac{10}{s}\right) + \frac{6}{s}I(s) + \frac{6}{s^2+9} = 0$$

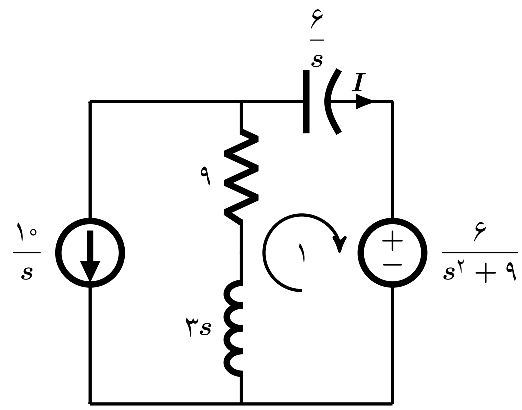


fig4-7

شکل ۴-۱۱: مدار در حوزه لاپلاس برای مثال ۴-۸

حال از رابطه KVL بدست آمده، $I(s)$ را بدست می‌آوریم:

$$\begin{aligned}
&\left(۳s+۹+\frac{۶}{۳s}\right)I(s)=-(۳s+۹)\frac{۱۰}{s}-\frac{۶}{s^۲+۹}\\
&\Rightarrow\left(\frac{۳s^۲+۹s+۶}{s}\right)I(s)=\frac{-۱۰(۳s+۹)(s^۲+۹)-۶s}{s(s^۲+۹)}\\
&\Rightarrow ۳(s+۱)(s+۲)I(s)=\frac{-۳۰s^۳-۹۰s^۲-۲۷۶s-۸۱۰}{s^۲+۹}\\
&\Rightarrow I(s)=\frac{-۱۰s^۳-۳۰s^۲-۹۲s-۲۷۰}{(s+۱)(s+۲)(s^۲+۹)}
\end{aligned}$$

حال باید لاپلاس معکوس تابع گویا $I(s)$ را محاسبه کنیم (به بخش ۴-۵ مراجعه کنید). تجزیه به کسرهای جزئی به صورت زیر خواهد بود:

$$I(s)=\frac{-۱۰s^۳-۳۰s^۲-۹۲s-۲۷۰}{(s+۱)(s+۲)(s^۲+۹)}=\frac{A}{s+۱}+\frac{B}{s+۲}+\frac{Cs+D}{s^۲+۹}$$

ضرایب A و B را به صورت زیر محاسبه می‌کنیم:

$$\begin{aligned}
A&=(s+۱)I(s)\Big|_{s=-۱}=\frac{-۱۰s^۳-۳۰s^۲-۹۲s-۲۷۰}{(s+۲)(s^۲+۹)}\Big|_{s=-۱}=\frac{۱۰-۳۰+۹۲-۲۷۰}{(۱)(۱۰)}\\
&=\frac{-۱۹۸}{۱۰}=-\frac{۹۹}{۵}\\
B&=(s+۲)I(s)\Big|_{s=-۲}=\frac{-۱۰s^۳-۳۰s^۲-۹۲s-۲۷۰}{(s+۱)(s^۲+۹)}\Big|_{s=-۲}\\
&=\frac{-۱۰(-۸)-۳۰(۴)-۹۲(-۲)-۲۷۰}{(-۱)(۱۳)}=\frac{۸۰-۱۲۰+۱۸۴-۲۷۰}{-۱۳}=\frac{۱۲۶}{۱۳}
\end{aligned}$$

برای بدست آوردن C و D به صورت زیر عمل می‌کنیم:

$$\overset{s=0}{\Longrightarrow} -270 = -\frac{99}{5}(2)(9) + \frac{126}{13}(1)(9) + D(1)(2) \Rightarrow 2D = -270 + \frac{1782}{5} - \frac{1134}{13}$$
$$2D = \frac{-17550 + 23166 - 5670}{65} \Rightarrow D = -\frac{27}{65}$$
$$\overset{s=1}{\Longrightarrow} -10 - 30 - 92 - 270 = -\frac{99}{5}(3)(10) + \frac{126}{13}(2)(10) + \left(C - \frac{27}{65}\right)(2)(3)$$
$$-402 + 594 - \frac{2520}{13} + \frac{162}{65} = 6C \Rightarrow 6C = \frac{12480 - 12600 + 162}{65} \Rightarrow C = \frac{7}{65}$$

در نتیجه، گسترش $I(s)$ به کسرهای جزئی به صورت زیر خواهد بود:

$$I(s) = \frac{-10s^3 - 30s^2 - 92s - 270}{(s+1)(s+2)(s^2+9)} = -\frac{99}{5}\frac{1}{s+1} + \frac{126}{13}\frac{1}{s+2} + \frac{1}{65}\frac{7s-27}{s^2+9}$$

اما باز هم معکوس لاپلاس کسر آخر در تبدیلات لاپلاس مشخص نیست و باید آن را به صورت زیر تغییر داد:

$$I(s) == -\frac{99}{5}\frac{1}{s+1} + \frac{126}{13}\frac{1}{s+2} + \frac{7}{65}\frac{s}{s^2+9} - \frac{9}{65}\frac{3}{s^2+9}$$

تابع زمانی جریان به صورت زیر خواهد بود:

$$i(t) = -\frac{99}{5}e^{-t} + \frac{126}{13}e^{-2t} + \frac{7}{65}\cos 3t - \frac{9}{65}\sin 3t \quad t \geqslant 0 \text{ برای}$$

۴-۵ لاپلاس معکوس

se5

تعریف ۴-۱ فرض کنید تبدیل لاپلاس تابع f موجود و تابع F باشد، یعنی

$$L\{f(t)\} = F(s) \qquad (۴-۶)$$

در این صورت f را تبدیل معکوس F می‌نامیم و می‌نویسیم:

$$f(t) = L^{-1}\{F(s)\} \qquad (۴-۷)$$

روش مناسب برای یافتن عکس تبدیل لاپلاس، استفاده از جدول تبدیل لاپلاس و خواص تبدیل لاپلاس (جدول‌های ۴-۱ و ۴-۲) است. برای این کار تبدیل لاپلاس باید به شکلی باشد که بتوان آن را به سرعت در جدول‌های ذکر شده پیدا کرد. غالبا تابع مورد نظر به شکلی نیست که بتوان آن را در جدول‌های در دسترس پیدا کرد. اگر تبدیل لاپلاس $F(s)$ در جدول نباشد، باید آن را به صورت

کسرهای جزئی بسط دهیم و $F(s)$ را برحسب توابع ساده‌ای که در جدول موجودند، بنویسیم. معمولا تابع $F(s)$ به صورت نسبت دو چندجمله‌ای برحسب s به صورت کلی زیر می‌باشد:

$$F(s) = \frac{\text{چندجمله‌ای صورت برحسب s}}{\text{چندجمله‌ای مخرج برحسب s}} = \frac{P(s)}{Q(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \cdots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0}$$

در اینجا $P(s)$ و $Q(s)$، چندجمله‌ای‌هایی برحسب متغیر فرکانس مختلط s بوده و ضرایب a_0، a_1، $\cdots$، a_n و b_0، b_1، $\cdots$، b_m اعداد حقیقی هستند. یک تابع گویا، به وسیله دو دسته از ضرایب حقیقی که چندجمله‌ای‌های صورت و مخرج را تعریف می‌کنند، کاملا مشخص می‌شود. از طرف دیگر، چندجمله‌ای‌ها را می‌توان به صورت عوامل تجزیه شده برحسب صفرهای آن‌ها نیز بیان کرد. بنابراین، یک طرز نمایش دیگر $F(s)$ به صورت زیر داده می‌شود [1]:

$$F(s) = K \frac{\prod_{i=1}^{m} (s - z_i)}{\prod_{j=1}^{n} (s - p_j)} \tag{۴-۸}$$

که در اینجا z_i، $i = 1, 2, \cdots, m$، صفرهای چندجمله‌ای صورت $P(s)$ و p_j، $j = 1, 2, \cdots, n$، صفرهای چندجمله‌ای مخرج $Q(s)$ می‌باشند. z_iها را **صفرها** و p_jها را **قطب‌های** تابع گویا می‌نامند[1] [1].

با مساوی صفر قراردادن چندجمله‌ای‌های صورت و مخرج، می‌توان قطب‌ها و صفرهای تابع گویا $F(s)$ را بدست آورد:

$$P(s) = 0 \Rightarrow s = z_1, z_2, z_3, \cdots, z_m \quad \text{صفرها}$$

$$Q(s) = 0 \Rightarrow s = p_1, p_2, p_3, \cdots, p_n \quad \text{قطب‌ها}$$

اولین گام در گسترش به صورت کسرهای جزئی، نوشتن تابع گویا به یک صورت مناسب است. یک تابع گویا را مناسب گویند اگر درجه چندجمله‌ای صورت از درجه چندجمله‌ای مخرج کمتر باشد [1]. یعنی، بالاترین توان s در چندجمله‌ای صورت باید از بالاترین توان s در چندجمله‌ای مخرج کوچک‌تر باشد. در غیر این صورت باید صورت را بر مخرج تقسیم نمود:

$$F(s) = \frac{3s^3 + 4}{s^2 - 5s + 1} = 3s + 15 + \frac{72s - 11}{s^2 - 5s + 1}$$

گام دوم گسترش به صورت کسرهای جزئی، تجزیه چندجمله‌ای مخرج $Q(s)$ و بدست آوردن قطب‌های تابع گویاست [1]. یعنی، چندجمله‌ای مخرج را به عوامل اول (قطب‌های ساده یا مکرر)

[1] فرض می‌کنیم که چندجمله‌ای‌های صورت و مخرج، عامل ضرب مشترکی ندارند.

و یا عوامل دوم با دلتای کوچک‌تر از صفر (قطب‌های مزدوج مختلط) تجزیه کرد. بنابراین، بعد از تجزیه مخرج سه حالت، قطب‌های ساده، قطب‌های مکرر و قطب‌های مختلط وجود خواهد داشت. در این گام، باید ضریب بزرگترین توان s در مخرج یک باشد در صورت داشتن ضریبی غیر از یک، تمام جملات صورت و مخرج را بر آن عدد تقسیم می‌کنیم.

۴-۵-۱ قطب‌های ساده

در این حالت $F(s)$ تنها قطب‌های ساده و حقیقی مانند $s-۱$ دارد. بحث خود را با یک مثال ساده به صورت زیر شروع می‌کنیم:

$$F(s)=\frac{P(s)}{Q(s)}=\frac{s^۲+۳s+۵}{(s+۱)(s+۲)(s+۳)}$$

بیان می‌کنیم که ثابت‌هایی مانند $K_۱$، $K_۲$ و $K_۳$ وجود دارند، به قسمی که برای تمام s داریم [۱]:

$$F(s)=\frac{s^۲+۳s+۵}{(s+۱)(s+۲)(s+۳)}=\frac{K_۱}{s+۱}+\frac{K_۲}{s+۲}+\frac{K_۳}{s+۳}$$

برای محاسبه مانده یک تابع گویای دلخواه $F(s)$ در یک قطب ساده آن، فرمولی وجود دارد که در آن مانده K_j برای قطب p_j را به صورت زیر محاسبه می‌کنند [۱]:

$$K_j=(s-p_j)F(s)\Big|_{s=p_j} \tag{۴-۹}$$

یعنی، تابع گویای بدست آمده $F(s)$ را در قطب ساده‌ای که می‌خواهیم مانده آن را حساب کنیم، ضرب می‌کنیم. سپس به جای s، مقدار قطب یعنی p_j را قرار می‌دهیم. در مثال ذکر شده، برای محاسبه مانده‌ها به صورت زیر عمل خواهیم کرد:

$$\begin{aligned}K_۱&=(s+۱)F(s)\Big|_{s=-۱}=\frac{s^۲+۳s+۵}{(s+۲)(s+۳)}\Big|_{s=-۱}=\frac{(-۱)^۲+۳\times(-۱)+۵}{(-۱+۲)(-۱+۳)}\\&=\frac{۱+-۳+۵}{۱\times۲}=\frac{۳}{۲}=۱/۵\end{aligned}$$

برای دیگر باقی‌مانده‌ها نیز به همین صورت عمل خواهیم کرد:

$$K_۲=(s+۲)F(s)\Big|_{s=-۲}=\frac{s^۲+۳s+۵}{(s+۱)(s+۳)}\Big|_{s=-۲}=\frac{۳}{-۱}=-۳$$

$$K_۳==(s+۳)F(s)\Big|_{s=-۳}=\frac{s^۲+۳s+۵}{(s+۱)(s+۲)}\Big|_{s=-۳}=\frac{۵}{۲}=۲/۵$$

در نتیجه، لاپلاس معکوس $F(s)$ به صورت زیر خواهد بود:

$$\begin{aligned} f(t) &= L^{-۱}\left[\frac{s^{۲}+۳s+۵}{(s+۱)(s+۲)(s+۳)}\right] \\ &= L^{-۱}\left[\frac{۱٫۵}{s+۱}+\frac{-۳}{s+۲}+\frac{۲٫۵}{s+۳}\right] \\ &= ۱٫۵e^{-t}-۳e^{-۲t}+۲٫۵e^{-۳t} \end{aligned}$$

۴-۵-۲ قطب‌های مکرر

فرض کنید تابع زیر داده شده است [۱]:

$$F(s)=\frac{s^{۲}+۳s+۵}{(s+۱)^{۲}(s+۲)}$$

فرض می‌کنیم که ثابت‌هایی مانند A، B و C وجود دارند، به قسمی که برای تمام مقادیر s داریم:

$$F(s)=\frac{s^{۲}+۳s+۵}{(s+۱)^{۲}(s+۲)}=\frac{A}{(s+۱)^{۲}}+\frac{B}{s+۱}+\frac{C}{s+۲}$$

برای بدست آوردن ضرایب A (بزرگترین توان قطب مکرر) و C (قطب ساده) از همان روش مرحله قبل استفاده می‌کنیم:

$$\begin{aligned} A &= (s+۱)^{۲}F(s)\Big|_{s=-۱}=\frac{s^{۲}+۳s+۵}{s+۲}\Big|_{s=-۱}=\frac{۳}{۱}=۳ \\ C &= (s+۲)F(s)\Big|_{s=-۲}=\frac{s^{۲}+۳s+۵}{(s+۱)^{۲}}\Big|_{s=-۲}=\frac{۳}{۱}=۳ \end{aligned}$$

برای پیدا کردن B دو طرف تساوی را در مخرج سمت چپ ضرب می‌کنیم و سپس، با انتخاب مقدار مناسبی برای s، معادله‌ای نسبت به B بدست می‌آید. در این مثال با گرفتن $s=۰$ بدست می‌آوریم:

$$\begin{aligned} & s^{۲}+۳s+۵=A(s+۲)+B(s+۱)(s+۲)+C(s+۱)^{۲} \\ & \xRightarrow[A=C=۳]{s=۰} ۵=۲\times۳+B+۳\times۱\Rightarrow B=-۲ \end{aligned}$$

بنابراین:

$$\begin{aligned} f(t) &= L^{-۱}\left[\frac{s^{۲}+۳s+۵}{(s+۱)^{۲}(s+۲)}\right] \\ &= L^{-۱}\left[\frac{۳}{(s+۱)^{۲}}+\frac{-۲}{s+۱}+\frac{۳}{s+۲}\right] \\ &= ۳te^{-t}-۲e^{-t}+۳e^{-۲t} \end{aligned}$$

روش بالا برای قطب‌های مکرر از درجه ۲ (قطب با توان دوم) مناسب است. اما وقتی قطب‌های مکرر از درجه بالاتر از ۲ هستند، بهتر است به صورت زیر عمل کنید. فرض کنید تابع گویا و تبدیل آن به کسرهای زیر را داشته باشیم:

$$F(s) = \frac{۱}{(s+۱)^۳ s^۲} = \frac{K_۱}{s+۱} + \frac{K_۲}{(s+۱)^۲} + \frac{K_۳}{(s+۱)^۳} + \frac{K_۴}{s} + \frac{K_۵}{s^۲}$$

برای محاسبه $K_۱$، $K_۲$ و $K_۳$، ابتدا $F(s)$ را در $(s+۱)^۳$ ضرب می‌کنیم تا مقدار زیر حاصل شود:

$$(s+۱)^۳ F(s) = \frac{۱}{s^۲}$$

حال با توجه به روابط زیر ضرایب را بدست می‌آوریم:

$$K_۱ = \left.\frac{۱}{s^۲}\right|_{s=-۱} = ۱$$

$$K_۲ = \left.\frac{d}{dt}\frac{۱}{s^۲}\right|_{s=-۱} = \left.\frac{-۲}{s^۳}\right|_{s=-۱} = ۲$$

$$K_۳ = \left.\frac{۱}{۲!}\frac{d^۲}{dt^۲}\frac{۱}{s^۲}\right|_{s=-۱} = \left.\frac{۱}{۲}\frac{۶}{s^۴}\right|_{s=-۱} = ۳$$

به طریق مشابه، برای محاسبه $K_۴$ و $K_۵$، ابتدا $F(s)$ را در $s^۲$ ضرب می‌کنیم تا بدست می‌آوریم:

$$s^۲ F(s) = \frac{۱}{(s+۱)^۳}$$

به طریق مشابه ضرایب را بدست می‌آوریم:

$$K_۴ = \left.\frac{۱}{(s+۱)^۳}\right|_{s=۰} = ۱$$

$$K_۵ = \left.\frac{d}{dt}\frac{۱}{(s+۱^۳)}\right|_{s=۰} = \left.\frac{-۳(s+۱)^۲}{(s+۱)^۳}\right|_{s=۰} = \left.-\frac{۳}{s+۱}\right|_{s=۰} = -۳$$

در نتیجه، گسترش $F(s)$ به کسرهای جزئی چنین است:

$$F(s) = \frac{۱}{(s+۱)^۳ s^۲} = \frac{۳}{s+۱} + \frac{۲}{(s+۱)^۲} + \frac{۱}{(s+۱)^۳} - \frac{۳}{s} + \frac{۱}{s^۲}$$

تابع زمانی متناظر آن عبارت است از:

$$f(t) = L^{-۱}\left[\frac{۱}{(s+۱)^۳ s^۲}\right] = ۳e^{-t} + ۲te^{-t} + \frac{۱}{۲}t^۲e^{-t} - ۳ + t, \quad t \geqslant ۰ \text{ برای}$$

۴-۵-۳ قطب‌های مختلط

روش ساده و سریع برای بدست آوردن معکوس یک تابع گویا وقتی که دارای قطب‌های مختلط (یعنی به شکل $s = p = \alpha \pm j\beta$) باشد، این است که صورت کسر تجزیه شده را یک درجه کمتر از مخرج می‌گیریم. معمولا مخرج کسر درجه دو است، در نتیجه صورت را می‌توان به صورت $As + B$ در نظر گرفت. برای بدست آوردن A و B تنها کافی است دو طرف تساوی را به ازای دو مقدار s مساوی قرار دهیم. به عنوان مثال تابع گویا زیر را در نظر بگیرید که دارای دو قطب مختلط $p_{۱,۲} = -۱ \pm j۱$ و یک قطب ساده $p_۳ = -۱$ است:

$$F(s) = \frac{۳s + ۵}{(s + ۱)(s^۲ + ۲s + ۲)} = \frac{A}{s + ۱} + \frac{Bs + C}{s^۲ + ۲s + ۲}$$

برای محاسبه A مانند قبل عمل می‌کنیم:

$$(s + ۱)F(s)\Big|_{s=-۱} = \frac{۳s + ۵}{s^۲ + ۲s + ۲}\Big|_{s=-۱} = \frac{۲}{۱} = ۲$$

برای بدست آوردن ثابت‌های B و C، دو سمت معادله را در مخرج ضرب می‌کنیم و طرفین بدست آمده را در دو مقدار s دلخواه مساوی یکدیگر قرار می‌دهیم. یک دستگاه دو معادله دو مجهولی خواهیم داشت و آن را حل می‌کنیم.

$$۳s + ۵ = A(s^۲ + ۲s + ۲) + (Bs + C)(s + ۱)$$

$$\xRightarrow{A=۲} ۳s + ۵ = ۲(s^۲ + ۲s + ۲) + (Bs + C)(s + ۱)$$

$$\xRightarrow{s=۰} ۵ = ۴ + C \Rightarrow C = ۱$$

$$\xRightarrow{s=۱} ۸ = ۲(۵) + (B + C)(۲) \xRightarrow{C=۱} B = -۲$$

با اینکه ضرایب محاسبه شده است اما هنوز صورت و مخرج کسری که دارای قطب‌های مختلط است شبیه هیچ‌کدام از تبدیل لاپلاس‌های معلوم نیست. باید صورت و مخرج را به صورت زیر تغییر داد:

$$\frac{-۲s + ۱}{s^۲ + ۲s + ۲} = \frac{-۲(s + ۱) + ۳}{(s + ۱)^۲ + ۱^۲}$$

در نتیجه گسترش $F(s)$ به کسرهای جزئی چنین است:

$$F(s) = \frac{۳s + ۵}{(s + ۱)(s^۲ + ۲s + ۲)} = \frac{۲}{s + ۱} + \frac{-۲(s + ۱)}{(s + ۱)^۲ + ۱^۲} + \frac{۳}{(s + ۱)^۲ + ۱^۲}$$

تابع زمانی متناظر آن عبارت است از:

$$f(t) = (۲e^{-t} - ۲e^{-t}\cos t + ۳e^{-t}\sin t)u(t)$$