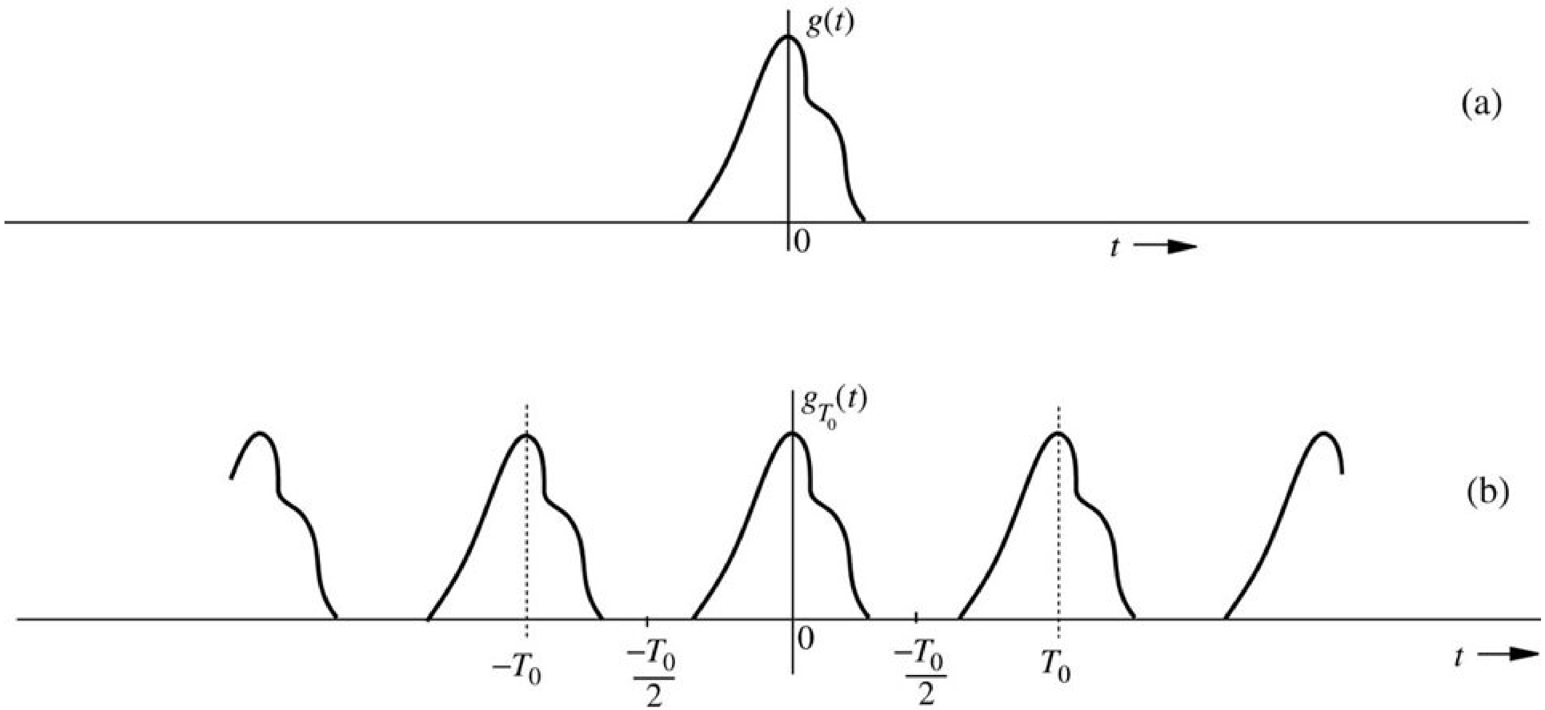
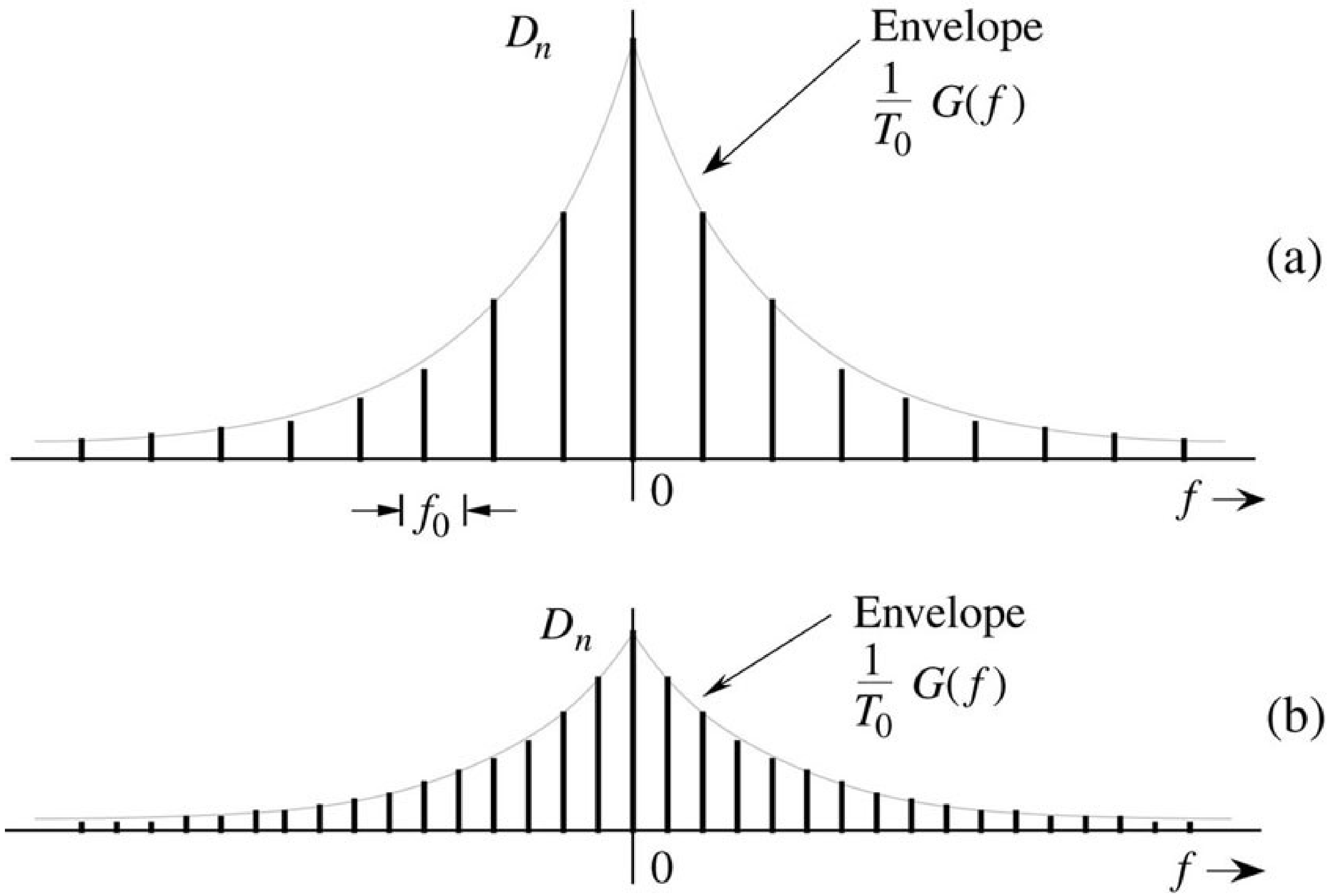
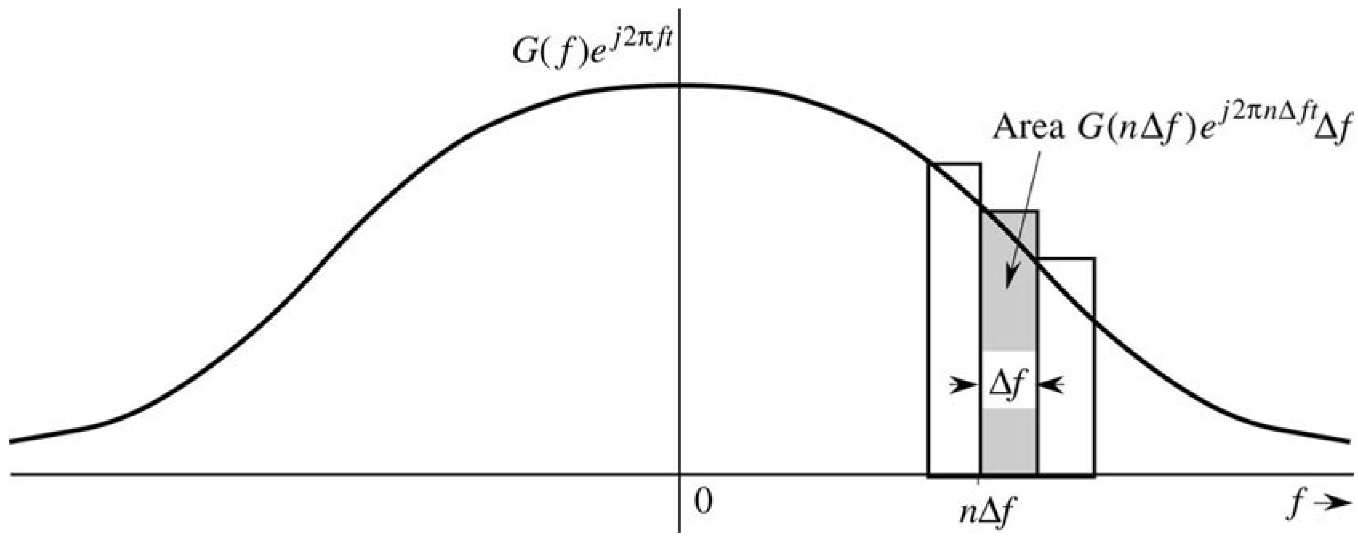
فصل سوّم: تحلیل و انتقال سیگنال‌ها

نمایش سیگنال‌های غیر متناوب با استفاده از انتگرال فوریه:



$\frac{1}{T_0}G(f)$ پوش (envelope) ضرایب سری فوریه تابع متناوب $g_{T0}(t)$ است.




$G(f)e^{j2\pi ft}$
Area $G(n\Delta f)e^{j2\pi n\Delta ft}\Delta f$
Δf
0
$n\Delta f$
f

نمایش انتگرال فوریه تابع غیر متناوب g(t):

$$g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(f)\mathrm{e}^{j2\pi ft}\mathrm{d}f$$

تبدیل مستقیم فوریه:

$$G(f) = \mathcal{F}[g(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(t)\mathrm{e}^{-j2\pi ft}\mathrm{d}t$$

تبدیل معکوس فوریه:

$$g(t) = \mathcal{F}^{-1}[G(f)] = \int_{-\infty}^{\infty} G(f)\mathrm{e}^{j2\pi ft}\mathrm{d}f$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} G(f)\mathrm{e}^{j\omega t}\mathrm{d}\omega$$

$$g(t) \overset{\mathcal{F}}{\Longleftrightarrow} G(f)$$

تابع G(f) در حالت کلی تابعی مختلط از متغیر f است:

$$G(f) = |G(f)|\mathrm{e}^{j\theta_g(f)}$$

اندازه (amplitude) G(f): $|G(f)|$

زاویه یا فاز (phase) G(f): $\theta_g(f)$

یادآوری: تبدیل فوریه تابع g(t) یعنی G(f) توصیف و مشخصه حوزه فرکانس تابع g(t) است.

یادآوری: خاصیت تقارن مزدوج تبدیل فوریه **سیگنال‌های حقیقی**:

$$g(t)\ \text{real}: \quad G(-f) = G^*(f)$$

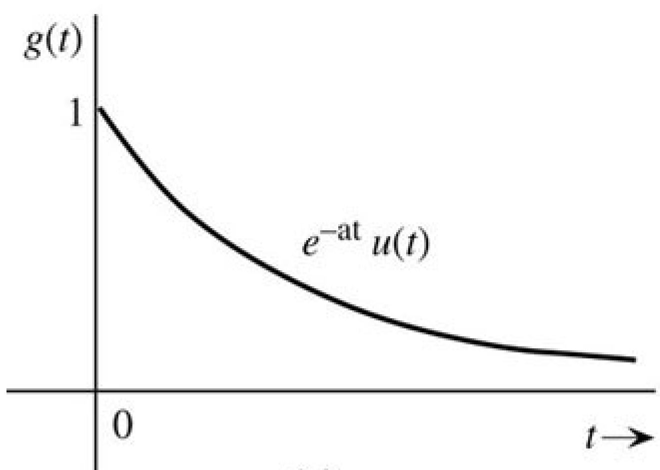
اندازه طیف، تابعی زوج است.

زاویه (فاز) طیف، تابعی فرد است.

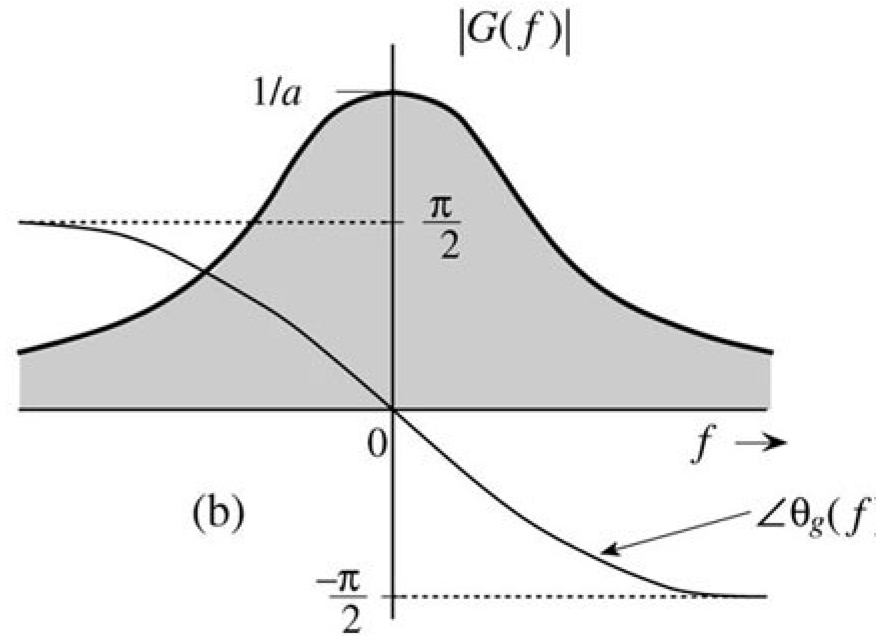
$$\begin{cases} |G(f)| = |G(-f)| \\ \theta_g(-f) = -\theta_g(f) \end{cases}$$

مثال: تبدیل فوریه تابع $\mathrm{e}^{-at}u(t)$ را بیابید.

$$|G(f)| = \frac{1}{\sqrt{a^2 + (2\pi f)^2}}, \quad \theta_g(f) = -\tan^{-1}\left(\frac{2\pi f}{a}\right)$$



(a)



(b)

شرایط وجود تبدیل فوریه:

۱) اگر تابع g(t) مطلقاً انتگرال پذیر باشد: $\int_{-\infty}^{+\infty} |g(t)|\mathrm{d}t < \infty$

۲) و اگر تابع g(t) فقط تعداد محدودی ماکزیمم و مینیمم داشته باشد و همچنین تعداد محدودی نقطه ناپیوسته (که در آن‌ها هم حدهای چپ و راست متناهی باشند)

در اینصورت انتگرال فوریه تابع g(t) در نقاط پیوستگی به مقدار تابع و در نقاط ناپیوستگی به متوسط حدهای چپ و راست در آن نقطه، همگرا می‌شود.

اگر این شرایط برقرار باشد، انتگرال فوریه تابع حتماً همگراست، ولی توابعی هم هستند که این شرایط در موردشان نقض می‌شود، ولی تبدیل فوریه دارند.

مثل تابع $\dfrac{\sin(at)}{t}$

خاصیت خطی تبدیل فوریه (قضیه سوپر پوزیسیون)

$$\begin{cases} g_1(t) \Longleftrightarrow G_1(f) \\ g_2(t) \Longleftrightarrow G_2(f) \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$a_1 g_1(t) + a_2 g_2(t) \Longleftrightarrow a_1 G_1(f) + a_2 G_2(f)$$

که ضرایب a_1 و a_2 ثابتهای حقیقی یا مختلط دلخواهی هستند.

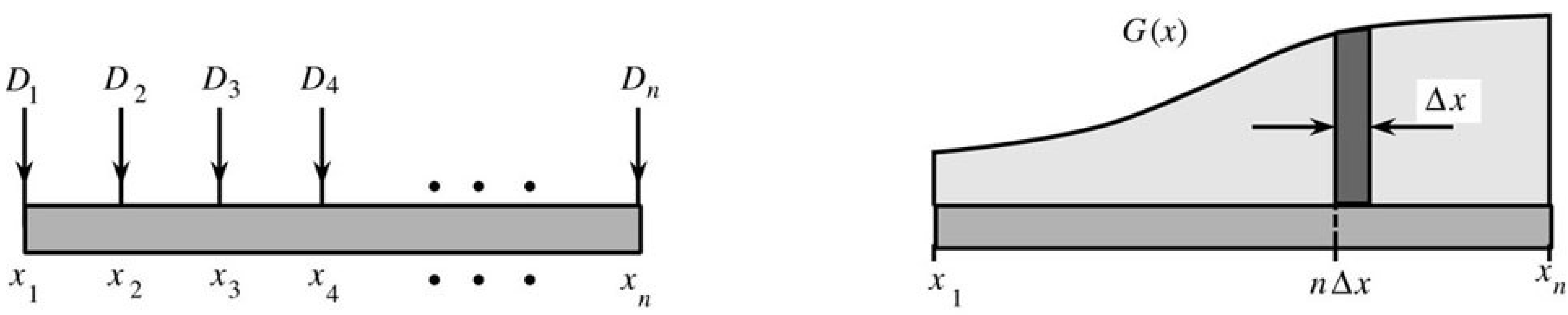
تعمیم:

$$\sum_k a_k g_k(t) \Longleftrightarrow \sum_k a_k G_k(f)$$

تبدیل فوریه یک سیگنال درواقع چگالی طیف بر واحد فرکانس است.

$$g(t) = \lim_{\Delta f \to 0} \sum_{n=-\infty}^{\infty} G(n\Delta f)\mathrm{e}^{(j2\pi f)t}\Delta f = \int_{-\infty}^{\infty} G(f)\mathrm{e}^{j2\pi ft}\mathrm{d}f$$

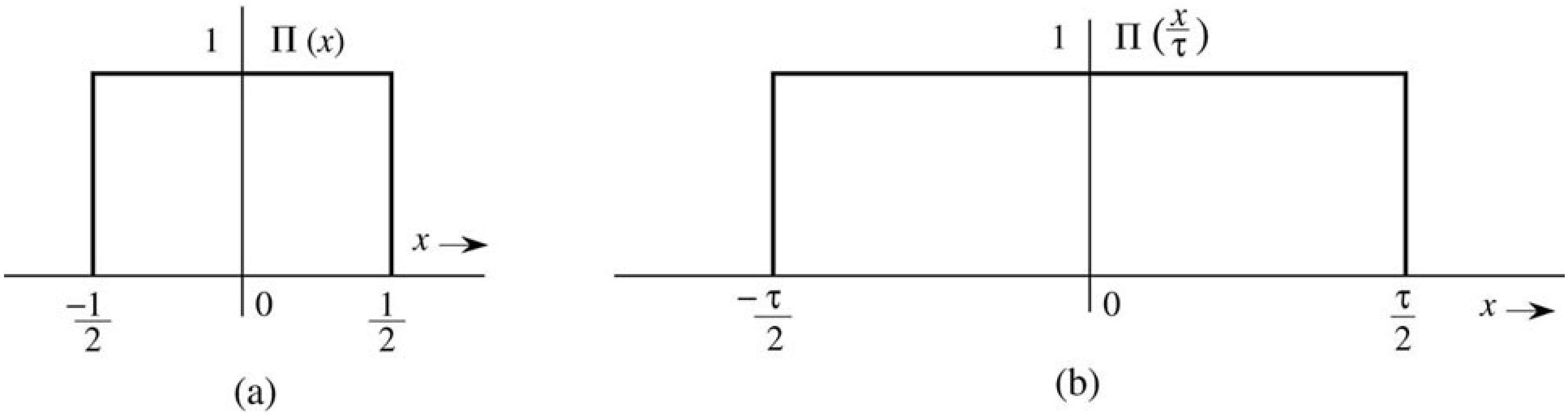
سهم اجزای تشکیل‌دهنده g(t) در یک باند فرکانسی به اندازه df (با واحد هرتز) به اندازه G(f)df است. پس G(f) درواقع چگالی طیف سیگنال در واحد پهنای باند (فرکانس با واحد هرتز) است که به طور معمول چگالی را ذکر نمی‌کنند و به گفتن طیف یا طیف فوریه سیگنال اکتفا می‌کنند.



(a) (b)

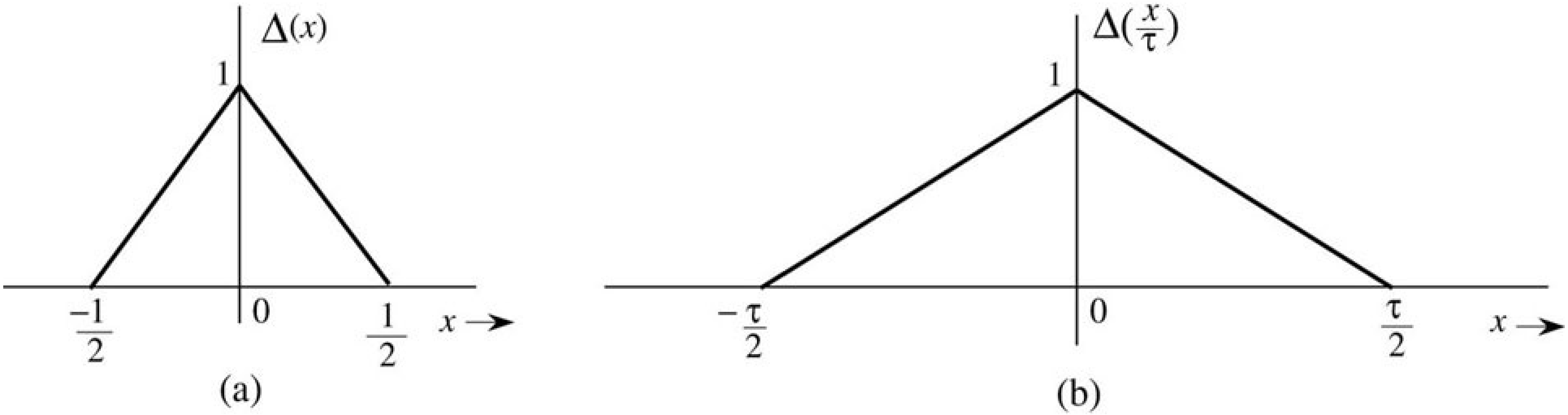
تبدیل فوریه توابع مهم و مفید

تابع مستطیلی واحد (Unit Rectangular Function): تابع پی (پای)



$$\Pi(x) = \begin{cases} 1 & |x| < 1/2 \\ 0.5 & |x| = 1/2 \\ 0 & |x| > 1/2 \end{cases}$$

تابع مثلثی واحد (Unit Triangular Function):



$$\Delta(x) = \begin{cases} 1 - 2|x| & |x| < 1/2 \\ 0 & |x| > 1/2 \end{cases}$$

تابع سینک (Sinc):

$$\operatorname{sinc}(x) = \frac{\sin x}{x}$$

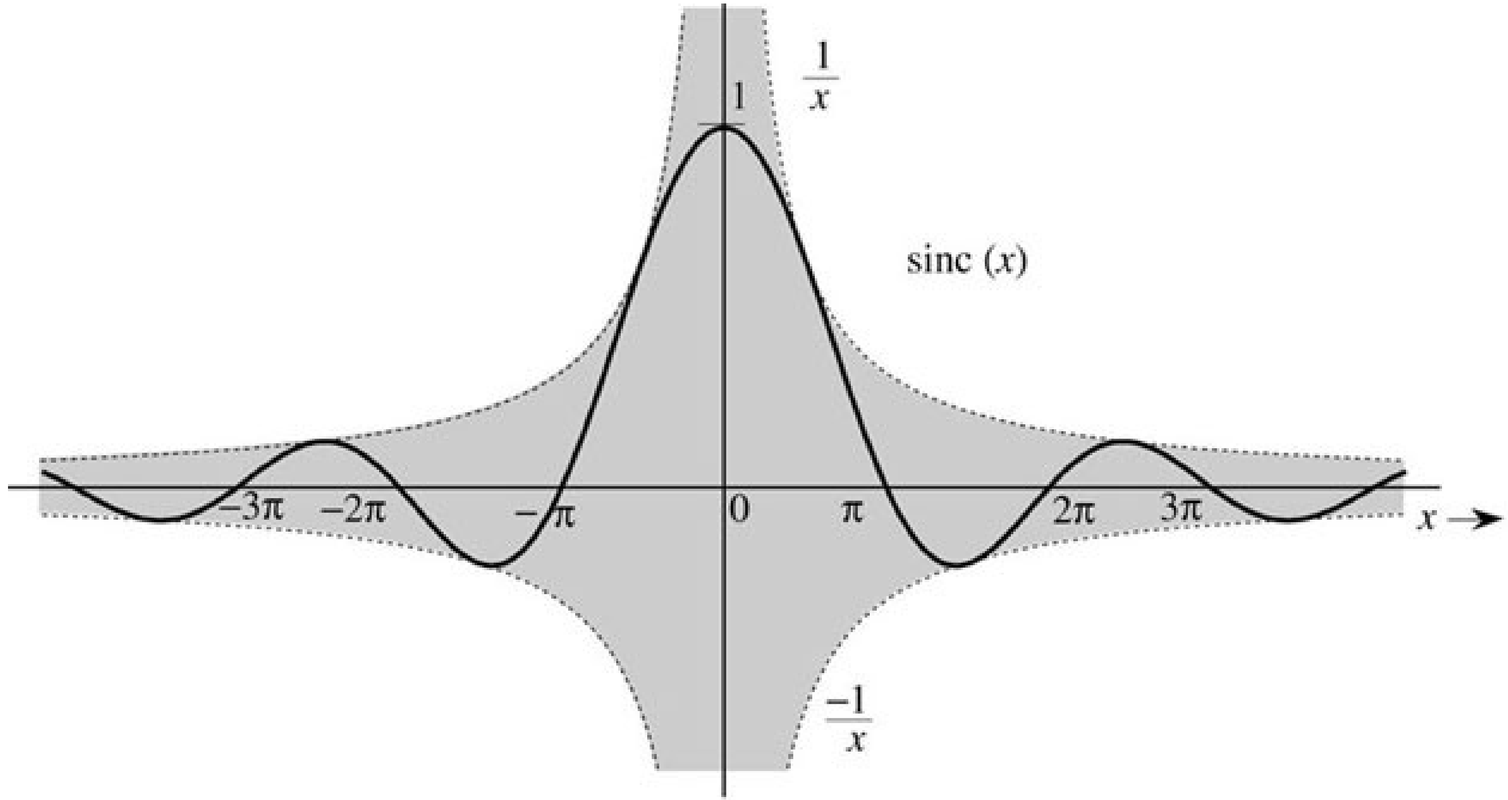
خواص تابع سینک:

۱) تابع زوج است.

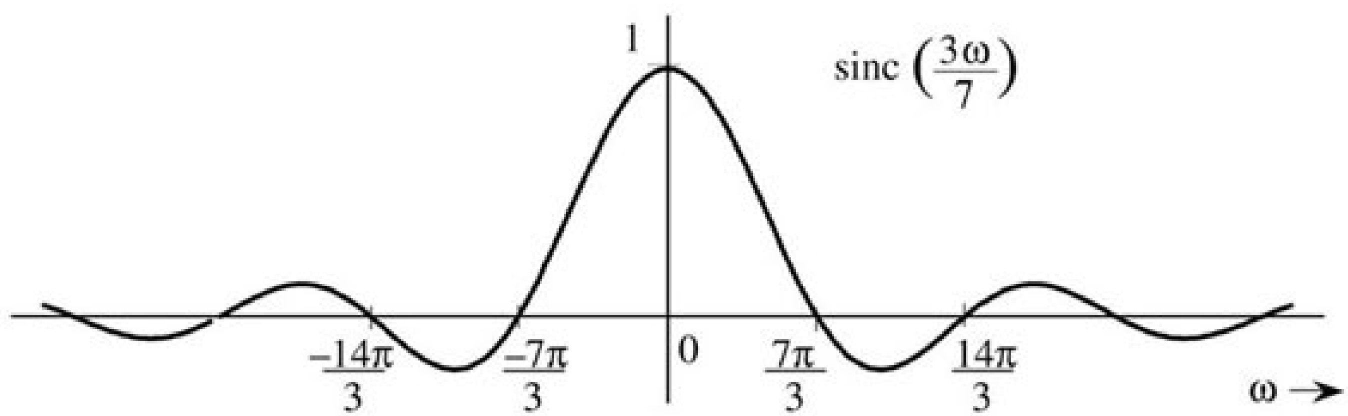
۲) در $x = 0$ مقدار یک دارد: $\operatorname{sinc}(0) = 1$

۳) به‌جز $x = 0$ هر جای دیگری که $\sin x$ صفر می‌شود، مقدارش صفر است. بنابراین در تمام ضرایب صحیح مثبت و منفی و غیر صفر π صفر می‌شود. یعنی در $x = \pm\pi, \pm 2\pi, \pm 3\pi, \ldots$

۴) رفتار نوسانی تابع $\sin x$ با دوره تناوب 2π را دارد که به‌دلیل ضرب شدن در تابع یکنوا نزولی $1/x$ ، اندازه این نوسانات مطابق تابع $1/x$ کاهش می‌یابد.



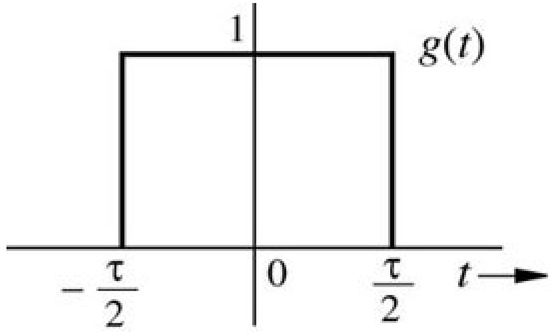
(a)



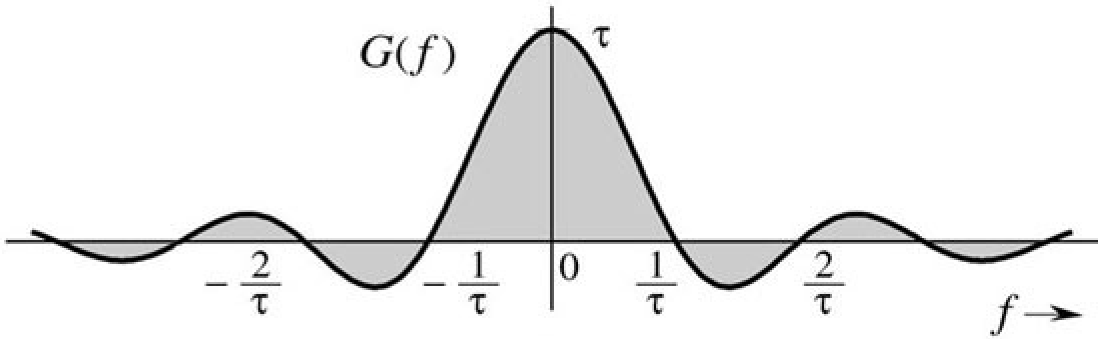
(b)

مثال: تبدیل فوریه g(t)، تابع مستطیلی واحد زیر را به‌دست آورید:

$$g(t) = \Pi\left(\frac{t}{\tau}\right)$$



(a)



(b)

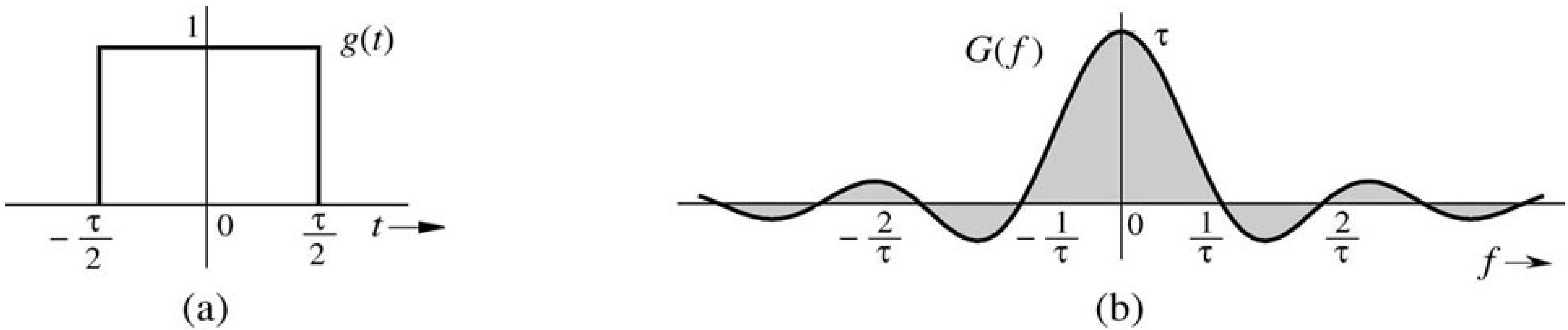
$$g(t) = \Pi\left(\frac{t}{\tau}\right) \Longleftrightarrow G(f) = \tau\,\mathrm{sinc}(\pi\tau f)$$

تعریف پهنای باند Bandwidth

پهنای باند یک سیگنال عبارت است از اختلاف بین بیشترین (بالاترین) فرکانس و کمترین فرکانس موجود در طیف سیگنال.
از طرفی بیشتر سیگنال‌ها همه فرکانس‌ها از صفر تا بینهایت را در خود دارند.
بنابراین پهنای باند همه این سیگنال‌ها طبق تعریف بالا بینهایت می‌شود. پس تعریف را تغییر می‌دهیم تا هدف از تعریف برآورده شود:
پهنای باند یک سیگنال عبارت است از اختلاف بین بیشترین (بالاترین) *فرکانس با اهمیت و قابل ملاحظه* (*significant*) و کمترین *فرکانس با اهمیت و قابل ملاحظه* موجود در طیف سیگنال.

نکته ۱ : بسته به کاربرد و دقت مورد نیاز می‌توان «با اهمیت» را در هر مورد مشخص کرد.
مثلاً در یک مورد در طیف سیگنال فرکانسی را مهم فرض می‌کنند که اندازه در طیف از 2% بیشترین مقدار آن کمتر نباشد.
یا مثلاً در یک مورد دیگر در طیف سیگنالی را مهم فرض می‌کنند که زاویه در طیف سیگنال، حداکثر 5% بیشترین مقدار تأخیر را ایجاد کند.

نکته ۲ : در محاسبه پهنای باند فقط فرکانس فیزیکی (یعنی نیمه مثبت محور f در نظر گرفته می‌شود).

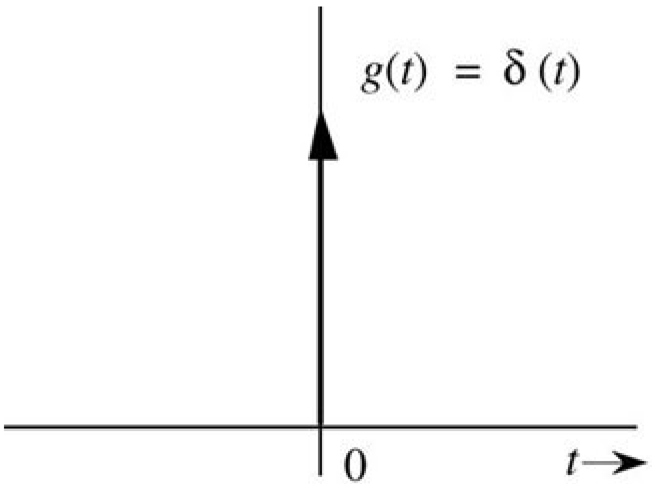


با یک تقریب نسبی قابل قبول برای بیشتر موارد عملی ، برای تابع $\Pi(t/\tau)$ ، بیشترین سهم طیف را در لُب (lobe) اول طیف قرار دارد، پس پهنای باند را با این تقریب $B = 1/\tau\,\mathrm{Hz}$ در نظر می‌گیریم.

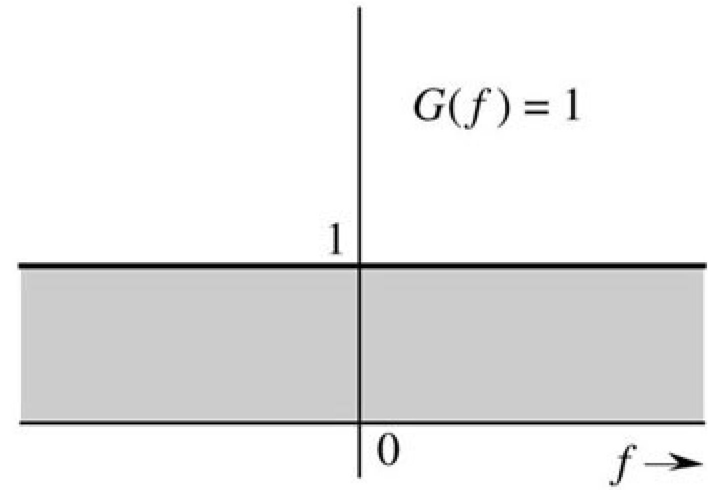
مسأله: یکبار با تقریب 5% و یکبار 1% بیشترین اندازه طیف، پهنای باند سیگنال $\Pi(t/\tau)$ را به‌دست آورید.

مثال: تبدیل فوریه تابع ضربه واحد:

$$g(t) = \delta(t) \Longleftrightarrow G(f) = 1$$



(a)



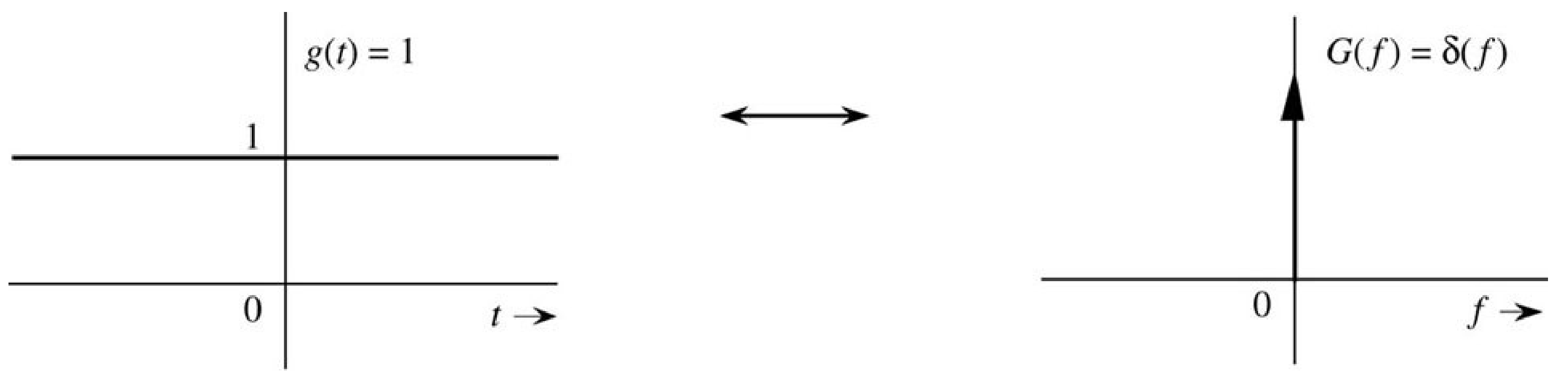
(b)

مثال: تبدیل معکوس تابع $G(f) = \delta(f)$ را پیدا کنید:

$$g(t) = 1 \Longleftrightarrow G(f) = \delta(f)$$

یا چون $\delta(2\pi f) = \dfrac{1}{2\pi}\delta(f)$ بنابراین:

$$g(t) = 1/2\pi \Longleftrightarrow G(f) = \delta(2\pi f)$$



(a) (b)

مثال: تبدیل فوریه معکوس $G(f) = \delta(f - f_0)$:

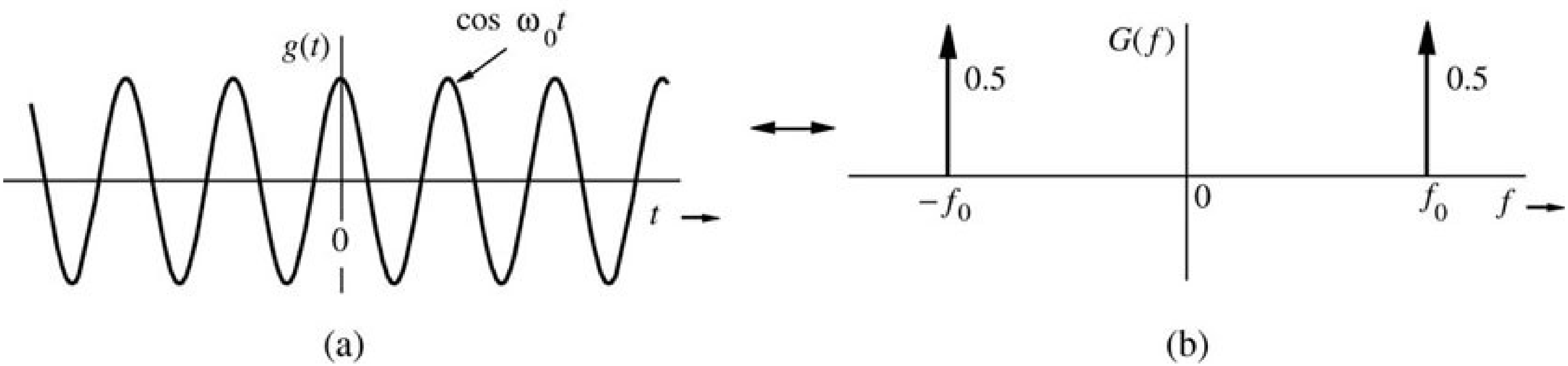
$$\boxed{g(t) = \mathrm{e}^{j2\pi f_0 t} \Longleftrightarrow G(f) = \delta(f - f_0)}$$

و بطور مشابه:

$$g(t) = \mathrm{e}^{-j2\pi f_0 t} \Longleftrightarrow G(f) = \delta(f + f_0)$$

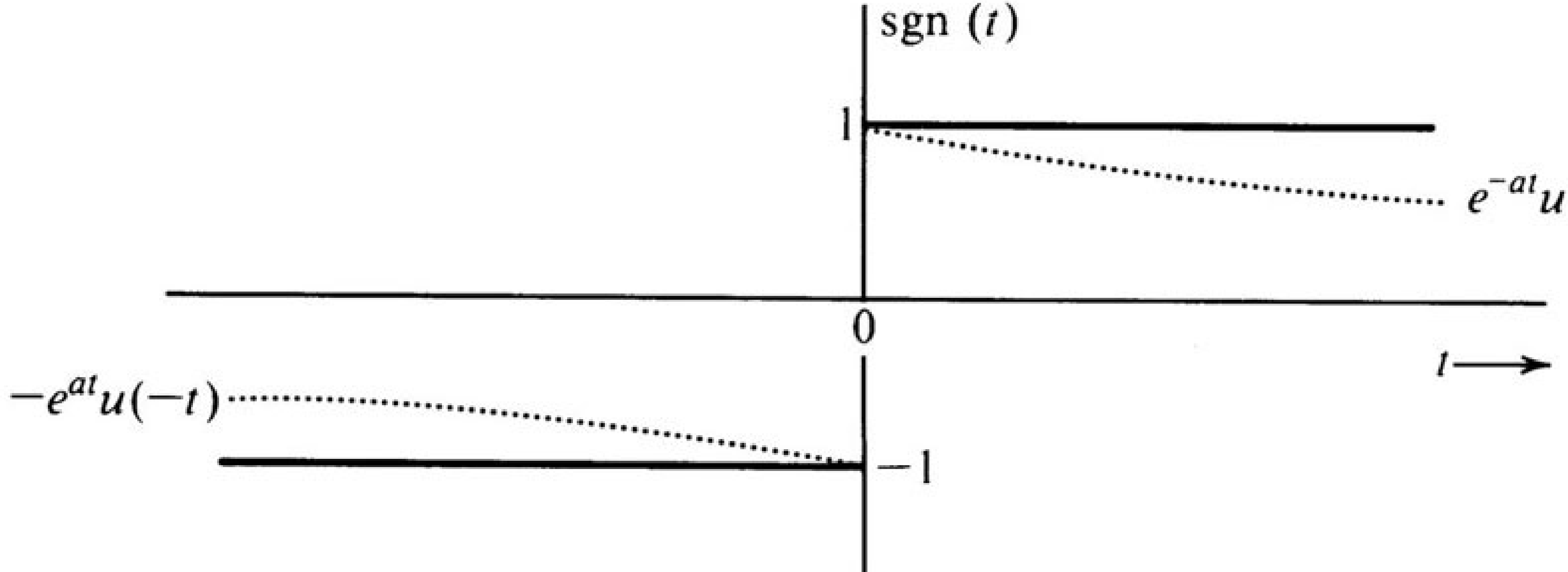
مثال: تابع سینوسی با فرکانس f_0، $\cos 2\pi f_0 t$:

$$\cos 2\pi f_0 t \Longleftrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)[\delta(f-f_0)+\delta(f+f_0)]$$



مثال: تبدیل فوریه تابع $\operatorname{sgn}(t)$ تابع علامت(sign):

$$\operatorname{sgn}(t) = \begin{cases} 1 & t > 0 \\ 0 & t = 0 \\ -1 & t < 0 \end{cases}$$



$$\boxed{\operatorname{sgn}(t) \Longleftrightarrow \frac{1}{j\pi f}}$$

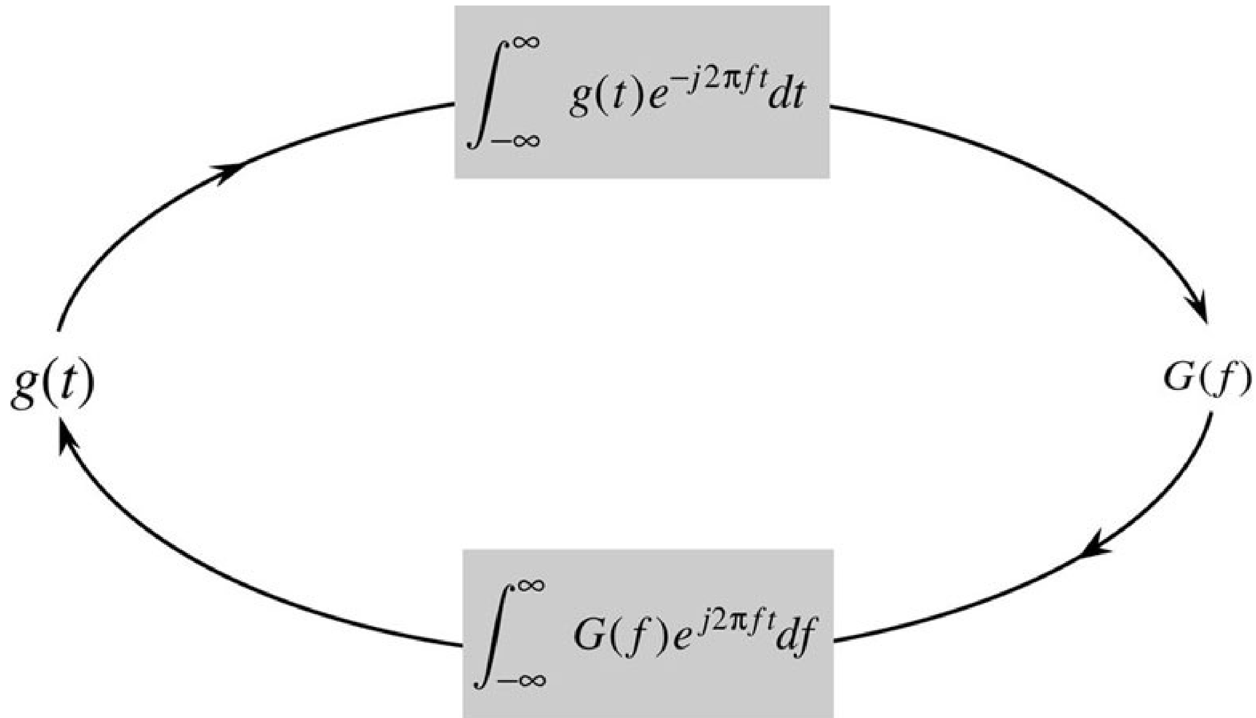
نتیجه: تبدیل فوریه تابع $u(t)$:

$$u(t) = (1/2)(\mathrm{sgn}(t) + 1)$$

$$\boxed{u(t) \Longleftrightarrow \frac{1}{2j\pi f} + \frac{1}{2}\delta(f)}$$

بعضی خواص تبدیل فوریه

۱) رابطه حوزه زمان ـ فرکانس



۲) خاصیت دوگانی (Duality):

$$g(t) \Longleftrightarrow G(f)$$
$$\Downarrow$$
$$G(t) \Longleftrightarrow g(-f)$$

و با استفاده از خاصیت قرینه کردن زمان یا فرکانس که کمی بعد اثبات خواهد شد نتیجه می‌شود که:

$$\Downarrow$$
$$G(-t) \Longleftrightarrow g(f)$$

مثال:

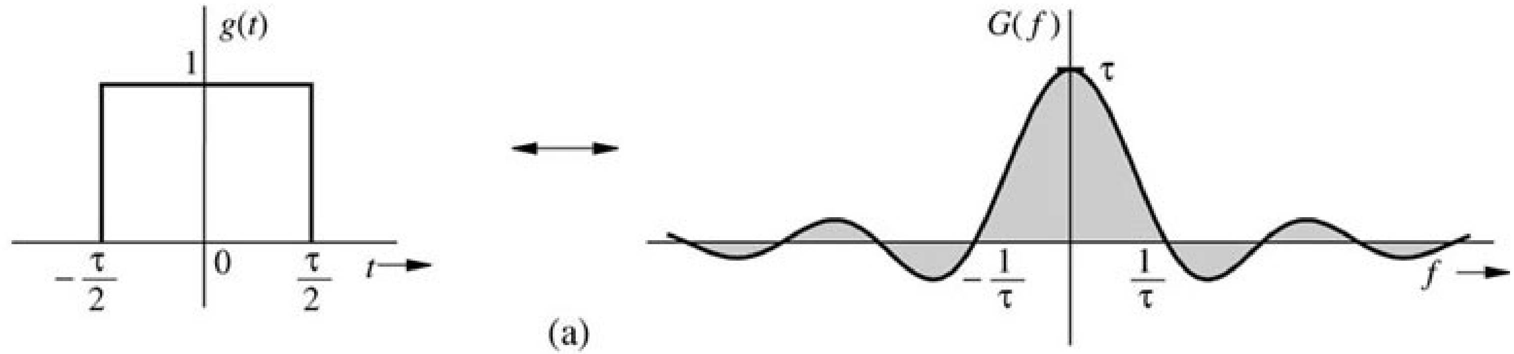
$$\Pi\left(\frac{t}{\tau}\right) \Longleftrightarrow \tau\,\mathrm{sinc}(\pi\tau f)$$

$$\Downarrow$$

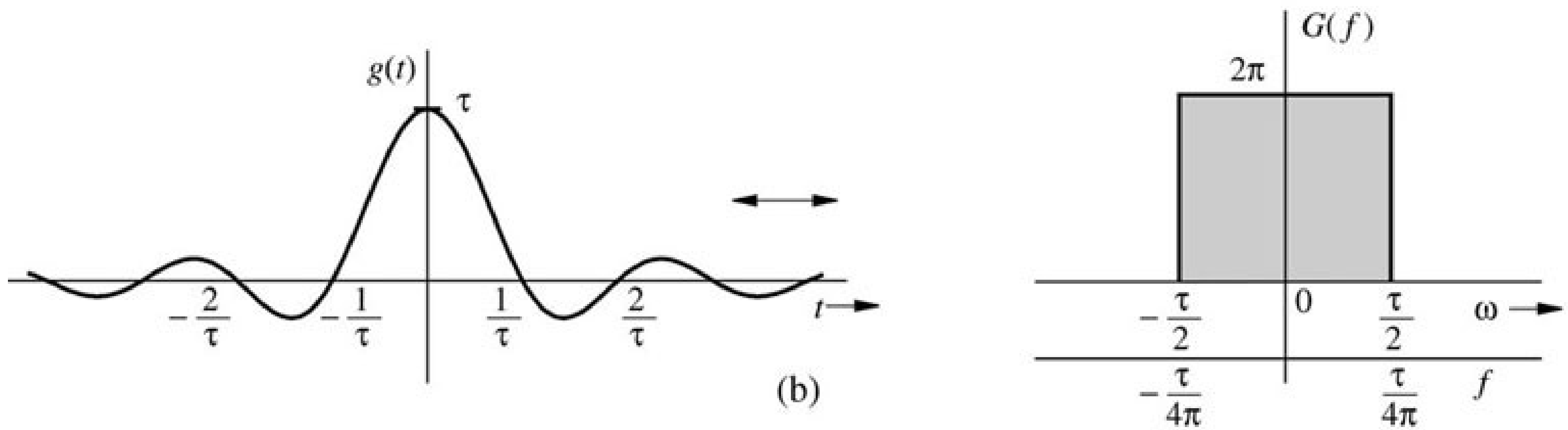
$$\alpha\,\mathrm{sinc}(\pi\alpha t) \Longleftrightarrow \Pi\left(\frac{-f}{\alpha}\right) = \Pi\left(\frac{f}{\alpha}\right)$$

$$\Downarrow$$

$$2B\,\mathrm{sinc}(2\pi Bt) \Longleftrightarrow \Pi\left(\frac{f}{2B}\right)$$



(a)



(b)

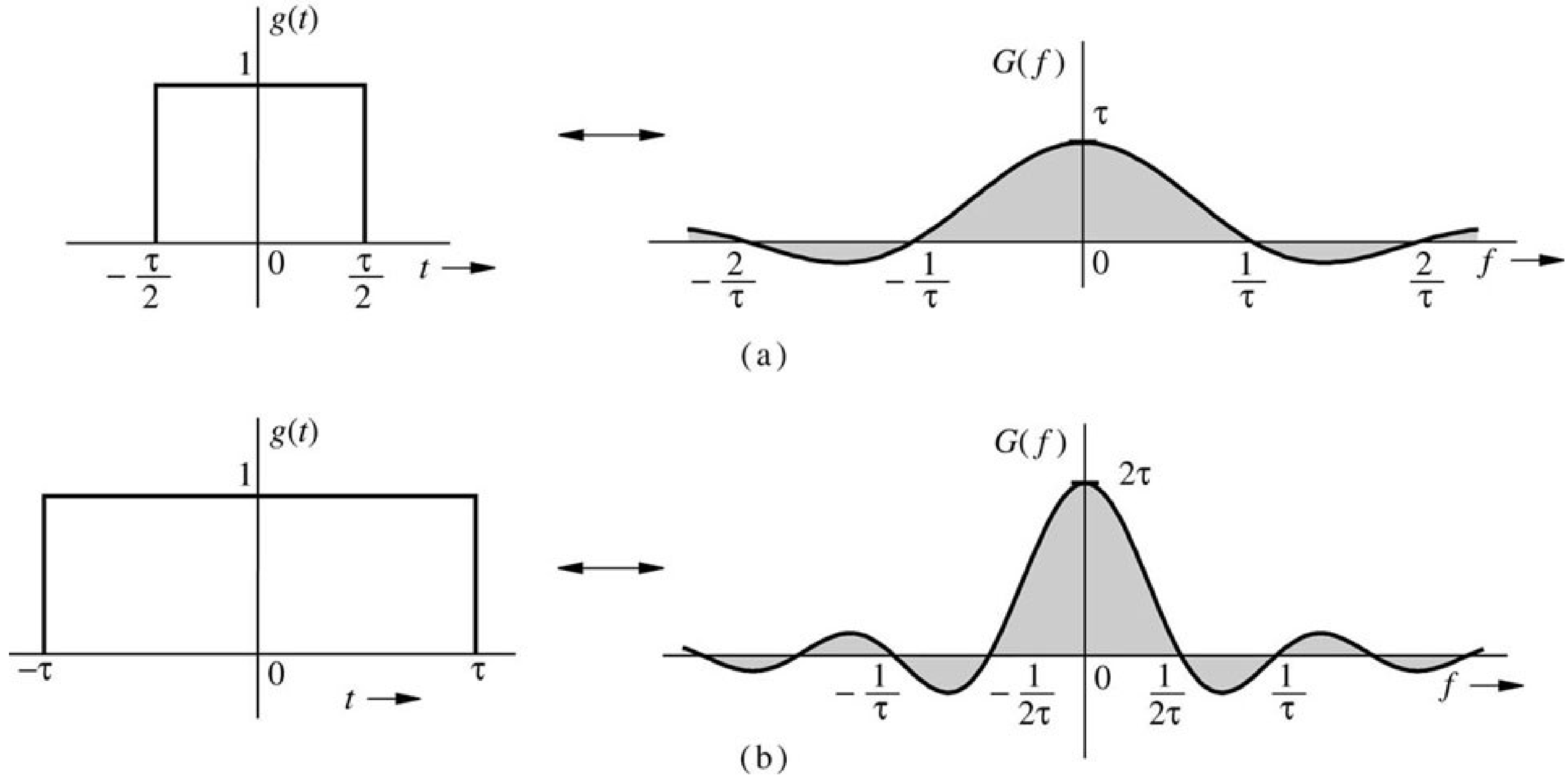
شکل را اصلاح کنید(!)و شکل
جدید را بکشید.

خاصیت تغییر مقیاس زمان:

$$\boxed{\begin{gathered} g(t) \Longleftrightarrow G(f) \\ \Downarrow \\ g(at) \Longleftrightarrow \frac{1}{|a|} G\left(\frac{f}{a}\right) \end{gathered}}$$

نتیجه: اگر $a = -1$:

$$\boxed{g(-t) \Longleftrightarrow G(-f)}$$

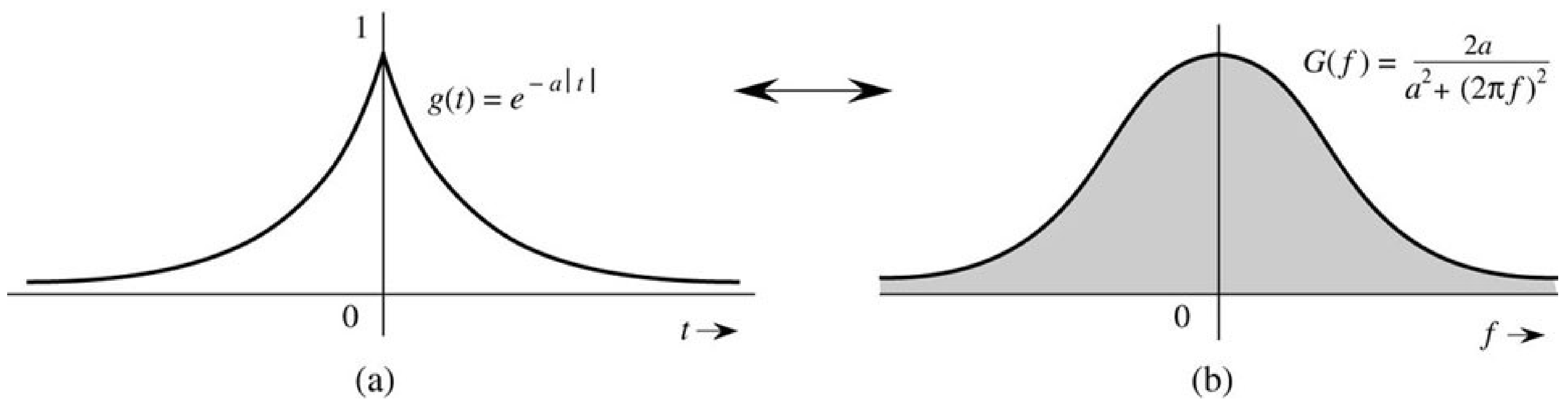


هرچه سیگنال در زمان پهن‌تر باشد در حوزه فرکانس باریک‌تر است و برعکس.
پهنای باند (bandwidth) سیگنال (با واحد هرتز) با عرض یا مدت زمان (duration) (با واحد ثانیه) نسبت عکس دارد.

مثال:

$$e^{-at}u(t) \Longleftrightarrow \frac{1}{a+j2\pi f} \quad \Rightarrow \quad e^{at}u(-t) \Longleftrightarrow \frac{1}{a-j2\pi f}$$

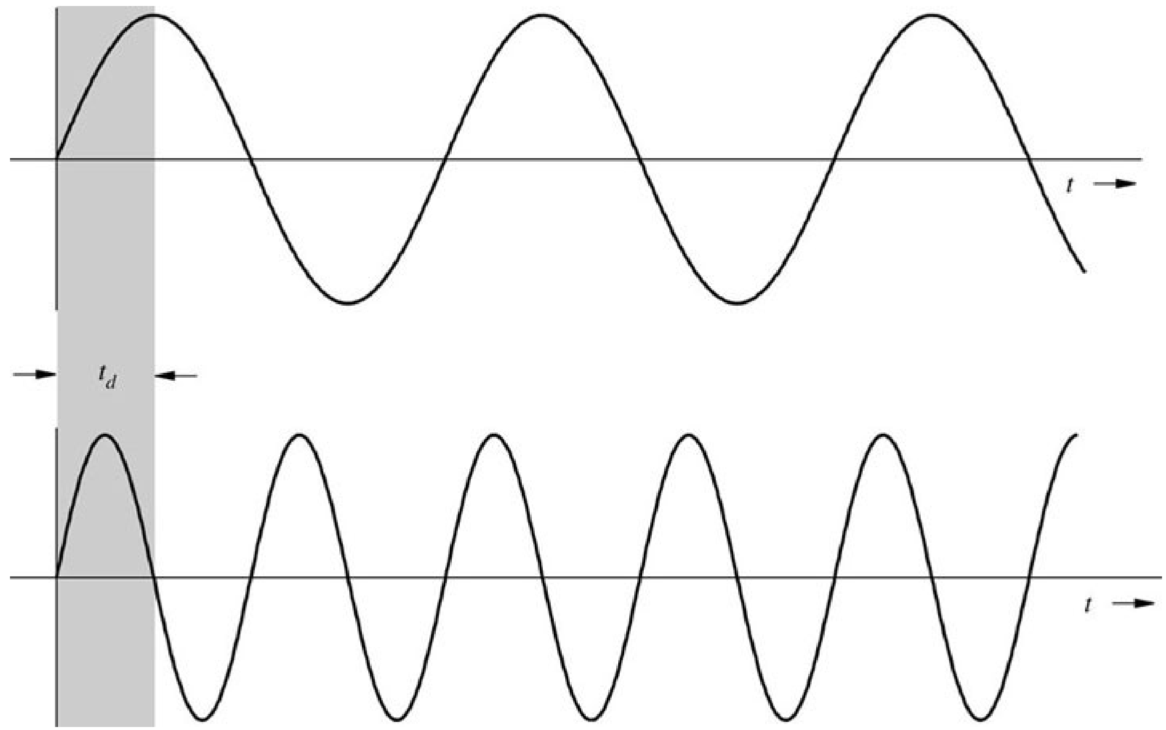
$$e^{-a|t|} \Longleftrightarrow \frac{2a}{a^2+(2\pi f)^2}$$



خاصیت انتقال زمانی:

$$g(t) \Longleftrightarrow G(f)$$
$$\Downarrow$$
$$g(t-t_0) \Longleftrightarrow \mathrm{e}^{-j2\pi f t_0} G(f)$$

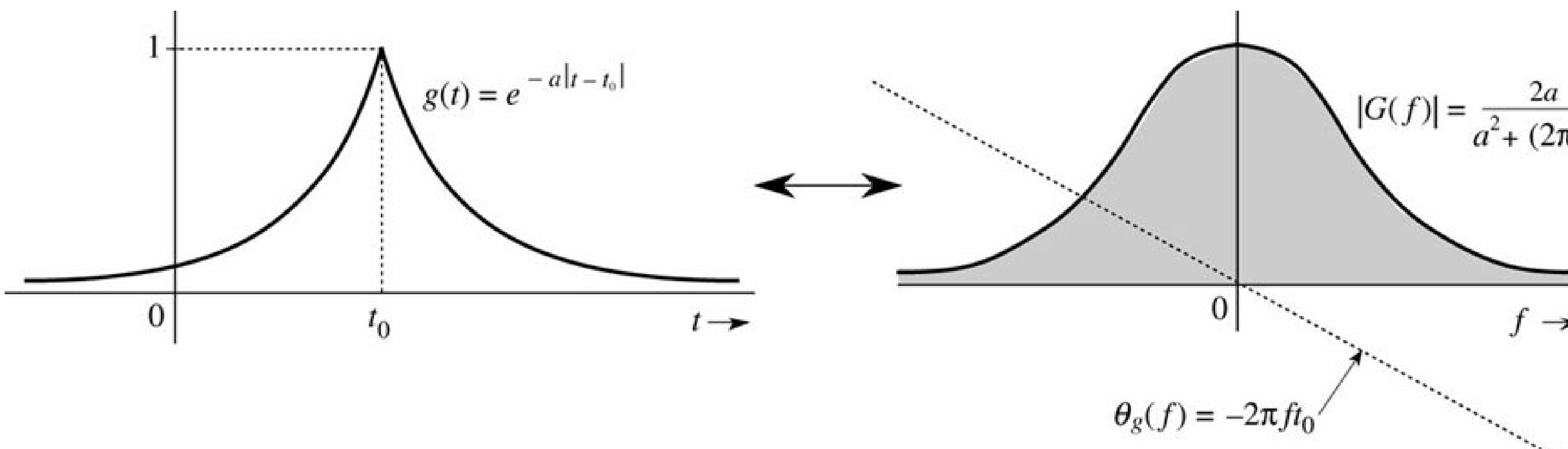
تأخیر در سیگنال به اندازه t_0 ، اندازه طیف سیگنال را تغییر نمی‌دهد و فاز آن را به اندازه $-j2\pi f t_0$ تغییر می‌دهد. این تغییر فاز تابعی خطی نسبت به f است. یعنی برای یک تأخیر مشخص در سیگنال، فرکانسهای بالاتر موجود در طیف در معرض تغییر فاز بیشتری قرار می‌گیرند تا فرکانس‌های کوچکتر.



تأخیر ثابت t_d برای سینوسی بالا معادل تغییر فاز $\pi/2$ و برای سینوسی پایین که فرکانسش دو برابر است معادل تغییر فاز π است.

مثال: تبدیل فوریه $\mathrm{e}^{-a|t-t_0|}$ را بیابید.

$$\mathrm{e}^{-a|t-t_0|} \Longleftrightarrow \frac{2a}{a^2+(2\pi f)^2}\mathrm{e}^{-j2\pi f t_0}$$



(a) (b)

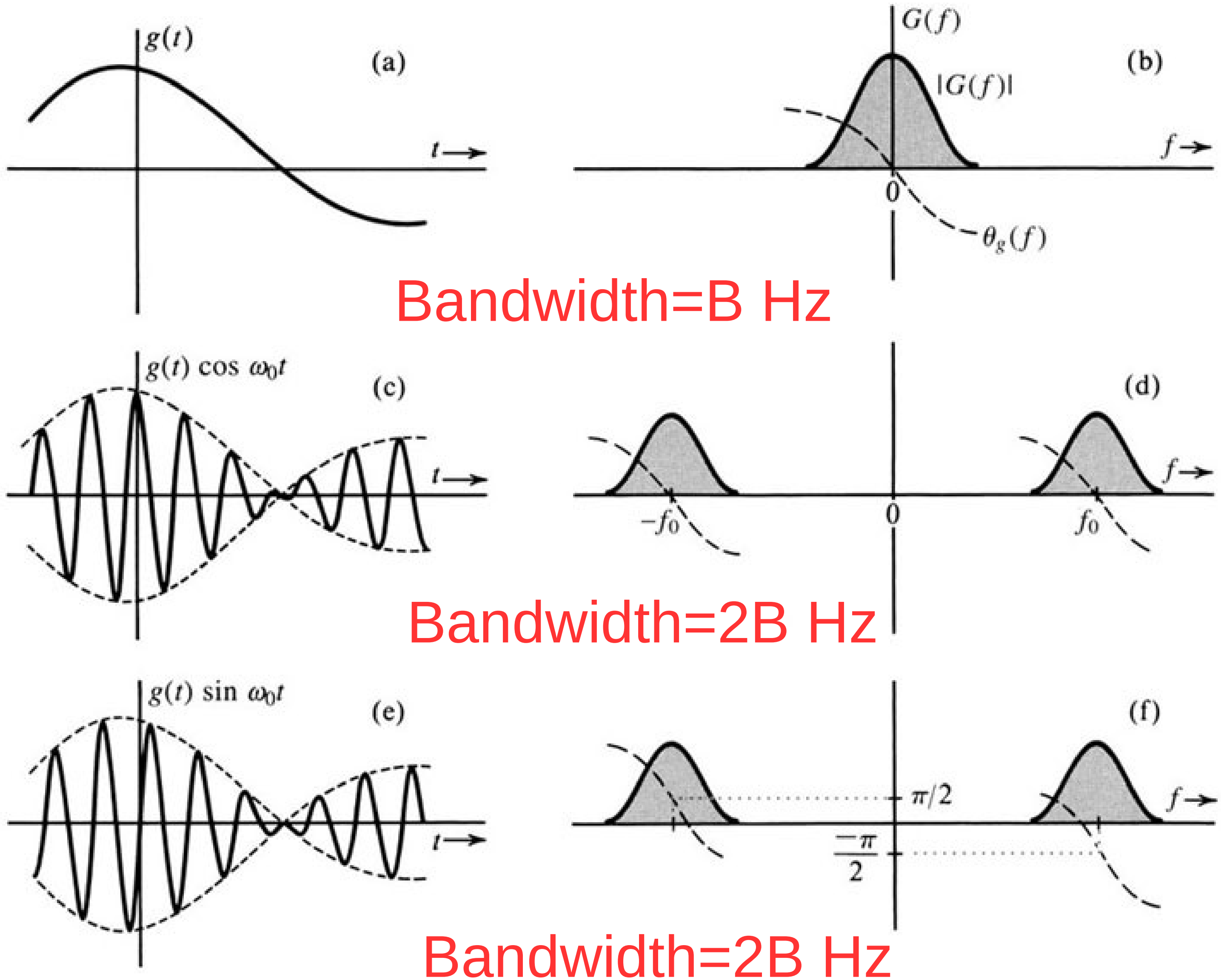
خاصیت انتقال فرکانسی:

$$\boxed{\begin{array}{c} g(t) \Longleftrightarrow G\left(f\right) \\ \Downarrow \\ \mathrm{e}^{j2\pi f_0 t} g(t) \Longleftrightarrow G(f - f_0) \end{array}}$$

تابع $\mathrm{e}^{j2\pi f_0 t}$ یک تابع حقیقی نیست و مقادیر آن مستقیماً قابل تولید نیست.
بنابراین عمل انتقال فرکانسی در عمل با ضرب کردن تابع در توابع سینوسی انجام می‌شود.

$$g(t)\cos 2\pi f_0 t \Longleftrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)\left[G(f - f_0) + G(f + f_0)\right]$$

$$g(t)\sin 2\pi f_0 t \Longleftrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)\left[G(f - f_0)\mathrm{e}^{-j\pi/2} + G(f + f_0)\mathrm{e}^{j\pi/2}\right]$$


$g(t)$
(a)
$t \rightarrow$
$G(f)$
(b)
$|G(f)|$
$f \rightarrow$
0
$\theta_g(f)$
Bandwidth=B Hz
$g(t)\cos\omega_0 t$
(c)
$t \rightarrow$
(d)
$f \rightarrow$
$-f_0$
0
f_0
Bandwidth=2B Hz
$g(t)\sin\omega_0 t$
(e)
$t \rightarrow$
(f)
$\pi/2$
$f \rightarrow$
$\frac{-\pi}{2}$
Bandwidth=2B Hz

تبدیل فوریه توابع متناوب:

یادآوری:

$$\mathrm{e}^{j2\pi f_0 t} \Longleftrightarrow \delta(f-f_0)$$

به فرض $g(t)$ یک تابع متناوب با دوره تناوب T_0 باشد:

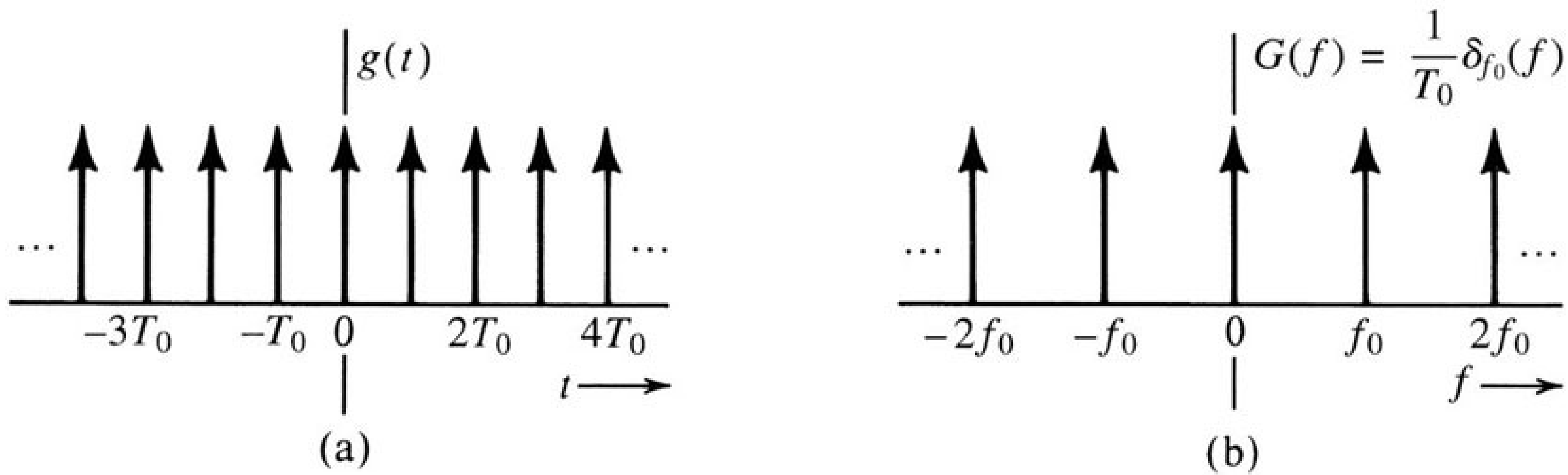
$$g(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} D_n \mathrm{e}^{j2n\pi f_0 t}$$

$$\Downarrow$$

$$G(f)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} D_n \delta(f-nf_0)$$

مثال: تبدیل فوریه قطار ضربه:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_0) \Longleftrightarrow \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{T_0}\delta(f - nf_0) \quad , f_0 = \frac{1}{T_0}$$



قضیه کانولوشن

یادآوری : کانولوشن دو تابع $g(t)$ و $w(t)$ را به‌شکل زیر تعریف می‌کنیم:

$$g(t) * w(t) = \int_{-\infty}^{\infty} g(\tau)w(t-\tau)\mathrm{d}\tau = \int_{-\infty}^{\infty} g(t-\tau)w(\tau)\mathrm{d}\tau$$

حال اگر:

$$g_1(t) \Longleftrightarrow G_1(f) \qquad g_2(t) \Longleftrightarrow G_2(f)$$

کانولوشن حوزه زمان

$$\boxed{g_1(t) * g_2(t) \Longleftrightarrow G_1(f).G_2(f)}$$

کانولوشن حوزه فرکانس
(ضرب در حوزه زمان)

$$\boxed{g_1(t).g_2(t) \Longleftrightarrow G_1(f) * G_2(f)}$$

یادآوری خاصیت عرض (پهنا) در کانولوشن (width property):
اگر $f_1(x)$ و $f_2(x)$به ترتیب دارای عرضW_1 وW_2 باشند، $f_1(x) * f_2(x)$ دارای عرض $W_1 + W_2$ خواهد بود.

نتیجه: اگر $g_1(t)$ و $g_2(t)$ به ترتیب دارای پهنای باند B_1 وB_1 هرتز باشند، (یعنی پهنای$G_1(f)$و$G_2(f)$)، پهنای باند $g_1(t).g_2(t)$ (یعنی عرض $G_1(f) * G_2(f)$)، $B_1 + B_2$ خواهد بود. *[در اینجا معنای دقیق پهنای باند مورد نظر است و نه معنی تقریبی آن]*

بنابراین پهنای باند$g^2(t)$، $2B$ هرتز و پهنای باند$g^n(t)$، nB هرتز می‌باشد.

خاصیت مشتق‌گیری زمانی و انتگرال‌گیری زمانی:

اگر

$$g(t) \Longleftrightarrow G\left(f\right)$$

آنگاه(خاصیت مشتق‌گیری):

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}g(t) \Longleftrightarrow j2\pi f G(f)$$

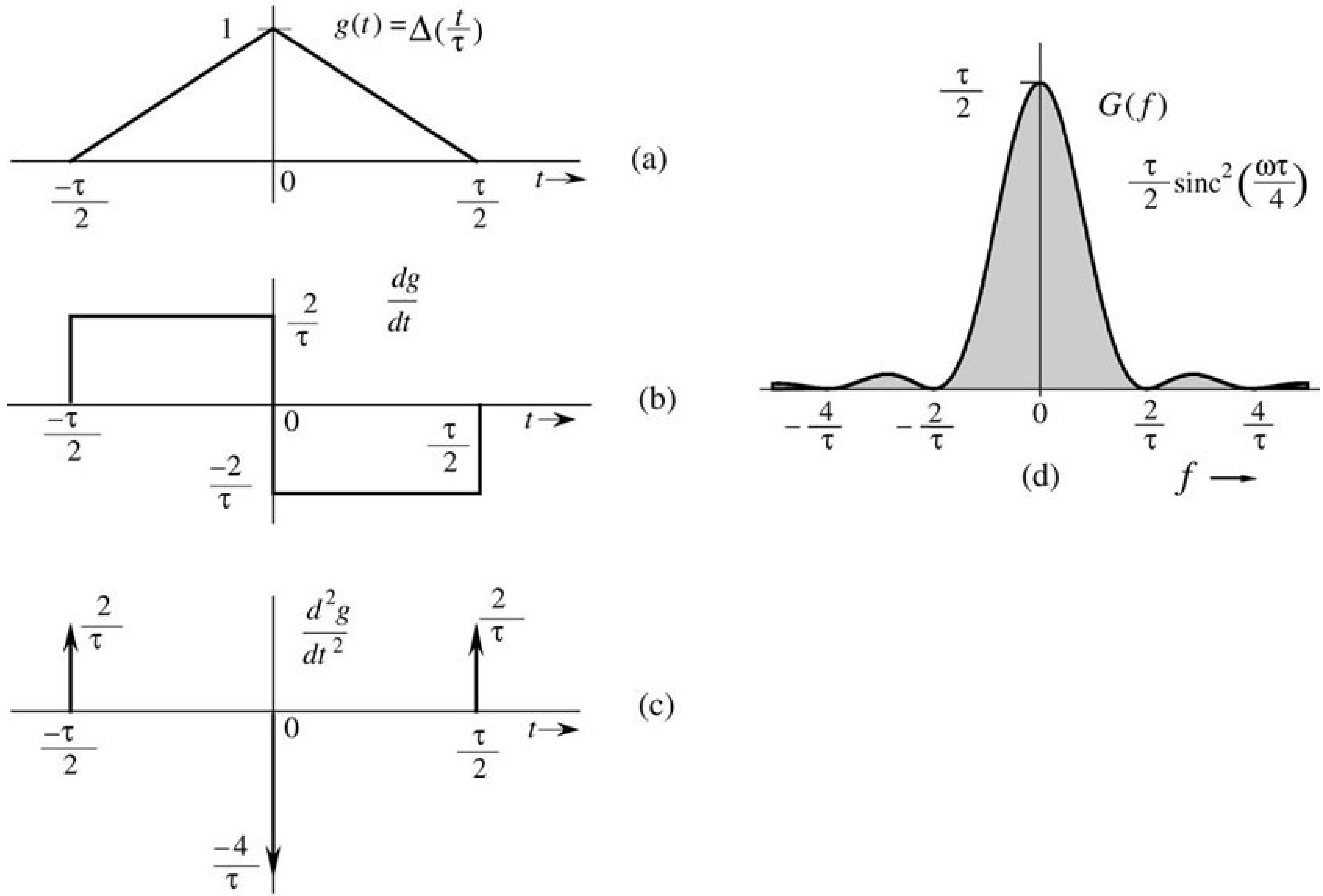
و (خاصیت انتگرال‌گیری):

$$\int_{-\infty}^{t} g(\tau)\mathrm{d}\tau \Longleftrightarrow \frac{G(f)}{j2\pi f} + \frac{1}{2}G(0)\delta(f)$$

تعمیم خاصیت مشتق‌گیری:

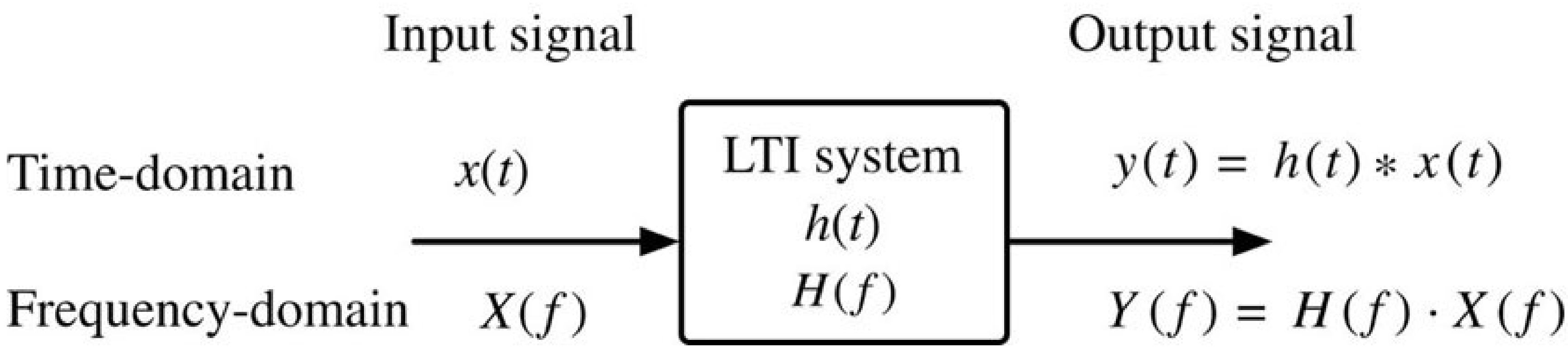
$$\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}t^n}g(t) \Longleftrightarrow (j2\pi f)^n G(f)$$

مثال: با استفاده از خاصیت مشتق‌گیری حوزه زمان، تبدیل فوریه پالس مثلثی $\Delta\left(t/\tau\right)$ را به‌دست آورید.



انتقال سیگنال از یک سیستم خطی

یک سیستم خطی تغییر ناپذیر با زمان (LTI)، هم در حوزه زمان و هم در حوزه فرکانس قابل توصیف است. در حوزه فرکانس با پاسخ ضربه سیستم $h(t)$ و در حوزه فرکانس با پاسخ فرکانسی $H(f)$.



فرض بر این است که سیستم‌های مورد بررسی، پایدار هستند یعنی ورودی‌های کراندار (Bounded Input) خروجی کراندار (Bounded Output) ایجاد می‌کنند (پایداری BIBO).

در حوزه زمان :

به فرض $h(t)$ پاسخ ضربه است. یعنی:

$$x(t) = \delta(t) \quad \Rightarrow \quad y(t) = h(t)$$

آنگاه:

$$\boxed{y(t) = h(t) * x(t)}$$

در حوزه فرکانس: به‌فرض تبدیل فوریه ورودی، خروجی و پاسخ ضربه سیستم:

$$x(t) \Longleftrightarrow X(f) \qquad y(t) \Longleftrightarrow Y(f) \qquad h(t) \Longleftrightarrow H(f)$$

آنگاه با توجه به خاصیت تبدیل فوریه کانولوشن:

$$\boxed{Y(f) = H(f)X(f)}$$

به $H(f)$ ، *تابع انتقال سیستم* (transfer function) و یا *پاسخ فرکانسی سیستم* (frequency response) می‌گویند.

$$H(f) = |H(f)|\mathrm{e}^{j\theta_h(f)},$$

$$\begin{cases} |H(f)| & \text{:(Amplitude response) پاسخ اندازهٔ سیستم} \\ \theta_h(f) & \text{:(Phase response) پاسخ فاز سیستم} \end{cases}$$

اعوجاج سیگنال (Signal Distortion) هنگام انتقال

$$|Y(f)|\,\mathrm{e}^{j\theta_y(f)} = |X(f)|\,|H(f)|\,\mathrm{e}^{j(\theta_x(f)+\theta_h(f))}$$

	ورودی سیستم	خروجی سیستم
اندازه	$\lvert X(f)\rvert$	$\lvert X(f)\rvert.\lvert H(f)\rvert$
فاز	$\theta_x(f)$	$\theta_x(f)+\theta_h(f)$

یک مؤلفه موجود در طیف ورودی، در اندازه در ضریب $|H(f)|$ ضرب می‌شود و در فاز با زاویه $\theta_h(f)$ جمع می‌شود.

انتقال بدون اعوجاج (Distortionless Transmission)

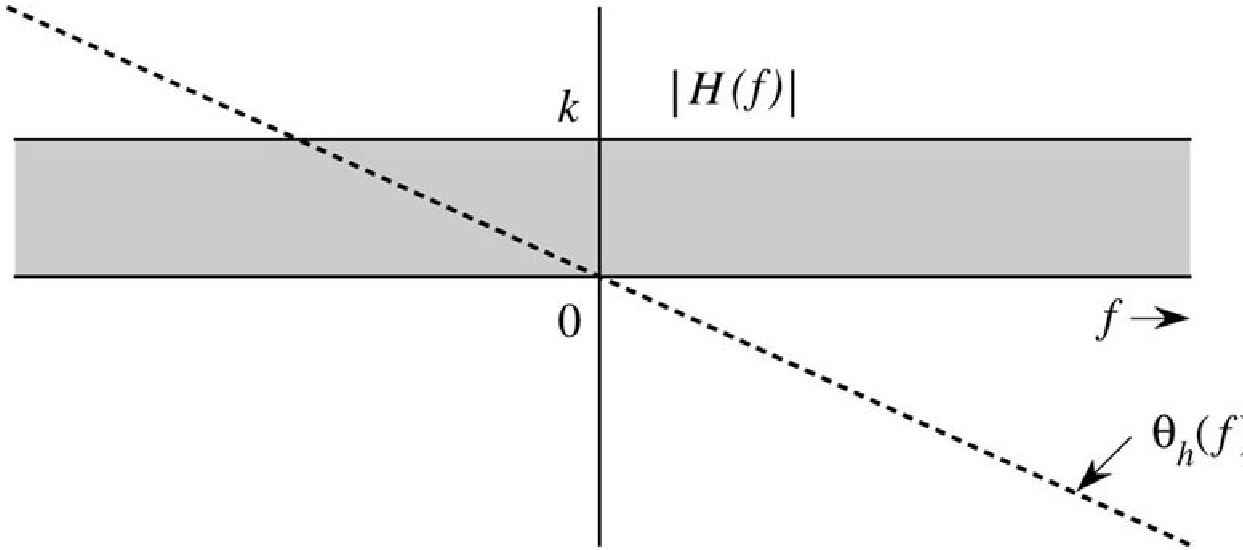
یک سیستم (مثلاً یک تقویت‌کننده و یا یک کانال مخابراتی) را بدون اعوجاج می‌گوییم اگر سیگنال خروجی همان سیگنال ورودی باشد الّا اینکه حداکثر در یک ضریب ثابت ضرب شود و نسبت به ورودی تأخیر زمانی داشته باشد.

خروجی سیستم بدون اعوجاج در حوزه زمان: $y(t) = k.x(t - t_d)$

پاسخ فرکانسی یا تابع انتقال سیستم بدون اعوجاج:

$$\boxed{H(f) = k\mathrm{e}^{-j2\pi f t_d}}$$

$$\begin{cases} |H(f)| = k \\ \theta_h(f) = -2\pi f t_d \end{cases}$$



اندازه پاسخ فرکانسی سیستم بدون اعوجاج، یک ضریب ثابت است.

فاز پاسخ فرکانسی یک سیستم بدون اعوجاج، یک تابع خطی است که از مبدأ می‌گذرد و شیب آن نسبت به فرکانس f برابر با $-2\pi t_d$ است که t_d تأخیری است که سیستم در سیگنال ورودی ایجاد می‌کند.

نکته: در حالت کلیتر، فاز یک سیستم بدون اعوجاج می‌تواند مضارب صحیحی از π هم داشته باشد.

$$\theta_h(f) = n\pi - 2\pi f t_d$$

در حالت کلّی، اگر پاسخ فاز یک سیستم، $\theta_h(f)$ باشد، تأخیر اعمال شده توسط این سیستم بر مؤلفه‌ای از سیگنال ورودی با فرکانس f ، عبارت است از:

$$\boxed{t_d(f) = -\frac{1}{2\pi}\frac{\mathrm{d}\theta_h(f)}{\mathrm{d}f}}$$

پس برای اینکه تمام مؤلفه‌های فرکانسی موجود در سیگنال ورودی، به یک اندازه تأخیر داشته‌باشند (که در غیر اینصورت سیگنال دچار اعوجاج خواهد شد)، **پاسخ فاز یک سیستم بدون اعوجاج، باید تابعی خطی از فرکانس باشد.**

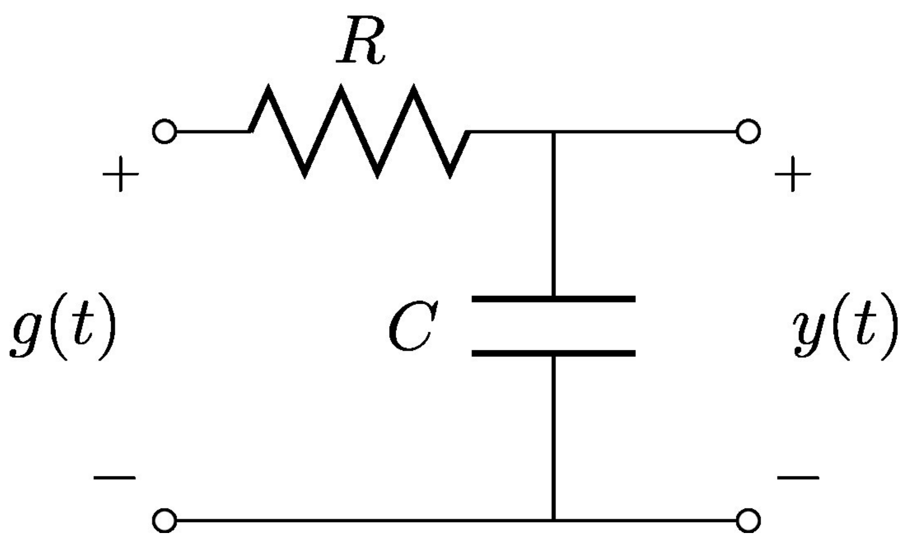
نتیجه: برای بدون اعوجاج بودن، یک شرط روی اندازه و یک شرط روی فاز پاسخ فرکانسی لازم است. اگر فقط اندازه پاسخ فرکانسی ثابت باشد (به این سیستمها **تمام-گذر** یا all-pass می‌گویند) مؤلفه‌های سیگنال در فرکانس‌های مختلف می‌تواند دچار تأخیرهای متفاوت شود و سیگنال را معوج کند.

مثال: اگر $g(t)$ و $y(t)$ به‌ترتیب ورودی و خروجی فیلتر پایین‌گذر زیر باشد:

الف) پاسخ فرکانسی سیستم $H(f)$ را به‌دست آورید و $|H(f)|$ و $\theta_h(f)$ و $t_d(f)$ را رسم کنید.

ب) برای یک انتقال بدون اعوجاج از این فیلتر، چه شرطی برای پهنای باند ورودی لازم است اگر تغییر 2% در پاسخ اندازه و تغییر 5% در تأخیر زمانی قابل قبول باشد.

ج) در این صورت تأخیر انتقال چقدر است و خروجی چیست؟



$$R = 10^3 \Omega$$
$$C = 10^{-9}\, F$$

برای **سیگنال‌های صوتی** به دلیل طبیعت و جنس حساسیت گوش انسان:
اعوجاج در اندازه اهمیت زیادی دارد و اعوجاج در فاز (غیر خطی بودن پاسخ فاز) اهمیت کمی دارد.

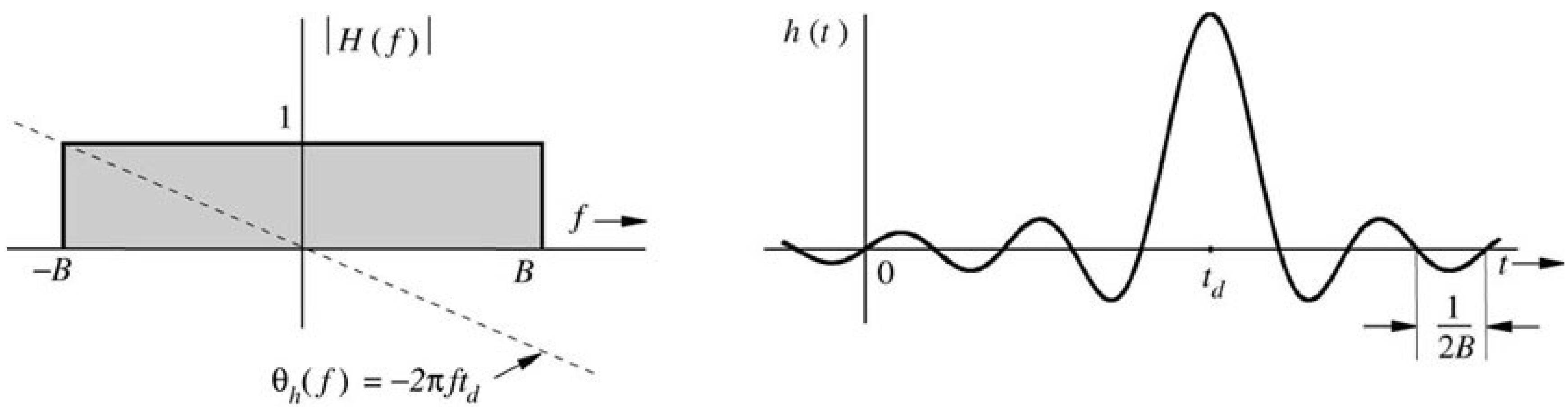
برای **سیگنال‌های ویدئویی** به دلیل حساسیت چشم:
اعوجاج در اندازه اهمیت کمتری دارد و در مقابل اثر اعوجاج در فاز بر کیفیت ویدئو چشمگیرتر و مهمتر است.

برای **سیگنالهای دیجیتال** که در مخابرات دیجیتال ارسال می‌شوند:
اعوجاج در اندازه اهمیت کمتری دارد ولی اعوجاج در فاز مهمتر است زیرا باعث گسترده شدن و پخش پالس‌ها و در هم فرو رفتن و تداخل پالس‌های مجاور می‌شود که باعث ایجاد خطا می‌گردد.

فیلترهای ایده‌آل و فیلترهای عملی

یک فیلتر ایده‌آل انتقال بدون اعوجاج را در یک باند فرکانسی مشخص اجازه می‌دهد و جلوی همه فرکانسهای دیگر را می‌گیرد.

مثلاً فیلتر پایین گذر ایده‌آل:



(a) (b)

اگر $g(t)$ ورودی فیلتر همه مؤلفه‌هایش دارای فرکانس کمتر از B هرتز باشد (یعنی طیف حوزه فرکانسش بطور کامل بین 0 تا B هرتز قرار گیرد)، در این صورت سیگنال بدون تغییر و فقط با تأخیر t_d از فیلتر می‌گذرد.

اگر ورودی g(t) دارای طیف داخل 0 تا B هرتز باشد.

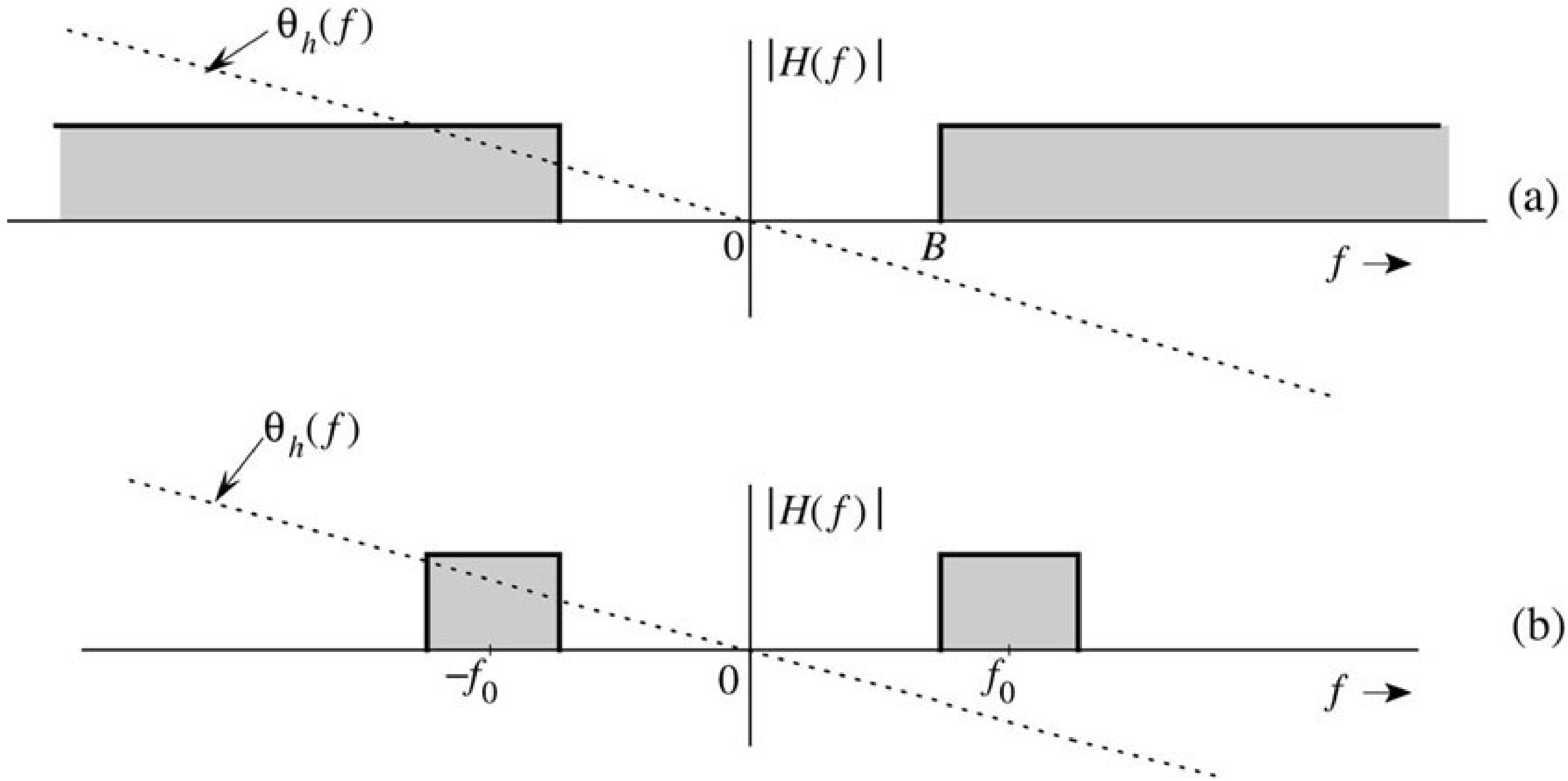
$$\Rightarrow y(t) = g(t - t_d)$$

پاسخ فرکانسی فیلتر پایین گذر ایده‌آل:

$$\begin{cases} |H(f)| = \Pi\left(\frac{1}{2B}\right) \\ \theta_h(f) = -2\pi f t_d \end{cases} \Rightarrow H(f) = \Pi\left(\frac{1}{2B}\right) \mathrm{e}^{-j2\pi f t_d}$$

پاسخ ضربه فیلتر:

$$h(t) = 2B \operatorname{sinc}[2\pi B(t - t_d)]$$


$\theta_h(f)$
$|H(f)|$
(a)
0
B
$f \rightarrow$
$\theta_h(f)$
$|H(f)|$
(b)
$-f_0$
0
f_0
$f \rightarrow$

با توجه به پاسخ ضربه فیلتر پایین‌گذر ایده‌آل، آشکار می‌شود که این پاسخ، غیرعلّی است و بنابراین عملی و قابل پیاده‌سازی نیست.
باری علّی بودن پاسخ ضربه، باید:

$$h(t) = 0 \quad \text{for } t < 0$$

این شرط معادل شرط **پالی-وینر** (Paley-Weiner) در حوزه فرکانس است:

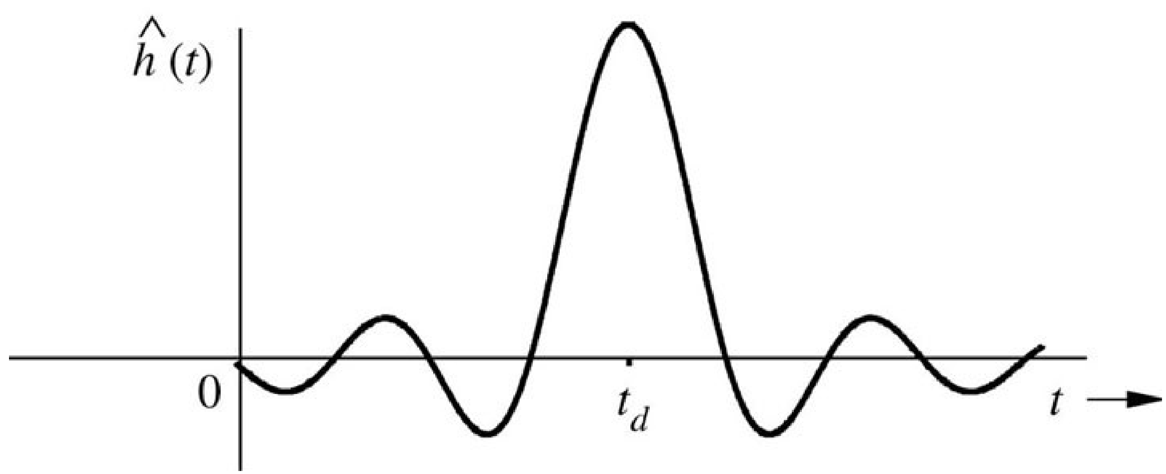
$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\ln |H(f)||}{1 + (2\pi f)^2} \mathrm{d}f < \infty$$

با توجه به جمله $\ln |H(f)|$ ، اگر $|H(f)|$ در بازه‌ای از فرکانس صفر باشد، شرط پالی-وینر نقض می‌شود و فیلتر غیر علّی و غیر عملی می‌شود.
نتیجه: همه فیلترهای ایده‌آل پایین، میان و بالا گذر غیرعلّی هستند.

یک روش برای علّی‌کردن پاسخ ضربه این است که از پاسخ ضربه تقریبی علّی به‌دست آوریم:

$$\widehat{h}(t) = h(t)u(t)$$

در این صورت دیده‌می‌شود که هرچه t_d بزرگ‌تر باشد، تقریب بهتری به دست می‌آید. و در عمل ۳ تا چهار برابر $1/2B$ ، برای فیلتر پایین‌گذر تأخیر مناسبی است. مثلاً برای صدا، با پهنای باند ۲۰ کیلوهرتز ، با تأخیر 0.1msec تقریب خوبی به‌دست می‌آید.



اعوجاج سیگنال روی یک کانال مخابراتی

۱) اعوجاج خطی: این اعوجاج به‌صورت یک سیستم LTI قابل توصیف است.
اگر کانال دارای پاسخ اندازه غیر ثابت و یا پاسخ فاز غیر خطی باشد، اتفاق می‌افتد.

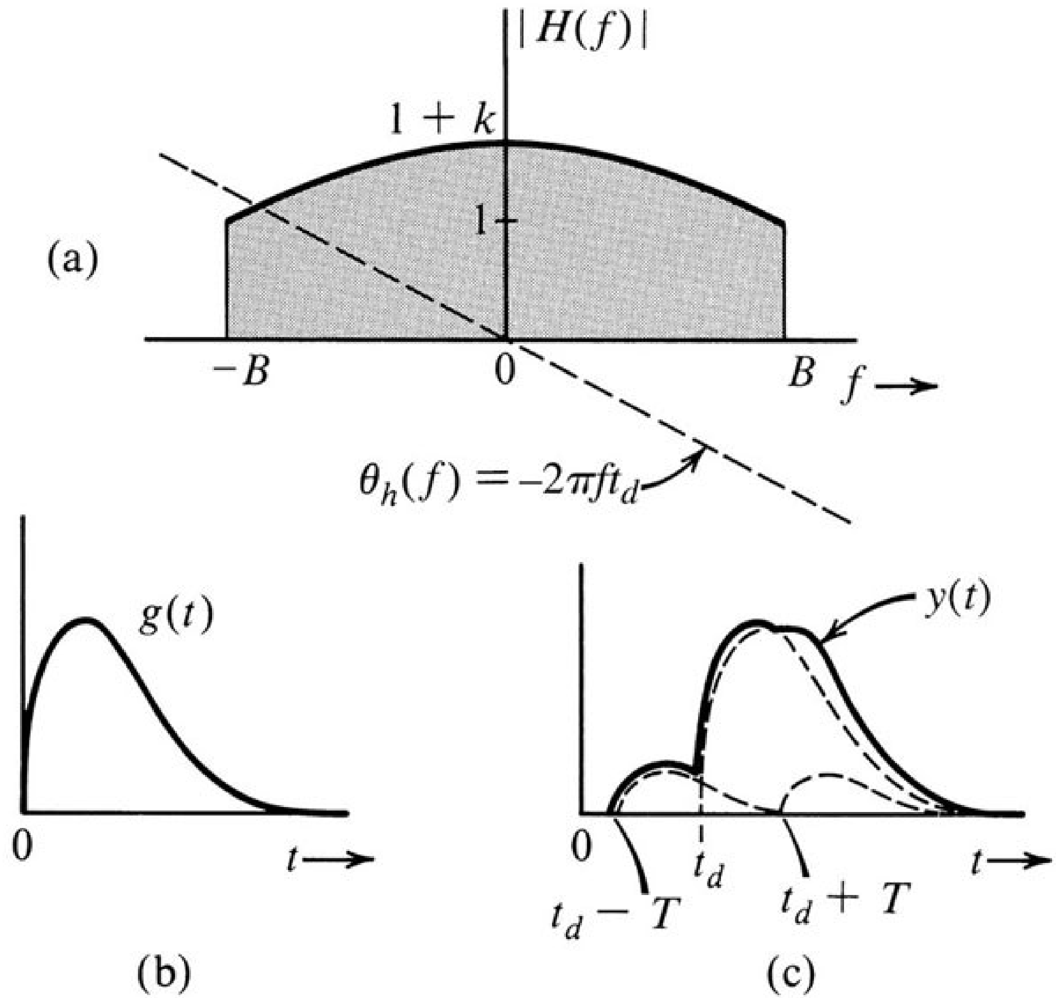
$$\begin{cases} |H(f)| \neq k \\ \bigvee \\ \theta_h(f) \neq -2\pi t_d f \end{cases}$$

یکی از مهمترین آثار این اعوجاج، پدیده **پخش کنندگی** (dispersion) یا گسترده کردن (spreading) (در حوزه زمان) است.
پخش بخصوص در مخابرات دیجیتال مخرب است و باعث **تداخلهای بین سمبلی** (Intersymbol interferences: ISI) می‌شود.

مثال: فیلتر پایین‌گذر با پاسخ فرکانسی $H(f)$ داده شده‌است:

$$H(f) = \begin{cases} (1 + k\cos 2\pi f T)\mathrm{e}^{-j2\pi f t_d} & |f| < B \\ \\ 0 & |f| > B \end{cases}$$

پالس $g(t)$ با پهنای باند محدود به B هرتز به ورودی این فیلتر اعمال می‌شود.
خروجی $y(t)$ را به‌دست آورید.


|H(f)|
1 + k
1
(a)
−B
0
B
f
θ_h(f) = −2πft_d
g(t)
0
t
(b)
y(t)
0
t_d − T
t_d
t_d + T
t
(c)

۲) اعوجاج ناشی از غیرخطی بودن کانال:

فرض خطی بودن کانال با افزایش دامنه سیگنال، کمتر قابل قبول است و کانال اثرات غیر خطی خود را برای سیگنال‌های بزرگ بروز می‌دهد.

$$y = f(g)$$

که f یک تابع غیر خطی است. بسط مک‌لورن این تابع:

$$y(t) = a_0 + a_1 g(t) + a_2 g^2(t) + \cdots + a_k g^k(t) + \dots$$

دیده می‌شود که:

الف) برخلاف اعوجاج خطی، اگر ورودی $g(t)$ دارای پهنای باند محدود B هرتز باشد، خروجی بسته به تعداد جملات قابل اعتنای بسط بالا دارای پهنای باند kB یا بیشتر است. یعنی کانال خاصیت پخش‌کنندگی در حوزه فرکانس دارد.

ب) بر خلاف اعوجاج خطی، اگر ورودی یک پالس با عرض محدود در زمان باشد، خروجی هم یک پالس دیگر با همان پهنا است. یعنی خاصیت پخش در حوزه زمان وجود ندارد.

اثر پخش در حوزه فرکانس بر مخابرات AM مخرب و قابل توجه است ولی بر مخابرات FM اثر اندکی دارد.

در مخابرات دیجیتال باعث تداخل در حوزه زمان میان پالس‌های مجاور (ISI) نمی‌شود.

همچنین در ارسال چندگانه با تقسیم زمانی (Time-Division Multiplexing: TDM) تداخل میان پالس‌ها ایجاد نمی‌شود.

ولی باعث تداخل در کانال‌های فرکانسی مجاور می‌شود.

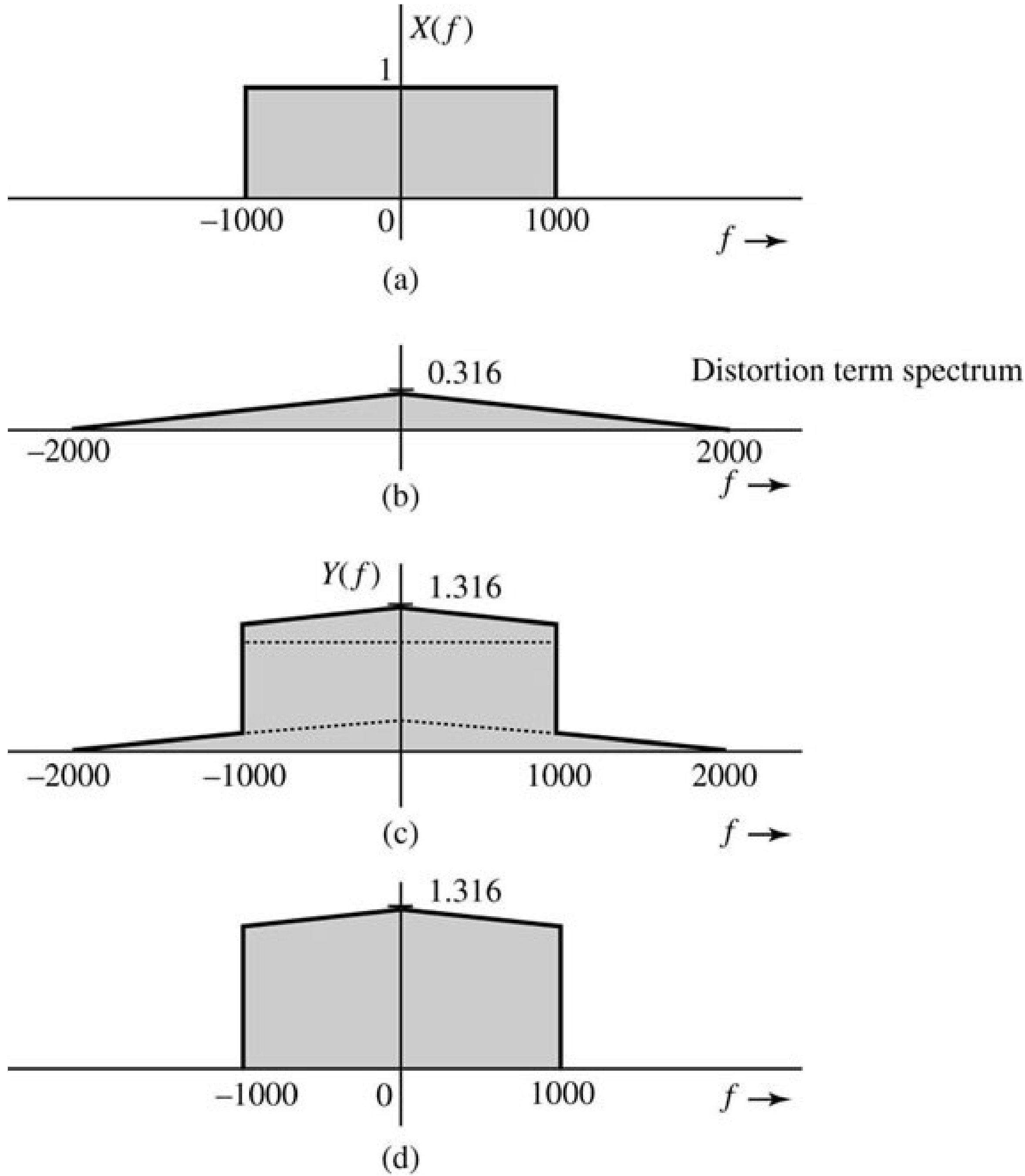
مثال: ورودی و خروجی یک کانال غیرخطی عبارت‌است از:

$$y(t) = x(t) + 0.000158\,x^2(t)$$

اگر ورودی

$$x(t) = 2000\,\mathrm{sinc}\left(2000\pi t\right)$$

باشد، خروجی و طیف آن و پهنای باند آن را به‌دست آورید. آیا ورودی از روی خروجی قابل بازیابی است؟


X(f)
1
−1000
0
1000
f →
(a)
0.316
Distortion term spectrum
−2000
2000
f →
(b)
Y(f)
1.316
−2000
−1000
1000
2000
(c)
f →
1.316
−1000
0
1000
f →
(d)

۳) اعوجاج ناشی از اثرات چند مسیره بودن کانال:

در این کانال‌ها سیگنال از چند مسیر مختلف به گیرنده می‌رسد که هر مسیر ضریب تضعیف و تأخیر متفاوتی دارد.

این چند مسیر بودن:

درکابل‌های انتقال سیگنال به دلیل عدم تطبیق کامل امپدانس

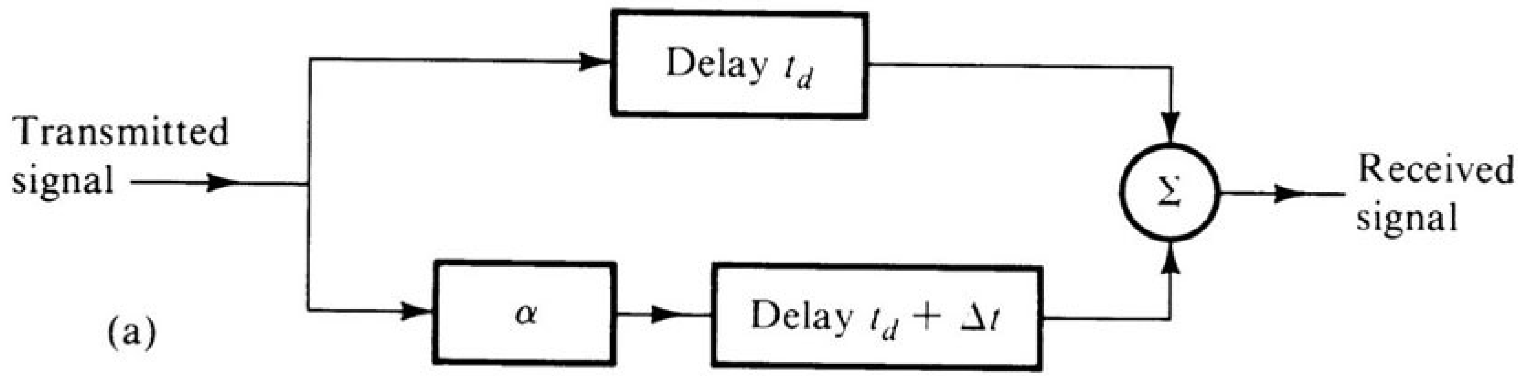
در لینک‌های رادیویی به دلیل انعکاس امواج الکترومغناطیسی بوسیله اشیایی مثل کوهها و ساختمانها

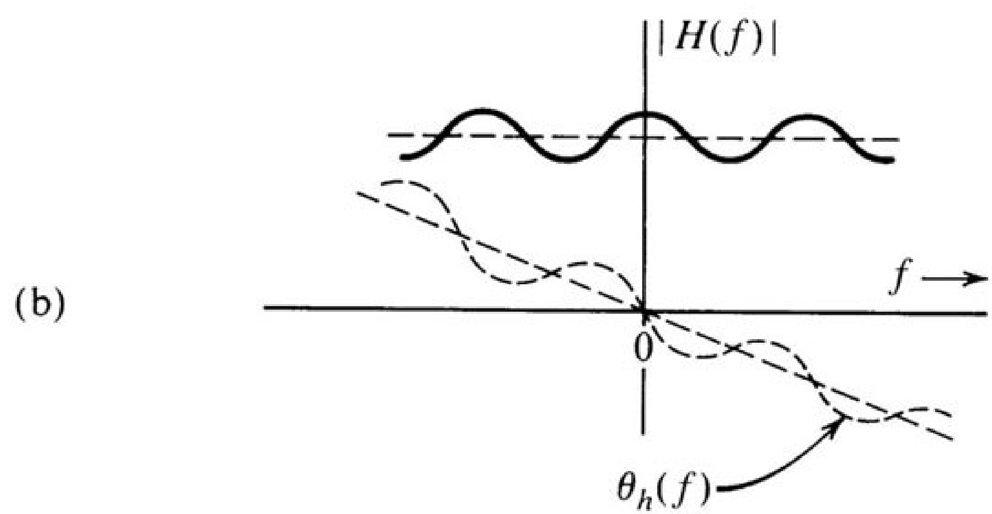
و در لینک‌های رادیویی راه دور انعکاس امواج توسط لایه‌های جو و بخصوص یونوسفر

ایجاد می‌شود.

یک کانال چند مسیره را می‌توان بصورت چند کانال موازی (هر کانال برای یک مسیر) در نظر گرفت.

برای یک کانال دو مسیره:





$$H(f) = \mathrm{e}^{-j2\pi f t_d} + \alpha \mathrm{e}^{-j2\pi f \Delta t}$$

$$\begin{cases} |H(f)| = \left(1 + \alpha^2 + 2\alpha \cos 2\pi f \Delta t\right)^{1/2} \\ \theta_h(f) = -\left(2\pi f t_d + \tan^{-1} \dfrac{\alpha \sin 2\pi f \Delta t}{1 + \alpha \cos 2\pi f \Delta t}\right) \end{cases}$$

دوره تناوب $1/\Delta t$

$$\text{if} \quad \alpha \approx 1$$

$$\begin{cases} f = \dfrac{n}{2\Delta t} \quad n\,\text{odd} & \Rightarrow H(f) = 0 \;\; : \text{null frequency} \\ f = \dfrac{n}{2\Delta t} \qquad n\,\text{even} & \Rightarrow H(f) = 2\mathrm{e}^{-j2\pi f t_d} \end{cases}$$

فیدینگ فرکانس گزین: frequency-selective fading

این اعوجاج بوسیله نوع خاصی تعدیل‌کننده (Equalizer) معروف به tapped delay-line equalizer (اکولایزر با خط‌های تأخیر قابل تنظیم) بصورت جزئی قابل اصلاح است.

۴) کانالهای فیدینگ (Fading channels)

تغییر مشخصه کانال با زمان

- بصورت تقریباً تناوبی (تغییرات فصلی یا روزانه مشخصات آب و هوایی
  - یا خواص انعکاسی لایه‌های اتمسفر – خواص انتشار محیط انتقال)
- تغییرات تصادفی و ناگهانی این مشخصات
-

فیدینگ ممکن است کند (slow) یا تند (fast) باشد.

فیدینگ کند، با کنترل کننده اتوماتیک گین (Automatic Gain Control: AGC) تقویت کننده‌ها قابل حل است.

فیدینگ می‌تواند فرکانس گزین باشد. (frequency selective fading)

دیدیم که انعکاس چند مسیره می‌تواند سبب فیدینگ فرکانس گزین شود.

پایان بحث اعوجاج

انرژی سیگنال و چگالی طیفی سیگنال

$$E_g = \int_{-\infty}^{+\infty} |g(t)|^2 \mathrm{d}t$$

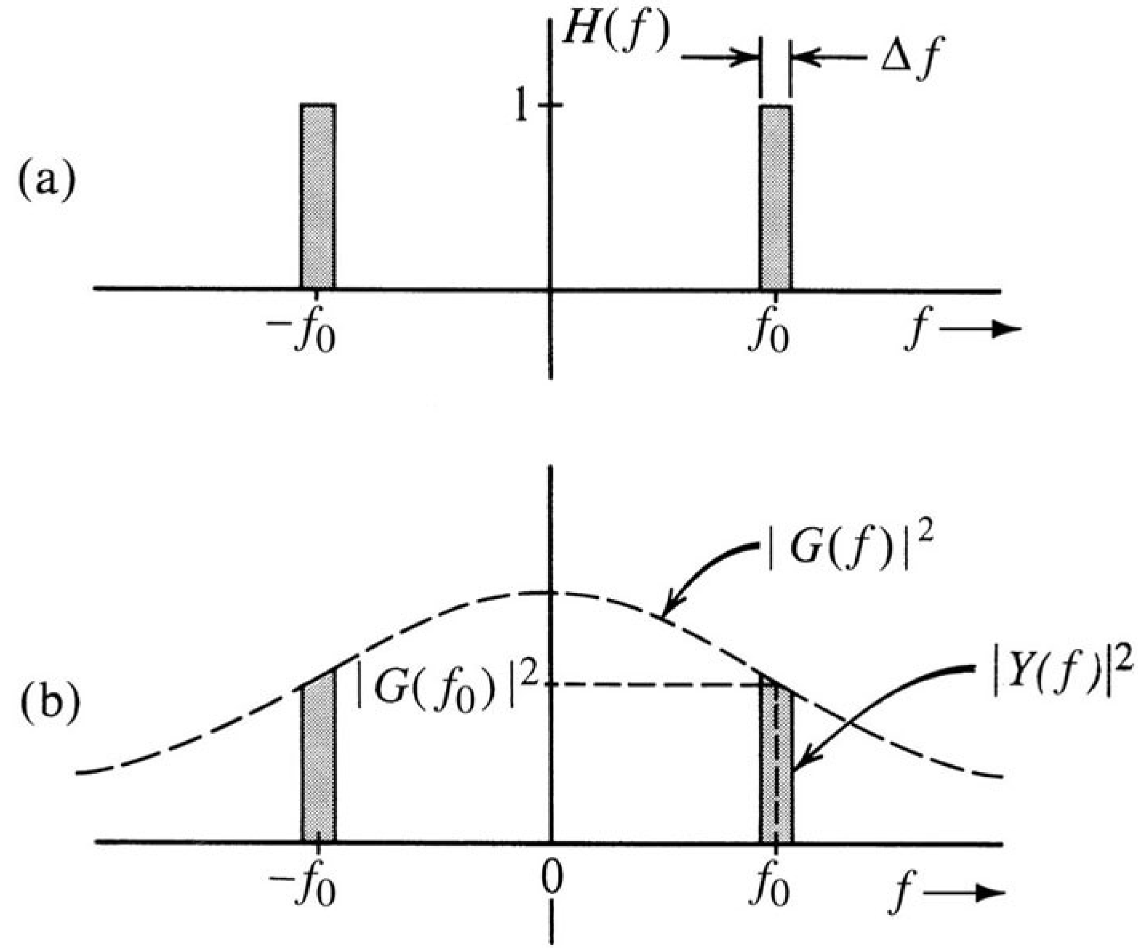
$$g(t) \Longleftrightarrow G\left(f\right)$$

قضیه پارسوال:

$$E_g = \int_{-\infty}^{+\infty} |g(t)|^2 \mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{+\infty} |G(f)|^2 \mathrm{d}f$$

مفهوم چگالی طیفی انرژی:

$$E_g = \int_{-\infty}^{+\infty} |G(f)|^2 \mathrm{d}f$$



برای سیگنال $g(t)$ که تبدیل فوریه (چگالی طیفی) آن $G(f)$ است، می‌توان $|G(f)|^2$ را انرژی بر واحد فرکانس مؤلفه طیف تابع $g(t)$ در فرکانس دانست. به‌عبارتی $|G(f)|^2$ چگالی طیفی انرژی (Energy Spectral Density: ESD) بر واحد پهنای باند (هرتز) سیگنال $g(t)$ است.

Ψ :psi $$\Psi_g(f) = |G(f)|^2$$

در نتیجه:

$$E_g = \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi(f) \mathrm{d}t$$

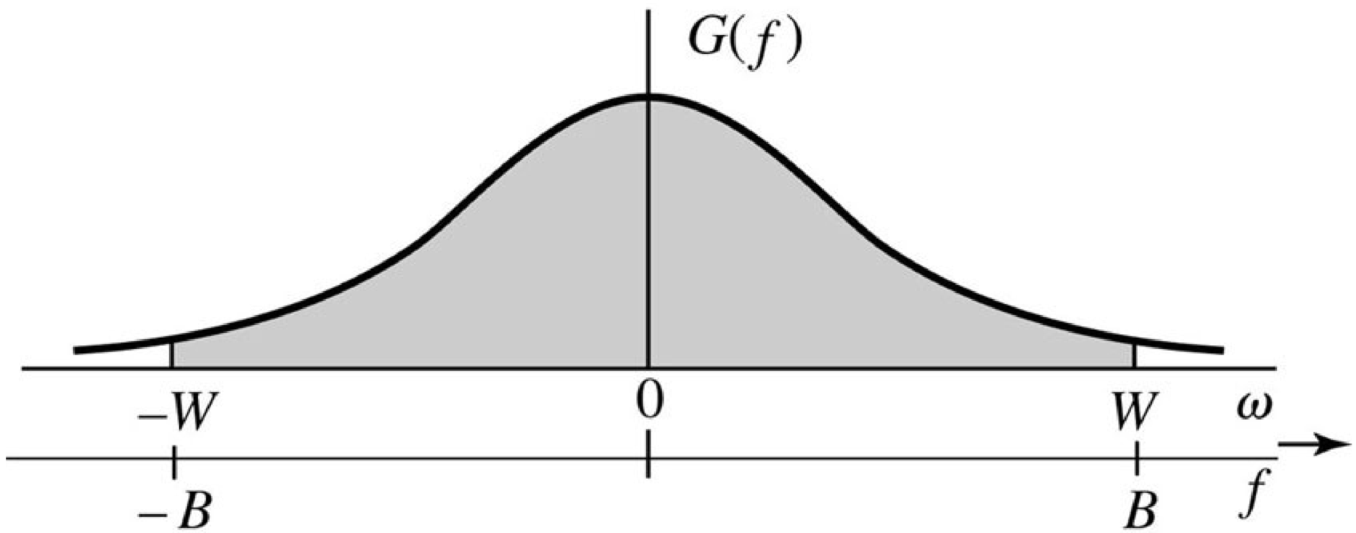
پهنای باند اساسی سیگنال:

اگر برای انتخاب فرکانس‌های با اهمیت در طیف یک سیگنال، معیار را انرژی در نظر بگیریم، پهنای باند به‌دست آمده را «پهنای باند اساسی» سیگنال می‌گوییم:

باندی از فرکانس که انرژی مؤلفه‌های سیگنال در آن حاوی بیشترین مقدار انرژی سیگنال هستند و خارج از آن باند، انرژی ناچیز و قابل صرفنظر دارد، پهنای باند اساسی سیگنال نامیده می‌شود.

دقت مورد نیاز در کاربرد مفهوم پهنای باند، مقدار بیشترین و کمترین را تعیین می‌کند. مثلاً پهنای باند اساسی یک سیگنال حاوی 95% و خارج از این باند حاوی 5% انرژی سیگنال می‌باشد.

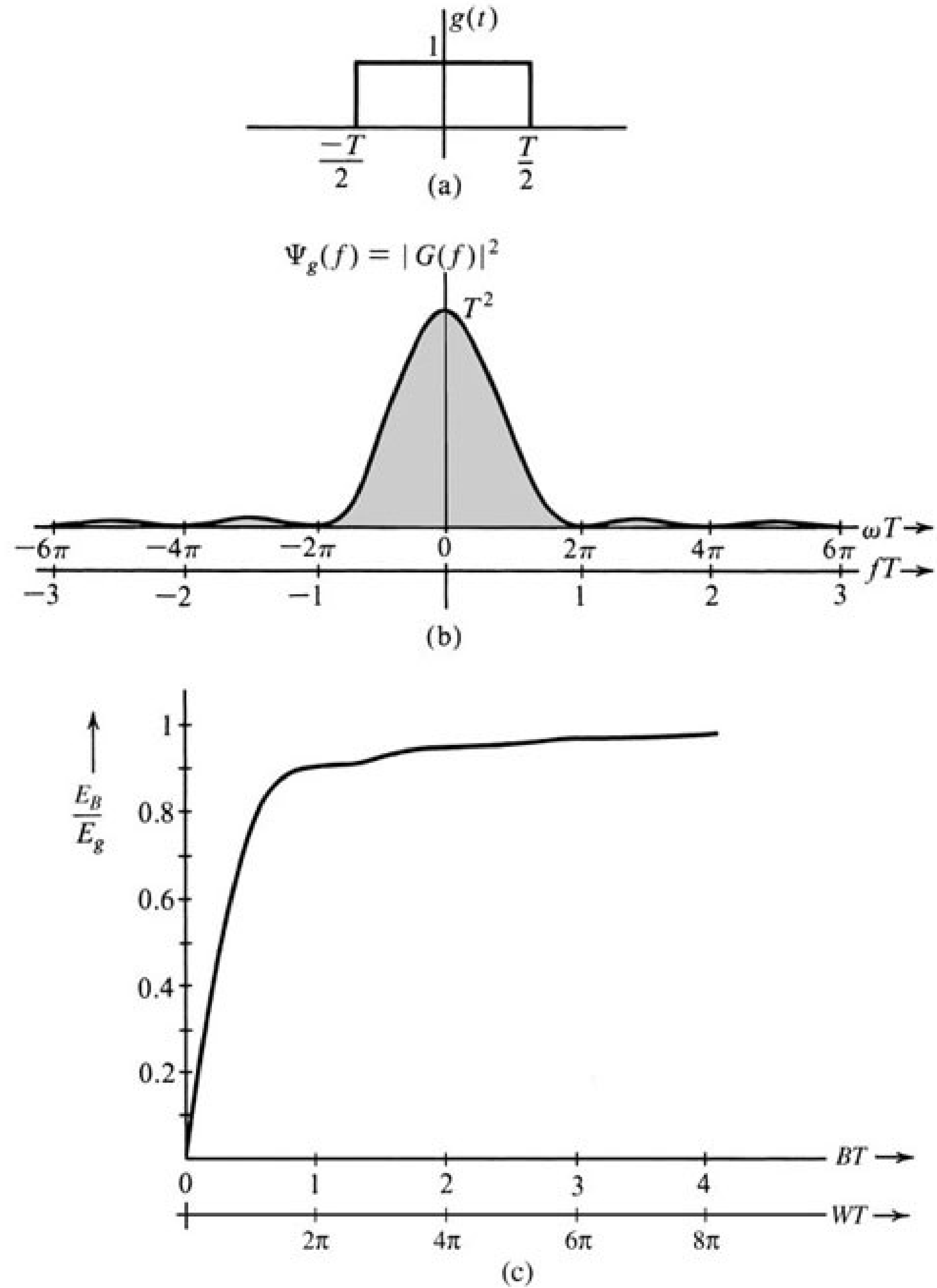
مثال: پهنای باند اساسی سیگنال $e^{-at}u(t)$ را طوری محاسبه کنید که 95% کل انرژی سیگنال را در بر بگیرد.



مثال: پهنای باند اساسی یک پالس مستطیلی $g(t) = \Pi(t/T)$ را طوری محاسبه کنید که حاوی حداقل 90% انرژی سیگنال باشد.

$$\Pi\left(\frac{t}{T}\right) \Longleftrightarrow T\,\mathrm{sinc}(\pi T f)$$

$$B = \frac{1}{T}$$


$g(t)$
1
$\frac{-T}{2}$
$\frac{T}{2}$
(a)
$\Psi_g(f) = |G(f)|^2$
T^2
-6π
-4π
-2π
0
2π
4π
6π
$\omega T \rightarrow$
$fT \rightarrow$
-3
-2
-1
1
2
3
(b)
$\frac{E_B}{E_g}$
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
$BT \rightarrow$
$WT \rightarrow$
2π
4π
6π
8π
(c)

انرژی سیگنال مدوله شده در مقایسه با سیگنال مدوله کننده

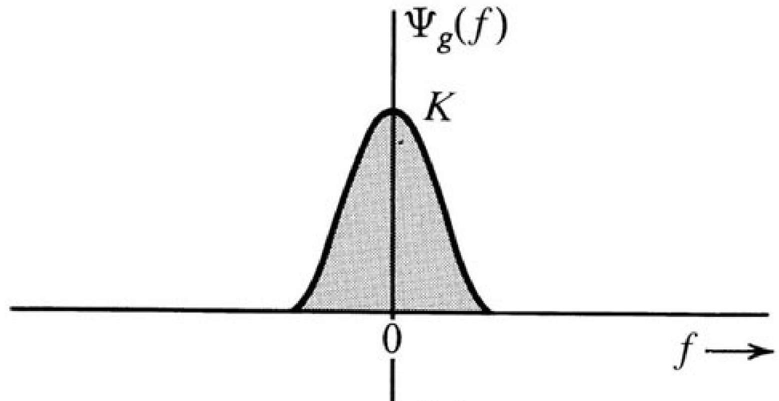
با پهنای باند B $\quad g(t) \Longleftrightarrow G(f)$

$$\varphi(t) = g(t)\cos 2\pi f_0 t \Longleftrightarrow \Phi(f) = \left(\frac{1}{2}\right)\left[G(f-f_0) + G(f+f_0)\right]$$

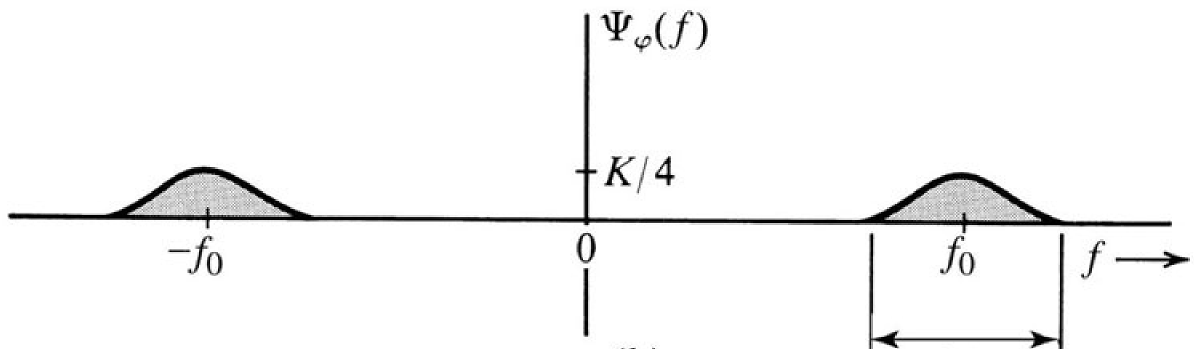
چگالی طیفی انرژی سیگنال مدوله شده:

$$\begin{aligned}
\Psi_\varphi(f) &= |\Phi(f)|^2 \\
&= \frac{1}{4}|G(f-f_0) + G(f+f_0)|^2 \\
&= \frac{1}{4}\Psi_g(f-f_0) + \frac{1}{4}\Psi_g(f+f_0) \quad \text{if } f_0 \geq B
\end{aligned}$$

$$E_\varphi = \frac{1}{2} E_g \quad \text{if } f_0 \geq B$$



(a)



(b)

رابطه بین تابع خود همبستگی و چگالی طیفی انرژی

$$\begin{aligned}\psi_g(\tau) &= \int_{-\infty}^{\infty} g(t)g(t+\tau)\mathrm{d}t \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} g(t)g(t-\tau)\mathrm{d}t \\ &= \psi_g(-\tau)\end{aligned}$$

قضیه: چگالی طیفی انرژی تبدیل فوریه تابع خود همبستگی است.

$$\psi_g(\tau) \Longleftrightarrow \Psi_g(f) = \int_{-\infty}^{\infty} \psi_g(\tau)\mathrm{e}^{-j2\pi f\tau}\mathrm{d}\tau$$

رابطه بین چگالی طیفی انرژی ورودی و خروجی یک سیستم LTI

$$|Y(f)|^2 = |H(f)|^2 |X(f)|^2$$

در نتیجه:

$$\Psi_y(f) = |H(f)|^2 \Psi_x(f)$$