

(جزوه‌ی شماره ۲)

☒ تابع

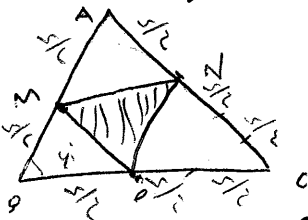
☒ حد

☒ پیوستگی

$AN \cong \frac{1}{2} NB$ $PC \cong \frac{1}{2} PB \implies AB$ $\hookrightarrow$ M $\hookrightarrow$ $\frac{1}{2} AB$ $\hookrightarrow$ ABC $\hookrightarrow$ P

$$\frac{S(\triangle ABC)}{S(\triangle MNP)} = ?$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2}$$



$$\frac{\sqrt{2}}{2} \omega^2 \cdot \left(\frac{1}{2} \frac{\omega}{2} \frac{\omega}{2} \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2} \frac{\omega}{2} \frac{\omega}{2} \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2} \frac{\omega}{2} \frac{\omega}{2} \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = \frac{1}{8}$$

مؤلف: سیروس نصیری



تعریف مثلثات: اساساً موضوع علم مثلثات عبارت است از محاسبه اضلاع، زوایا و تعیین روابط بین اجزای مثلث.

واحدهای اندازه گیری زاویه:

الف) درجه: یک درجه زاویه ای است که از دوران نیم خط OA حول نقطه O به اندازه $\frac{1}{360}$ یک دوران کامل بدست می آید.

ب) رادیان: یک رادیان زاویه مرکزی است که اندازه کمان مقابل به آن زاویه برابر با شعاع دایره است.

تبدیل واحدهای زاویه: اگر درجه را با D و رادیان را با R نمایش دهیم در این صورت: $\frac{D}{180} = \frac{R}{\pi}$

$$1 \text{ rad} \approx 57^\circ$$

توجه: یک رادیان تقریباً 57° درجه است.

نسبت های مثلثاتی در مثلث قائم الزاویه: مثلث قائم الزاویه ABC ($A = 90^\circ$) را طبق شکل ۱ در نظر بگیرید. نسبت های مثلثاتی

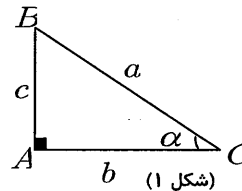
به صورت زیر تعریف می شوند:

$$\sin \alpha = \frac{\text{ضلع مقابل به } \alpha}{\text{وتر}} = \frac{AB}{BC} = \frac{c}{a}$$

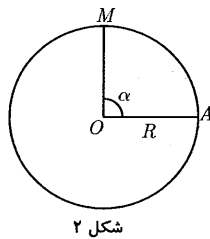
$$\cos \alpha = \frac{\text{ضلع مجاور به } \alpha}{\text{وتر}} = \frac{AC}{BC} = \frac{b}{a}$$

$$\tan \alpha = \frac{\alpha \text{ ضلع مقابل به } \alpha}{\alpha \text{ ضلع مجاور به } \alpha} = \frac{AB}{AC} = \frac{c}{b}$$

$$\cot \alpha = \frac{\alpha \text{ ضلع مجاور به } \alpha}{\alpha \text{ ضلع مقابل به } \alpha} = \frac{AC}{AB} = \frac{b}{c}$$



زاویه مرکزی و کمان مقابل آن: اندازه هر کمان برابر است با اندازه زاویه مرکزی روبروی آن کمان (شکل ۲).



$$\angle O = \alpha = \widehat{AM}$$

توجه: طول کمان AM مسافتی است که باید متمرکز از نقطه A طی کند تا به نقطه M برسد. و رابطه ی $\widehat{AM} = R\alpha$ (*) بین آنها

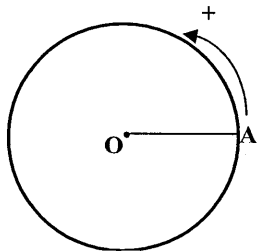
برقرار است. (در رابطه (*) اندازه زاویه α بر حسب رادیان است.)

دایره مثلثاتی: دایره مثلثاتی دایره ای است که شعاع آن برابر واحد طول باشد

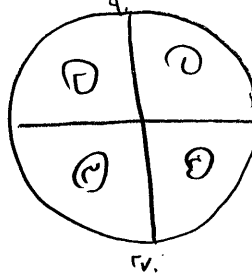
و بر روی آن نقطه ای مانند A را به عنوان مبدأ انتخاب می کنیم. طبق قرارداد

جهت عکس حرکت عقربه های ساعت را جهت مثبت مثلثاتی و جهت حرکت

عقربه های ساعت را جهت منفی مثلثاتی می نامند. (شکل ۳)



شکل (۳)

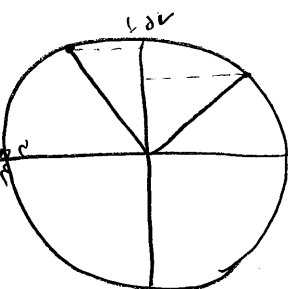


$$\begin{aligned} [\cos^2] &= -1 \\ [\cos^2] &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left[\begin{matrix} \cos^2 \\ \sin^2 \end{matrix} \right] &= \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad n \in \mathbb{Z} \\ \left[\begin{matrix} \cos^2 \\ \sin^2 \end{matrix} \right] &= \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad n \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

$$[1] = -1$$

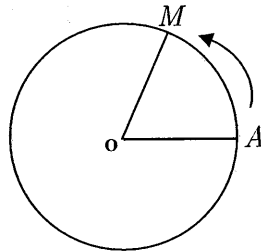
$$\begin{aligned} \sin 1 \\ \sin 2 \\ \sin 3 \end{aligned}$$



$$\sin 2 \rightarrow \sin 1$$

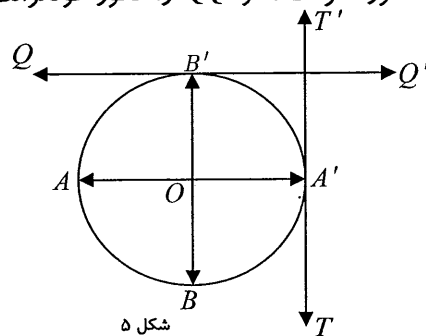


زاویه مثلثاتی: فرض کنیم متحرکی از مبدأ A با جهت مثبت یا منفی کمان $\widehat{AM}$ را طی کند. بعد از اینکه صفر یا یک یا دو یا K مرتبه دایره مثلثاتی را طی کرد به نقطه M می‌رسد. اگر زاویه مقابل به کمان $\widehat{AM}$ برابر α درجه باشد در این صورت $\angle AOM$ را زاویه مثلثاتی می‌نامیم. اندازه جبری زاویه α به صورت زیر تعریف می‌شود. (شکل ۴)



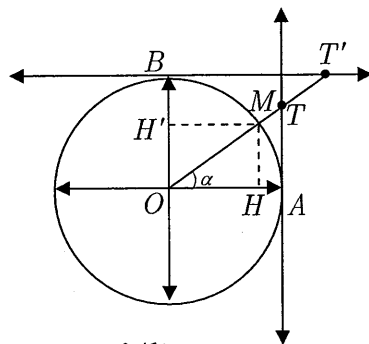
شکل (۴)

محورهای مثلثاتی: دایره مثلثاتی به مرکز O و به شعاع $OA' = 1$ را مطابق شکل ۵ در نظر می‌گیریم. AA' را محور کسینوس ها، BB' را محور سینوس ها، TT' را محور تانژانت ها و QQ' را محور کوتانژانت ها می‌نامیم. دایره مثلثاتی صفحه را به چهار ناحیه تقسیم می‌کند.



شکل ۵

نسبت های مثلثاتی در دایره مثلثاتی: طبق شکل ۶ نسبت های مثلثاتی زاویه α به صورت زیر خواهد بود.



شکل ۶

اندازه جبری تصویر نقطه M بر محور سینوس ها تا مبدأ برابر است با $\sin \alpha$

$$\sin \alpha = \frac{MH}{OM} = \frac{MH}{1} = OH'$$

اندازه ی جبری تصویر نقطه M بر محور کسینوس ها تا مبدأ برابر است با: $\cos \alpha$

$$\cos \alpha = \frac{OH}{OM} = OH$$

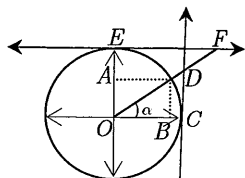
برای یافتن تانژانت زاویه α نقطه M را ادامه می‌دهیم تا محور تانژانت ها را در T قطع کند. فاصله T از مبدأ تانژانت ها (A) را تانژانت زاویه α می‌نامند.

$$\tan \alpha = \frac{TA}{OA} = TA$$

برای یافتن کوتانژانت زاویه α مانند تانژانت عمل می‌کنیم تا محور کوتانژانت ها را در T' قطع کند. فاصله مبدأ کوتانژانت ها (B) تا T' را کوتانژانت زاویه α می‌نامیم.



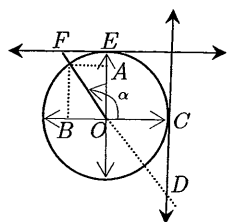
$$\cot \alpha = \frac{OH}{MH} = \frac{BT'}{OB} = BT'$$



علامت نسبت های مثلثاتی در نواحی چهارگانه :

الف) اگر زاویه α را در ناحیه اول انتخاب کنیم ($0^\circ < \alpha < 90^\circ$) در این صورت :

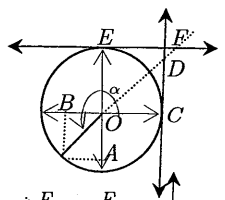
$$\sin \alpha = \overline{OA} > 0, \cos \alpha = \overline{OB} > 0, \tan \alpha = \overline{CD} > 0, \cot \alpha = \overline{EF} > 0.$$



ب) اگر زاویه α در ناحیه دوم انتخاب شود ($90^\circ < \alpha < 180^\circ$) در این صورت :

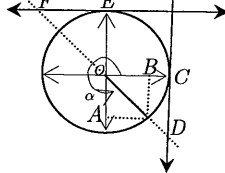
$$\sin \alpha = \overline{OA} > 0, \cos \alpha = \overline{OB} < 0, \tan \alpha = \overline{CD} < 0, \cot \alpha = \overline{EF} < 0.$$

ج) اگر $\cos^2 20^\circ \cos^2 40^\circ + \cos^2 80^\circ$ در ناحیه سوم انتخاب شود. ($180^\circ < \alpha < 270^\circ$) در این صورت :



$$\sin \alpha = \overline{OA} < 0, \cos \alpha = \overline{OB} < 0, \tan \alpha = \overline{CD} > 0, \cot \alpha = \overline{EF} > 0.$$

د) اگر α در ناحیه چهارم انتخاب شود ($270^\circ < \alpha < 360^\circ$) در این صورت :



$$\sin \alpha = \overline{OA} < 0, \cos \alpha = \overline{OB} > 0, \tan \alpha = \overline{CD} < 0, \cot \alpha = \overline{EF} < 0.$$

نتیجه: جدول زیر علامت های همه نسبت های مثلثاتی در چهار ناحیه را نشان می دهد.

	ناحیه ۱	ناحیه ۲	ناحیه ۳	ناحیه ۴
Sin	+	+	-	-
Cos	+	-	-	+
tan	+	-	+	-
Cot	+	-	+	-

توجه: همواره $\cot \alpha, \tan \alpha$ هم علامت اند

توجه: علامت $\cot \alpha, \tan \alpha$ از ضرب علامت های

$\cos \alpha, \sin \alpha$ بدست می آید.

جدول نسبت های مثلثاتی (زوایای اصلی) :

زاویه	0°	30°	45°	60°	90°	180°	270°	360°
نسبت	0°	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1
tan	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	تعریف نشده	0	تعریف نشده	0
cot	تعریف نشده	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	تعریف نشده	0	تعریف نشده



روابط بین نسبت های مثلثاتی (روابط اصلی) :

$$۱) \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$$۲) \tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$$

$$۳) \cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$$

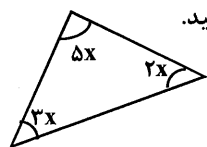
$$۴) \tan \alpha \cdot \cot \alpha = 1$$

$$۵) 1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha} = \sec^2 \alpha$$

$$۶) 1 + \cot^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha} = \csc^2 \alpha$$

مثال ۱- زوایه $\alpha = ۲۲/۵^\circ$ است این زاویه را بر حسب رادیان محاسبه کنید.

$$\frac{D}{۱۸۰} = \frac{R}{\pi} \Rightarrow \frac{۲۲/۵}{۱۸۰} = \frac{R}{\pi} \Rightarrow R = \frac{\pi}{8} \Rightarrow ۲۲/۵^\circ = \frac{\pi}{8} \text{ rad}$$



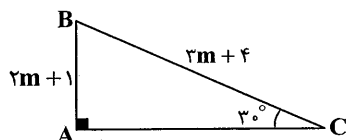
مثال ۲- زوایای مثلثی با اعداد ۵، ۳، ۲ متناسبند. اندازه زاویه کوچکتر را بر حسب درجه و رادیان محاسبه کنید.

اگر x را بر حسب درجه در نظر بگیریم آن گاه:

$$۲x + ۳x + ۵x = ۱۸۰ \Rightarrow ۱۰x = ۱۸۰ \Rightarrow x = ۱۸$$

$$\frac{D}{۱۸۰} = \frac{R}{\pi} = \frac{۳۶}{۱۸۰} = \frac{R}{\pi} \Rightarrow R = \frac{\pi}{5}$$

زاویه ی کوچک $\alpha = ۲x$ است پس: $\alpha = ۳۶^\circ$ است.



مثال ۳- با توجه به شکل مقابل اندازه ضلع AC را محاسبه کنید.

$$\sin 30^\circ = \frac{2m+1}{5} \Rightarrow \frac{2m+1}{5} = \frac{1}{2} \Rightarrow 4m+2 = 5 \Rightarrow m = \frac{3}{4}$$

$$\cos 30^\circ = \frac{AC}{BC} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{AC}{5} \Rightarrow AC = \frac{5\sqrt{3}}{2}$$

مثال ۴- اگر $\tan \alpha > 0$, $\sin \alpha < 0$ باشد α در کدام ناحیه است؟ α در ناحیه ی سوم است.

مثال ۵- اگر $\cot x > 0$, $\tan^2 x \sin^2 x < 0$ باشد x در چه ناحیه ای است؟

حل: چون $\tan x$ و $\cot x$ هم علامت اند پس:

$$\tan x \sin^2 x < 0 \xrightarrow{\tan x > 0} \sin^2 x < 0 \Rightarrow \sin < 0$$

پس x در ناحیه ی سوم است.

مثال ۶- اگر $\tan \alpha = -\frac{4}{3}$ و $\sin \alpha < 0$ باشد سایر نسبت های مثلثاتی را محاسبه کنید.

$$\tan \alpha = -\frac{4}{3}$$

$$\sin \alpha < 0 \rightarrow \text{زاویه ی سوم}$$

$$\cos \alpha = -\frac{3}{5}$$

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$$\sin^2 \alpha + \frac{9}{25} = 1 \rightarrow \sin^2 \alpha = \frac{16}{25}$$

$$\sin \alpha = -\frac{4}{5}$$

$$\cot \alpha = -\frac{3}{4}$$



$$\csc \alpha = -\frac{5}{4}$$

$$\sec \alpha = -\frac{5}{3}$$

توجه: روابط مثلثاتی برای فاصله کردن اتمادهای مثلثاتی کاربرد های فراوانی دارد.

مثال ۷- طرف دوم عبارت $A = \sin^2 x (1 + \cot x) + \cos^2 x (1 + \tan x)$ کدام است؟

$$\sin x - 2 \cos x \quad (۴)$$

$$\sin x - \cos x \quad (۳)$$

$$\sin x + 2 \cos x \quad (۲)$$

$$\sin x + \cos x \quad (۱) \checkmark$$

$$\sin^2 x (1 + \cot x) + \cos^2 x (1 + \tan x) =$$

$$\sin^2 x \left(1 + \frac{\cos x}{\sin x}\right) + \cos^2 x \left(1 + \frac{\sin x}{\cos x}\right) =$$

$$= \sin^2 x \left(\frac{\sin x + \cos x}{\sin x}\right) + \cos^2 x \left(\frac{\cos x + \sin x}{\cos x}\right) =$$

$$(\sin x + \cos x) \left(\frac{\sin^2 x}{\sin x} + \frac{\cos^2 x}{\cos x}\right) = \sin x + \cos x$$

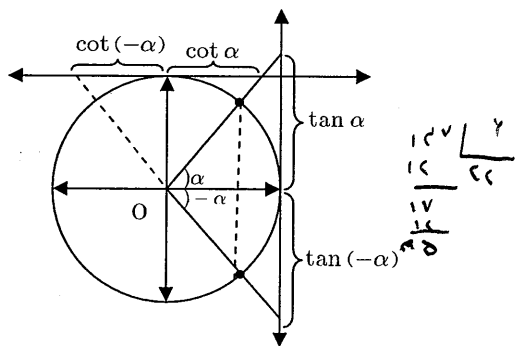
مثال ۸- خلاصه شده عبارت $B = \frac{\sin^2 x - \cos^2 x}{\cos^2 x}$ کدام است؟

$$\begin{aligned} & \frac{(\tan x - 2)(\tan x + 2)}{(\tan^2 x - 1)(\tan^2 x + 1)} = \frac{(\tan x - 1)(\tan x + 1)}{(\tan^2 x - 1)(\tan^2 x + 1)} \\ & \Rightarrow \frac{(\sin^2 x - \cos^2 x)(\sin^2 x + \cos^2 x)}{\cos^2 x} = \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} - \frac{\cos^2 x}{\cos^2 x} = \tan^2 x - 1 = (\tan x - 1)(\tan x + 1) \end{aligned}$$

مثال ۹- از رابطه $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ مقدار α را محاسبه کنید. ($0 \leq \alpha \leq 2\pi$)

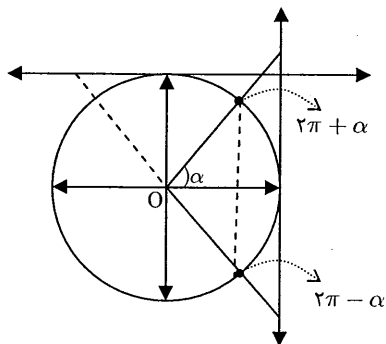
$$\begin{aligned} \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha &= 1 \\ \sin^2 \alpha + 1 - \sin^2 \alpha &= 1 \\ \sin^2 \alpha &= 0 \\ \sin \alpha &= 0 \Rightarrow \alpha = 0, \pi, 2\pi \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha &= 1 \\ \cos^2 \alpha + 1 - \cos^2 \alpha &= 1 \\ \cos^2 \alpha &= 0 \\ \cos \alpha &= 0 \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \end{aligned}$$



با توجه به شکل و به راحتی می توان روابط زیر را بدست آورد.

$$\begin{aligned} \sin(-\alpha) &= -\sin \alpha \\ \cos(-\alpha) &= \cos \alpha \\ \tan(-\alpha) &= -\tan \alpha \\ \cot(-\alpha) &= -\cot \alpha \end{aligned}$$

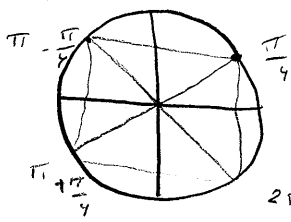


رابطه بین نسبت های مثلثاتی که مجموع و یا تفاضلشان برابر 2π است.

$$\begin{aligned} \sin(2\pi - \alpha) &= -\sin \alpha \\ \cos(2\pi - \alpha) &= \cos \alpha \\ \tan(2\pi - \alpha) &= -\tan \alpha \\ \cot(2\pi - \alpha) &= -\cot \alpha \\ \sin(2\pi + \alpha) &= \sin \alpha \\ \cos(2\pi + \alpha) &= \cos \alpha \\ \tan(2\pi + \alpha) &= \tan \alpha \\ \cot(2\pi + \alpha) &= \cot \alpha \end{aligned}$$

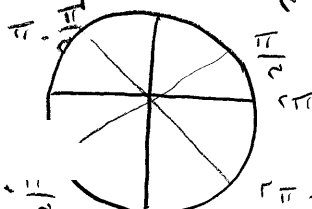
$$\begin{aligned} \sin(\pi + \alpha) &= -\sin \alpha \\ \cos(\pi + \alpha) &= -\cos \alpha \\ \tan(\pi + \alpha) &= \tan \alpha \\ \cot(\pi + \alpha) &= \cot \alpha \end{aligned}$$

$$\sin \alpha = \frac{1}{2} \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}$$



توجه: همان 2π از همه نسبت های مثلثاتی قابل حذف است.

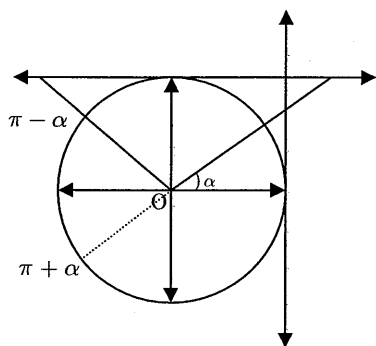
$$\cos \alpha = \frac{1}{2} \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}$$





$$\begin{cases} \sin(k\pi \pm \alpha) = \sin(\pm \alpha) = \pm \sin \alpha \\ \cos(k\pi \pm \alpha) = \cos(\pm \alpha) = \cos \alpha \\ \tan(k\pi \pm \alpha) = \tan(\pm \alpha) = \pm \tan \alpha \\ \cot(k\pi \pm \alpha) = \cot(\pm \alpha) = \pm \cot \alpha \end{cases}$$

رابطه بین نسبت های مثلثاتی که مجموع و یا تفاضلشان برابر π است.



$$\begin{aligned} \sin(\pi - \alpha) &= \sin \alpha & \cos(\pi - \alpha) &= -\cos \alpha \\ \tan(\pi - \alpha) &= -\tan \alpha & \cot(\pi - \alpha) &= -\cot \alpha \\ \sin(\pi + \alpha) &= -\sin \alpha & \cos(\pi + \alpha) &= -\cos \alpha \\ \tan(\pi + \alpha) &= \tan \alpha & \cot(\pi + \alpha) &= \cot \alpha \end{aligned}$$

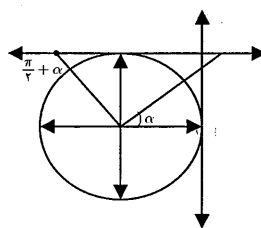
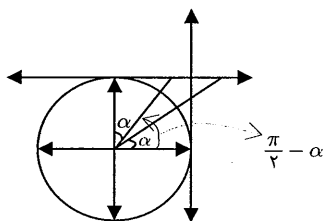
توجه: کمان $k\pi$ از نسبت های تانژانت و کوتانژانت قابل حذف است.

$$\tan(k\pi \pm \alpha) = \tan(\pm \alpha) = \pm \tan \alpha$$

$$\cot(k\pi \pm \alpha) = \cot(\pm \alpha) = \pm \cot \alpha$$

توجه: روابط بین نسبت های مثلثاتی که مجموع یا تفاضلشان $\frac{\pi}{2}$ است.

$$\begin{aligned} \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) &= \cos \alpha \\ \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) &= \sin \alpha \\ \tan\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) &= \cot \alpha \\ \cot\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) &= \tan \alpha \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} \sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) &= \cos \alpha \\ \cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) &= -\sin \alpha \\ \tan\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) &= -\cot \alpha \\ \cot\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) &= -\tan \alpha \end{aligned}$$

توجه: کمان $(2k+1)\frac{\pi}{2}$ نسبت مثلثاتی را عوض می کند.

توجه: اگر $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$ باشد در این صورت:

$$\sin \alpha = \cos \beta$$

$$\cos \alpha = \sin \beta$$

$$\tan \alpha = \cot \beta$$

$$\cot \alpha = \tan \beta$$

نسبت های مثلثاتی $(\alpha \pm \beta)$:

$$\begin{aligned} \sin(\alpha + \beta) &= \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta \\ \sin(\alpha - \beta) &= \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta \\ \cos(\alpha + \beta) &= \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta \\ \cos(\alpha - \beta) &= \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta \\ \tan(\alpha + \beta) &= \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta} \\ \tan(\alpha - \beta) &= \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha \tan \beta} \\ \cot(\alpha + \beta) &= \frac{\cot \alpha \cot \beta - 1}{\cot \beta + \cot \alpha} \\ \cot(\alpha - \beta) &= \frac{\cot \alpha \cot \beta + 1}{\cot \beta - \cot \alpha} \end{aligned}$$

مثال ۱۰- حاصل عبارت $A = \sqrt{3} \sin(-33^\circ) \cos(-24^\circ)$ را محاسبه کنید.

$$A = \sqrt{3} \sin(33^\circ) \cos(24^\circ) = -\sqrt{3} \sin(36^\circ - 3^\circ) \cos(18^\circ + 6^\circ) = -\sqrt{3} \sin(-3^\circ) (-\cos 6^\circ) = -\frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{-1}{2} \times \frac{-1}{2} = -\frac{\sqrt{3}}{4}$$



مثال ۱۱- حاصل عبارت $A = \sqrt{3} \sin\left(4\pi - \frac{\pi}{3}\right) + \cos\left(42\pi + \frac{\pi}{3}\right)$ را بدست آورید.

$$A = \sqrt{3} \sin\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3} \sin \frac{\pi}{3} + \cos \frac{\pi}{3} = \sqrt{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} = 2$$

مثال ۱۲- حاصل عبارت $B = \sin(21^\circ) + \cos(15^\circ)$ را محاسبه کنید.

$$B = \sin(18^\circ + 3^\circ) + \cos(18^\circ - 3^\circ) = -\sin 3^\circ - \cos 3^\circ = \frac{-1 - \sqrt{3}}{2}$$

مثال ۱۳- حاصل $\sin\left(\frac{185\pi}{6}\right)$ را بدست آورید.

$$\sin\left(\frac{185\pi}{6}\right) = \sin\left(\frac{184\pi}{6} - \frac{\pi}{6}\right) = \sin\left(30\pi - \frac{\pi}{6}\right) = \sin\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) = \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$$

مثال ۱۴- اگر $\tan 1^\circ = a$ باشد حاصل عبارت $A = \frac{2\sin 10^\circ + 3\sin 17^\circ}{2\cos 26^\circ - \cos 37^\circ}$ را خلاصه کنید.

$$\Rightarrow \frac{2\sin(9^\circ + 1^\circ) + 3\sin(11^\circ - 1^\circ)}{2\cos(27^\circ - 1^\circ) - \cos(36^\circ + 1^\circ)} = \frac{2\cos 1^\circ + 3\sin 1^\circ}{-2\sin 1^\circ - \cos 1^\circ} = \frac{2 + 3a}{-a - 1}$$

مثال ۱۵- اگر $\alpha = 18^\circ$ باشد حاصل عبارت $A = \frac{\cos 2\alpha}{\sin 2\alpha} + \frac{\cot 4\alpha}{\tan \alpha}$ چقدر است؟

$$\Rightarrow \frac{\cos 36^\circ}{\sin 36^\circ} + \frac{\cot 72^\circ}{\tan 18^\circ} = \frac{\cos 36^\circ}{\sin 36^\circ} + \frac{\cot 72^\circ}{\tan 18^\circ} = 1 + 1 = 2$$

مثال ۱۶- حاصل عبارت $A = \log(\tan 1^\circ \tan 2^\circ \tan 3^\circ \dots \tan 89^\circ)$ چقدر است؟

$$\Rightarrow \log(\tan 1^\circ \tan 2^\circ \dots \tan 89^\circ \tan 88^\circ \tan 87^\circ \dots \tan 1^\circ) \\ = \log(\tan 1^\circ \tan 89^\circ)(\tan 2^\circ \tan 88^\circ) \dots (\tan 45^\circ \tan 45^\circ) \\ = \log(\tan 1^\circ \cot 1^\circ)(\tan 2^\circ \cot 2^\circ) \dots (\tan 45^\circ \cot 45^\circ) = \log 1 = 0$$

مثال ۱۷- اگر $\tan(\alpha + \beta) = 2$ و $\tan \beta = 3$ در این صورت $\cot(\pi - \alpha)$ چقدر است؟

$$\tan(\alpha + \beta) = 2 \Rightarrow \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta} = 2 \Rightarrow \frac{1 + \tan \alpha}{1 - \tan \alpha} = 2 \Rightarrow 1 + \tan \alpha = 2 - \tan \alpha$$

$$\Rightarrow \tan \alpha = -1$$

$$\tan \alpha = -\frac{1}{1}$$

$$\cot(\pi - \alpha) = -\cot \alpha$$



(آزاد ریاضی ۷۸)

مثال ۱۸- حاصل کسر $\frac{\cos(x+2y) + \cos(x-2y)}{\sin(x+2y) + \sin(x-2y)}$ کدام است؟

$$\tan 2x(4)$$

$$\cot 2x(3)$$

$$\tan x(2)$$

$$\cot x(1) \checkmark$$

گزینه ما مستند از یادت هست هر عددی تواند باشد ۱، ۲، ۳، ۴ برابر عدد قرار دهیم.

مثال ۱۹- اگر $\tan(x-2y) = 3$ و $\tan(x+2y) = 4$ باشد $\tan 4y$ را محاسبه کنید.

$$\tan(4y) = \tan\left[\frac{(x+2y) - (x-2y)}{2}\right]$$

$$= \frac{\tan(x+2y) - \tan(x-2y)}{1 + \tan(x+2y)\tan(x-2y)} = \frac{4-3}{1+4 \cdot 3} = \frac{1}{13}$$

نسبت های 2α : اگر در نسبت های $\alpha + \beta$ به جای زاویه ی β زاویه ی α را قرار دهیم نسبت های 2α محاسبه می شود.

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$$

$$\cos 2\alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1$$

$$\cos 2\alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$$

$$\tan 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha}$$

$$\cot 2\alpha = \frac{\cot^2 \alpha - 1}{2 \cot \alpha}$$

نتایج نسبت های 2α :

$$1) \sin \alpha \cos \alpha = \frac{1}{2} \sin 2\alpha$$

$$2) \cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2} \Rightarrow 1 + \cos \alpha = 2 \cos^2 \frac{\alpha}{2}$$

$$3) \sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2} \Rightarrow 1 - \cos \alpha = 2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}$$

$$4) \tan^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{1 + \cos 2\alpha}$$

$$5) \cot^2 \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{1 - \cos 2\alpha}$$

$$6) \tan \alpha + \cot \alpha = \frac{2}{\sin 2\alpha}$$

$$7) \tan \alpha - \cot \alpha = -2 \cot 2\alpha$$

$$8) \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha = 1 - \frac{1}{2} \sin^2 2\alpha$$

$$9) \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha = 1 - \frac{1}{2} \sin^2 2\alpha$$

$$10) \sin 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 + \tan^2 \alpha}$$

$$11) \cos 2\alpha = \frac{1 - \tan^2 \alpha}{1 + \tan^2 \alpha}$$

$$12) \cot 2\alpha = \frac{1 - \tan^2 \alpha}{2 \tan \alpha}$$

$$\alpha + \beta = 90^\circ \Rightarrow \tan(\alpha + \beta) = 1$$

$$\frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta} = 1 \Rightarrow \tan \alpha + \tan \beta + \tan \alpha \tan \beta = 1$$

$$90^\circ + 1^\circ = 91^\circ \Rightarrow \frac{\tan 90^\circ + \tan 1^\circ}{1 - \tan 90^\circ \tan 1^\circ} = 1$$

$$\tan 90^\circ + \tan 1^\circ + \tan 90^\circ \tan 1^\circ = 1$$

$$y = \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha + 1$$

$$y = 2 - \frac{1}{2} \sin^2 2\alpha \quad 0 \leq \sin^2 2\alpha \leq 1 \Rightarrow -\frac{1}{2} \leq y \leq \frac{3}{2}$$

$$y = \sin \alpha \cos \alpha \quad \cos \alpha \sin \alpha = \frac{1}{2} \sin 2\alpha$$

$$\frac{1}{2} \sin 2\alpha \cos \alpha = \frac{1}{2} \sin 2\alpha \cos \alpha$$

$$y' = A \times \frac{1}{\lambda} \cos \lambda x$$

مثال ۲۰- اگر $\sin \alpha - \cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}$ باشد $\sin 2\alpha$ را محاسبه کنید.

$$(\sin \alpha + \cos \alpha)^2 = 1 + \sin 2\alpha$$

$$\sin \alpha - \cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow (\sin \alpha - \cos \alpha)^2 = \frac{1}{2}$$

$$1 - \sin 2\alpha = \frac{1}{2} \Rightarrow \sin 2\alpha = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$



مثال ۲۱- اگر $f(x) = 2x^2 - 1$ باشد حاصل $f(f(\cos x))$ را محاسبه کنید.

$$\begin{aligned} 2 \cos^2 \alpha - 1 &= \cos 2\alpha \quad f(u) = 2u^2 - 1 \\ f(\cos u) &= 2 \cos^2 u - 1 = \cos 2u \\ f(f(\cos u)) &= f(\cos 2u) = 2 \cos^2 2u - 1 = \cos 4u \end{aligned}$$

مثال ۲۲- اگر $\sin 6^\circ = a$ باشد $\sin 78^\circ$ را بر حسب a بنویسید.

$$\sin 78^\circ = \sin (90^\circ - 12^\circ) = \cos 12^\circ = \cos 2(6^\circ) = 1 - 2 \sin^2 6^\circ = 1 - 2a^2$$

مثال ۲۳- مقدار عددی عبارت $A = \frac{\tan 1^\circ \tan 7^\circ}{1 - \tan^2 1^\circ}$ را محاسبه کنید.

$$\begin{aligned} \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha} &= \tan 2\alpha \\ \frac{2 \tan 1^\circ \tan 7^\circ}{1 - \tan^2 1^\circ} &\approx \frac{1}{r} = \frac{\tan 1^\circ \cot 1^\circ}{r} = \frac{1}{r} \end{aligned}$$

مثال ۲۴- حاصل عبارت $A = \sin x \cos x \cos 2x \cos 4x$ را به ازای $x = \frac{\pi}{32}$ محاسبه کنید.

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{8} \sin 8x \\ f\left(\frac{\pi}{32}\right) &= \frac{1}{8} \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{16} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\frac{1}{r} \sin 2u \\ &\frac{1}{r} \sin 4u \\ &\frac{1}{r} \sin 8u \end{aligned}$$

(سراسری ریاضی ۸۶)

مثال ۲۵- حاصل $\cos 165^\circ \cos 105^\circ$ کدام است؟

$$\begin{aligned} \cos 170^\circ \cos 10^\circ &= \cos (180^\circ - 10^\circ) \cos (90^\circ + 15^\circ) = (-\cos 10^\circ)(-\sin 15^\circ) \\ &= \sin 10^\circ \cos 15^\circ = \frac{1}{2} \sin 25^\circ = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

(آزاد ریاضی ۷۸)

مثال ۲۶- اگر $\sin^2 x + \cos^2 x + \sin^4 x + \cos^4 x = \frac{6}{5}$ باشد حاصل $\sin^2 2x$ برابر است با:

$$\begin{aligned} \frac{16}{25} (4) & \quad \frac{1}{25} (3) & \quad -\frac{1}{4} (2) & \quad -\frac{1}{2} (1) \\ 1 - \frac{1}{5} \sin^2 2u + 1 - \frac{4}{5} \sin^2 2u &= \frac{4}{5} \\ 2 - \frac{5}{5} \sin^2 2u &= \frac{4}{5} \\ 2 - \frac{4}{5} &= \frac{5}{5} \sin^2 2u \\ \frac{6}{5} &= \sin^2 2u \quad \sin 2u = \frac{1}{\sqrt{5}} \end{aligned}$$



معادلات مثلثاتی: معادله مثلثاتی معادله ای است که شامل نسبت های مثلثاتی یک یا چند زاویه باشد. مانند معادلات زیر:

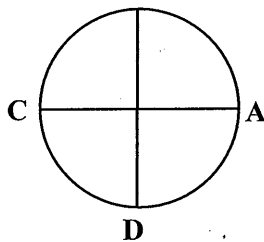
$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1, \quad \sin x + \cos x = \sqrt{2}, \quad 2 \sin x = \sqrt{2}$$

معادله سینوسی: هر معادله به صورت $\sin x = p$ را معادله سینوسی می نامیم و شرط وجود جواب آن این است که

$-1 \leq p \leq 1$ باشد. اگر چنین باشد $p = \sin \alpha$ خواهد بود که $0 < x < \frac{\pi}{2}$ زاویه معلومی است در این صورت معادله سینوسی دو دسته جواب به صورت زیر دارد.

$$\sin x = \sin \alpha \Rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi + \alpha \\ x = 2k\pi + (\pi - \alpha) \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}$$

B



$$A: 2k\pi$$

$$D: 2k\pi - \frac{\pi}{2}$$

$$A \cup B \cup C \cup D: \frac{k\pi}{2}$$

$$B: 2k\pi + \frac{\pi}{2}$$

$$A \cup C = k\pi$$

$$C: (2k+1)\pi$$

$$B \cup D: k\pi + \frac{\pi}{2}$$

$$(-1 \leq -1) \Rightarrow 4 - 4 = 0 \Rightarrow 4 - 4 = 0$$

مثال ۲۷- نقاط مهم روی دایره مثلثاتی را در شکل زیر ببینید.

حالات خاص معادله سینوسی:

$$(1) \sin x = 0 \Rightarrow x = k\pi$$

$$(2) \sin x = 1 \Rightarrow x = 2k\pi + \frac{\pi}{2}$$

$$(3) \sin x = -1 \Rightarrow x = 2k\pi + \frac{3\pi}{2} \quad \text{یا} \quad x = 2k\pi - \frac{\pi}{2}$$

$$(4) \sin^2 x = \sin^2 \alpha \Rightarrow x = k\pi \pm \alpha$$

معادله کسینوسی: هر معادله به صورت $\cos x = p$ را معادله کسینوسی می نامیم و شرط وجود جواب آن این است که

$-1 \leq p \leq 1$ باشد. اگر چنین باشد $p = \cos \alpha$ که α زاویه معلومی است در این صورت:

$$\cos x = \cos \alpha \Rightarrow x = 2k\pi \pm \alpha$$

حالات خاص معادله کسینوسی:

$$(1) \cos x = 0 \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{2}$$

$$(2) \cos x = 1 \Rightarrow x = 2k\pi$$

$$(3) \cos x = -1 \Rightarrow x = (2k+1)\pi$$

$$(4) \cos^2 x = \cos^2 \alpha \Rightarrow x = k\pi \pm \alpha$$

توجه: تعداد جواب معادله $\cos mx = p$ و $m \in \mathbb{N}$ برای بازه $[0, 2\pi]$

(الف) اگر $p = 1$ باشد معادله $(m+1)$ ریشه دارد.

(ب) اگر $p = -1$ باشد معادله m ریشه دارد.

(ج) اگر $|p| < 1$ باشد معادله $2m$ ریشه دارد.

معادله تانژانتی و کوتانژانتی:

معادلات به صورت $\tan x = p$ و $\cot x = p$ را معادلات تانژانتی و کوتانژانتی می نامیم. این معادلات همواره جواب دارند. اگر

این معادلات به صورت $\tan x = \tan \alpha$ یا $\cot x = \cot \alpha$ باشند جواب آنها به صورت زیر خواهد بود:

$$\tan x = \tan \alpha \Rightarrow x = k\pi + \alpha$$

$$\cot x = \cot \alpha \Rightarrow x = k\pi + \alpha$$



مثال ۲۸- معادله $4\cos^2 x - 4\sin x - 1 = 0$ را حل کنید و جوابهای روی بازه $[0, 2\pi]$ را بدست آورید.

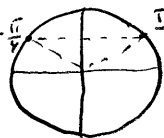
$$\Rightarrow 4(1 - \sin^2 x) - 4\sin x - 1 = 0 \Rightarrow 4 - 4\sin^2 x - 4\sin x - 1 = 0$$

$$\Rightarrow -4\sin^2 x - 4\sin x + 3 = 0$$

$$\Delta = 16 + 48 = 64 \quad \sin x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{4 \pm 8}{-8} \Rightarrow \sin x = -\frac{1}{2} \quad \text{یا} \quad \sin x = \frac{3}{2}$$

$$\sin x = -\frac{1}{2} \quad \text{جواب}$$

$$\sin x = -\frac{1}{2} \Rightarrow \sin x = \sin \frac{7\pi}{6} \Rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi + \frac{7\pi}{6} \\ x = 2k\pi + \frac{5\pi}{6} \end{cases}$$

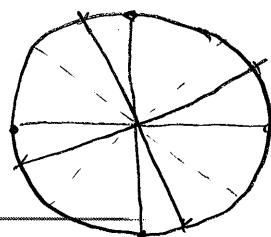


$$\frac{4}{\sin^2 x} = 4\sqrt{2} \Rightarrow \sin^2 x = \frac{\sqrt{2}}{2} = \sin \frac{\pi}{4}$$

مثال ۲۹- معادله $\tan 2x + \cot 2x = \sqrt{2}$ را حل کنید.

$$\tan \theta + \cot \theta = \frac{2}{\sin 2\theta}$$

$$\begin{cases} 2x = 2k\pi + \frac{\pi}{4} \\ 2x = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{8} \\ x = \frac{k\pi}{2} + \frac{3\pi}{8} \end{cases}$$



مثال ۳۰- معادله $\sqrt{2} \sin \frac{x}{2} = \sqrt{2m}$ دارای جواب است. حدود m را تعیین کنید.

$$\Rightarrow \sqrt{2} \sin \frac{x}{2} = \sqrt{2} \sqrt{m} \Rightarrow \sin \frac{x}{2} = \sqrt{m} \Rightarrow 0 \leq \sqrt{m} \leq 1$$

$$0 \leq \sqrt{m} \leq 1 \Rightarrow 0 \leq m \leq \frac{1}{2}$$

(سراسری ۹۰)

مثال ۳۱- جواب کلی معادله $\sin(\pi + x)\cos(\frac{\pi}{2} + x) - 2\sin(\pi - x) + 1 = 0$ کدام است؟

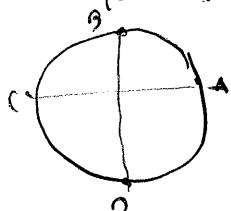
$$2k\pi \pm \frac{\pi}{2} \quad (2)$$

$$2k\pi + \frac{\pi}{2} \quad (3) \quad \checkmark$$

$$2k\pi + \frac{\pi}{6} \quad (2)$$

$$2k\pi - \frac{\pi}{2} \quad (1)$$

$$(-\sin x)(-\sin x) - 2\sin x + 1 = 0 \Rightarrow \sin^2 x - 2\sin x + 1 = 0 \Rightarrow (\sin x - 1)^2 = 0 \Rightarrow \sin x = 1$$



$$\sin^2 x = 1 \Rightarrow \sin x = \pm 1 \Rightarrow \cos x = 0$$

$$x = 2k\pi + \frac{\pi}{2}$$

(سراسری تهرانی ۱۹)

مثال ۳۲- جواب کلی معادله مثلثاتی $\tan(x + \frac{\pi}{4}) + \tan(x - \frac{\pi}{4}) = 2\sqrt{2}$ به کدام صورت است؟ ($K \in \mathbb{Z}$)

$$\frac{\tan \theta + 1}{1 - \tan \theta} + \frac{\tan \theta - 1}{\tan \theta + 1} = 2\sqrt{2} \Rightarrow \frac{k\pi + \frac{\pi}{4}}{2} + \frac{k\pi + \frac{\pi}{4}}{2} = \frac{k\pi + \frac{\pi}{4}}{2} + \frac{k\pi + \frac{\pi}{4}}{2} = 2\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow \frac{2\tan \theta}{1 - \tan^2 \theta} = 2\sqrt{2} \Rightarrow \tan 2\theta = 2\sqrt{2} = \tan \frac{11\pi}{8} \Rightarrow \begin{cases} 2\theta = k\pi + \frac{11\pi}{8} \\ \theta = \frac{k\pi}{2} + \frac{11\pi}{16} \end{cases}$$

مثال ۳۳- همه جوابهای معادله $\sin^2 x - \sin x = 0$ را بدست آورید.

$$\sin x (\sin x - 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \sin x = 0 \\ \sin x = 1 \\ \sin x = -1 \end{cases}$$



$$\Rightarrow x = \frac{k\pi}{2}$$



مثال ۳۴- نمودار تابع $y = -4 \cos(\frac{\pi}{4} - 3\pi x)$ روی بازه $[-1, 1]$ در چند نقطه بیشترین مقدار را دارد؟ (سراسری تجربی ۹۱)

$$-|a| \leq a \cos \alpha \leq |a| \quad y_{\max} = 4 \quad z = -4 \cos(\frac{\pi}{4} - 3\pi x) \quad \cos(\frac{\pi}{4} - 3\pi x) = -1$$

$$\frac{\pi}{4} - 3\pi x = (k\pi + \pi) \Rightarrow 3\pi x = \frac{\pi}{4} - (k\pi + \pi) = \frac{\pi}{4} - k\pi - \pi = \frac{\pi}{4} - (k+1)\pi$$

$$\frac{3\pi x}{3\pi} = \frac{\pi}{3} - \frac{(k+1)\pi}{3} \Rightarrow \frac{3k}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3} - \frac{(k+1)}{3} \Rightarrow 1 \leq \frac{3k}{3} - \frac{1}{3} \leq 1 \xrightarrow{\times 3} 3 \leq 3k - 1 \leq 3$$

$$4 \leq 3k \leq 4 \quad 1 \leq k \leq 1 \quad k = 1, 0, 1$$

مثال ۳۵- معادله $(3 \sin x - 1)(3 \sin x - 2)(3 \sin x - 3) \dots (3 \sin x - 10) = 0$ در بازه $[0, 2\pi]$ چند ریشه دارد؟

$$\sin x = \frac{1}{3} \rightarrow \text{دو جواب}$$

$$\sin x = \frac{2}{3} \rightarrow \text{دو جواب}$$

$$\sin x = 1 \rightarrow \text{یک جواب}$$

$$\sin x = \frac{3}{3} \rightarrow \text{یک جواب}$$

$$\sin x = \frac{4}{3} \rightarrow \text{ندارد}$$

$$\sin x = \frac{5}{3} \rightarrow \text{ندارد}$$

مثال ۳۶- اگر دامنه تابع $f(x) = \frac{2}{m - 2 \cos x}$ ، $\mathbb{R}$ باشد حدود m را تعیین کنید.

$$\cos x = \rho \quad |\rho| > 1 \quad \text{ندارد}$$

$$-1 \leq \rho \leq 1$$

$$|m| > 1 \quad |m| > 1$$

مثال ۳۷- معادله $4 \cos^2 x - 4 \cos x - 3 = 0$ را حل کنید و جوابهای روی بازه $[0, 2\pi]$ را بدست آورید.

$$\Delta = 4^2 = 16$$

$$\cos x = \frac{4 \pm 4}{4} = 1 \quad \text{یا} \quad -\frac{1}{4}$$

$$\cos x = 1 \Rightarrow x = 0, 2\pi$$

$$\cos x = -\frac{1}{4} \Rightarrow x = \pi - \arccos\left(\frac{1}{4}\right), \pi + \arccos\left(\frac{1}{4}\right)$$

مثال ۳۸- معادله $\sin 4x = \cos x$ را حل کنید.

$$\Rightarrow \sin 4x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

$$4x = k\pi + \frac{\pi}{2} - x \Rightarrow 5x = k\pi + \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = \frac{k\pi}{5} + \frac{\pi}{10}$$

$$4x = k\pi + \pi - \frac{\pi}{2} - x \Rightarrow 5x = k\pi + \frac{3\pi}{2} \Rightarrow x = \frac{k\pi}{5} + \frac{3\pi}{10}$$

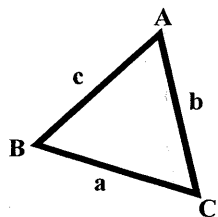
$$4x = k\pi + \frac{3\pi}{2} - x \Rightarrow 5x = k\pi + \frac{3\pi}{2} \Rightarrow x = \frac{k\pi}{5} + \frac{3\pi}{10}$$

مثال ۳۹- جوابهای کلی معادله $\tan x + \sqrt{3} \cot x = 1 + \sqrt{3}$ را بدست آورید.

$$(\tan x + \sqrt{3} \cot x = 1 + \sqrt{3}) \times \tan x \Rightarrow \tan^2 x + \sqrt{3} = (1 + \sqrt{3}) \tan x$$

$$\tan x = 1 \Rightarrow \tan \frac{\pi}{4}$$

$$\tan x = \sqrt{3} \Rightarrow \tan \frac{\pi}{3} \Rightarrow x = \dots$$



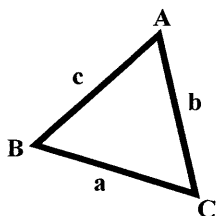
مساحت مثلث: در هر مثلث مانند ABC که در آن $AB=c, AC=b, BC=a$

مساحت مثلث از روابط زیر بدست می آید

$$S(\triangle ABC) = \frac{1}{2}ab\sin C = \frac{1}{2}ac\sin B = \frac{1}{2}bc\sin A$$

قانون سینوس ها و کسینوس ها: در هر مثلث مانند ABC که در آن $AB=c, AC=b, BC=a$ روابط زیر بین زوایا و اضلاع

مثلث برقرار است.



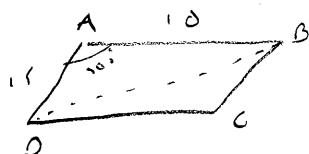
$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

$$\begin{cases} a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A \\ b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B \\ c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C \end{cases}$$

مثال ۴۰- در متوازی الاضلاع ABCD، $AB=15, AD=12, \angle A=15^\circ$ ، مساحت متوازی الاضلاع چقدر است؟

$$S(ABCD) = \frac{1}{2} \times 15 \times 12 \times \sin 15^\circ = \frac{1}{2} \times 15 \times 12 \times \frac{1}{4} = 22.5$$

$$S(ABCD) = 45$$



مثال ۴۱- در مثلث ABC داریم $a=5\text{cm}, B=20^\circ, C=120^\circ$ مقادیر b, c چقدر است؟

$$(\cos 20^\circ \approx 0.94, \sin 20^\circ \approx 0.342, \sqrt{3} \approx 1.732) \quad a=5\text{cm} \quad B=20^\circ \quad C=120^\circ$$

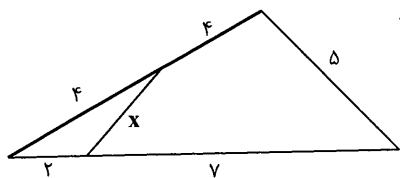
$$\frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = \frac{a}{\sin A} \quad \frac{b}{\sin 20^\circ} = \frac{c}{\sin 120^\circ} = \frac{5}{\sin 40^\circ} = c = \frac{5 \times \sqrt{3}}{2 \sin 40^\circ}$$

$$\Rightarrow \frac{b}{\sin 20^\circ} = \frac{5}{2 \sin 20^\circ \cos 20^\circ} \quad b = \frac{5}{2 \times 0.94}$$

مثال ۴۲- مقدار x در شکل مقابل را حساب کنید.

$$\triangle ABC: 5^2 = 10^2 + 11^2 - 2 \times 10 \times 11 \cos A \rightarrow \cos A = ?$$

$$\triangle AMN: 12^2 = 10^2 + 11^2 - 2 \times 10 \times 11 \cos A$$



$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \rightarrow \cos A$$

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 + a^2 - (b^2 + c^2 - 2bc \cos A)}{2bc}$$

$$A' = a' + b' + c' = 2a'(b' + c')$$

$$\cos A = \frac{2a'(b' + c') + (b'^2 + c'^2 - a'^2)}{2b'c'}$$

$$A = 90^\circ$$



تمرینات

۱- حاصل عبارت $(\sin^2 x + \cos^2 x \sin x) \cot x$ کدام است؟

$$\sin x (1) \quad -\sin x (2) \quad \cos x (3)$$

۲- عبارت $\frac{\sin 2^\circ}{1 + \cos 2^\circ} \times \frac{\cos 1^\circ}{1 + \cos 1^\circ}$ برابر کدام است؟

$$\sin 5^\circ (1) \quad \tan 5^\circ (2) \quad \cos 5^\circ (3)$$

۳- حاصل عبارت $\frac{\sin 2a}{\sin a} - \frac{\cos 2a}{\cos a}$ کدام است؟

$$1 (1) \quad -1 (2)$$

۴- حاصل کسر $\frac{1 - \cos^2 2a}{\cos^2 a}$ کدام است؟

$$\sin^2 a (1) \quad 2 \sin^2 a (2) \quad 3 \sin^2 a (3) \quad 4 \sin^2 a (4)$$

۵- اگر $\operatorname{tg}(x + \alpha) \operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) = 1$ باشد $\sin(2\alpha - \frac{\pi}{6})$ کدام است؟

$$-\frac{\sqrt{3}}{2} (1) \quad -\frac{1}{2} (2) \quad \frac{\sqrt{3}}{2} (3) \quad \frac{1}{2} (4)$$

۶- خلاصه شده عبارت $\tan 2^\circ (1 + \cos 4^\circ)$ برابر کدام است؟

$$\sin 2^\circ (1) \quad \sin 4^\circ (2) \quad \cos 2^\circ (3) \quad \cos 4^\circ (4)$$

۷- حاصل $\sin 4x (4 \cos^2 2x - 2)$ برابر است با:

$$8 \sin x (1) \quad 8 \cos x (2) \quad \cos 8x (3) \quad \sin 8x (4)$$

۸- a, b, c جملات متوالی تصاعد عددی با قدر نسبت d هستند عبارت $\sin a + \sin c$ برابر است با:

$$2 \sin b \sin d (1) \quad 2 \sin b \cos d (2) \quad 2 \cos b \sin d (3) \quad 2 \cos b \cos d (4)$$

۹- اگر $\tan \alpha, \tan \beta$ ریشه های معادله $3x^2 - 2mx - 3 = 0$ ، $\alpha + \beta = \frac{\pi}{6}$ باشد خواهیم داشت:

$$m = \frac{\sqrt{3}}{3} (1) \quad m = \frac{2}{3} (2) \quad m = \sqrt{3} (3) \quad m = -1 (4)$$

۱۰- معادله $\frac{\cos x}{2 - \cos x} = 1$ در فاصله $[0, 2\pi]$ چند جواب دارد؟

$$0 (1) \quad 1 (2) \quad 2 (3) \quad 3 (4)$$

تعریف رابطه: گروهی از زوج‌های مرتب را رابطه می‌نامیم مانند مجموعه‌های زیر:

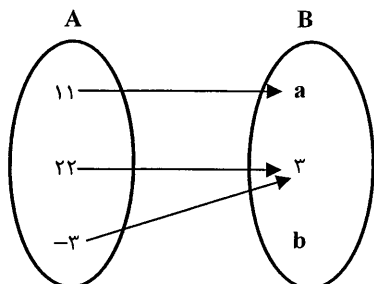
$$R_1 = \{(2,1), (5,2), (2,8)\} \quad R_2 = \{(a,2), (1,1)\}$$

تعریف تابع: هر تابع از مجموعه‌ی A به مجموعه‌ی B، رابطه‌ای بین این دو مجموعه است که در آن به هر عضو از A دقیقاً

یک عضو از B نظیر میشود.

تعریف تابع (نمودار ون): یک رابطه به صورت نمودار ون زمانی تابع است

که از هر عضو A دقیقاً یک پیکان خارج شود. مانند شکل زیر:



توجه: لازم نیست که به هر عضو B دقیقاً یک پیکان وارد شود. ممکن است به یک عضو B یک پیکان، یا بیش از یک

پیکان وارد شود یا اصلاً پیکانی وارد نشود. A را دامنه تابع و B را هم دامنه (یا مقصد) تابع می‌نامیم. برد یک تابع زیر

مجموعه‌ای از هم دامنه آن است و ممکن است برد برابر هم دامنه باشد.

تعریف تابع (زوج مرتب): رابطه‌ای که مؤلفه‌ی اول تکرار نداشته باشد، یعنی به ازای هر x فقط یک y داشته باشیم. و اگر

مؤلفه‌ی اول تکرار شود، مؤلفه‌ی دوم نیز تکرار شود.

مثال ۱- اگر رابطه‌ی $f_1 = \{(-1,1), (-1, m^2-3), (2m,3), (4,13)\}$ تابع باشد، m چند است؟

$$m^2 - 3 = 1 \Rightarrow m^2 = 4 \Rightarrow m = \pm 2$$

$$m = 2 \Rightarrow f_1 = \{(-1,1), (-1,1), (4,3), (4,13)\}$$

$$m = -2 \Rightarrow f_1 = \{(-1,1), (-1,1), (-4,3), (4,13)\}$$

تعریف تابع از روی شکل: اگر به ازای هر خط رسم شده‌ی موازی محورهای نمودار f حداکثر در یک نقطه قطع شود تابع

است.

تشخیص تابع از روی رابطه

$$\forall x_1 = x_2 \Rightarrow y_1 = y_2 \Rightarrow y = f(x) \text{ تابع است}$$

توجه: در تابع به ازای هر x (ورودی) فقط یک y (خروجی) داریم.

نکته: برخی از رابطه‌ها را با مثال نقض، تشخیص می‌دهیم که تابع نیست.

مثال ۲- کدام یک از رابطه‌های زیر تابع است؟

$$[y] = x \xrightarrow{x=1} [y] = 1 \Rightarrow 1 \leq y < 2$$

$$\sin y = \sqrt{x} \xrightarrow{x=0} \sin y = 0 \Rightarrow y = k\pi$$

$$y^x = x^x \xrightarrow{x=1} y^1 = 1 \Rightarrow y = \pm 1$$

$$|y| = \frac{x}{x} \xrightarrow{x=2} |y| = 1 \Rightarrow y = \pm 1$$

$$y^x - y = x \xrightarrow{x=0} y^0 - y = 0 \Rightarrow y(y^0 - 1) = 0 \Rightarrow y = 0, \pm 1$$

نکته: هر رابطه به صورت $f(x) = a_1y + a_2y^2 + a_3y^3 + \dots$ (تابع است).

$$y + y^x = x$$

$$xy + y^y = \sin x$$

$$ny = \cos n$$

$$ny = 1 \rightarrow \cos n = 1$$

$$y = \frac{\cos n}{n}$$

۵۳

کتاب کلاس ریاضی تجربی



نکته: هر رابطه به صورت $f(x) = ay^{n+1} + b$ تابع است.

$$y^2 = x$$

$$y^0 = \sqrt{x}$$

$$xy = \frac{x}{y}$$

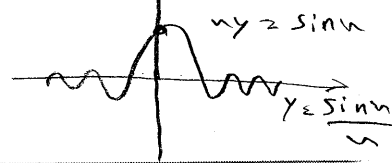
$$ny = \sin n \rightarrow n = \dots \rightarrow y = \dots$$

$$(0, 1) (0, 2) \dots$$

$$ny = \sin n$$

$$ny = \sin n$$

مثال ۳- آیا رابطه های $xy = \sin x$ ، $y = \frac{\sin x}{x}$ تابع اند؟ بله.



نکته: اگر y درون قدر مطلق باشد تابع نیست مگر آن که عبارت خلاصه شده و قدر مطلق از بین برود.

مثال ۴- کدام عبارت زیر تابع است؟

$$|y+1| = x \sqrt{\frac{x-1}{x+1}} \rightarrow y+1 = \pm \sqrt{\frac{x-1}{x+1}} \rightarrow y = -1 \pm \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$$

$$|y+1| = \sin \pi x \rightarrow y+1 = \sin \pi x \rightarrow y = -1 + \sin \pi x$$

$$|y| + \sqrt{y-1} = x$$

$$y-1 \geq 0$$

$$y \geq 1$$

مقدار تابع: اگر $(a, b) \in f(x)$ باشد در این صورت $f(a) = b$ است و گوییم مقدار تابع $f(x)$ در نقطه $x = a$ برابر b است.

مثال ۵- اگر $f\left(\frac{x-1}{y}\right) + x = f(y)$ باشد، حاصل $f(0)$ کدام است؟

$$\frac{2}{y}(2)$$

$$\frac{-2}{y}(1)$$

$$f\left(\frac{x-1}{y}\right) + x = f(y)$$

$$\frac{x-1}{y} = 2 \rightarrow x-1 = 2y \rightarrow x = 2y+1$$

$$x = 5 \rightarrow -f(1) + 5 = f(2)$$

$$f(2) = f(1) = \frac{5}{2}$$

$$x=1 \rightarrow -f(0) + 1 = f(2)$$

$$f(0) = 1 - \frac{5}{2} = -\frac{3}{2}$$

مثال ۶- اگر $f(x) + xf(2) = x^2 + 5$ باشد مقدار $f(1)$ کدام است؟

$$2(2)$$

$$2(2)$$

$$1(1)$$

$$f(1) + f(2) = 1 + 5 = 6$$

$$f(1) + f(2) = 6$$

$$f(1) = 6 - f(2)$$

$$f(1) = 6 - 5 = 1$$

$$f(1) = 1$$

مثال ۷- اگر رابطه ی زیر تابع باشد $f(2)$ چند است؟

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + a & x \geq 1 \\ x + a & x \leq 1 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + a & x \geq 1 \\ x + a & x \leq 1 \end{cases}$$

$$f(1) = 1 + a = 4 \rightarrow a = 3$$

مثال ۸- اگر $f(x) + [f(x)] = 2\left[x^2 + \frac{1}{x}\right]$ ، مقدار عددی $f(1)$ کدام است؟

$$2(2)$$

$$1(2)$$

$$1(1)$$

مثال ۹- اگر $f(x) = \sqrt{\cos \pi x} - 1$ در این صورت مقدار $f\left(\frac{3}{4}\right) - f(x)$ کدام است؟

$$2(2)$$

$$-1(2)$$

$$1(1)$$

$$f(x) = \sqrt{\cos \pi x} - 1$$

$$\cos \pi x = 1 \rightarrow \cos \pi x = 1 \rightarrow \cos \pi x = 1$$

$$f(x) = \sqrt{1-1} = 0$$

$$f\left(\frac{3}{4}\right) - f(x) = f\left(\frac{3}{4}\right) = \sqrt{0-1} = -1$$

اگر $f(x) = \sqrt{\cos \pi x} - 1$ باشد عبارت $f(x) + [f(x)]$ می تواند چه مقادیری بگیرد؟



دامنه‌ی تابع: حدود تغییرات x را دامنه‌ی تابع می‌نامیم.

دامنه‌ی زوج‌های مرتب: مجموعه مؤلفه‌های اول را دامنه می‌نامیم.

دامنه‌ی توابع نموداری: تصویر نمودار بر محور x ها دامنه‌ی تابع است.

انواع دامنه‌ی توابع: (p, q چند جمله‌ای هستند)

الف) دامنه‌ی توابع چند جمله‌ای:

$$f(x) = ax^n + bx^{n-1} + \dots \Rightarrow D_f = \mathbb{R}$$

$$\text{Ex: } f(x) = x^5 + x^2 - x + 1 \Rightarrow D_f = \mathbb{R}$$

ب) دامنه‌ی توابع گویا:

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} \Rightarrow D_f = \mathbb{R} - \{x \mid Q(x) = 0\}$$

مثال ۱۰- دامنه‌ی توابع زیر را به دست آورید.

$$۱) f(x) = \frac{1}{x^2 - 4x^2}$$

$$x^2 - 4x^2 = 0 \Rightarrow x^2(x^2 - 4) = 0 \Rightarrow x = 0, \pm 2 \Rightarrow D_f = \mathbb{R} - \{0, 2, -2\}$$

$$۲) f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x} - 1}$$

$$\sqrt[3]{x} - 1 = 0 \Rightarrow \sqrt[3]{x} = \frac{1}{1} \Rightarrow x = \frac{1}{1} \Rightarrow D_f = \mathbb{R} - \left\{\frac{1}{1}\right\}$$

$$۳) f(x) = \frac{1}{[x] + 2}$$

$$[x] + 2 = 0 \Rightarrow [x] = -2 \Rightarrow -2 < x < -1 \Rightarrow D_f = \mathbb{R} - [-2, -1) = (-\infty, -2) \cup [-1, +\infty)$$

$$۴) f(x) = \frac{x}{|x-1| - 2}$$

$$|x-1| - 2 = 0 \Rightarrow |x-1| = 2 \Rightarrow x-1 = \pm 2 \Rightarrow x = 3, -1$$

$$D_f = \mathbb{R} - \{3, -1\}$$

مثال ۱۱- اگر دامنه‌ی تابع $f(x) = \frac{1}{x^2 + x + m + 1}$ ، $\mathbb{R}$ باشد، حدود m چقدر است؟

$$\Delta = 1 - 4(m+1) < 0 \Rightarrow m+1 > \frac{1}{4} \Rightarrow m > -\frac{3}{4}$$

حل: بایستی معادله‌ی $x^2 + x + m + 1 = 0$ ریشه‌ی حقیقی نداشته باشد. پس:

مثال ۱۲- اگر دامنه‌ی تابع $y = \frac{1}{2x^2 + mx + n}$ به صورت $\mathbb{R} - \{4\}$ باشد n, m چقدر است؟

$$2x^2 + mx + n = 0 \Rightarrow n = -2x^2 - mx$$

$$- \frac{m}{2x} = n' \Rightarrow m = -4x$$

با این ترتیب ریشه‌ی ۴ حذف می‌شود.

مثال ۱۳- دامنه‌ی تابع $f(x) = \sqrt{\frac{4-x^2}{x}}$ کدام است؟

$$-2 \leq x \leq 2, x \neq 0$$

$$\sqrt{\frac{4-x^2}{x}} \geq 0 \Rightarrow \frac{4-x^2}{x} \geq 0 \Rightarrow \frac{(2-x)(2+x)}{x} \geq 0$$

$$y = \frac{a+b}{c+d}$$

$$D_f = \mathbb{R} - \left\{\frac{a}{c}\right\}$$

$$(-\infty, -2] \cup (0, 2]$$



ج) دامنه‌ی توابع گنگ: زیر رادیکال با فرجه‌ی زوج نباید منفی باشد و فرجه‌های فرد در دامنه تأثیری ندارد.

مثال ۱۴- دامنه‌ی توابع زیر را بدست آورید

۱) $f(x) = \sqrt{x^2 - x^5} \Rightarrow x^2 - x^5 \geq 0 \Rightarrow x^2(1 - x^3) \geq 0$

$$D = (-\infty, +1] \cup \{0\}$$

۲) $f(x) = \sqrt{|x|(x-2)}$

$$D = \{0\} \cup (2, +\infty)$$

۳) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x-1}-1}$

$x-1 \geq 0 \Rightarrow x \geq 1, \sqrt{x-1}-1 \neq 0 \Rightarrow x \neq 2 \Rightarrow D_f = [1, +\infty) - \{2\}$

$\forall n (n^2 - n - m \geq 0)$

مثال ۱۵- اگر دامنه‌ی تابع $y = \sqrt{x^2 - x - m}$ باشد، محدود m را بیابید.

$\Delta \leq 0 \Rightarrow 1 + 4m \leq 0 \Rightarrow m \leq -\frac{1}{4}$

د) دامنه‌ی توابع لگاریتمی:

$f(x) = \log_v^u \rightarrow D_f = \{x | u > 0, v > 0, v \neq 1\}$

مثال ۱۶- دامنه‌ی تابع $f(x) = \log_{(x-1)}|x|$ را بدست آورید.

$|x| > 0 \Rightarrow x \neq 0$

$x-1 > 0 \Rightarrow x > 1 \Rightarrow D_f = [1, 2) \cup (2, +\infty)$

$x-1 \neq 1 \Rightarrow x \neq 2$

ه) دامنه‌ی توابع مثلثاتی:

$y = \arcsin(x) \Rightarrow x \in [-1, 1]$

۱) $f(x) = \sin(p(x)) \rightarrow D_f = D_p$

۲) $f(x) = \cos(p(x)) \rightarrow D_f = D_p$

۳) $f(x) = \tan(p(x)) \rightarrow D_f = \{x | p(x) \neq k\pi + \frac{\pi}{2}\}$

۴) $f(x) = \cot(p(x)) \rightarrow D_f = \{x | p(x) \neq k\pi\}$

و) دامنه‌ی توابع معکوس مثلثاتی

$\arcsin(x) \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \Rightarrow x \in [-1, 1]$
 $\arccos(x) \in [0, \pi] \Rightarrow x \in [-1, 1]$
 $\arctan(x) \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \Rightarrow x \in \mathbb{R}$
 $\text{arccot}(x) \in (0, \pi) \Rightarrow x \in \mathbb{R}$

سوال ۱) اگر $y = \sqrt{x^2 - x^2 + k}$ باشد، محدوده k را

$x^2 - x^2 + k \geq 0 \Rightarrow k \geq 0$

پس $k \in [0, +\infty)$

مثال ۱۷- دامنه‌ی توابع زیر را بدست آورید.

$$f(x) = \sin \frac{1}{x} \rightarrow [x] = 0 \Rightarrow x \in [0, 1) \Rightarrow D = \mathbb{R} - [0, 1)$$

$$f(x) = \tan(\gamma\pi x) \rightarrow \gamma\pi x \neq k\pi + \frac{\pi}{2} \Rightarrow x \neq \frac{k}{\gamma} + \frac{\pi}{\gamma}$$

$$f(x) = \cot(\gamma x) \rightarrow \gamma x \neq k\pi \Rightarrow x \neq \frac{k\pi}{\gamma}$$

رسم تابع به کمک انتقال، انقباض و انبساط: اگر نمودار تابع $f(x)$ را داشته باشیم در این صورت:

✓ نمودار تابع $y = f(x) + k$ را می توان به کمک $f(x)$ رسم کرد.

الف) اگر $k > 0$ باشد $f(x)$ را در امتداد محور y ها k واحد به بالا انتقال می دهیم.

ب) اگر $k < 0$ باشد $f(x)$ را در امتداد محور y ها k واحد به پایین انتقال می دهیم.

✓ نمودار تابع $y = af(x)$ را می توان به کمک $f(x)$ رسم کرد.

الف) اگر $a > 1$ نمودار $f(x)$ در امتداد محور y ها با ضریب a کشیده می شود (انبساط عمودی).

ب) اگر $0 < a < 1$ نمودار $f(x)$ در امتداد محور y ها با ضریب a فشرده می شود (انقباض عمودی).

ج) اگر $a < 0$ ، ابتدا نمودار f نسبت به محور x ها آینه وار منعکس می شود، سپس با ضریب $|a|$ به طور عمودی منبسط یا منقبض می شود.

✓ نمودار تابع $-f(x)$ قرینه نمودار تابع $f(x)$ نسبت به محور x ها است.

✓ نمودار $y = f(x+k)$ را می توان به کمک $f(x)$ رسم کرد.

الف) اگر $k > 0$ باشد $f(x)$ را در امتداد محور x ها در جهت منفی ها k واحد انتقال می دهیم.

ب) اگر $k < 0$ باشد $f(x)$ را در امتداد محور x ها در جهت مثبت ها k واحد انتقال می دهیم.

✓ نمودار تابع $y = f(ax)$ را می توان به کمک $f(x)$ رسم کرد. اگر $0 < a$ ، نمودار $y = f(ax)$ را می توان با انبساط یا

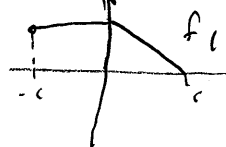
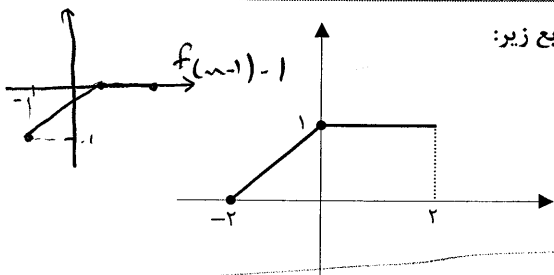
انقباض نمودار $y = f(x)$ در امتداد محور x ها به دست آورد.

الف) در حالتی که $a < 1$ نمودار $y = f(x)$ منقبض با ضریب $\frac{1}{a}$ ،

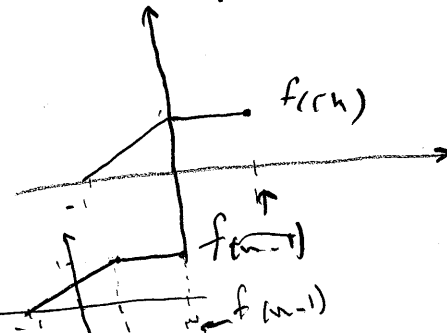
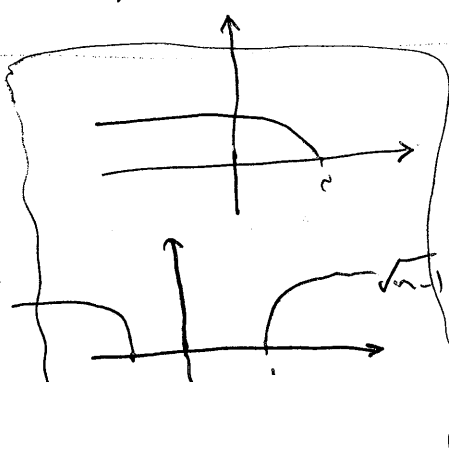
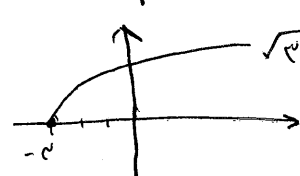
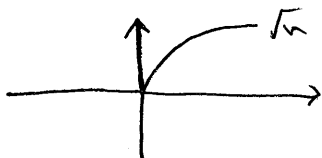
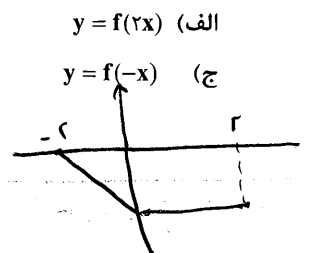
ب) در حالتی که $a > 1$ نمودار $y = f(x)$ منبسط با ضریب $\frac{1}{a}$ خواهد شد.

✓ نمودار تابع $f(-x)$ قرینه نمودار تابع $f(x)$ نسبت به محور y ها است.

مثال ۱۸- اگر نمودار $y = f(x)$ به صورت مقابل باشد. مطلوبست دامنه و برد و رسم توابع زیر:



الف) $y = f(2x)$
ب) $y = f(x-1) - 1$
ج) $y = f(-x)$
د) $y = -f(x)$

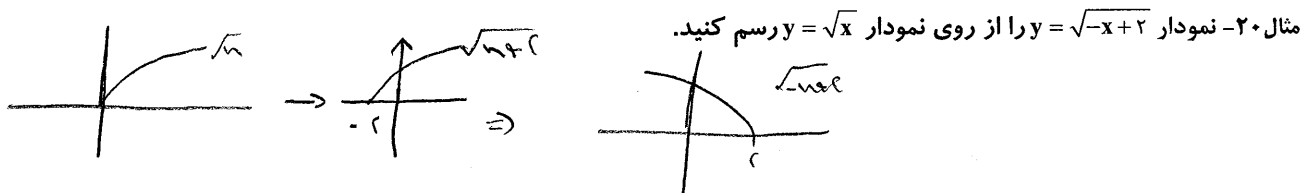




مثال ۱۹- اگر دامنه و برد تابع $f(x)$ به صورت $D_f = [-1, 2]$ و $R_f = (-3, 1]$ باشد دامنه و برد تابع $y = 2f(2x-1)$ را بدست آورید.

$$\begin{aligned} D_f &= [-1, 2] \\ R_f &= (-3, 1] \\ y &= 2f(2x-1) \Rightarrow R_y = 2R_f = (-6, 2] \\ D_y &= [-1, 2] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -1 &\leq 2x-1 < 2 \\ 0 &\leq 2x < 3 \\ 0 &\leq x < \frac{3}{2} \end{aligned}$$



تساوی دو تابع: با دو شرط زیر $f(x), g(x)$ برابرند

$$1) D_f = D_g \quad 2) \forall x \in D: f(x) = g(x)$$

مثال ۲۱- برابری هر جفت از توابع زیر را بررسی کنید.

$$\begin{aligned} 1) \begin{cases} f(x) = \sqrt{x}\sqrt{1-x} \\ g(x) = \sqrt{x(1-x)} \end{cases} \quad D_f = \{x | x \geq 0 \} \cap \{x | 1-x \geq 0\} = [0, 1] \\ D_g = \{x | x(1-x) \geq 0\} = [0, 1] \end{aligned}$$

$$2) \begin{cases} f(x) = \sin 2x \\ g(x) = \sqrt{\sin^2 2x} = |\sin 2x| \end{cases}$$

$$D_f = D_g = \mathbb{R}, \quad |\sin 2x| \leq \sin 2x \Rightarrow f(x) \neq g(x)$$

$$\begin{aligned} 3) \begin{cases} f(x) = \log x(x-2) \\ g(x) = \log x + \log(x-2) \end{cases} \quad D_f = (-\infty, 0) \cup (2, +\infty) \\ D_g = \{x | x > 0\} \cap \{x | x-2 > 0\} = (2, +\infty) \neq D_f \end{aligned}$$

$$D_g = \{x | x > 0\} \cap \{x | x-2 > 0\} = (2, +\infty) \neq D_f$$

اعمال توابع و دامنه‌ی آنها

$$\begin{aligned} (a, b) \in f \\ (a, c) \in g \end{aligned} \Rightarrow \begin{cases} (a, b+c) \in (f+g) \\ (a, b-c) \in (f-g) \\ (a, bc) \in (fg) \\ \left(a, \frac{b}{c}\right) \in \left(\frac{f}{g}\right) \quad c \neq 0 \end{cases}$$

$$D_{f \pm g} = D_f \cap D_g$$

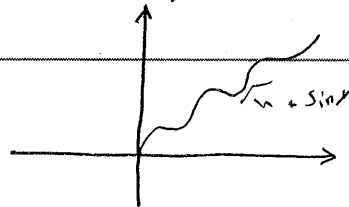
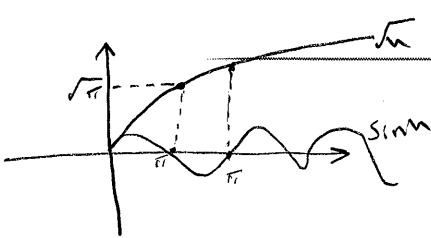
$$D_{f/g} = D_f \cap D_g - \{x | g = 0\}$$

مثال ۲۲- اگر $f = \{(1, 4), (2, -1), (3, 2)\}$ ، $g = \{(1, 2), (2, 1), (3, 4)\}$ باشد، حاصل عبارات زیر را بدست آورید:

۱) $f - g = \{(1, 4 - 2), (2, -1 - 1), (3, 2 - 4)\} = \{(1, 2), (2, -2), (3, -2)\}$

۲) $f + g = \{(1, 4 + 2), (2, -1 + 1), (3, 2 + 4)\} = \{(1, 6), (2, 0), (3, 6)\}$

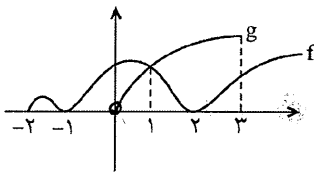
۳) $\frac{-1}{f} + 2g = \{(1, -\frac{1}{4}), (2, -\frac{1}{-1}), (3, -\frac{1}{2})\} + \{(1, 4), (2, 2), (3, 8)\} = \{(1, -\frac{1}{4} + 4), (2, 1 + 2), (3, -\frac{1}{2} + 8)\} = \{(1, \frac{15}{4}), (2, 3), (3, \frac{15}{2})\}$



مثال ۲۳- نمودار $y = \sqrt{x} + \sin x$ را رسم کنید.

مثال ۲۴- اگر f, g شکل مقابل باشند. دامنه تابع $y = \frac{f(x) + g(x)}{\sqrt{f(x) - g(x)}}$ کدام است؟

$[2, 3] \cup (4, \infty)$ (۱)
 $(0, 1) \cup (2, 3)$ (۲)
 $(0, 1) \cup (4, \infty)$ (۳)
 $(2, 3) \cup (4, \infty)$ (۴) ✓



$f(x) > g(x) \rightarrow 0 < x < 1$

مثال ۲۵- دامنه‌ی توابع زیر را به دست آورید.

$f(x) = \sqrt{x-1} + \sqrt{\frac{x}{2-x}}$

$x - 1 \geq 0 \rightarrow x \geq 1$ (۱)

$\frac{x}{2-x} \geq 0 \rightarrow 0 \leq x < 2$ (۲)

$\Rightarrow 1 \leq x < 2$

ترکیب دو تابع:

$x \xrightarrow{\text{ورودی}} \boxed{g(x)} \rightarrow g(x) \rightarrow \boxed{f(x)} \rightarrow f(g(x)) = (f \circ g)(x)$

$D_{f \circ g} = \{x \in D_g : g(x) \in D_f\}$

مثال ۲۶- اگر $f(x) = x^2 + 1$ ، $g(x) = x + 2$ باشد، معادله‌ی زیر را حل کنید.

$(f \circ g)(x) + (g \circ f)(x) = (g \circ g)(x)$

$\downarrow$
 $(x^2 + 4x + 5) + (x^2 + 4x + 5) = x^2 + 4x + 5$

$x^2 + 4x + 5 + x^2 + 4x + 5 = x^2 + 4x + 5$

$x^2 + 4x + 5 = 0 \rightarrow \Delta < 0$

$f \circ g = (x^2 + 4x + 5) \rightarrow (x^2 + 4x + 5) = (x^2 + 4x + 5) \rightarrow$

$$x^2 - 4mx + 4 = 0$$

$$x^2 - 4mx + 4 = 0 \rightarrow (x-2)^2 = 4m^2 \rightarrow x-2 = \pm 2m \rightarrow x = 2 \pm 2m$$

$$x^2 - 4mx + 4 = 0 \rightarrow (x-2)^2 = 4m^2 \rightarrow x-2 = \pm 2m \rightarrow x = 2 \pm 2m$$

۵۹

کتاب کلاس ریاضی تجربی

$$x = 2 \pm 2m \rightarrow f(x) = \sqrt{1-x^2}$$

مثال ۲۷- اگر $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ باشد، ضابطه و دامنه $(f \circ f)(x)$ را به دست آورید.

$$f(f(x)) = \sqrt{1-(\sqrt{1-x^2})^2} = \sqrt{1-(1-x^2)} = \sqrt{x^2} = |x|$$

مثال ۲۸- اگر $f(x) = \frac{x+1}{x}$ و $(f \circ g)(x) = x$ ضابطه $g(x)$ را به دست آورید.

$$f(f(x)) = x$$

$$\frac{f(x)+1}{f(x)} = x$$

$$x f(x) = f(x) + 1$$

$$x \left(\frac{x+1}{x} \right) = \frac{x+1}{x} + 1$$

$$x(x+1) = x+1+x^2 \rightarrow x^2 = 1 \rightarrow x = \pm 1$$

$$f(f(x)) = \frac{1}{x} \Rightarrow f\left(\frac{1}{f(x)}\right) = \frac{1}{x}$$

$$\frac{1-f(x)}{1+f(x)} = \frac{1}{x} \Rightarrow x(1-f(x)) = 1+f(x)$$

$$x - xf(x) = 1+f(x) \Rightarrow x - 1 = f(x)(x+1) \Rightarrow f(x) = \frac{x-1}{x+1}$$

مثال ۲۹- اگر $f(x) = \frac{1-x}{1+x}$ و $(g \circ f)(x) = \frac{x+1}{x}$ مقدار $g(x)$ چقدر است؟

$$g\left(\frac{1-x}{1+x}\right) = \frac{x+1}{x}$$

$$g\left(\frac{1-t}{1+t}\right) = \frac{1}{1-t}$$

مثال ۳۰- اگر $f(x) = \{(1,4), (-1,2), (0,2)\}$ و $g(x) = \{(2,1), (3,-1), (1,1)\}$ ضابطه های $f \circ g$ را به دست آورید.

$$\begin{array}{ccc} 2 & \xrightarrow{g} & 1 \xrightarrow{f} 4 \\ 3 & \xrightarrow{g} & -1 \xrightarrow{f} 2 \\ 1 & \xrightarrow{g} & 1 \xrightarrow{f} 1 \end{array}$$

$$f \circ g = \{(2,4), (3,2), (1,1)\}$$

مثال ۳۱- تابع $f = \{(1,2), (2,3), (3,4), (4,5), (5,6)\}$ و $g = \{(1,2), (2,3), (3,4), (4,5), (5,6)\}$ باشد، اگر $(4,1) \in \text{gof}$ و $(4,2) \in \text{fog}$ باشد،

(سراسری ریاضی ۹۰)

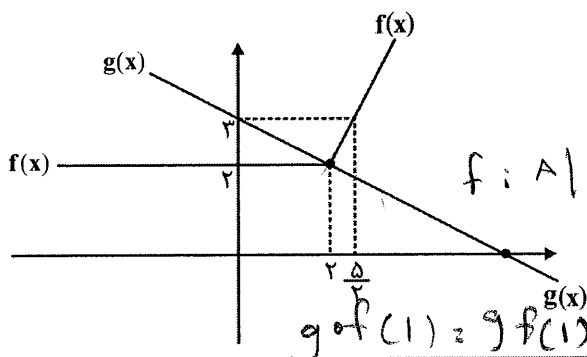
دوتایی (a,b) کدام است؟

$$\begin{array}{ccc} (5,4) & (4,5) & (3,4) \\ \downarrow f & \downarrow f & \downarrow f \\ 4 & 5 & 3 \end{array}$$

$$4 \xrightarrow{g} 5 \xrightarrow{f} 3 \Rightarrow a=4$$

$$4 \xrightarrow{f} 5 \xrightarrow{g} 1 \Rightarrow b=5$$

مثال ۳۲- نمودارهای $f(x)$ و $g(x)$ در شکل مقابل ترسیم شده است، به کمک نمودار مقادیر زیر را حساب کنید.



$$g(g(0))$$

$$(f \circ g)(0)$$

$$f(3)$$

$$(g \circ f)(1)$$

$$f(3)$$

$$f(3)$$

$$f(3)$$

$$f(3)$$

مثال ۳۳- اگر $f(x) = \log(x)$ و $g(x) = \cos\left(\frac{x\pi}{2}\right)$ مقدار $(g \circ f)\left(\frac{1}{2}\right)$ کدام است؟

$$-\frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{2}$$

$$-1$$

$$1$$

$$f(n-1) = (n-1) - 2(n-1) + 4 \rightarrow f(n) = n^2 - 2n + 4$$



$$f(\sin n) = \cos^2 n + \sin n \Rightarrow f(\sin n) = 1 - \sin^2 n + \sin n \quad f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4} - \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

کتاب کلاس ریاضی تجربی

مثال ۳۴- اگر $f(x) = \cos^2 x - \sin^2 x$ ، $(g \circ f)(x) = 1 - 2 \sin^2 x \cos^2 x$ باشند، در این صورت $g\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)$ کدام است؟

$$\begin{aligned} \cos 2n &= \cos^2 n - \sin^2 n \\ \sin 2n &= 2 \sin n \cos n \end{aligned} \quad \begin{aligned} f(n) &= \cos^2 n - \sin^2 n = (\cos^2 n - \sin^2 n)(\cos^2 n + \sin^2 n) \\ \Rightarrow f(n) &= 1 - 2 \sin^2 n \cos^2 n = 1 - 2 \left(\frac{1}{2} \sin 2n \right) \left(\frac{1}{2} \cos 2n \right) = 1 - \frac{1}{2} \sin 4n \\ g(\cos 2n) &= 1 - \frac{1}{2} \sin 4n = 1 - \frac{1}{2} \sin(2 \cdot 2n) \end{aligned}$$

مثال ۳۵- اگر $f(x) = \sqrt{1-x}$ ، $g(x) = \sqrt{x-2}$ دامنه‌ی $g \circ f$ را به دست آورید:

$$g\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right) = 1 - \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{5}\right) = 1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{5} = 1 - \frac{2}{5} = \frac{3}{5}$$

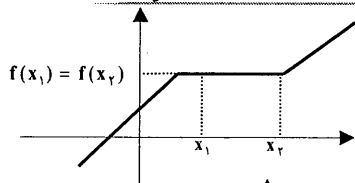
مثال ۳۶- اگر $g(x) = \sqrt{x-1}$ و دامنه‌ی تابع $f \circ g$ برابر $[1, 2]$ باشد، تابع f کدام یک از گزینه‌های زیر می‌تواند باشد؟

$$\begin{aligned} f(x) &= \sqrt{x^2 - x} \quad (1) \\ f(x) &= \sqrt{x^2 - 2x} \quad (2) \\ f(x) &= \sqrt{2x - x^2} \quad (3) \\ f(x) &= \sqrt{x - x^2} \quad (4) \end{aligned}$$

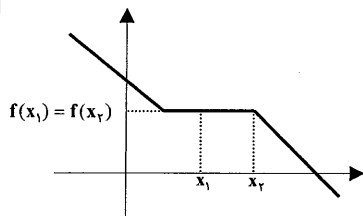
$D_{f \circ g} = [1, 2] \Rightarrow D_f = [1, 2] \cap D_g = [1, 2] \cap [1, \infty) = [1, 2]$

$D_f = [1, 2] \Rightarrow f(x) = \sqrt{x - x^2}$

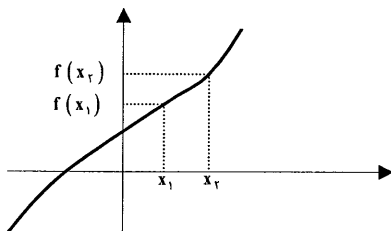
تابع صعودی و نزولی



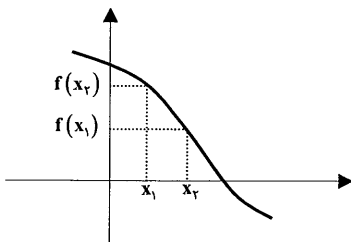
✓ تابع $f(x)$ را صعودی می‌نامیم هر گاه برای هر x_1, x_2 از دامنه $f(x_1) \leq f(x_2)$ داشته باشیم.



✓ تابع $f(x)$ را نزولی می‌نامیم هر گاه برای هر x_1, x_2 از دامنه $f(x_1) \geq f(x_2)$ داشته باشیم.

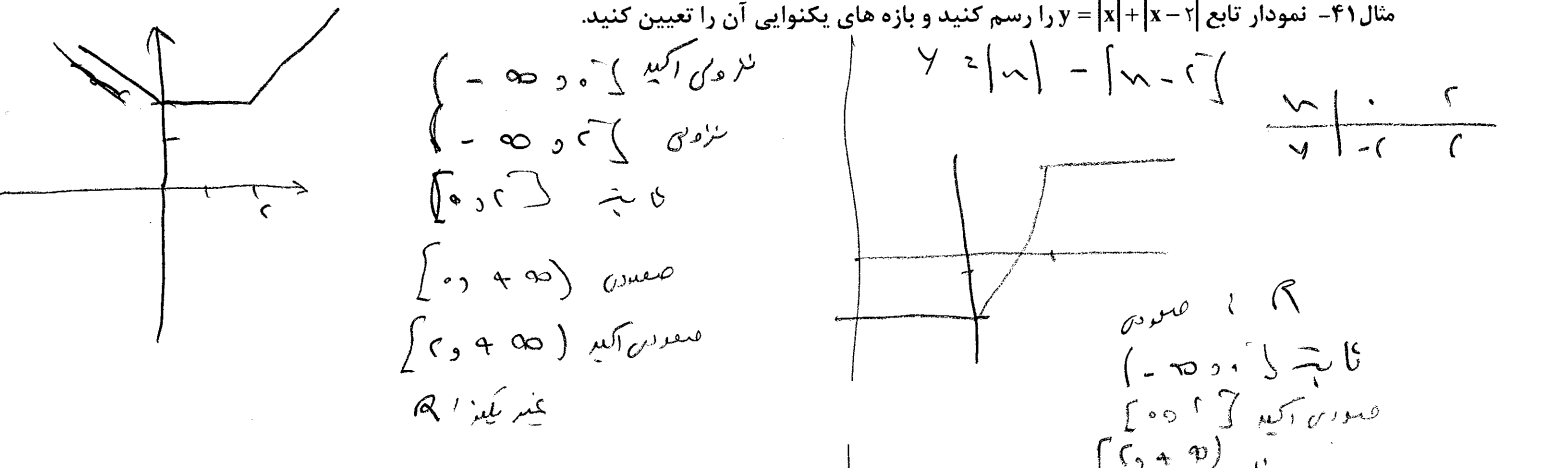
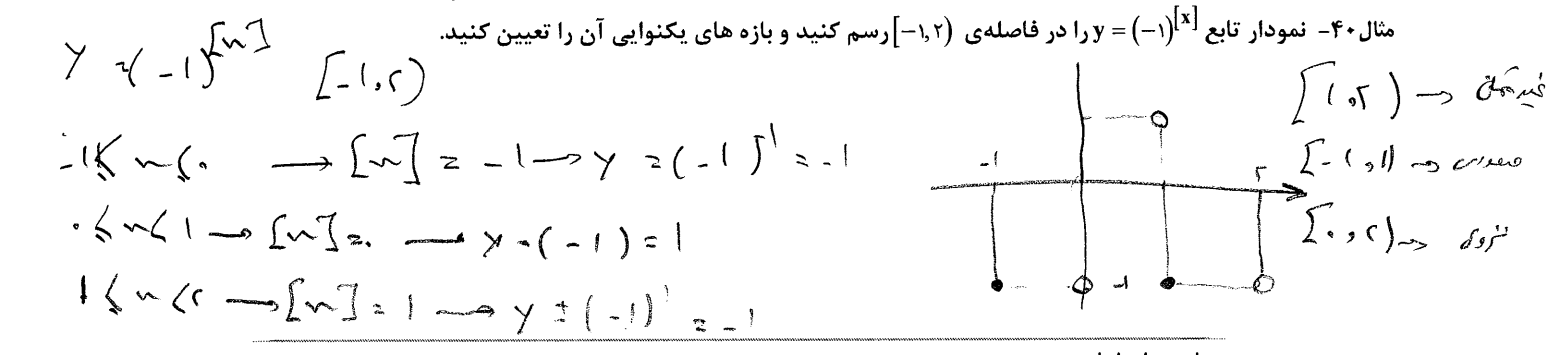
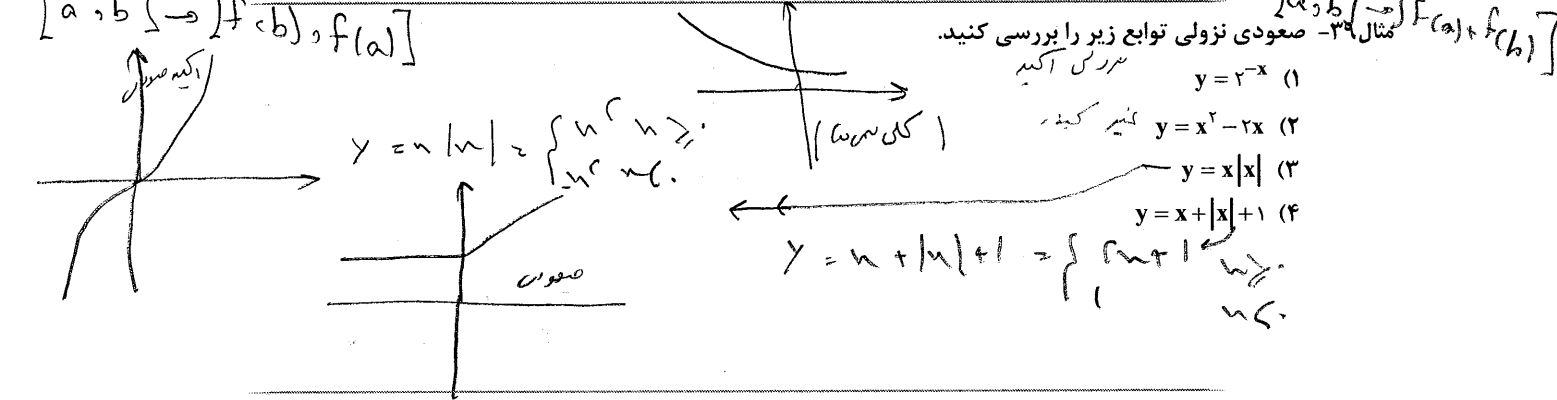
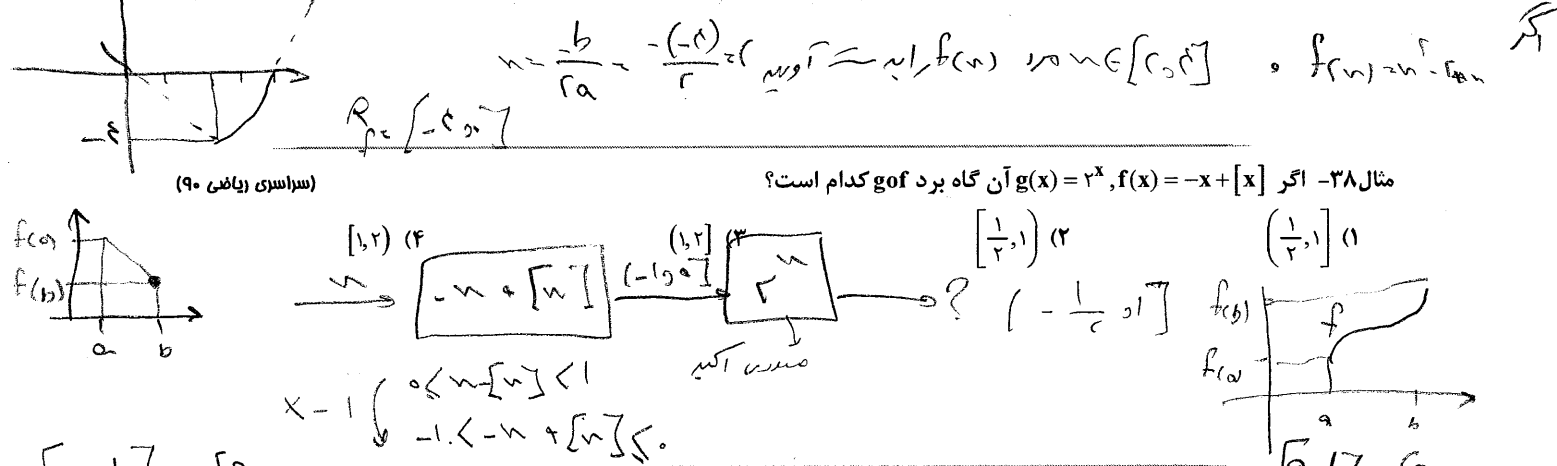
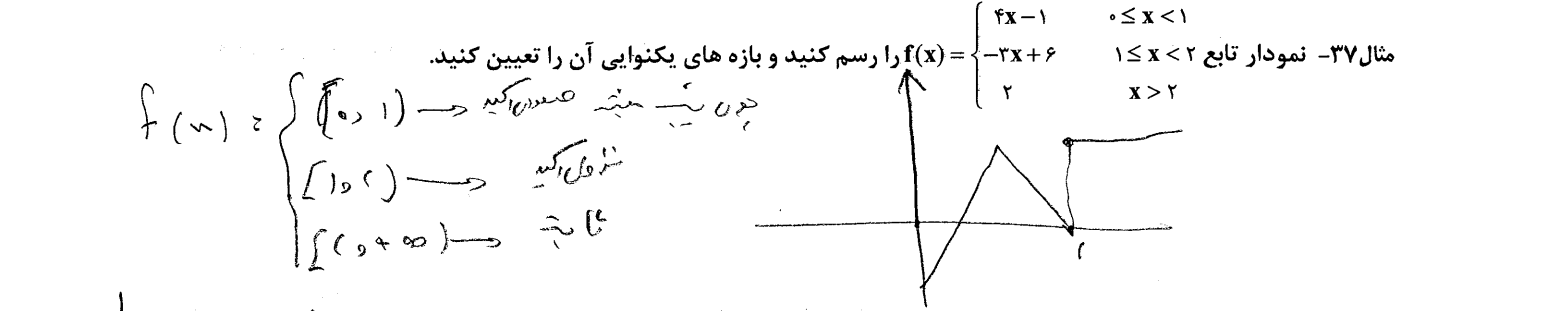


✓ تابع $f(x)$ را صعودی اکید می‌نامیم هر گاه برای هر x_1, x_2 از دامنه $f(x_1) < f(x_2)$ داشته باشیم.



✓ تابع $f(x)$ را نزولی اکید می‌نامیم هر گاه برای هر x_1, x_2 از دامنه $f(x_1) > f(x_2)$ داشته باشیم.

✓ تابع $f(x)$ را ثابت می‌نامیم هر گاه برای هر دو عضو x_1, x_2 از دامنه $f(x_1) = f(x_2)$ داشته باشیم.





📖 تابع یک به یک: تابعی یک به یک است که به ازای y فقط یک x داشته باشیم.

تعریف ریاضی: $\forall x_1 = x_2 \Rightarrow y_1 = y_2$

📖 بررسی تابع یک به یک از روی زوج مرتب: تابعی یک به یک است که مؤلفه‌ی دوم تکراری نداشته باشد.

مثال ۴۲- اگر رابطه‌ی زیر تابع یک به یک باشد، مقدار m چقدر است؟

$$f = \{(1, a+1), (1, \Delta-a), (m+a, -1), (\Delta, a-2)\} \quad a+1 = \Delta - 2$$

$$m+a = \Delta$$

$$m+a = \Delta$$

$$m = 2$$

$$a+1 = \Delta - 2 \Rightarrow a = \Delta - 3$$

$$m+a = \Delta$$

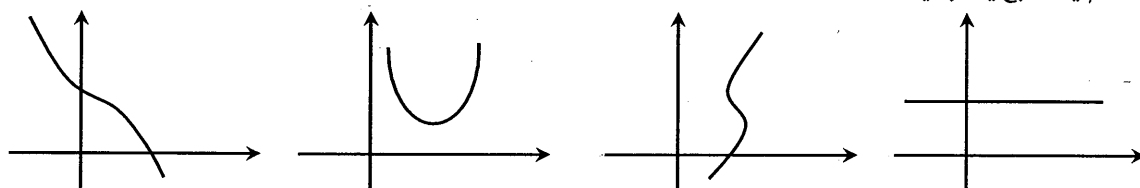
مثال ۴۳- کدام یک از روابط زیر به ازای $m = -1$ یک تابع یک به یک را نمایش می‌دهد؟

$$\begin{aligned} (1) & \{(m, 2m), (2m, -1), (-1, 2m)\} \\ (2) & \{(m, 2m), (2m, m), (2, m)\} \\ (3) & \{(m, 2m), (2m, m), (2, -1)\} \\ (4) & \{(m, 2m), (2m, m), (-2m, -2)\} \end{aligned}$$

📖 بررسی تابع یک به یک از روی نمودار: تابعی یک به یک است که به ازای هر خط موازی محور x ها، تابع حداکثر در یک

نقطه قطع شود.

مثال ۴۴- کدام یک تابع یک به یک است؟



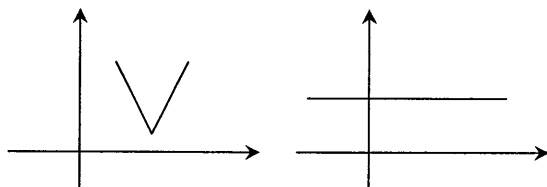
📖 روش‌های تشخیص تابع یک به یک

۱. روش عددگذاری: این روش در تست‌ها برای رد گزینه به کار می‌رود.

۲. توابع درجه زوج، هیچگاه یک به یک نیستند، مگر آن که محدودیت دامنه ایجاد شود.

۳. تابع $ax^2 + bx + c$ با شرط $\frac{-b}{2a} \geq x$ ، $\frac{-b}{2a} \leq x$ ، $1-1$ است.

۴. تابع $y = |ax + b|$ یک به یک نیست.



۵. تابعی که یکنوای اکید باشد، (صعودی اکید یا نزولی اکید) یک به یک‌اند

۶. توابع در مطلق به صورت $y = ax + b + k|cx + d|$ ممکن است یک به یک باشد و ممکن است نباشد. بهترین روش

تشخیص آن رسم تابع است.

مثال ۴۵- کدام یک از توابع زیر تابع یک به یک است؟

$$y = \sin x \xrightarrow{y=0} \sin x = 0 \Rightarrow x = k\pi$$

$$y = [x] \xrightarrow{y=1} [x] = 1 \Rightarrow 1 \leq x < 2$$

$y = x^2 + x$

یک به یک است

سایه دوم به یک به یک است

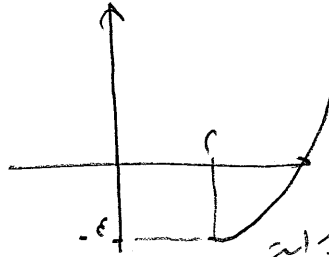
$y = x^2 - 1$

۱۱

$y = x^2 - 2x, x \geq 2$

راشه عدد و شش

یک به یک



اگر منبسط گام من

اگر تابع یکبار آید باشد آن گام یک به یک است

و در صورتی که منبسط یکبار آید یک به یک است

$y = x^2 + x \rightarrow y' = 2x + 1 > 0$

یک به یک است

$y = x^2 - x \rightarrow y' = 2x - 1$

اگر مشتق گام منبسط و گام منبسط یکبار آید یک به یک است

در منبسط یک به یک است

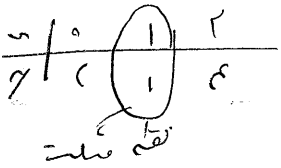
$y = \sqrt{x-1} + |x+2|$

$y' = \frac{1}{2\sqrt{x-1}} + 1 > 0$

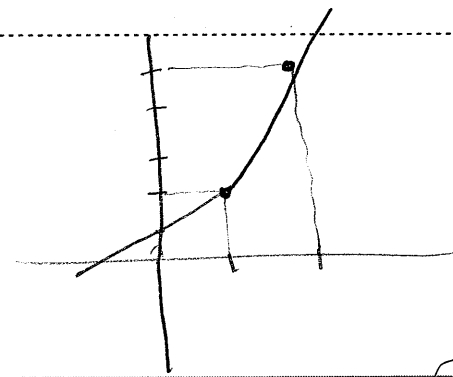
مثال ۴۶- یک به یک بودن توابع زیر را بررسی کنید.

$y = x + |2x-2|$

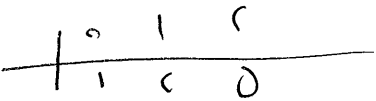
در گام منبسط



یک به یک است



$y = 2x + |x-1|$



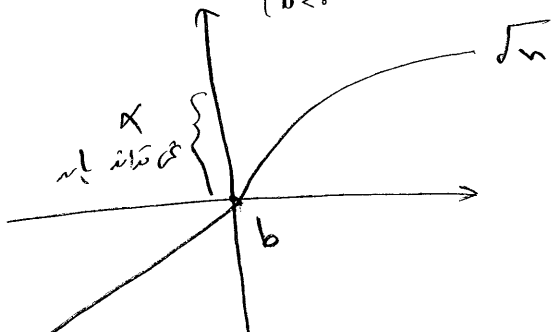
مثال ۴۷- اگر تابع $f(x) = \begin{cases} \tan^{-1} x & x \geq 0 \\ ax+b & x < 0 \end{cases}$ یک به یک باشد a, b کدام می تواند باشد؟

$\begin{cases} a = -2 \\ b < 0 \end{cases} (4)$

$\begin{cases} a = 2 \\ b > 1 \end{cases} (3)$

$\begin{cases} a > 0 \\ b \leq 0 \end{cases} (2)$

$\begin{cases} a = 2 \\ b > 0 \end{cases} (1)$



با توجه به شکل باید دید که راست در تابع منبسط قرار گیرد
در نتیجه $a > 0$ و $b \leq 0$

$$y = (u^2 - u + \frac{1}{4}) - \frac{1}{4} \rightarrow y = (u - \frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4}$$



کتاب کلاس ریاضی تجربی

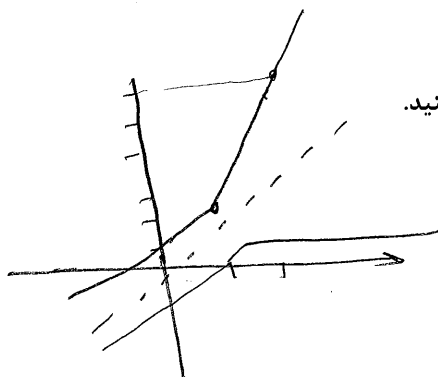
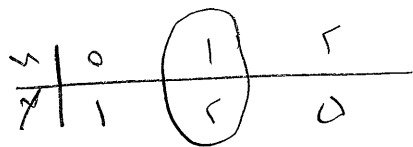
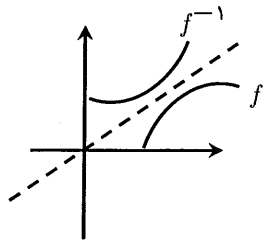
کتاب کلاس ریاضی تجربی

۶۴

تابع معکوس: تابعی معکوس پذیر است که یک به یک باشد و برای یافتن معکوس:

الف) در زوج مرتب: جای مؤلفه‌ی دوم و اول را عوض می‌کنیم.

$$\text{Ex: } f = \{(1, 2), (4, 1)\} \rightarrow f^{-1} =$$



مثال ۴۸- نمودار معکوس تابع $y = x^2 + x$ را رسم کنید.

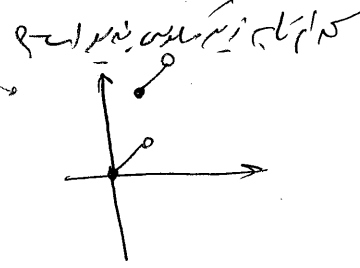
$$\begin{aligned} y &= x^2 + x - 1 \\ y + 1 &= x^2 + x \\ x^2 + x - (y + 1) &= 0 \\ x &= \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 4(y + 1)}}{2} \\ f^{-1}(y) &= \frac{-1 \pm \sqrt{4y + 5}}{2} \end{aligned}$$

ج) در ضابطه: پس از اطمینان از یک به یک بودن تابع، x را بر حسب y محاسبه کرده سپس جای y, x را عوض می‌کنیم.

مثال ۴۹- معکوس تابع زیر را بدست آورید:

$$\begin{aligned} 1) f(x) &= x^2 - 4x, \quad x < 2 \\ y + 4 &= x^2 - 4x + 4 \\ y + 4 &= (x - 2)^2 \\ \sqrt{y + 4} &= |x - 2| \rightarrow \sqrt{y + 4} = -x + 2 \end{aligned}$$

- ۱) $y = x + [x]$
- ۲) $y = x - [x]$
- ۳) $y = [x]$
- ۴) $y = x^2$



$$\begin{aligned} 2) f(x) &= \sqrt{x-1} + 1 \\ y - 1 &= \sqrt{x-1} \\ (y-1)^2 &= x-1 \rightarrow x = (y-1)^2 + 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3) f(x) &= \ln x^2 = 2 \ln x \\ e^y &= x^2 \Rightarrow x = \frac{1}{e^y} \Rightarrow f^{-1}(y) = \frac{1}{e^y} \end{aligned}$$

$$f(x) = \sin^{-1} \frac{x}{2} - \pi$$

مثال ۵۰- معکوس تابع $y = \frac{x-4}{x+1}$ کدام است؟

$$\frac{1+x}{4-x} (f)$$

$$\frac{1-x}{4+x} (r)$$

$$\frac{4-x}{1+x} (r)$$

$$\frac{4+x}{1-x} (1)$$

$$f^{-1}(x) = \frac{x-4}{x+1} \rightarrow A \mid \begin{matrix} 1 & -4 \\ 0 & 1 \end{matrix} \in f \quad A \mid \begin{matrix} -4 & 1 \\ 1 & 0 \end{matrix} \in f^{-1}$$

$$\square = f(0) \Rightarrow 0 = f(\square) \quad \text{معمول}$$

۶۵

کتاب کلاس ریاضی تجربی



(سراسری ریاضی ۸۰)

(کتابخانه)

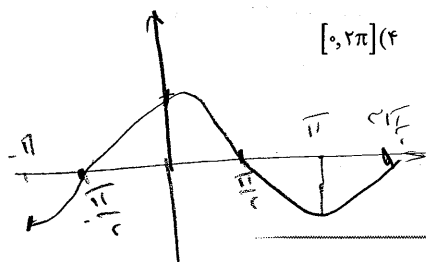
مثال ۵۱- معکوس تابع با ضابطه $f(x) = \cos x$ روی کدام بازه یک تابع است؟

(۱) $[-\pi, 0]$

(۲) $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

(۳) $[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$

(۴) $[0, 2\pi]$



نشان $(f \circ g)^{-1} \rightarrow$

مثال ۵۲- اگر $f(x) = 2x + 1$, $g(x) = x - 1$ ضابطه تعریف تابع $f \circ g^{-1}$ کدام است؟

(۱) $2x + 1$

(۲) $2x + 2$

(۳) $2x + 3$

(۴) $2x + 4$

$y = x - 1$

$x = y + 1$

$f^{-1}(y) = x + 1 \rightarrow f \circ g^{-1}(y) = f(g^{-1}(y)) = f(x + 1) = 2(x + 1) + 1 = 2x + 3$

مثال ۵۳- اگر f معکوس پذیر باشد در این صورت معکوس توابع $h(x) = \frac{1+f(x)}{2+f(x)}$ را بدست آورید

$y = \frac{1+f(x)}{2+f(x)} \rightarrow 2y + 2f(x) = 1 + f(x) \rightarrow 2y + f(x) = 1$

$2yf(x) - f(x) = 1 - 2y \Rightarrow f(x)(2y - 1) = 1 - 2y$

$\Rightarrow f(x) = \frac{1-2y}{2y-1} = u = f^{-1}\left(\frac{1-2y}{2y-1}\right) \rightarrow f^{-1}(u) = f^{-1}\left(\frac{1-2u}{2u-1}\right)$

(سراسری ریاضی ۹۰)

مثال ۵۴- اگر $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ باشد، ضابطه تابع $f^{-1}(\sin x)$ کدام است؟

(۴) $\frac{\sin x}{|\cos x|}$

(۳) $\frac{|\cos x|}{\sin x}$

(۲) $\cot x$

(۱) $\tan x$

$y = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \Rightarrow y^2 = \frac{x^2}{1+x^2} \Rightarrow y^2(1+x^2) = x^2 \Rightarrow y^2 + y^2x^2 = x^2 \Rightarrow y^2 = x^2(1-y^2) \Rightarrow x = \frac{y}{\sqrt{1-y^2}}$

$x = \frac{y}{\sqrt{1-y^2}} \rightarrow f^{-1}(y) = \frac{y}{\sqrt{1-y^2}}$

$f^{-1}(\sin u) = \frac{\sin u}{\sqrt{1-\sin^2 u}} = \frac{\sin u}{|\cos u|}$

نکاتی در مورد تابع معکوس:
اگر f^{-1}, f معکوس هم باشند، در این صورت $D_{f^{-1}} = R_f$, $R_{f^{-1}} = D_f$
اگر نقطه $A(a, b)$ روی تابع $f(x)$ قرار داشته باشد، در این صورت نقطه $A'(b, a)$ روی تابع $f^{-1}(x)$ قرار میگیرد.
اگر f^{-1}, f متقاطع باشند، با شرط صعودی بودن f ، نقطه برخورد آن‌ها روی خط $y = x$ قرار دارد. و با فرض نزولی بودن آن‌ها، نقطه‌ی برخوردشان روی $y = -x$ قرار دارد و با فرض نزولی بودن آن‌ها، ممکن است نقطه برخوردشان روی $y = -x$ قرار گیرد.

(۴) $\forall x \in D_f (f \circ f^{-1})(x) = x$

(۵) $(f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}$

$(f \circ g)^{-1} \neq f^{-1} \circ g^{-1} \neq (g \circ f)^{-1}$

(۶) اگر در تابع هموگرافیک $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$, $a+d=0$ باشد، در این صورت $f(x) = f^{-1}(x)$ می‌باشد.

مثال ۵۵- برد تابع معکوس تابع $y = \frac{2x-1}{x+1}$ کدام است؟

(۴) $\emptyset$

(۳) $\mathbb{R} - \{2\}$

(۲) $\mathbb{R} - \{-1\}$

(۱) $\mathbb{R}$

$R_f = \mathbb{R} - \{-1\} = R_{f^{-1}}$



مثال ۵۶- اگر نقطه $(k, 2)$ از معکوس تابع $y^5 + y = x$ عبور کند. مقدار k کدام است؟

$$k = 0(۴)$$

$$k = 3(۳)$$

$$k = 2(۲)$$

$$k = 1(۱)$$

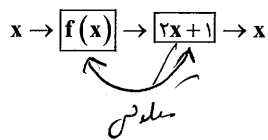
$$k^5 + k = 2 \Rightarrow k = 1$$

مثال ۵۷- نقطه‌ی برخورد تابع $y = x^2 + x - 8$ را با معکوسش بدست آورید.

تابع صعودی اکید است. $\Rightarrow y' = 2x^2 + 1 > 0$

$$f(x) = x \Rightarrow x^2 + x - 8 = x \Rightarrow x = 2 \Rightarrow y = 2 \Rightarrow A(2, 2)$$

مثال ۵۸- ضابطه‌ی $f(x)$ را در شکل مقابل بدست آورید:



$$(f \circ f)^{-1}(u) = v$$

$$y = 2u + 1 \rightarrow y - 1 = 2u \rightarrow u = \frac{y-1}{2} \rightarrow f(u) = \frac{1}{u}$$

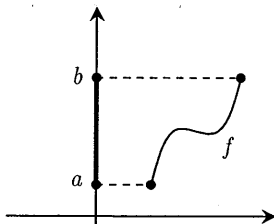
مثال ۵۹- ضابطه‌ی معکوس $f(x) = \frac{4x+1}{x-2}$ را بدست آورید.
 ساده ضابطه مدلس همان است

برد تابع: حدود تغییرات y را براساس تغییرات x برد تابع می‌نامیم.

برد تابع زوج مرتب: مجموعه‌ی مؤلفه‌های دوم را بُرد می‌نامیم.

$$Ex: f = \{(1, 4), (0, 2), (4, 8)\} \Rightarrow R_f = \{2, 4, 8\}$$

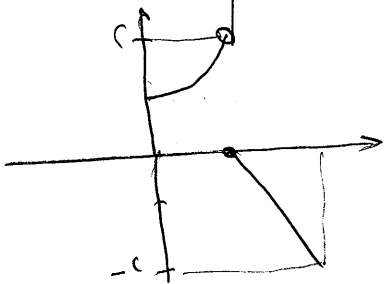
تشخیص بُرد از روی نمودار: تصویر نمودار بر محور y ها را برد تابع می‌نامیم.



$$R_f = [a, b]$$

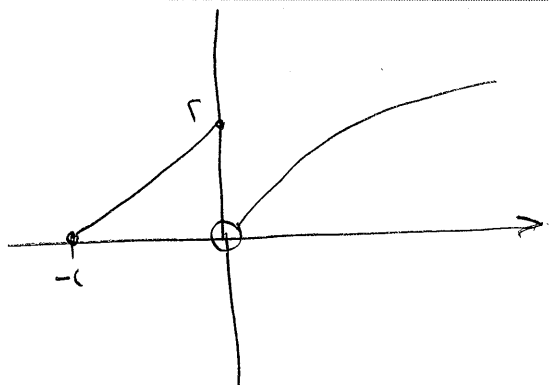
مثال ۶۰- برد تابع $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & 0 \leq x < 1 \\ 1 - x & 1 \leq x < 3 \end{cases}$ را به کمک رسم تعیین کنید.

$$R_f = (-1, 0] \cup [1, 2)$$



مثال ۶۱- برد تابع $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & x > 0 \\ x + 2 & -2 \leq x \leq 0 \end{cases}$ را به دست آورید.

$$R_f = [0, +\infty)$$





مفهوم حد: اگر x به عدد a نزدیک شود (از چپ یا راست) و هیچ گاه به آن نرسد و به واسطه آن $f(x)$ به عدد L نزدیک شود (ممکن است به آن برسد) گوییم: $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$

$$(x \rightarrow a) \equiv (x \neq a)$$

$$(x \rightarrow a^+) \equiv (x = a + \varepsilon)$$

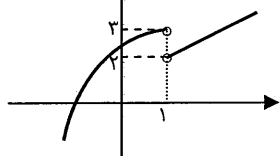
$$(x \rightarrow a^-) \equiv (x = a - \varepsilon)$$

شرط وجود حد: شرط وجود حد برابری حد چپ و راست است.

محاسبه حد از روی نمودار: برای محاسبه $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ از روی نمودار ابتدا خط $x = a$ را رسم می‌کنیم و از سمت چپ و

راست این خط به آن نزدیک می‌شویم. بلافاصله قبل از رسیدن به خط، عرض نقطه را می‌خوانیم. این عدد، حد تابع است.

مثال ۱- با توجه به شکل مقابل مقدار حدهای زیر را بدست آورید؟



$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f = 3$$

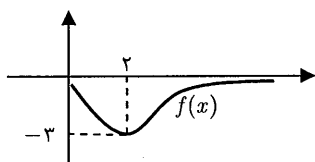
$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f \text{ ندارد}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} [f(x)] = 3$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} [f(x)] = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} [f(x)] = 2$$



$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = -3$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} [f(x)] = [(-3)^+] = -3$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x)] = [0^-] = -1$$

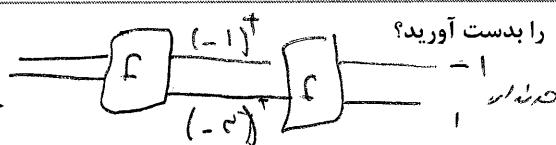
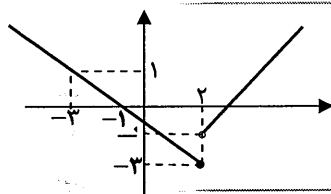
$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = -3$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} [f(x)] = [(-3)^+] = -3$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = -3$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} [f(x)] = -3$$

مثال ۲- با توجه به شکل مقابل مقدار حدهای زیر را بدست آورید؟



مثال ۳- با توجه به شکل مقابل $\lim_{x \rightarrow 2} (f \circ f)(x)$ را بدست آورید؟

تعریف حد ساده: حدی که نیاز به محاسبه چپ و راست ندارد، حد ساده نامیده می‌شود.

مثال ۴- مقدار حدهای زیر را بدست آورید؟

$$\lim_{x \rightarrow 2} (x^2 + 4x) = 4 + 8 = 12$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 1}{x^4 + 1} = \frac{5}{17}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \sin(x + \frac{\pi}{6}) = \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$$

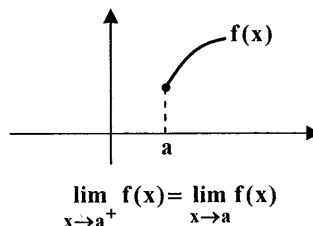
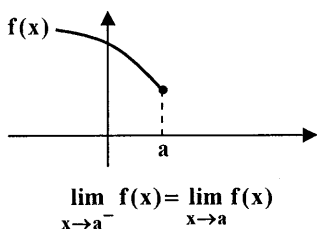
$$\lim_{x \rightarrow 1} \tan(\frac{\pi x}{4}) = \tan \frac{\pi}{4} = 1$$

توجه: اگر $f(x)$ در همسایگی راست $x = a$ تعریف شود و حد راست داشته باشد و در همسایگی چپ $x = a$ تعریف نشود آنگاه

گوییم حد تابع برابر حد راست تابع است یعنی $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$ و به طور مشابه اگر $f(x)$ در همسایگی چپ $x = a$ تعریف شود

و حد چپ داشته باشد و در همسایگی راست $x = a$ تعریف نشود آنگاه گوییم حد تابع برابر حد چپ تابع است

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$$





مثال ۵- مقدار حدهای زیر را بدست آورید؟

$$1) \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{x} = 0$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{[x]-2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{[x]-2} = \frac{1}{1-2} = -1$$

محاسبه‌ی حدهای رادیکالی با فرجه‌ی زوج: $\lim_{x \rightarrow x_0} \sqrt[n]{p(x)}$ الف) اگر $p(x_0) > 0$ در این صورت حد ساده است.ب) اگر $p(x_0) < 0$ در این صورت حاصل حد تعریف نمی‌شود.ج) اگر $p(x_0) = 0$ در این محاسبه حد چپ و راست لازم است و باید مشخص شود که تابع در کدام همسایگی تعریف می‌شود.

مثال ۶- مقدار حدهای زیر را بدست آورید؟

$$1) \lim_{x \rightarrow \sqrt{3}} \sqrt{x^2+1} = \sqrt{3+1} = \sqrt{4} = 2$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 2} \sqrt{-x^2+1} = \text{وجود ندارد}$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 1} \sqrt{1-x} = \lim_{x \rightarrow 1} \sqrt{1-x} = \sqrt{1-1} = \sqrt{0} = 0$$

$$4) \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{|x|} = \sqrt{0} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{-|x|} = \text{نمی‌تواند}$$

$$5) \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{\sin x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{1-\cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{1-\cos x} = \sqrt{1-1} = \sqrt{0} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{1-\cos x} = \sqrt{1-1} = \sqrt{0} = 0$$

حد تابع چند ضابطه‌ای:

حالت اول: در نقطه مرزی $x=a$ در تابع $f(x) = \begin{cases} f_1(x) & x < a \\ f_2(x) & x > a \end{cases}$ کفایت که حد چپ و راست را از دو ضابطه مجزا محاسبه کنیم.مثال ۷- اگر تابع $f(x) = \begin{cases} x^2+ax & x < 2 \\ x^2+a & x > 2 \end{cases}$ در $x=2$ حد داشته باشد، $f(-2)$ چند است؟

$$\left. \begin{array}{l} 4+2a \\ 4+a \end{array} \right\} \rightarrow 4+a = 4+2a \Rightarrow a = 0$$

$$f(-2) = (-2)^2 + a(-2) = 4 - 2a = 4$$

مثال ۸- تابع f با ضابطه‌ی $f(x) = a^{\lfloor x \rfloor} + \begin{cases} ax-1 & x \geq 1 \\ x+2a & x < 1 \end{cases}$ دارای حد است. مقدار عددی a کدام است؟

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = a^{\lfloor 1^+ \rfloor} + a \cdot 1 - 1 = a + a - 1 = 2a - 1$$

$$2a - 1 = 2 + 2a \Rightarrow a = -\frac{3}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = a^{\lfloor 1^- \rfloor} + 1 + 2a = a^0 + 1 + 2a = 1 + 1 + 2a = 2 + 2a$$

$$a = -\frac{3}{2}$$



$$f(n) = \begin{cases} n+1 & n \in \mathbb{Z} \\ n & n \notin \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\lim_{n \rightarrow 2} f(n) = 3$$

$$\lim_{n \rightarrow \sqrt{2}} f(n) = \sqrt{2}$$

حالت دوم: تابع $f(x) = \begin{cases} f_1(x) & x \in \mathbb{Z} \\ f_2(x) & x \notin \mathbb{Z} \end{cases}$ در همه نقاط $\mathbb{R}$ حد دارد. و $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} f_2(x)$

مثال ۹- تعداد نقاطی که تابع $f(x) = \begin{cases} x^2 - x & x \in \mathbb{Z} \\ 4x & x \notin \mathbb{Z} \end{cases}$ در آن نقاط حد دارند، چند تاست؟

$$\lim_{n \rightarrow a} f(n) = \lim_{n \rightarrow a} f_2(n) = 4a$$

در این تابع برای n است و n عدد صحیح است و در هر نقطه از $\mathbb{R}$ دارد.

حد تابع $y = [x]$: این تابع در نقاط صحیح حد ندارد. زیرا:

$$a \in \mathbb{Z}: \begin{cases} \lim_{x \rightarrow a^+} [x] = [a^+] = a \\ \lim_{x \rightarrow a^-} [x] = [a^-] = a-1 \end{cases} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a \in \mathbb{Z}} [x] \text{ ندارد}$$

$$\lim_{x \rightarrow a \notin \mathbb{Z}} [x] = [a]$$

این تابع در نقاط غیر صحیح حد دارد. (و حد آن ساده است)

مثال ۱۰- حدهای زیر را حساب کنید؟

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 5} [x] = \text{حد ندارد} \\ \lim_{x \rightarrow \sqrt{2}} [x] = [\sqrt{2}] = 1 \end{cases}$$

مثال ۱۱- تابع $y = [x]$ در چند نقطه در بازه $(-1, 5)$ حد ندارد؟

جواب: این تابع در نقاط صحیح حد ندارد، پس در نقاط $\{0, 1, 2, 3, 4\}$ حد ندارد.

مثال ۱۲- حاصل $\lim_{x \rightarrow 1} [x]([x]-1)$ را بدست آورید.

$$\lim_{n \rightarrow 1} [n]([n]-1) = \begin{cases} 1 \cdot (1-1) = 0 \\ 0 \cdot (0-1) = 0 \end{cases}$$

مثال ۱۳- اگر تابع $y = [x] + a[x+2] + x^2$ در $x=2$ حد داشته باشد مقدار a چقدر است؟

$$\lim_{n \rightarrow 2} ([n] + a[n+2] + n^2) = \begin{cases} 2 + 4a + 4 = 6 + 4a \\ 1 + 4a + 4 = 5 + 4a \end{cases} \Rightarrow 6 + 4a = 5 + 4a \Rightarrow a = -1$$

نکته: اگر $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$ آن گاه $\lim_{x \rightarrow a} f(x)[x] = 0$

مثال ۱۴- حدهای زیر را حساب کنید؟

$$\lim_{x \rightarrow 2} (x-2)[x] = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (\sin x)[x] = 0$$



مثال ۱۵- تابع $y = (x^2 - 4x)[x]$ در چند نقطه از بازه $(-5, 5)$ حد ندارد؟

مثال ۱۶- تابع $y = (x^2 - 3x)[x]$ در چند نقطه از بازه $(-1, 4)$ حد ندارد؟

مثال ۱۷- اگر تابع $y = (x^2 + ax - 3b)[x]$ در نقاط $x = 1, x = -1$ حد داشته باشد مقدار $a + b$ کدام است؟

-۲(۴)

۴(۳)

۲(۲)

-۲(۱)

محاسبه حد تابع $y = [p(x)]$ در $x = a$

الف) $p(a) \notin \mathbb{Z} \Rightarrow$ حد ساده است

ب) $p(a) \in \mathbb{Z} \Rightarrow$ محاسبه حد چپ و راست الزامی است

مثال ۱۸- حدهای زیر را حساب کنید؟

$$۱) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} [x \sin x] = \left[\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} x \cdot \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \sin x \right] = \left[\frac{\pi}{2} \cdot 1 \right] = 1$$

$$۲) \lim_{x \rightarrow 2} \left[\frac{x}{x} \right] = \left[\frac{2}{2} \right] = 1$$

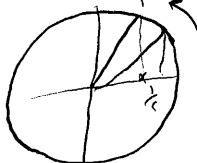
$$۳) \lim_{x \rightarrow 0^+} [-x^2] = \left[\lim_{x \rightarrow 0^+} -x^2 \right] = [-0] = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} [-x^2] = \left[\lim_{x \rightarrow 0^-} -x^2 \right] = [-0] = 0$$

$$۴) \lim_{x \rightarrow 1} [x^2] = \left[\lim_{x \rightarrow 1} x^2 \right] = [1] = 1$$

$$۵) \lim_{x \rightarrow 2^+} \left(\left[\frac{x}{x} \right] + \left[\frac{x}{2} \right] \right) = \left[\frac{2}{2} \right] + \left[\frac{2}{2} \right] = [1] + [1] = 2$$

$$۶) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} [x \cos x] = [1] = 1$$



$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} \left[x \tan \frac{\pi}{x} \right] = \left[x \tan \frac{\pi}{x} \right] = \left[x \tan \left(\frac{\pi}{x} \right) \right] = [1] = 1$$



$$\begin{aligned}
 y &= \sin u \rightarrow y' = u' \cos u \\
 y &= \cos u \rightarrow y' = -u' \sin u \\
 y &= \tan u \rightarrow y' = u' (1 + \tan^2 u) \\
 y &= \cot u \rightarrow y' = -u' (1 + \cot^2 u)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 y &= \sqrt[n]{u} \rightarrow y' = \frac{1}{n} \frac{u^{n-1}}{u^{n-1}} = \frac{1}{n} u^{\frac{n-1}{n}} \\
 y &= u^{\frac{1}{n}} \rightarrow y' = \frac{1}{n} u^{\frac{1}{n}-1} u' = \frac{1}{n} u^{\frac{1-n}{n}} u'
 \end{aligned}$$



حد مبهم: برای رفع ابهام این حدها روش‌های متعددی وجود دارد که به شرح آن‌ها می‌پردازیم

$$\frac{\text{مبهم}}{\text{مبهم}}$$

قاعده‌ی هوییتال:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{0}{0} \xrightarrow{\text{hop}} \lim_{x \rightarrow a} \frac{p'(x)}{q'(x)}$$

مثال ۱۹- حاصل حدهای زیر را به کمک قاعده‌ی هوییتال بدست آورید.

$$۱) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^5 + x^2 - 2}{x^2 + 4x - 5} = \frac{1+1-2}{1+4-5} = \frac{0}{0} \xrightarrow{\text{hop}} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{5x^4 + 2x}{2x + 4} = \frac{5+2}{2+4} = \frac{7}{6}$$

$$۲) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x}-1}{x^2-1} = \frac{0}{0} \xrightarrow{\text{hop}} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{2x} = \frac{\frac{1}{2}}{2} = \frac{1}{4}$$

$$۳) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sin x - \cos x}{1 - \tan x} = \frac{0}{0} \xrightarrow{\text{hop}} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\cos x + \sin x}{-\sec^2 x} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}}{-(1+1)} = \frac{\sqrt{2}}{-2} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$۴) \lim_{x \rightarrow 8} \frac{\sqrt[3]{x}-2}{x^2-18x} = \frac{0}{0} \xrightarrow{\text{hop}} \lim_{x \rightarrow 8} \frac{\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}}{2x-18} = \frac{\frac{1}{3 \cdot 4}}{16-18} = \frac{1}{12} \cdot \frac{1}{-2} = -\frac{1}{24}$$

$$۵) \lim_{x \rightarrow -2} \frac{\sqrt{2-x}+1}{x+2} = \frac{0}{0} \xrightarrow{\text{hop}} \lim_{x \rightarrow -2} \frac{-\frac{1}{2\sqrt{2-x}}}{1} = -\frac{1}{2\sqrt{4}} = -\frac{1}{4}$$

مثال ۲۰- حاصل حدهای زیر را بدست آورید.

$$۱) \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin \frac{x}{2} + \cos x}{\sin 2x + \cos x + 1} = \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\frac{1}{2} \cos \frac{x}{2} - \sin x}{2 \cos 2x - \sin x} = \frac{0}{0} \xrightarrow{\text{hop}} \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{-\frac{1}{4} \sin \frac{x}{2} - \cos x}{-4 \sin 2x - \cos x} = \frac{0}{0} \xrightarrow{\text{hop}} \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{-\frac{1}{8} \cos \frac{x}{2} + \sin x}{-8 \cos 2x + \sin x} = \frac{0}{0} \xrightarrow{\text{hop}} \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\frac{1}{16} \sin \frac{x}{2} + \cos x}{8 \sin 2x + \cos x} = \frac{0}{0} \xrightarrow{\text{hop}} \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\frac{1}{32} \cos \frac{x}{2} - \sin x}{16 \sin 2x - \sin x} = \frac{0}{0} \xrightarrow{\text{hop}} \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{-\frac{1}{64} \sin \frac{x}{2} - \cos x}{32 \cos 2x - \cos x} = \frac{0}{0} \xrightarrow{\text{hop}} \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{-\frac{1}{128} \cos \frac{x}{2} + \sin x}{-64 \sin 2x + \sin x} = \frac{0}{0} \xrightarrow{\text{hop}} \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\frac{1}{256} \sin \frac{x}{2} + \cos x}{128 \cos 2x + \cos x} = \frac{0}{0} \xrightarrow{\text{hop}} \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{-\frac{1}{512} \cos \frac{x}{2} - \sin x}{-256 \sin 2x - \sin x} = \frac{0}{0} \xrightarrow{\text{hop}} \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\frac{1}{1024} \sin \frac{x}{2} + \cos x}{512 \cos 2x + \cos x} = \frac{0}{0} \xrightarrow{\text{hop}} \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{-\frac{1}{2048} \cos \frac{x}{2} - \sin x}{-1024 \sin 2x - \sin x} = \frac{0}{0} \xrightarrow{\text{hop}} \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\frac{1}{4096} \sin \frac{x}{2} + \cos x}{2048 \cos 2x + \cos x} = \frac{0}{0} \xrightarrow{\text{hop}} \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{-\frac{1}{8192} \cos \frac{x}{2} - \sin x}{-4096 \sin 2x - \sin x} = \frac{0}{0} \xrightarrow{\text{hop}} \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\frac{1}{16384} \sin \frac{x}{2} + \cos x}{8192 \cos 2x + \cos x} = \frac{0}{0} \xrightarrow{\text{hop}} \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{-\frac{1}{32768} \cos \frac{x}{2} - \sin x}{-16384 \sin 2x - \sin x} = \frac{0}{0} \xrightarrow{\text{hop}} \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\frac{1}{65536} \sin \frac{x}{2} + \cos x}{32768 \cos 2x + \cos x} = \frac{0}{0} \xrightarrow{\text{hop}} \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{-\frac{1}{131072} \cos \frac{x}{2} - \sin x}{-65536 \sin 2x - \sin x} = \frac{0}{0} \xrightarrow{\text{hop}} \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\frac{1}{262144} \sin \frac{x}{2} + \cos x}{131072 \cos 2x + \cos x} = \frac{0}{0} \xrightarrow{\text{hop}} \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{-\frac{1}{524288} \cos \frac{x}{2} - \sin x}{-262144 \sin 2x - \sin x} = \frac{0}{0} \xrightarrow{\text{hop}} \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\frac{1}{1048576} \sin \frac{x}{2} + \cos x}{524288 \cos 2x + \cos x} = \frac{0}{0} \xrightarrow{\text{hop}} \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{-\frac{1}{2097152} \cos \frac{x}{2} - \sin x}{-1048576 \sin 2x - \sin x} = \frac{0}{0} \xrightarrow{\text{hop}} \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\frac{1}{4194304} \sin \frac{x}{2} + \cos x}{2097152 \cos 2x + \cos x} = \frac{0}{0} \xrightarrow{\text{hop}} \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{-\frac{1}{8388608} \cos \frac{x}{2} - \sin x}{-4194304 \sin 2x - \sin x} = \frac{0}{0} \xrightarrow{\text{hop}} \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\frac{1}{16777216} \sin \frac{x}{2} + \cos x}{8388608 \cos 2x + \cos x} = \frac{0}{0} \xrightarrow{\text{hop}} \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{-\frac{1}{33554432} \cos \frac{x}{2} - \sin x}{-16777216 \sin 2x - \sin x} = \frac{0}{0} \xrightarrow{\text{hop}} \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\frac{1}{67108864} \sin \frac{x}{2} + \cos x}{33554432 \cos 2x + \cos x} = \frac{0}{0} \xrightarrow{\text{hop}} \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{-\frac{1}{134217728} \cos \frac{x}{2} - \sin x}{-67108864 \sin 2x - \sin x} = \frac{0}{0} \xrightarrow{\text{hop}} \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\frac{1}{268435456} \sin \frac{x}{2} + \cos x}{134217728 \cos 2x + \cos x} = \frac{0}{0} \xrightarrow{\text{hop}} \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{-\frac{1}{536870912} \cos \frac{x}{2} - \sin x}{-268435456 \sin 2x - \sin x} = \frac{0}{0} \xrightarrow{\text{hop}} \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\frac{1}{1073741824} \sin \frac{x}{2} + \cos x}{536870912 \cos 2x + \cos x} = \frac{0}{0} \xrightarrow{\text{hop}} \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{-\frac{1}{2147483648} \cos \frac{x}{2} - \sin x}{-1073741824 \sin 2x - \sin x} = \frac{0}{0} \xrightarrow{\text{hop}} \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\frac{1}{4294967296} \sin \frac{x}{2} + \cos x}{2147483648 \cos 2x + \cos x} = \frac{0}{0} \xrightarrow{\text{hop}} \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{-\frac{1}{8589934592} \cos \frac{x}{2} - \sin x}{-4294967296 \sin 2x - \sin x} = \frac{0}{0} \xrightarrow{\text{hop}} \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\frac{1}{17179869184} \sin \frac{x}{2} + \cos x}{8589934592 \cos 2x + \cos x} = \frac{0}{0} \xrightarrow{\text{hop}} \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{-\frac{1}{34359738368} \cos \frac{x}{2} - \sin x}{-17179869184 \sin 2x - \sin x} = \frac{0}{0} \xrightarrow{\text{hop}} \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\frac{1}{68719476736} \sin \frac{x}{2} + \cos x}{34359738368 \cos 2x + \cos x} = \frac{0}{0} \xrightarrow{\text{hop}} \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{-\frac{1}{137438953472} \cos \frac{x}{2} - \sin x}{-68719476736 \sin 2x - \sin x} = \frac{0}{0} \xrightarrow{\text{hop}} \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\frac{1}{274877906944} \sin \frac{x}{2} + \cos x}{137438953472 \cos 2x + \cos x} = \frac{0}{0} \xrightarrow{\text{hop}} \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{-\frac{1}{549755813888} \cos \frac{x}{2} - \sin x}{-274877906944 \sin 2x - \sin x} = \frac{0}{0} \xrightarrow{\text{hop}} \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\frac{1}{1099511627776} \sin \frac{x}{2} + \cos x}{549755813888 \cos 2x + \cos x} = \frac{0}{0} \xrightarrow{\text{hop}} \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{-\frac{1}{2199023255552} \cos \frac{x}{2} - \sin x}{-1099511627776 \sin 2x - \sin x} = \frac{0}{0} \xrightarrow{\text{hop}} \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\frac{1}{4398046511104} \sin \frac{x}{2} + \cos x}{2199023255552 \cos 2x + \cos x} = \frac{0}{0} \xrightarrow{\text{hop}} \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{-\frac{1}{8796093022208} \cos \frac{x}{2} - \sin x}{-4398046511104 \sin 2x - \sin x} = \frac{0}{0} \xrightarrow{\text{hop}} \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\frac{1}{17592186044416} \sin \frac{x}{2} + \cos x}{8796093022208 \cos 2x + \cos x} = \frac{0}{0} \xrightarrow{\text{hop}} \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{-\frac{1}{35184372088832} \cos \frac{x}{2} - \sin x}{-17592186044416 \sin 2x - \sin x} = \frac{0}{0} \xrightarrow{\text{hop}} \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\frac{1}{70368744177664} \sin \frac{x}{2} + \cos x}{35184372088832 \cos 2x + \cos x} = \frac{0}{0} \xrightarrow{\text{hop}} \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{-\frac{1}{140737488355328} \cos \frac{x}{2} - \sin x}{-70368744177664 \sin 2x - \sin x} = \frac{0}{0} \xrightarrow{\text{hop}} \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\frac{1}{281474976710656} \sin \frac{x}{2} + \cos x}{140737488355328 \cos 2x + \cos x} = \frac{0}{0} \xrightarrow{\text{hop}} \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{-\frac{1}{562949953421312} \cos \frac{x}{2} - \sin x}{-281474976710656 \sin 2x - \sin x} = \frac{0}{0} \xrightarrow{\text{hop}} \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\frac{1}{1125899906842624} \sin \frac{x}{2} + \cos x}{562949953421312 \cos 2x + \cos x} = \frac{0}{0} \xrightarrow{\text{hop}} \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{-\frac{1}{2251799813685248} \cos \frac{x}{2} - \sin x}{-1125899906842624 \sin 2x - \sin x} = \frac{0}{0} \xrightarrow{\text{hop}} \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\frac{1}{4503599627370496} \sin \frac{x}{2} + \cos x}{2251799813685248 \cos 2x + \cos x} = \frac{0}{0} \xrightarrow{\text{hop}} \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{-\frac{1}{9007199254740992} \cos \frac{x}{2} - \sin x}{-4503599627370496 \sin 2x - \sin x} = \frac{0}{0} \xrightarrow{\text{hop}} \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\frac{1}{18014398509481984} \sin \frac{x}{2} + \cos x}{9007199254740992 \cos 2x + \cos x} = \frac{0}{0} \xrightarrow{\text{hop}} \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{-\frac{1}{36028797018963968} \cos \frac{x}{2} - \sin x}{-18014398509481984 \sin 2x - \sin x} = \frac{0}{0} \xrightarrow{\text{hop}} \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\frac{1}{72057594037927936} \sin \frac{x}{2} + \cos x}{36028797018963968 \cos 2x + \cos x} = \frac{0}{0} \xrightarrow{\text{hop}} \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{-\frac{1}{144115188075855872} \cos \frac{x}{2} - \sin x}{-72057594037927936 \sin 2x - \sin x} = \frac{0}{0} \xrightarrow{\text{hop}} \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\frac{1}{288230376151711744} \sin \frac{x}{2} + \cos x}{144115188075855872 \cos 2x + \cos x} = \frac{0}{0} \xrightarrow{\text{hop}} \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{-\frac{1}{576460752303423488} \cos \frac{x}{2} - \sin x}{-288230376151711744 \sin 2x - \sin x} = \frac{0}{0} \xrightarrow{\text{hop}} \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\frac{1}{1152921504606846976} \sin \frac{x}{2} + \cos x}{576460752303423488 \cos 2x + \cos x} = \frac{0}{0} \xrightarrow{\text{hop}} \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{-\frac{1}{2305843009213693952} \cos \frac{x}{2} - \sin x}{-1152921504606846976 \sin 2x - \sin x} = \frac{0}{0} \xrightarrow{\text{hop}} \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\frac{1}{4611686018427387904} \sin \frac{x}{2} + \cos x}{2305843009213693952 \cos 2x + \cos x} = \frac{0}{0} \xrightarrow{\text{hop}} \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{-\frac{1}{9223372036854775808} \cos \frac{x}{2} - \sin x}{-4611686018427387904 \sin 2x - \sin x} = \frac{0}{0} \xrightarrow{\text{hop}} \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\frac{1}{18446744073709551616} \sin \frac{x}{2} + \cos x}{9223372036854775808 \cos 2x + \cos x} = \frac{0}{0} \xrightarrow{\text{hop}} \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{-\frac{1}{36893488147419103232} \cos \frac{x}{2} - \sin x}{-18446744073709551616 \sin 2x - \sin x} = \frac{0}{0} \xrightarrow{\text{hop}} \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\frac{1}{73786976294838206464} \sin \frac{x}{2} + \cos x}{36893488147419103232 \cos 2x + \cos x} = \frac{0}{0} \xrightarrow{\text{hop}} \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{-\frac{1}{147573952589676412928} \cos \frac{x}{2} - \sin x}{-73786976294838206464 \sin 2x - \sin x} = \frac{0}{0} \xrightarrow{\text{hop}} \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\frac{1}{295147905179352825856} \sin \frac{x}{2} + \cos x}{147573952589676412928 \cos 2x + \cos x} = \frac{0}{0} \xrightarrow{\text{hop}} \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{-\frac{1}{590295810358705651712} \cos \frac{x}{2} - \sin x}{-295147905179352825856 \sin 2x - \sin x} = \frac{0}{0} \xrightarrow{\text{hop}} \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\frac{1}{1180591620717411303424} \sin \frac{x}{2} + \cos x}{590295810358705651712 \cos 2x + \cos x} = \frac{0}{0} \xrightarrow{\text{hop}} \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{-\frac{1}{2361183241434822606848} \cos \frac{x}{2} - \sin x}{-1180591620717411303424 \sin 2x - \sin x} = \frac{0}{0} \xrightarrow{\text{hop}} \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\frac{1}{4722366482869645213696} \sin \frac{x}{2} + \cos x}{2361183241434822606848 \cos 2x + \cos x} = \frac{0}{0} \xrightarrow{\text{hop}} \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{-\frac{1}{9444732965739290427392} \cos \frac{x}{2} - \sin x}{-4722366482869645213696 \sin 2x - \sin x} = \frac{0}{0} \xrightarrow{\text{hop}} \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\frac{1}{18889465931478580854784} \sin \frac{x}{2} + \cos x}{9444732965739290427392 \cos 2x + \cos x} = \frac{0}{0} \xrightarrow{\text{hop}} \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{-\frac{1}{37778931862957161709568} \cos \frac{x}{2} - \sin x}{-18889465931478580854784 \sin 2x - \sin x} = \frac{0}{0} \xrightarrow{\text{hop}} \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\frac{1}{75557863725914323419136} \sin \frac{x}{2} + \cos x}{37778931862957161709568 \cos 2x + \cos x} = \frac{0}{0} \xrightarrow{\text{hop}} \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{-\frac{1}{151115727451828646838272} \cos \frac{x}{2} - \sin x}{-75557863725914323419136 \sin 2x - \sin x} = \frac{0}{0} \xrightarrow{\text{hop}} \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\frac{1}{302231454903657293676544} \sin \frac{x}{2} + \cos x}{151115727451828646838272 \cos 2x + \cos x} = \frac{0}{0} \xrightarrow{\text{hop}} \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{-\frac{1}{604462909807314587353088} \cos \frac{x}{2} - \sin x}{-302231454903657293676544 \sin 2x - \sin x} = \frac{0}{0} \xrightarrow{\text{hop}} \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\frac{1}{1208925819614629174706176} \sin \frac{x}{2} + \cos x}{604462909807314587353088 \cos 2x + \cos x} = \frac{0}{0} \xrightarrow{\text{hop}} \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{-\frac{1}{2417851639229258349412352} \cos \frac{x}{2} - \sin x}{-1208925819614629174706176 \sin 2x - \sin x} = \frac{0}{0} \xrightarrow{\text{hop}} \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\frac{1}{4835703278458516698824704} \sin \frac{x}{2} + \cos x}{2417851639229258349412352 \cos 2x + \cos x} = \frac{0}{0} \xrightarrow{\text{hop}} \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{-\frac{1}{9671406556917033397649408} \cos \frac{x}{2} - \sin x}{-4835703278458516698824704 \sin 2x - \sin x} = \frac{0}{0} \xrightarrow{\text{hop}} \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\frac{1}{19342813113834066795298816} \sin \frac{x}{2} + \cos x}{9671406556917033397649408 \cos 2x + \cos x} = \frac{0}{0} \xrightarrow{\text{hop}} \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{-\frac{1}{38685626227668133590597632} \cos \frac{x}{2} - \sin x}{-19342813113834066795298816 \sin 2x - \sin x} = \frac{0}{0} \xrightarrow{\text{hop}} \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\frac{1}{77371252455336267181195264} \sin \frac{x}{2} + \cos x}{38685626227668133590597632 \cos 2x + \cos x} = \frac{0}{0} \xrightarrow{\text{hop}} \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{-\frac{1}{154742504910672534362390528} \cos \frac{x}{2} - \sin x}{-77371252455336267181195264 \sin 2x - \sin x} = \frac{0}{0} \xrightarrow{\text{hop}} \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\frac{1}{309485009821345068724781056} \sin \frac{x}{2} + \cos x}{154742504910672534362390528 \cos 2x + \cos x} = \frac{0}{0} \xrightarrow{\text{hop}} \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{-\frac{1}{618970019642690137449562112} \cos \frac{x}{2} - \sin x}{-309485009821345068724781056 \sin 2x - \sin x} = \frac{0}{0} \xrightarrow{\text{hop}} \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\frac{1}{1237940039285380274899124224} \sin \frac{x}{2} + \cos x}{618970019642690137449562112 \cos 2x + \cos x} = \frac{0}{0} \xrightarrow{\text{hop}} \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{-\frac{1}{2475880078570760549798248448} \cos \frac{x}{2} - \sin x}{-1237940039285380274899124224 \sin 2x - \sin x} = \frac{0}{0} \xrightarrow{\text{hop}} \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\frac{1}{4951760157141521099596496896} \sin \frac{x}{2} + \cos x}{2475880078570760549798248448 \cos 2x + \cos x} = \frac{0}{0} \xrightarrow{\text{hop}} \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{-\frac{1}{9903520314283042199192993792} \cos \frac{x}{2} - \sin x}{-4951760157141521099596496896 \sin 2x - \sin x} = \frac{0}{0} \xrightarrow{\text{hop}} \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\frac{1}{19807040628566084398385987584} \sin \frac{x}{2} + \cos x}{9903520314283042199192993792 \cos 2x + \cos x} = \frac{0}{0} \xrightarrow{\text{hop}} \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{-\frac{1}{39614081257132168796771975168} \cos \frac{x}{2} - \sin x}{-19807040628566084398385987584 \sin 2x - \sin x} = \frac{0}{0} \xrightarrow{\text{hop}} \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\frac{1}{79228162514264337593543950336} \sin \frac{x}{2} + \cos x}{39614081257132168796771975168 \cos 2x + \cos x} = \frac{0}{0} \xrightarrow{\text{hop}} \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{-\frac{1}{158456325028528675187087900672} \cos \frac{x}{2} - \sin x}{-79228162514264337593543950336 \sin 2x - \sin x} = \frac{0}{0} \xrightarrow{\text{hop}} \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\frac{1}{316912650057057350374175801344} \sin \frac{x}{2} + \cos x}{158456325028528675187087900672 \cos 2x + \cos x} = \frac{0}{0} \xrightarrow{\text{hop}} \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{-\frac{1}{633825300114114700748351602688} \cos \frac{x}{2} - \sin x}{-316912650057057350374175801344 \sin 2x - \sin x} = \frac{0}{0} \xrightarrow{\text{hop}} \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\frac{1}{1267650600228229401496703205376} \sin \frac{x}{2} + \cos x}{633825300114114700748351602688 \cos 2x + \cos x} = \frac{0}{0} \xrightarrow{\text{hop}} \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{-\frac{1}{2535301200456458802993406410752} \cos \frac{x}{2} - \sin x}{-1267650600228229401496703205376 \sin 2x - \sin x} = \frac{0}{0} \xrightarrow{\text{hop}} \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\frac{1}{5070602400912917605986812821504} \sin \frac{x}{2} + \cos x}{2535301200456458802993406410752 \cos 2x + \cos x} = \frac{0}{0} \xrightarrow{\text{hop}} \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{-\frac{1}{10141204801825835211973625643008} \cos \frac{x}{2} - \sin x}{-5070602400912917605986812821504 \sin 2x - \sin x} = \frac{0}{0} \xrightarrow{\text{hop}} \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\frac{1}{20282409603651670423947251286016} \sin \frac{x}{2} + \cos x}{10141204801825835211973625643008 \cos 2x + \cos x} = \frac{0}{0} \xrightarrow{\text{hop}} \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{-\frac{1}{40564819207303340847894502572032} \cos \frac{x}{2} - \sin x}{-20282409603651670423947251286016 \sin 2x - \sin x} = \frac{0}{0} \xrightarrow{\text{hop}} \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\frac{1}{81129638414606681695789005144064} \sin \frac{x}{2} + \cos x}{40564819207303340847894502572032 \cos 2x + \cos x} = \frac{0}{0} \xrightarrow{\text{hop}} \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{-\frac{1}{162259276829213363391578010288128} \cos \frac{x}{2} - \sin x}{-81129638414606681695789005144064 \sin 2x - \sin x} = \frac{0}{0} \xrightarrow{\text{hop}} \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\frac{1}{324518553658426726783156020576256} \sin \frac{x}{2} + \cos x}{162259276829213363391578010288128 \cos 2x + \cos x} = \frac{0}{0} \xrightarrow{\text{hop}} \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{-\frac{1}{649037107316853453566312041152512} \cos \frac{x}{2} - \sin x}{-324518553658426726783156020576256 \sin 2x - \sin x} = \frac{0}{0} \xrightarrow{\text{hop}} \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\frac{1}{1298074214633706907132624082305024} \sin \frac{x}{2} + \cos x}{649037107316853453566312041152512 \cos 2x + \cos x} = \frac{0}{0} \xrightarrow{\text{hop}} \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{-\frac{1}{2596148429267413814265248164610048} \cos \frac{x}{2} - \sin x}{-1298074214633706907132624082305024 \sin 2x - \sin x} = \frac{0}{0} \xrightarrow{\text{hop}} \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\frac{1}{5192296858534827628530496329220096} \sin \frac{x}{2} + \cos x}{2596148429267413814265248164610048 \cos 2x + \cos x} = \frac{0}{0} \xrightarrow{\text{hop}} \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{-\frac{1}{10384593717069655257060992658440192} \cos \frac{x}{2} - \sin x}{-5192296858534827628530496329220096 \sin 2x - \sin x} = \frac{0}{0} \xrightarrow{\text{hop}} \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\frac{1}{20769187434139310514121985316880384} \sin \frac{x}{2} + \cos x}{10384593717069655257060992658440192 \cos 2x + \cos x} = \frac{0}{0} \xrightarrow{\text{hop}} \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{-\frac{1}{41538374868278621028243970633760768} \cos \frac{x}{2} - \sin x}{-20769187434139310514121985316880384 \sin 2x - \sin x} = \frac{0}{0} \xrightarrow{\text{hop}} \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\frac{1}{83076749736557242056487941267521536} \sin \frac{x}{2} + \cos x}{41538374868278621028243970633760768 \cos 2$$



(سراسری ریاضی ۹۱)

مثال ۲۲- حاصل $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{1 - \tan \pi x}{2x - \sqrt{x}}$ کدام است؟

$-\pi/2$

$-\pi/2$ ✓

$\pi/2$

$2\pi/3$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{1 - \tan \pi x}{2x - \sqrt{x}} &= \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{1 - \tan \pi x}{2x - \sqrt{x}} \\ &= \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{1 - \tan \pi x}{2x - \sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{1 - \tan \pi x}{2x - \sqrt{x}} \\ &= \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{1 - \tan \pi x}{2x - \sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{1 - \tan \pi x}{2x - \sqrt{x}} \end{aligned}$$

تعریف دو تابع هم ارز: دو تابع $f(x)$ و $g(x)$ را در $x = a$ هم ارز گوئیم به شرطی که:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - g(x)}{f(x)} = 0$$

در این صورت می نویسیم:

مثال ۲۳- آیا دو تابع $f(x) = x^2 - 1$ و $g(x) = 2x - 2$ در نقطه $x = 1$ هم ارزند؟

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{2x - 2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x+1)}{2(x-1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+1}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

هم ارزی های ضعیف مقدماتی: اگر $\alpha \rightarrow 0$ هم ارزی های زیر صادق است:

۱) $\sin \alpha \sim \alpha$

مثال ۲۴- حاصل خدای زیر را محاسبه کنید.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(x-1)}{\sqrt{x}-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{\sqrt{x}-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{x}}-1} = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x^2)}{\sin x \sin 2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x \cdot 2x} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(\pi + \sin 2x)}{\sin(\pi + \sin x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(\pi + 2x)}{\sin(\pi + x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin 2x}{-\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{x} = 2$$

۲) $\sin^n \alpha \sim \alpha^n$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(1 + \cos x)}{1 + \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + \cos x}{1 + \cos x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sin^2(x-2)}{\sin^2(x^2-2x)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)^2}{(x^2-2x)^2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{x^2} = \frac{1}{4}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2(2x)}{x \sin(x^2)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(2x)^2}{x \cdot x^2} = 4$$

۳) $\tan \alpha \sim \alpha$

۴) $\tan^n \alpha \sim \alpha^n$



مثال ۲۶- حاصل حدهای زیر را محاسبه کنید.

$$A) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(1-x)}{\tan(1-x^2)} = \frac{0}{0} \xrightarrow{\text{ل‌ه‌و}} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1-x}{1-x^2} \xrightarrow{\text{ل‌ه‌و}} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-1}{-2x} = \frac{1}{2}$$

$$B) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{\tan(x^2)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x^2} = 1$$

$$\Delta) (1+\alpha)^n \sim 1+n\alpha \quad \alpha \rightarrow 0$$

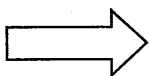
مثال ۲۷- حاصل $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1+4x} + \sqrt[5]{1-2x} - 2}{2x}$ را محاسبه کنید.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + \frac{1}{3}(4x) + 1 + \frac{1}{5}(-2x) - 2}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{4}{3}x - \frac{2}{5}x}{2x} = \frac{1}{15}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^4 - (1+2x)^5}{x^2} \xrightarrow{\text{ل‌ه‌و}} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4(1+x)^3 - 5(1+2x)^4}{2x} \xrightarrow{\text{ل‌ه‌و}} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4(1+3x) - 5(1+8x)}{2} = \frac{4 - 5}{2} = -\frac{1}{2}$$

هم‌ارزی‌های قوی: زمانی از هم‌ارزی‌های قوی استفاده می‌کنیم، که در استفاده از هم‌ارزی ضعیف، عبارت قبل از محاسبه حد ساده شود یعنی جمع جبری عبارت صفر شود.

$$\begin{aligned} ۶) \sin \alpha &\sim \alpha - \frac{1}{6}\alpha^3 \\ ۷) \cos^n \alpha &\sim 1 - \frac{n}{2}\alpha^2 \\ ۸) \tan \alpha &\sim \alpha + \frac{1}{3}\alpha^3 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} \cos \alpha &\sim 1 - \frac{1}{2}\alpha^2 \Rightarrow 1 - \cos \alpha \sim \frac{1}{2}\alpha^2 \\ \alpha - \sin \alpha &\sim \frac{1}{6}\alpha^3 \\ \tan \alpha - \alpha &\sim \frac{1}{3}\alpha^3 \\ \tan \alpha - \sin \alpha &\sim \frac{1}{2}\alpha^3 \end{aligned}$$

مثال ۲۹- حاصل حدهای زیر را محاسبه کنید.

$$A) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{3}x^3}{x^3} = \frac{1}{3}$$

$$B) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x + \tan x - 2x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + \frac{1}{6}x^3 + x - \frac{1}{3}x^3 - 2x}{x^3} = \frac{\frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{3}x^3}{x^3} = -\frac{1}{6}$$

$$C) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2 2x}{1 - \cos 4x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2}(2x)^2}{\frac{1}{2}(4x)^2} = \frac{4x^2}{16x^2} = \frac{1}{4}$$

$$D) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 - 2\cos^2 6x}{1 - \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2(1 - \cos^2 6x)}{1 - \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2(1 - \cos 6x)(1 + \cos 6x)}{1 - \cos x} = 24$$

$$E) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \sqrt{\cos x}}{1 - \cos^2 x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \frac{1}{2}x^2) - (1 - \frac{1}{4}x^2)}{\frac{3}{2}x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{1}{4}x^2}{\frac{3}{2}x^2} = -\frac{1}{6}$$

$$F) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x - \tan^2 x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sin x - \tan x)(\sin x + \tan x)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(-\frac{1}{6}x^3)(2\sin x)}{x^2} = -\frac{1}{3}$$

مثال ۳۰- حد کسر $\frac{\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2+2}}{\cos x - 1}$ وقتی $x \rightarrow 0$ کدام است؟

$$\frac{1}{3} \quad (1) \quad \frac{2}{3} \quad (2) \quad \frac{1}{4} \quad (3) \quad \frac{1}{2} \quad (4)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 + \frac{1}{2}x^2)^{\frac{1}{2}} - (1 + \frac{1}{2}x^2)^{\frac{1}{2}}}{1 - \frac{1}{2}x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 + \frac{1}{2}x^2)^{\frac{1}{2}} - (1 + \frac{1}{2}x^2)^{\frac{1}{2}}}{-\frac{1}{2}x^2} = \frac{\frac{1}{4}x^2}{-\frac{1}{2}x^2} = -\frac{1}{2}$$

مثال ۳۱- حاصل حدهای زیر را محاسبه کنید.

$$1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \frac{1}{2}x^2 - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} (-\frac{1}{2}x) = 0$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{\sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{1}{2}x^2}{\sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} -\frac{1}{2}x^{\frac{3}{2}} = 0$$

کوچکترین درجه صورت
کوچکترین درجه مخرج

$$\text{نکته: } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a_1 x^{p_1} + a_2 x^{p_2} + \dots}{b_1 x^{q_1} + b_2 x^{q_2} + \dots} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{کوچکترین درجه صورت}}{\text{کوچکترین درجه مخرج}}$$

مثال ۳۲- حاصل حدهای زیر را محاسبه کنید.

$$1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sqrt{x}}{x + \sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos u) + u}{\sin u + u} = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2}u^2 + u}{u} = \frac{1}{2}$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x + x^2}{\sin^2 x + x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2}x^2 + x^2}{x^2 + x^2} = \frac{3}{2}$$

نکته: اگر در مدهای $\frac{0}{0}$ ، قدر مطلق وجود داشت، ابتدا آنرا تعیین علامت می‌کنیم و در صورت لزوم مد چپ و راست آنرا محاسبه می‌کنیم.

$$A) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x|}{\sin x} = \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{\sin x} = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-x}{\sin x} = -1 \end{cases}$$

مثال ۳۳- حاصل حدهای زیر را محاسبه کنید.

$$B) \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{|x^2 - 2x|}{x^2 - 4} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2 - 2x}{x^2 - 4} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x(x-2)}{(x-2)(x+2)} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$



$$C) \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{|x - \tan x|}{\sin x - x} = \lim_{u \rightarrow 0^+} \frac{\left| -\frac{1}{6}u^3 \right|}{-\frac{1}{6}u^3} = \lim_{u \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{6}u^3}{-\frac{1}{6}u^3} = -1$$

$$D) \lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{2})^-} \frac{|1 - \cot x|}{1 - \tan x} = \lim_{u \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \frac{1 + \cot u}{1 - \tan u} \stackrel{\text{hosp}}{=} \lim_{u \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \frac{-(1 + \cot^2 u)}{-(1 + \tan^2 u)} = 1$$

(سراسری ریاضی ۹۰)

مثال ۳۴- حد عبارت $\frac{|x^2 - x - 2|}{2x - \sqrt{x^2 + 12}}$ وقتی $x \rightarrow 2$ کدام است ؟

۲ (۴) ۲ (۳) -۲ (۲) -۳ (۱)

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{-x^2 + x + 2}{2x - \sqrt{x^2 + 12}} = \frac{0}{0} \stackrel{\text{hosp}}{=} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{-2x + 1}{2 - \frac{x}{\sqrt{x^2 + 12}}} = \frac{-4 + 1}{2 - \frac{2}{\sqrt{14}}} = \frac{-3}{2 - \frac{1}{\sqrt{14}}} = \frac{-3}{\frac{2\sqrt{14} - 1}{\sqrt{14}}} = \frac{-3\sqrt{14}}{2\sqrt{14} - 1}$$

نکته: اگر در مدهای $\frac{0}{0}$ ، جزء صمیع وجود داشت؛ قبل از مناسبه مد آن را تعیین عدد می‌کنیم و در صورت لزوم مد چپ و راست مناسبه می‌کنیم.

مثال ۳۵- حاصل حدهای زیر را محاسبه کنید.

$$a) \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1 + [x] + |x|}{|\tan x|} = \frac{1 + (-1) - 0}{-0} = \frac{0}{0} \stackrel{\text{hosp}}{=} \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{-\sec^2 x} = -1$$

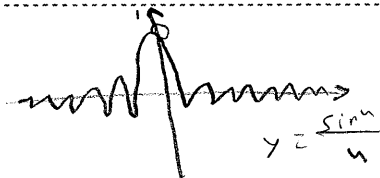
$$b) \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^2 [x] + x}{x^2 + x[x]} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-x^3 + x}{x^2 - x} = \frac{0}{0} \stackrel{\text{hosp}}{=} \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-3x^2 + 1}{2x - 1} = -1$$

$$c) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{[x] + x}{[x] - x + 2} = \frac{0}{2} = 0$$

مثال ۳۶- حاصل حدهای زیر را بدست آورید.

$$1) \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{x + 3\sqrt{x}}{2\sqrt{x}} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{\sqrt{x} + 3}{2} \right] = \left[\frac{0 + 3}{2} \right] = \frac{3}{2}$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{\sin x}{x} \right] = \left[1 \right] = 1$$



انواع $\frac{0}{0}$ ها:

صفر حدی / صفر حدی = مبهم

صفر حدی / صفر مطلق = تعریف نشده

صفر مطلق / صفر حدی = ۰

صفر مطلق / صفر مطلق = تعریف نشده

صفرها را مطلق فرویم همان تابع ثابت ۱ است.

مثال ۳۷- حاصل حدهای زیر را محاسبه کنید.

$$۱) \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{[\sin x]} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{x} = \frac{0}{0} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{[x]}{x} = \frac{0}{0} = 0$$

$$۲) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{[x]}{[x^2] + x^2} = \frac{0}{0} = 0$$

$$۳) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{4 + \cos x}{1 - [x]} = \frac{5}{1} = 5$$

قضایای حد: اگر $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$, $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = M$ باشد، آن گاه:

الف) $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) \pm g(x)) = L \pm M$

ب) $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L}{M}$, $M \neq 0$

ج) $\lim_{x \rightarrow a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{L}$

د) $\lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{L}$, $L \neq 0$

ه) $\lim_{x \rightarrow a} \log(f(x)) = \log L$

مثال ۳۸- اگر $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3f(x)+2}{4f(x)-1} = 3$ حاصل $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{f(x)}$ را بدست آورید.

$$\Rightarrow \frac{3 \lim_{x \rightarrow 1} f(x) + 2}{4 \lim_{x \rightarrow 1} f(x) - 1} = 3 \Rightarrow \frac{3L + 2}{4L - 1} = 3 \Rightarrow 3L + 2 = 12L - 3 \Rightarrow 9L = 5 \Rightarrow L = \frac{5}{9}$$

مثال ۳۹- حاصل $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x^3-1}}{\sqrt{x^2+5x-6}}$ را بدست آورید.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x^3-1}}{\sqrt{x^2+5x-6}} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{(x-1)(x^2+x+1)}}{\sqrt{(x-1)(x+6)}} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x^2+x+1}}{\sqrt{x+6}} = \frac{\sqrt[3]{1+1+1}}{\sqrt{1+6}} = \frac{\sqrt[3]{3}}{\sqrt{7}}$$

مثال ۴۰- حاصل $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x^3-1)(\sqrt{x}-1)}{(\sin \pi x)(x^{10}-1)}$ را بدست آورید.

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3-1}{\sin \pi x} \times \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x}-1}{x^{10}-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3-1}{\sin \pi x} \times \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x}-1}{x^{10}-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{\sin \pi x} \times \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x}-1}{x^{10}-1} = \frac{1}{-\pi} \times \frac{1}{10} = -\frac{1}{10\pi}$$

نکته: اگر مدی را بتوانیم از قاعده هسپیتال، هم ارزی، نکات و قضایای رفع ابهام کنیم، بایستی مسئله را به صورت تشریحی حل کنیم. برای این منظور از اتماهای جبری، اتماهای مثلثاتی و.. و فلاقیت استفاده کنیم.



مثال ۴۱- حاصل حدهای زیر را محاسبه کنید.

$$A) \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{\tan x}}{\sqrt{x} - \sqrt{\sin x}} =$$

$$B) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x+1)(x+2)(x+3)(x+4) - 120}{x^2 - 1} =$$

$$C) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\tan 2x \cos x}{1 + \cos 2x} =$$

حد بی‌نهایت:

$$\frac{A \neq 0}{\text{صفر حدی}} = \infty$$

$$1) \frac{a < 0}{0^-} = +\infty \quad 2) \frac{a < 0}{0^+} = -\infty \quad 3) \frac{a > 0}{0^-} = -\infty \quad 4) \frac{a > 0}{0^+} = +\infty$$

مثال ۴۲- حاصل حدهای زیر را محاسبه کنید.

$$a) \lim_{x \rightarrow 4^-} \frac{\pi - 4}{x - 4} =$$

$$b) \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x + 2}{x^2 - x} =$$

$$c) \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{\sqrt{x} - 1} =$$

$$d) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \tan x =$$

$$e) \lim_{x \rightarrow 1^+} \cot(1 - x) =$$

$$f) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1}{1 - \sin x} =$$

مثال ۴۳- حاصل $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x}{x^2 - 6x + b} = +\infty$ مقدار b را بدست آورید.



حد در بینهایت:

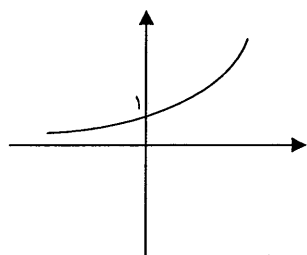
حد در بینهایت چند جمله‌ای‌ها:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (ax^n + bx^{n-1} + \dots) = \lim_{x \rightarrow \infty} (ax^n) = \infty$$

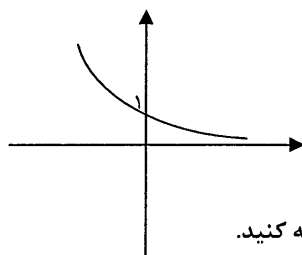
مثال ۴۴- حاصل $\lim_{x \rightarrow \infty} (4x - 5x^3 + 1) = \infty$ را بدست آورید.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (4x - 5x^3 + 1) = \lim_{x \rightarrow \infty} (-5x^3) = -\infty$$

حد در بی‌نهایت توابع نمایی: هر تابع به صورت $y = a^x$; $a > 0, a \neq 1$ باشد را تابع نمایی می‌نامیم.



$$\begin{aligned} a &> 1 \\ y &= a^x \\ (a > 1)^{+\infty} &= +\infty \\ (a > 1)^{-\infty} &= 0 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} 0 &< a < 1 \\ y &= a^x \\ (0 < a < 1)^{+\infty} &= 0 \\ (0 < a < 1)^{-\infty} &= +\infty \end{aligned}$$

مثال ۴۵- حاصل حدهای زیر را محاسبه کنید.

$$۱) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\pi}{\sqrt{x}}\right)^{1+x^2} =$$

$$۲) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{e}{x+1}\right)^{\frac{1}{x}} =$$

$$۳) \lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{2})^+} (x)^{\tan x} =$$

ابهام $\frac{\infty}{\infty}$ برای توابع گویا:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{ax^n + bx^{n-1} + \dots}{a'x^m + b'x^{m-1} + \dots} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{ax^n}{a'x^m} = \begin{cases} \infty & n > m \\ 0 & n < m \\ \frac{a}{a'} & n = m \end{cases}$$

مثال ۴۶- حاصل حدهای زیر را محاسبه کنید.

$$a) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x^2 + x}{x+1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} 4x = \infty$$

$$b) \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{4x+1}{x^2+1} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{4x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{4}{x} = 0$$

$$c) \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3n+1}{3n+2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n}{3n} = \frac{3}{3}$$

$$d) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(2x+1)^2 - (2x+3)^2}{(4x-1)^2} =$$

$$e) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(3x+1)^2 + (x-1)^2}{x^2} =$$



مثال ۴۷- اگر $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{(4-a)x^{b+1} + 4x^2 - 1}{(4+a)x^3 + a - 4} = 2$ حاصل a, b چقدر است؟

مثال ۴۸- حاصل حدهای زیر را محاسبه کنید.

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{4x^2 + x}{2x^2 + 5} \right] =$

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{4x + 3}{4x + 7} \right] =$

$a^b > c^d > 1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} a^{bx+\alpha} > \lim_{x \rightarrow +\infty} c^{dx+\beta}$

ابهام $\frac{\infty}{\infty}$ نمایی:

مثال ۴۹- حاصل حدهای زیر را بدست آورید.

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3^{2x+1}}{9^{x+1} + 2^{2x+3}} =$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2^{2x+1} + 2^{2x+2}}{2^{2x+2} + 2^{2x-1}} =$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4^x + 5^x}{3^x + 6^{2x+1}} =$

محاسبه‌ی حدهای $\frac{\infty}{\infty}$ رادیکالی: در حدهای رادیکالی که به صورت $\frac{\infty}{\infty}$ است به مراحل زیر توجه کنید.

الف) با انتخاب بیشترین‌ها حد رفع ابهام می‌شود و جمع جبری عبارات صفر نمی‌شود.

مثال ۵۰- حاصل $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4\sqrt{x} + \sqrt{x+1}}{3\sqrt{x} - \sqrt{16x+1}}$ را بدست آورید.

مثال ۵۱- حاصل $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2+1} + 2\sqrt{x^2-1}}{\sqrt[3]{x^3+1} + \sqrt[3]{x}}$ را حساب کنید.

مثال ۵۲- حاصل حد زیر را بدست آورید.

$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4x + \sqrt{x^2 + 6x + 1}}{2x - \sqrt{4x^2 + 8x + 1}} =$



(ب) هم ارزی‌های رادیکالی در بی‌نهایت: اگر $x \rightarrow \infty$ در این صورت برای رفع ابهام از روابط زیر استفاده کنید.

$$\begin{aligned} \sqrt[n]{ax^n + bx^{n-1} + \dots} &\approx \sqrt[n]{a} \left(x + \frac{b}{na} \right) & \text{فرد } n, a \neq 0 \\ \sqrt[n]{ax^n + bx^{n-1} + \dots} &\approx \sqrt[n]{a} \left| x + \frac{b}{na} \right| & \text{زوج } n, a > 0 \\ \text{خاص} \quad \begin{cases} \sqrt[r]{ax^r + bx^{r-1} + cx + d} \approx \sqrt[r]{a} \left(x + \frac{b}{ra} \right) \\ \sqrt{ax^2 + bx + c} \approx \sqrt{a} \left| x + \frac{b}{2a} \right| \end{cases} \end{aligned}$$

مثال ۵۳- حاصل حدهای زیر را حساب کنید.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x - \sqrt{x^2 + 6x}}{x - \sqrt{x^2 - 4x^2 + 1}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x - \sqrt{x^2 + 6x}}{x - \sqrt{x^2 - 4x^2 + 1}}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x - \sqrt{9x^2 + 6x - 1}}{x - \sqrt{x^2 - 6x^2}} =$$

(ج) تغییر متغیر

مثال ۵۴- حاصل $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - \sqrt{x^4 - 4x^2 + 8}}{2x^2 - \sqrt{4x^4 + 4x^2 + 7}}$ را بدست آورید.

(د) استفاده از اتحادها

مثال ۵۵- حاصل $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{x+1}}{\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{x-1}}$ را بدست آورید.

نامساوی شوارتز: برای n های بسیار بزرگ رابطه‌ی زیر برقرار است.

$$n^n > n! > a^n > n^b > \sqrt[n]{n} > \log_d^n \quad a, c, d > 1, b > 0$$

حد نسبت هر دو جمله متمایز از شوارتز، یا صفر است یا بی‌نهایت. اگر رشد صورت بیشتر باشد بی‌نهایت و اگر رشد مخرج بیشتر باشد صفر است.

مثال ۵۶- حاصل حدهای زیر را بدست آورید.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{\log n} =$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{r^n}{n^{100}} =$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^r + r \times r^n}{n^{10} + r(n!)}$$

$$\tan \alpha = 1 \begin{cases} \tan \alpha = \frac{1}{\cot \alpha} \\ \cot \alpha = \frac{1}{\tan \alpha} \end{cases}$$



ابهام $\infty \times \infty$: کافی است که به $\frac{0}{0}$ یا $\frac{\infty}{\infty}$ تبدیل کنیم.

مثال ۵۷- حاصل حدهای زیر را بدست آورید.

$$\lim_{x \rightarrow 1} (x-1) \tan \frac{\pi x}{2} = 0 \cdot \infty = \lim_{x \rightarrow 1} (x-1) \frac{1}{\cot \frac{\pi x}{2}} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{\cot \frac{\pi x}{2}} = \frac{0}{0} \Rightarrow \text{L'Hopital} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{-\frac{\pi}{2} (1 + \cot^2 \frac{\pi x}{2})} = \frac{1}{-\frac{\pi}{2} (1+1)} = -\frac{1}{\pi}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (x \cot \Delta x) = \lim_{x \rightarrow 0} x \frac{1}{\tan \Delta x} = \lim_{x \rightarrow 0} x \frac{1}{\Delta x} = \frac{0}{0} \Rightarrow \text{L'Hopital} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{1} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow \pi} (\sin x \tan \frac{\pi x}{2}) = \infty \cdot 0 = \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin x}{\cot \frac{\pi x}{2}} = \frac{0}{0} \Rightarrow \text{L'Hopital} \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\cos x}{-\frac{\pi}{2} (1 + \cot^2 \frac{\pi x}{2})} = \frac{-1}{-\frac{\pi}{2} (1+1)} = \frac{1}{\pi}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x^2 + 4x} \sin \left(\frac{1}{x+1} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x^2 + 4x} \cdot \frac{1}{x+1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 4x}{x^2 + 2x + 1} = \frac{\infty}{\infty} \Rightarrow \text{L'Hopital} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x + 4}{2x + 2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{2} = 1$$

$\sqrt{a^2 + b} \sim \sqrt{a^2}$
 $\sin \alpha \sim \alpha$
 $\alpha \rightarrow 0$
ابهام $(\infty - \infty)$:

هم ارز
تغییر متغیر
اتحادها
مخرج مشترک $\Rightarrow$ تفاضل دو کسر
 $\Rightarrow$ رادیکالی

توجه: در این حالت انتخاب بیشترین ما ممنوع است.

مثال ۵۸- حاصل حدهای زیر را بدست آورید.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (4x - \sqrt{16x^2 + 4x + 1}) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(4x - \sqrt{16x^2 + 4x + 1} \right) = \frac{\infty}{\infty} \Rightarrow \text{L'Hopital} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4 - \frac{4x+1}{\sqrt{16x^2 + 4x + 1}}}{8x + 2} = -\frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 6x^2 + x - 1} - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x + \frac{6}{2} - x \right) = 3$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{x^2 + 2}) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 1 - x^2 - 2}{\sqrt{x^2 + 1} + \sqrt{x^2 + 2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-1}{2\sqrt{x^2}} = -\frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2}{x-1} - \frac{x^2}{x+1} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2(x+1) - x^2(x-1)}{(x-1)(x+1)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2}{x^2 - 1} = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (\cot \pi x - \cot x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{\tan \pi x} - \frac{1}{\tan x} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - \frac{1}{\tan x}}{\tan \pi x} = \frac{1}{\pi} = -\infty$$



مثال ۵۹- حد تابع $f(x) = (x-2)(\tan \frac{\pi x}{4})$ وقتی $x \rightarrow 2$ کدام است؟

$$-\frac{4}{\pi} \quad (۴)$$

$$-\frac{5}{\pi} \quad (۳)$$

$$\frac{4}{\pi} \quad (۲)$$

$$\frac{5}{\pi} \quad (۱)$$

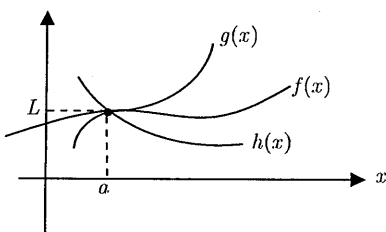
(سراسری فارغ از کشور ۸۶)

مثال ۶۰- حاصل $\lim_{x \rightarrow -2} (\frac{x+19}{x^2+3x-4} + \frac{3}{x+2})$ کدام است؟

$$-\frac{2}{3} \quad (۲)$$

$$-\frac{4}{5} \quad (۱) \checkmark$$

$$\begin{aligned} &= \lim_{n \rightarrow -2} \frac{n+19+3(n-1)}{(n-1)(n+4)} = \lim_{n \rightarrow -2} \frac{n+19+3n-3}{(n-1)(n+4)} \\ &= \lim_{n \rightarrow -2} \frac{4n+16}{(n-1)(n+4)} = \lim_{n \rightarrow -2} \frac{4(n+4)}{(n-1)(n+4)} = \lim_{n \rightarrow -2} \frac{4}{n-1} = -\frac{4}{3} \end{aligned}$$



قضیه‌ی فشردگی: اگر $\lim_{x \rightarrow a} h(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = L$ ، $h(x) \leq f(x) \leq g(x)$ باشد،

آن‌گاه: $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$

مثال ۶۱- اگر $2 + \cos x \leq \frac{1+f(x)}{1-f(x)} \leq 2 + x^2$ باشد حاصل، $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ چقدر است؟

$$\begin{aligned} &\lim_{n \rightarrow \infty} (2 + \cos n) = 2 \\ &\lim_{n \rightarrow \infty} (2 + \cos n) = 2 \end{aligned} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+f(n)}{1-f(n)} = 2$$

مثال ۶۲- در بازه‌ی $[\frac{1}{2}, \frac{2}{3}]$ همواره $\frac{\sin \pi x}{1-x} \leq f(x) \leq g(x)$ قرار دارد. همچنین $\lim_{x \rightarrow 1} (\frac{\sin \pi x}{1-x} - g(x)) = 0$ حاصل $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ چقدر است؟

$$\lim_{n \rightarrow 1} \left(\frac{\sin \pi n}{1-n} - g(n) \right) = 0$$

$$\lim_{n \rightarrow 1} \frac{\sin \pi n}{1-n} = \lim_{n \rightarrow 1} g(n) \Rightarrow \lim_{n \rightarrow 1} \frac{\sin \pi n}{1-n} = \lim_{n \rightarrow 1} g(n) = \lim_{n \rightarrow 1} f(n)$$

نتیجه قضیه فشردگی: اگر $(\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0)$ و $g(x)$ کراندار باشد در این صورت: $\lim_{x \rightarrow a} f(x)g(x) = 0$

Ex: $\lim_{x \rightarrow \infty} x^2 \sin \frac{1}{x} = 0 \times \sin 0 = 0 \times 0 = 0$ (کراندار) $= 0$

مثال ۶۳- اگر f در هیچ نقطه‌ای حد نداشته باشد و کراندار باشد، تابع $g(x) = (x^2 - x)f(x)$ در چند نقطه حد دارد؟

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sin \frac{1}{n} = \sin 0 = 0$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \cos \sqrt{n} = 0 \times \cos \infty = 0$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n)}{n^2} = 0$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \cos n = \cos \infty = 0$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (n - [n]) = \infty - [\infty] = 0$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \sin \frac{1}{n} = \infty \times \sin 0 = 0$$

$$\begin{cases} x^2 \cos x = 0 \\ x \cos x = 0 \\ x \sin x = 0 \end{cases}$$

تابع کراندار تا به چه بردار آن محدود بود و عدد حقیقی $\cos x$ و $\sin x$ را دارد.

$$n - [n] = 0, 1, 2, \dots$$



نکته: در صورتی که $x \rightarrow \infty$ آن گاه: $x \sim [x]$ به استثنای تابع $y = x - [x]$ و $y = [x] + [-x]$ و یا هر تابعی که جمع جبری آنها صفر شود.

مثال ۶۴- حدهای زیر را محاسبه کنید.

$$۱) \lim_{x \rightarrow \infty} x \left[\frac{1}{x} \right] = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 1$$

$$۲) \lim_{x \rightarrow 1} (x-1) \left[\frac{1}{x^2-1} \right] = \lim_{n \rightarrow 1} (n-1) \frac{1}{(n-1)(n+1)} = \frac{1}{2}$$

مثال ۶۵- اگر $\lim_{x \rightarrow 2} (ax + b) \left[\frac{1}{x^2-4} \right] = 1$ مقادیر a, b را محاسبه کنید.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{ax+b}{x^2-4} &= 1 \quad \text{با } x=2 \text{ داریم } \frac{2a+b}{0} = 1 \quad \text{پس } 2a+b=0 \quad b=-2a \\ \lim_{x \rightarrow 2} \frac{ax+b}{x^2-4} &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{a}{x+2} = 1 \quad \text{پس } \frac{a}{4} = 1 \quad a=4 \quad b=-8 \end{aligned}$$

حد نپر: تابع $f(n) = (1 + \frac{1}{n})^n$ را تابع نپر می نامیم وحد آن در بی نهایت به صورت زیر تعریف می شود.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{n})^n = e$$

e را عدد نپر می نامیم این عدد، عددی است گنگ و مقدار تقریبی آن برابر $e = 2.7182$ می باشد.

توجه: مد هایی که حاصل اولیه آنها (1^∞) است مبهم است و جواب آن معمولا به توان های نپر ختم می شوند.
حالت های خاص حد نپر:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{a}{n})^{bn} &= e^{ab} \\ \lim_{x \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{x})^x &= e \\ \lim_{u(x) \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{u(x)})^{u(x)} &= e \end{aligned}$$

$$\text{نکته: } \lim_{x \rightarrow a} f(x)^{g(x)} = 1^\infty = e^{\lim_{x \rightarrow a} (f(x)-1)g(x)}$$

$$\text{توجه: مهمترین رابطه مد نپر: } \lim_{x \rightarrow a} (1+u(x))^{v(x)} = e^{\lim_{x \rightarrow a} u(x)v(x)}$$

$x \rightarrow a$
 $u(x) \rightarrow 0$
 $v(x) \rightarrow \infty$

مثال ۶۶- حدهای زیر را محاسبه کنید.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (1 - \frac{2}{n})^{2n} = 1^\infty = e^k = e^{-4} \quad k = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 - \frac{2}{n} - 1) 2n = -4$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (\frac{x+2}{x+1})^{2x} = 1^\infty = e^k = e^4 \quad k = \lim_{x \rightarrow \infty} (\frac{x+2}{x+1} - 1) 2x = \lim_{x \rightarrow \infty} (\frac{2}{x+1}) = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (1 + \frac{1}{\tan x})^{\tan x} = e^1$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{n})^n = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{n})^{\frac{1}{\frac{1}{n}}} = e^{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\frac{1}{n}}} = e^1 = e$$

 پیوستگی در یک نقطه: تابع $f(x)$ در $x = a$ با سه شرط زیر پیوسته است:

الف) $f(a)$ موجود باشد. ($a \in D_f$)

(ب) حد $f(x)$ در $x = a$ موجود باشد، یعنی حد چپ و راست برابر باشد. $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$

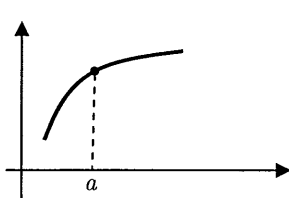
(ج) حد تابع با مقدار تابع برابر باشد. $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$

توجه: اگر $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a) \neq \lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$ ، در این صورت $f(x)$ در $x = a$ ، پیوستگی راست دارد.

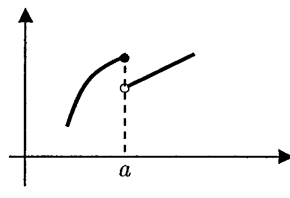
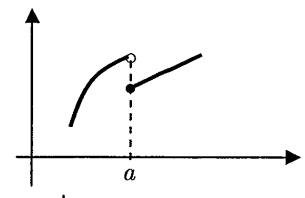
توجه: اگر $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) \neq f(a) = \lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$ ، در این صورت $f(x)$ در $x = a$ پیوستگی چپ دارد.

توجه: اگر $f(x)$ در $x = a$ ناپیوسته (پیوستگی راست یا چپ)، اما $|f(x)|$ در $x = a$ پیوسته باشد، در این صورت $\lim_{x \rightarrow a^+} f = -\lim_{x \rightarrow a^-} f$

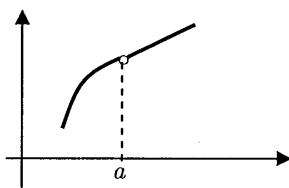
اشکال پیوستگی به صورت شهودی:



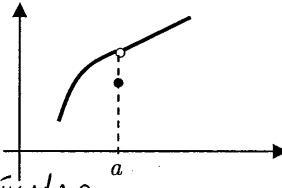
پیوستگی کامل

در **a** پیوستگی چپ

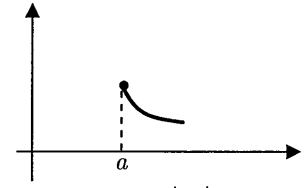
در a پیوستگی است
رکب تاسه



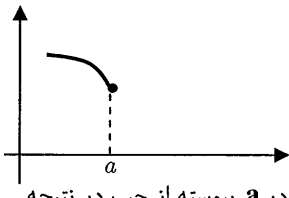
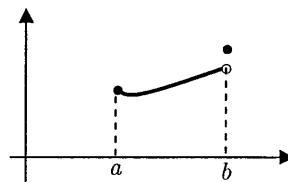
در دامنه پیوسته ^۴ دره من ندان بهر س کمر ۱۰



در a ناپیوسته از دو طرف a حد دارد و آن a است



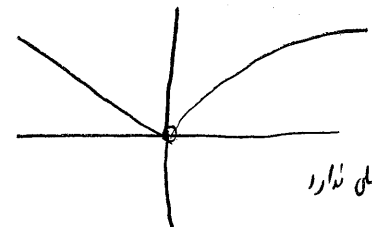
در **a** پیوسته از راست در نتیجه
پیوسته است.

در **a** پیوسته از چپ در نتیجه

در **a** پیوسته در **b** ناپیوسته است.

مثال ۱- نمودار تابع $f(x) = x[x]$ در بازه‌ی $[0, 2]$ و تابع $-1 < x < 1$ ، $g(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & x > 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$ را رسم کنید و پیوستگی آن‌ها پیوسته است.

را روی دامنهی خود بررسی کنید.



تقریر نامہ سنی دار

مثال ۲- پیوستگی توابع زیر را در نقاط داده شده بررسی کنید:

$$1) f(x) = \frac{\gamma + \gamma x}{x + \gamma} \quad x = -\gamma$$

$$f(x) = \lim_{x \rightarrow a} L_{x,a} \quad \text{if } x \neq a$$

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 4x & x \neq 2 \\ 2 & x = 2 \end{cases}$$

$f(2) = 2$
 $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} (x^2 - 4x) = 0$
 نامتناهی از طرف

$$f(x) = \begin{cases} e^x & x > 0 \\ \log_2(x+4) & -4 < x \leq 0 \end{cases}$$

$f(0) = \log_2 4 = 2$
 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} e^x = 1$
 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \log_2(x+4) = 2$

مثال ۳- اگر $f(x) = \begin{cases} ax+4 & x > 1 \\ x^2+x & x \leq 1 \end{cases}$ در $x=1$ متصل و $|f(x)|$ پیوسته باشد مقدار a را بیابید.
 باید حد چپ و راست برابر باشند.

تعریف: فرض کنید D دامنه تابع f زیرمجموعه‌ای از $\mathbb{R}$ باشد، $a \in D$ تابع $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ در نقطه a پیوسته است، هر گاه به ازای هر دنباله از نقاط D مانند $\{a_n\}$ که به a همگراست، دنباله $\{f(a_n)\}$ به $f(a)$ همگرا باشد.
 محتوی این تعریف این است که پیوستگی تابع در یک نقطه هم ارز این است که با دقیق‌تر کردن ورودی، می‌توان به خروجی‌های دلخواه دقیق دست یافت.
 به کمک تعریف پیوستگی تابع در یک نقطه براساس همگرایی دنباله‌ها می‌توان پیوستگی مجموع، حاصل ضرب و خارج قسمت دو تابع پیوسته را نتیجه گرفت.
قضیه: فرض کنید D اشتراک دامنه تابع‌های f و g باشد و f و g هر دو در نقطه a پیوسته باشند و c عددی ثابت باشد آنگاه تابع‌های زیر نیز در a پیوسته‌اند.

الف) $f+g$ ب) $f-g$ ت) $f \cdot g$ ث) $\frac{f}{g}$ به شرطی که $g(a) \neq 0$

برای نمونه قسمت (ث) را ثابت کنیم.
 به ازای هر دنباله دلخواه $\{x_n\}$ از نقاط D که همگرا به a است داریم:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = f(a) \quad \text{و} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} g(x_n) = g(a)$$

بنابراین

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{f(x_n)}{g(x_n)} = \frac{f(a)}{g(a)} \neq 0$$

پس طبق تعریف تابع $\frac{f}{g}$ در نقطه a پیوسته است.

نکته: عکس این قضیه همواره درست نیست.

پیوستگی توابع گویا: توابع گویا در دامنه خود پیوسته‌اند یعنی در $\mathbb{R}$ به غیر از ریشه‌های مخرج پیوسته است. به اختصار می‌گوییم تابع گویا، تابعی پیوسته است.

در این کتاب سعی شده است که به سادگی و به روشی ساده و قابل فهم، مفاهیم پیوستگی را توضیح دهد.

مثال ۴- بازه های پیوستگی توابع زیر را بدست آورید.

$$f(x) = \frac{1}{x^2 - 4x}$$

$$x^2 - 4x = 0 \Rightarrow x(x-4) = 0 \Rightarrow x = 0, 4$$

$$D = \mathbb{R} - \{0, 4\} = (-\infty, 0) \cup (0, 4) \cup (4, +\infty)$$

بازه های پیوستگی

$$g(x) = \frac{x}{x^2 + x}$$

$$x^2 + x = 0 \Rightarrow x(x+1) = 0 \Rightarrow x = 0, -1$$

$$D = \mathbb{R} - \{0, -1\} = (-\infty, -1) \cup (-1, 0) \cup (0, +\infty)$$

بازه های پیوستگی

مثال ۵- اگر تابع $y = \frac{1}{4x^2 - x - a}$ روی $\mathbb{R}$ پیوسته باشد، حدود a را بیابید.

$$D = \mathbb{R} \rightarrow \text{همیشه پیوسته}$$

$$a < -\frac{1}{4} \rightarrow 1 + 4a < 0 \rightarrow \Delta < 0$$

پیوستگی توابع گنگ: توابع گنگ نیز در دامنه ی خود پیوسته اند. به سادگی پیوستگی توابع گنگ.

مثال ۶- بازه ی پیوستگی توابع زیر را بدست آورید.

$$1) y = \sqrt{4x - x^2}$$

$$4x - x^2 \geq 0 \Rightarrow x(4-x) \geq 0 \Rightarrow x \in [0, 4]$$

بازه های پیوستگی

$$2) y = \sqrt{x - x^2}$$

$$x - x^2 \geq 0 \Rightarrow x(1-x) \geq 0 \Rightarrow x \in [0, 1]$$

بازه های پیوستگی

نکته: زمانی می توانیم در مورد پیوستگی تابع $f(x)$ در نقطه ی $x = a$ صحبت کنیم که $a \in D_f$ و f مداقل در یک همسایگی $x = a$ تعریف شده باشد.

مثال ۷- پیوستگی تابع $f(x) = \frac{x+1}{x-2}$ در $x = 2$ و $g(x) = \cot \pi x$ در $x = 0$ چگونه است؟

از دید گنگ $f(x)$ در نقطه ی ۲ و پیوستگی $g(x)$ در نقطه ی ۰ می توان صحبت کرد.

مثال ۸- بازه ی پیوستگی تابع $f(x) = \sqrt{x^2 - x}$ را بدست آورید.



پیوستگی توابع چند جمله‌ای و قدر مطلق آنها: توابع چند جمله‌ای و قدر مطلق آنها روی $\mathbb{R}$ پیوسته‌اند.

توجه: اگر f در $x = a$ پیوسته باشد در این صورت $\sqrt[n]{f}, |f|, \sin f, \cos f$ نیز در a پیوسته است.

مثال ۹- تابع $f(x) = |x^2 - 2x - 4|$ چند نقطه‌ی ناپیوستگی دارد؟ *نایم گریا و سیده است - حسن محمد سلح*

مثال ۱۰- تابع $f(x) = \sin \frac{1}{8-3x}$ چند نقطه‌ی ناپیوستگی دارد؟ *همچس - سیده کیمر*

پیوستگی توابع جزء صحیح: تابع $y = [p(x)]$ در نقطه $x = a$ با شرط $p(a) \notin \mathbb{Z}$ پیوسته است و با شرط $p(a) \in \mathbb{Z}$ ممکن است

پیوسته باشد و باید بررسی شود.

مثال ۱۱- پیوستگی توابع زیر را در نقاط داده شده بررسی کنید.

$$1) f(x) = [-x^2] \quad x=0$$

$$f(0) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} [-x^2] = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} [-x^2] = 0$$

$$2) f(x) = [4x] - [2x] \quad x=1$$

$$f(1) = 4 - 2 = 2$$

$$f(1^+) = [4] - [2] = 2$$

$$f(1^-) = [4] - [2] = 2$$

$$3) f(x) = [4x] + [2x] \quad x=1$$

$$12- \text{مثال} \quad \text{به ازای چه مقدار } a \text{ تابع } f(x) = \begin{cases} ax \left[\frac{1}{x} \right] & x > \frac{1}{2} \\ \sin \left(\frac{\pi x}{2} \right) & x \leq \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\frac{\sqrt{2}}{4} \quad \frac{\sqrt{2}}{4} \quad \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = f\left(\frac{1}{2}\right) = \sin \frac{\pi}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^+} ax \left[\frac{1}{x} \right] = a \left[\frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)^+} \right] = a \left[\frac{2}{1} \right] = 2a$$

$$2a = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow a = \frac{\sqrt{2}}{4}$$



بررسی نقاط ناپیوستگی تابع $[p(x)]$: برای یافتن تعداد نقاط ناپیوستگی $[p(x)]$ مراحل زیر را انجام می‌دهیم.
(p روی $\mathbb{R}$ پیوسته است.)

(۱) رسم $y = p(x)$

(۲) رسم خطوط $y = k$, $k \in \mathbb{Z}$ در محدوده‌ی بُرد.

(۳) تمام نقاطی که بین $y = p(x)$, $y = k$ مشترک‌اند (غیر از اکسترمم‌ها) نقطه‌ی ناپیوستگی برای $y = [p(x)]$ است.

(۴) اگر نقطه‌ی برخورد $\min$ نسبی باشد $[p(x)]$ در آن نقطه پیوسته است.

(۵) اگر نقطه‌ی برخورد $\max$ نسبی باشد $[p(x)]$ در آن نقطه ناپیوسته است.

نتیجه: اگر $a \in \mathbb{Z}$ و $p(x)$ پیوسته باشد (مانند چند جمله‌ای‌ها) آنگاه تابع $[p(x)]$ زمانی پیوسته است که نقطه $x = a$ نقطه‌ی مینیمم نسبی باشد.

مثال ۱۳- تابع $y = \left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor$ در چند نقطه از بازه‌ی $(-2, 2)$ ناپیوسته است؟

مثال ۱۴- تابع $y = [x^2 - 4x]$ در نقاط $x = 2$, $x = 4$ به ترتیب چگونه است؟

(۱) پیوسته - پیوسته (۲) پیوسته - ناپیوسته (۳) ناپیوسته - ناپیوسته (۴) ناپیوسته - پیوسته

مثال ۱۵- تابع $y = x[x] + 2$ در چند نقطه‌ی صحیح پیوسته است؟

مثال ۱۶- تابع $y = x[\sin x] + 2$ در فاصله $(0, \pi)$ در چند نقطه‌ی ناپیوسته است؟