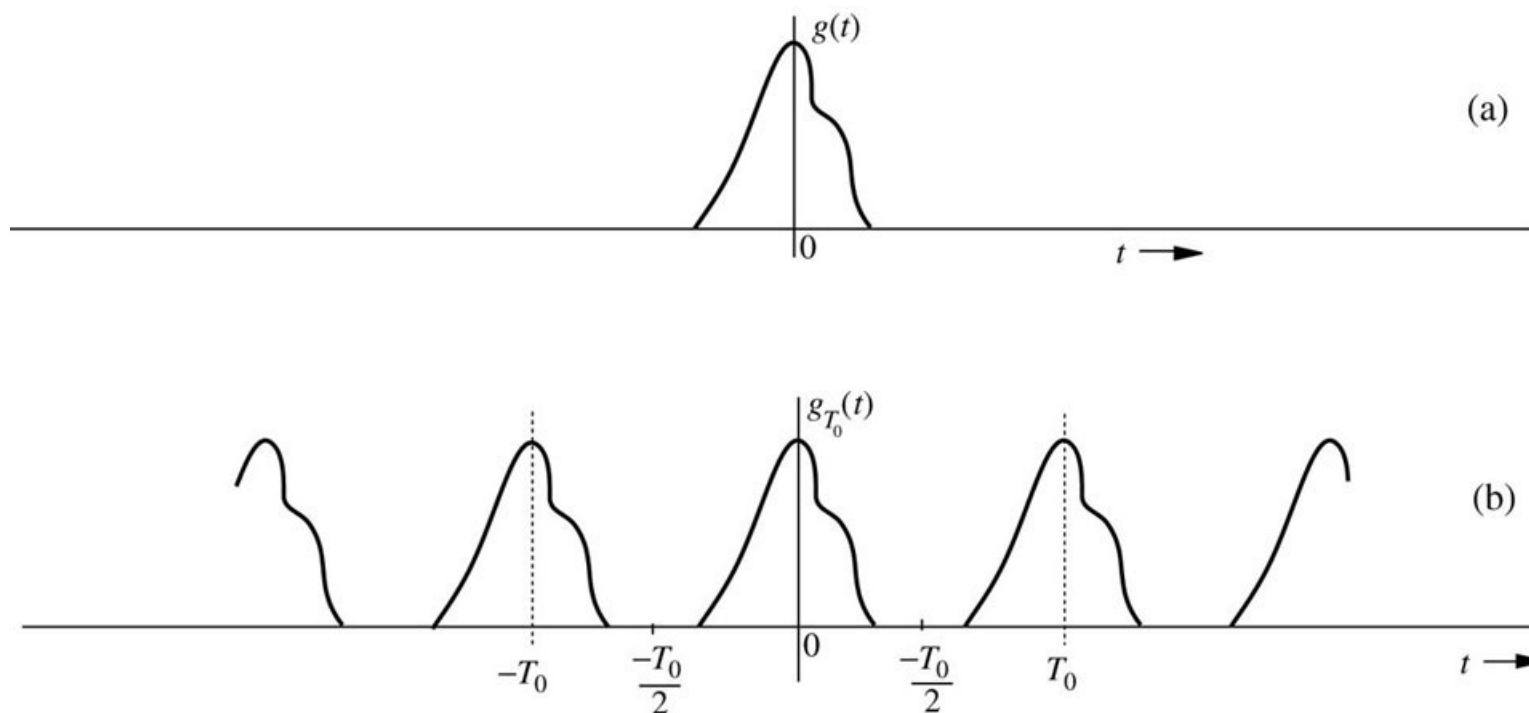
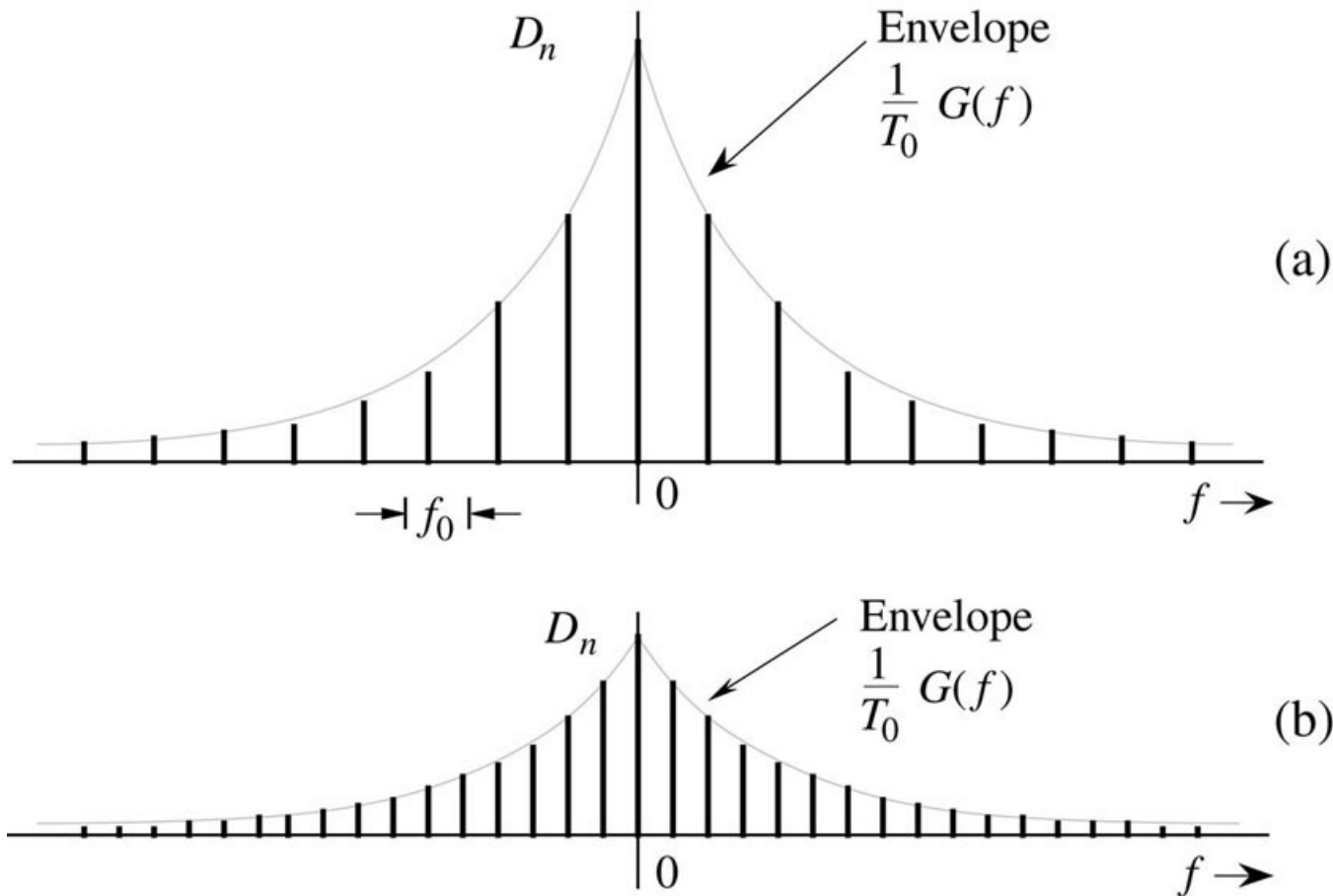


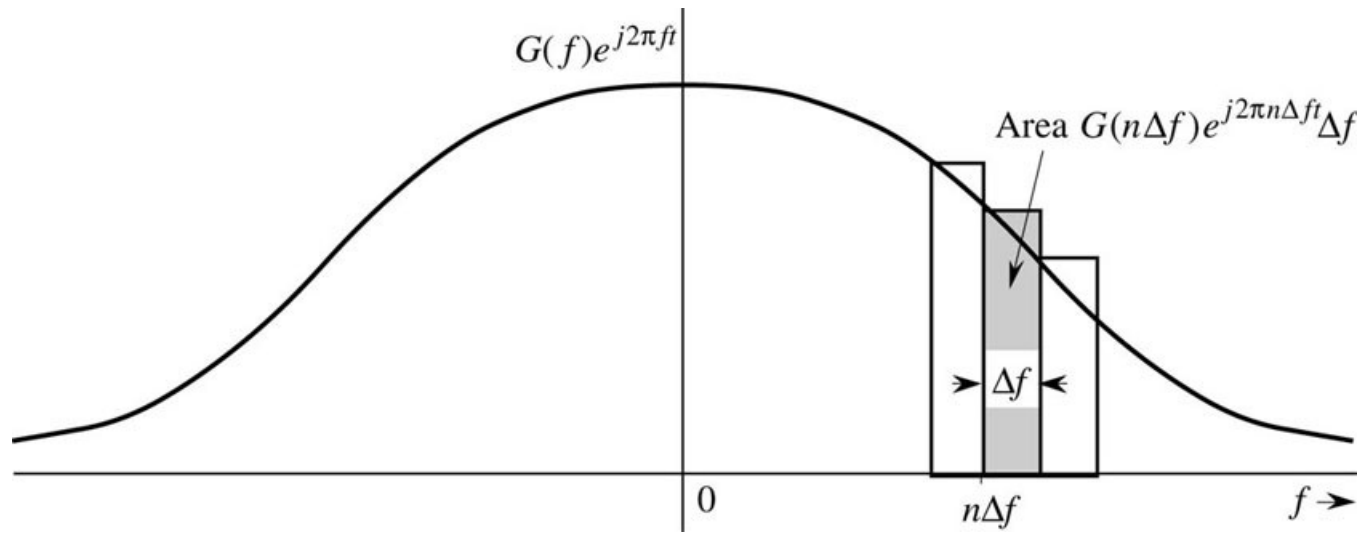
فصل سوم: تحلیل و انتقال سیگنال‌ها

نمایش سیگنال‌های غیر متناوب با استفاده از انتگرال فوریه:



$\frac{1}{T_0} G(f)$ پوش (envelope) ضرایب سری فوریه تابع متناوب $g_{T_0}(t)$ است.





نمایش انتگرال فوریه تابع غیر متناوب $g(t)$:

$$g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(f) e^{j2\pi ft} df$$

تبدیل مستقیم فوریه:

$$G(f) = \mathcal{F}[g(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(t) e^{-j2\pi ft} dt$$

تبدیل معکوس فوریه:

$$\begin{aligned} g(t) = \mathcal{F}^{-1}[G(f)] &= \int_{-\infty}^{\infty} G(f) e^{j2\pi ft} df \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G(f) e^{j\omega t} d\omega \end{aligned}$$

$$g(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} G(f)$$

تابع $G(f)$ در حالت کلی تابعی مختلط از متغیر f است:

$$G(f) = |G(f)|e^{j\theta_g(f)}$$

اندازه (amplitude) $G(f)$: $|G(f)|$

زاویه یا فاز (phase) $G(f)$: $\theta_g(f)$

یادآوری: تبدیل فوریه تابع $g(t)$ یعنی $G(f)$ توصیف و مشخصه حوزه فرکانس تابع $g(t)$ است.

یادآوری: خاصیت تقارن مزدوج تبدیل فوریه سیگنال‌های حقیقی:

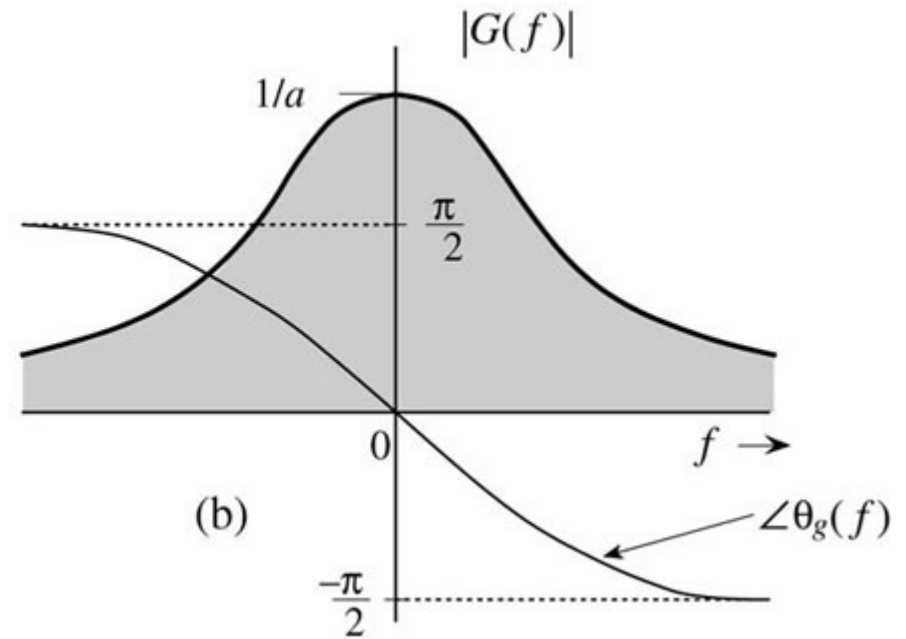
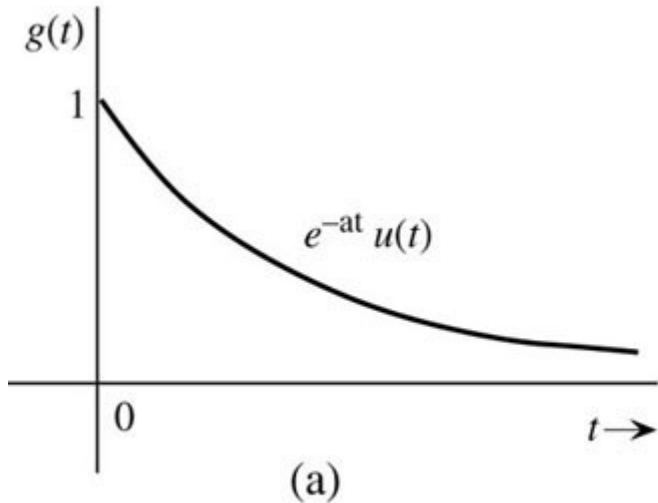
$$g(t) \text{ real} : G(-f) = G^*(f)$$

$$\begin{cases} |G(f)| = |G(-f)| \\ \theta_g(-f) = -\theta_g(f) \end{cases}$$

اندازه طیف، تابعی زوج است.
زاویه (فاز) طیف، تابعی فرد است.

مثال: تبدیل فوریه تابع $e^{-at} u(t)$ را بیابید.

$$|G(f)| = \frac{1}{\sqrt{a^2 + (2\pi f)^2}}, \quad \theta_g(f) = -\tan^{-1} \left(\frac{2\pi f}{a} \right)$$



شرایط وجود تبدیل فوریه:

$$(۱) \text{ اگر تابع } g(t) \text{ مطلقاً انتگرال پذیر باشد: } \int_{-\infty}^{+\infty} |g(t)| dt < \infty$$

(۲) و اگر تابع $g(t)$ فقط تعداد محدودی ماکزیمم و مینیمم داشته باشد و همچنین تعداد محدودی نقطه ناپیوسته (که در آن‌ها هم حدهای چپ و راست متناهی باشند)

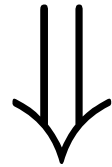
در اینصورت انتگرال فوریه تابع $g(t)$ در نقاط پیوستگی به مقدار تابع و در نقاط ناپیوستگی به متوسط حدهای چپ و راست در آن نقطه، همگرا می‌شود.

اگر این شرایط برقرار باشد، انتگرال فوریه تابع حتماً همگراست، ولی توابعی هم هستند که این شرایط در موردشان نقض می‌شود، ولی تبدیل فوریه دارند.

$$\text{مثل تابع } \frac{\sin(at)}{t}$$

خاصیت خطی تبدیل فوریه (قضیه سوپر پوزیسیون)

$$\begin{cases} g_1(t) \iff G_1(f) \\ g_2(t) \iff G_2(f) \end{cases}$$



$$a_1 g_1(t) + a_2 g_2(t) \iff a_1 G_1(f) + a_2 G_2(f)$$

که ضرایب a_1 و a_2 ثابتهای حقیقی یا مختلط دلخواهی هستند.

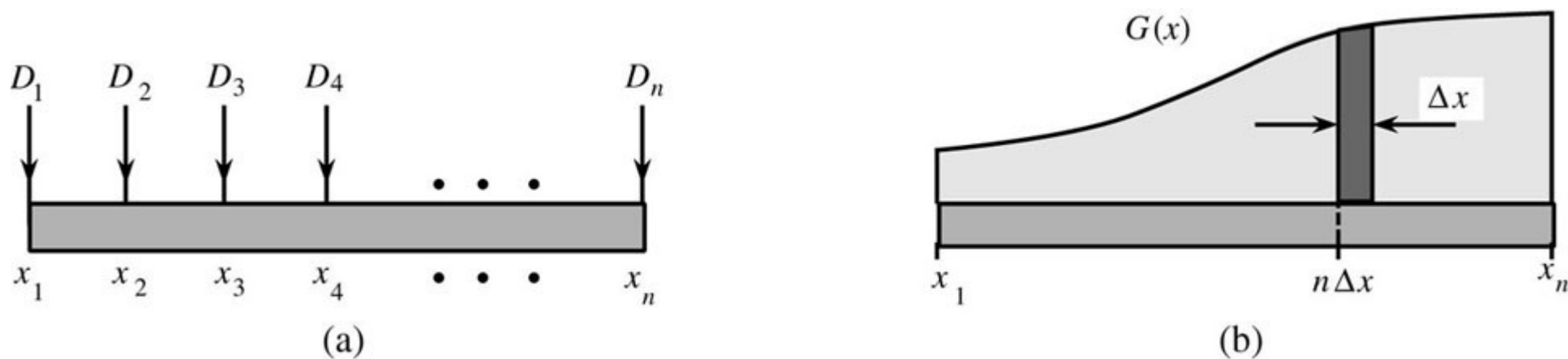
تعمیم:

$$\sum_k a_k g_k(t) \iff \sum_k a_k G_k(f)$$

تبدیل فوریه یک سیگنال در واقع چگالی طیف بر واحد فرکانس است.

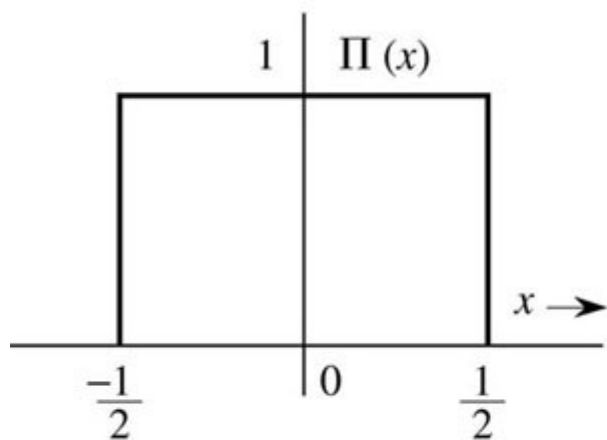
$$g(t) = \lim_{\Delta f \rightarrow 0} \sum_{n=-\infty}^{\infty} G(n\Delta f) e^{(j2\pi f)t} \Delta f = \int_{-\infty}^{\infty} G(f) e^{j2\pi f t} df$$

سهم اجزای تشکیل دهنده $g(t)$ در یک باند فرکانسی به اندازه df (با واحد هرتز) به اندازه $G(f)df$ است. پس $G(f)$ در واقع چگالی طیف سیگنال در واحد پهنای باند (فرکانس با واحد هرتز) است که به طور معمول چگالی را ذکر نمی‌کنند و به گفتن طیف یا طیف فوریه سیگنال اکتفا می‌کنند.

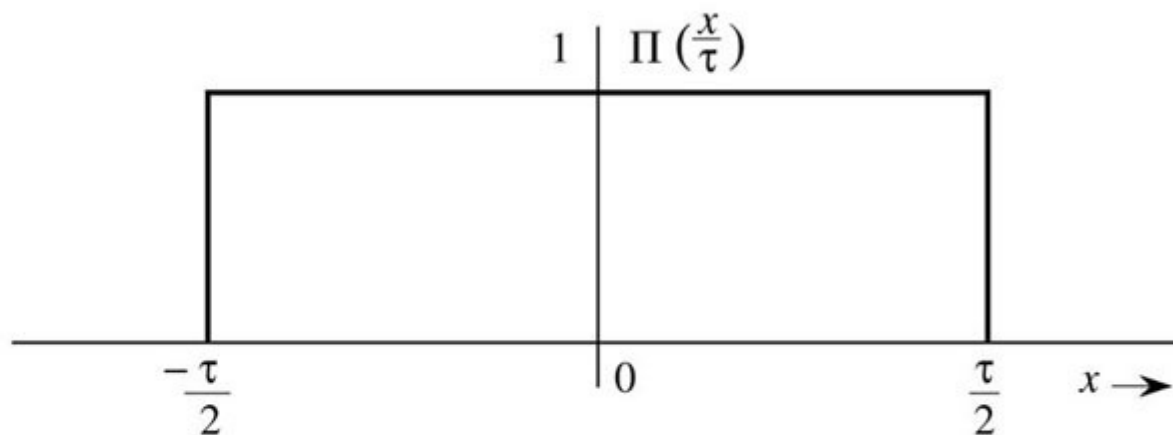


تبدیل فوریه توابع مهم و مفید

تابع مستطیلی واحد (Unit Rectangular Function): تابع پی (پای)



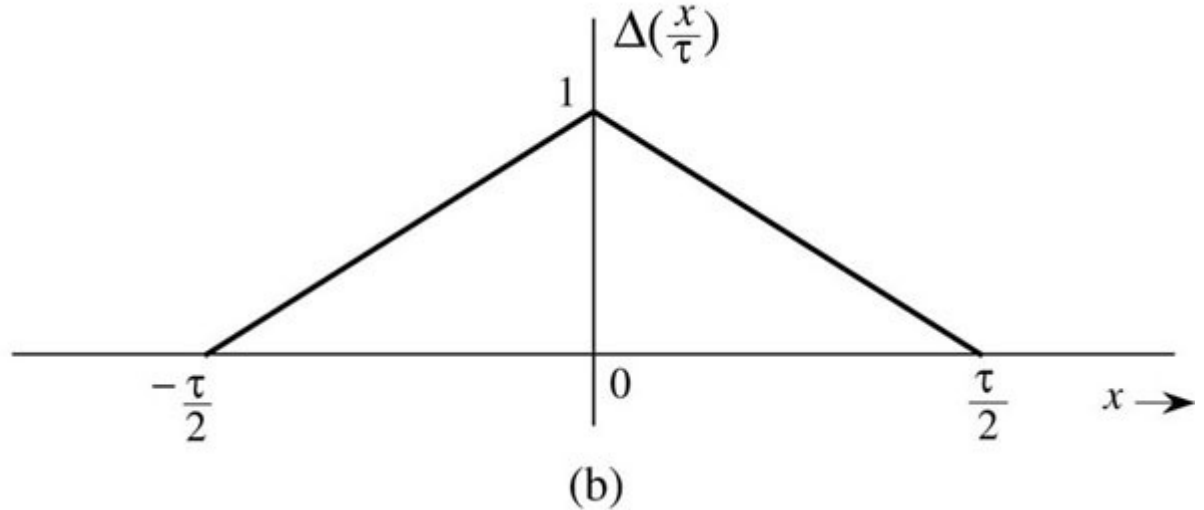
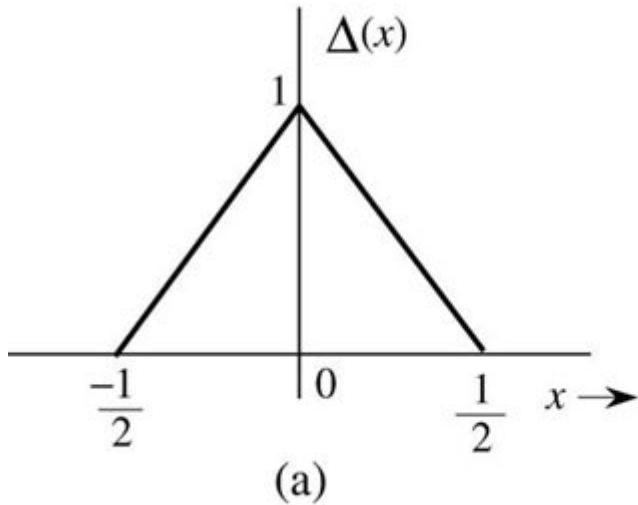
(a)



(b)

$$\Pi(x) = \begin{cases} 1 & |x| < 1/2 \\ 0.5 & |x| = 1/2 \\ 0 & |x| > 1/2 \end{cases}$$

تابع مثلثی واحد (Unit Triangular Function):



$$\Delta(x) = \begin{cases} 1 - 2|x| & |x| < 1/2 \\ 0 & |x| > 1/2 \end{cases}$$

تابع سینک (Sinc):

$$\text{sinc}(x) = \frac{\sin x}{x}$$

خواص تابع سینک:

(۱) تابع زوج است.

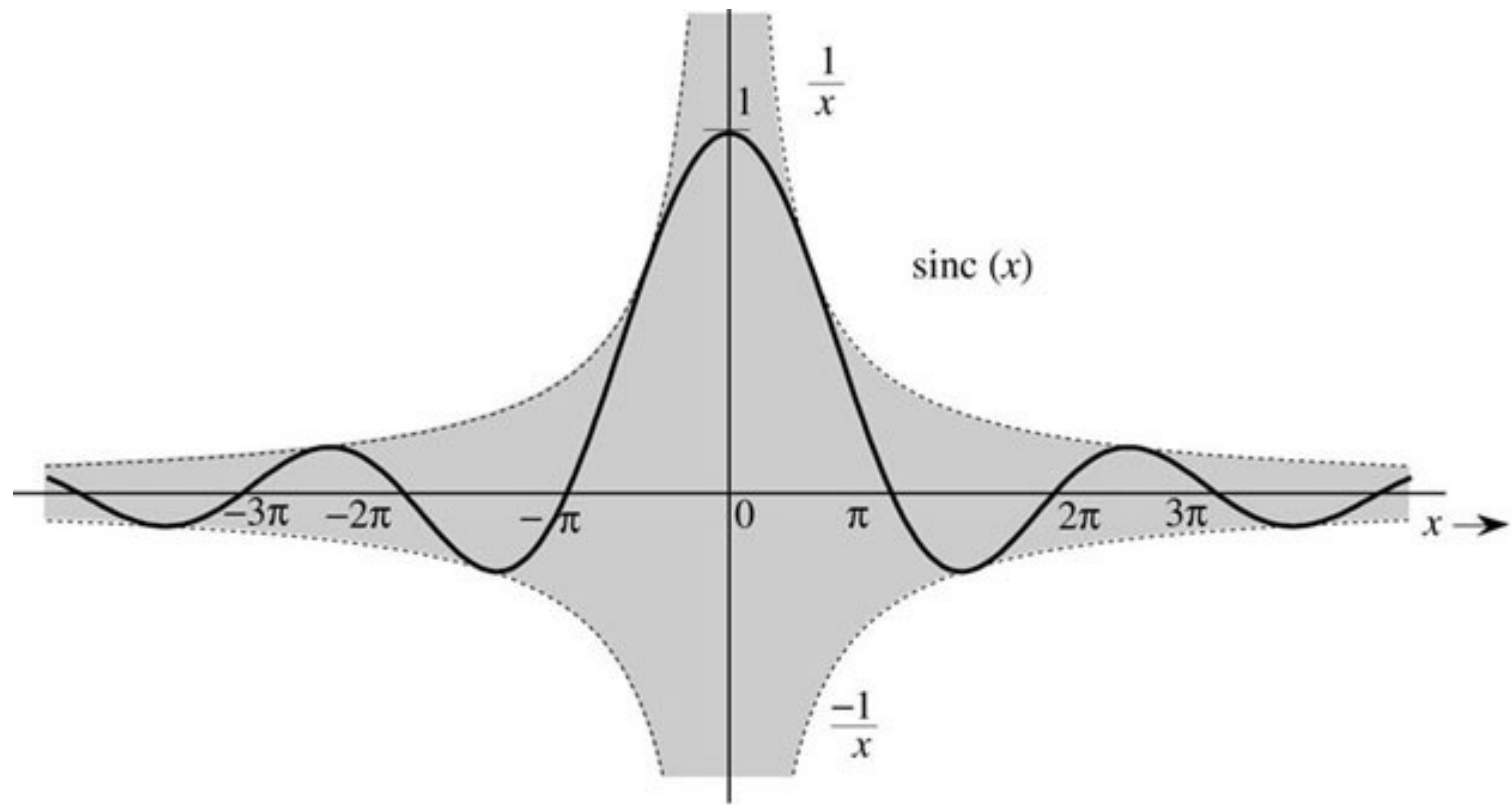
(۲) در $x = 0$ مقدار یک دارد: $\text{sinc}(0) = 1$

(۳) به جز $x = 0$ هر جای دیگری که $\sin x$ صفر می‌شود، مقدارش صفر است. بنابراین در تمام ضرایب صحیح مثبت و منفی و غیر صفر π صفر می‌شود.

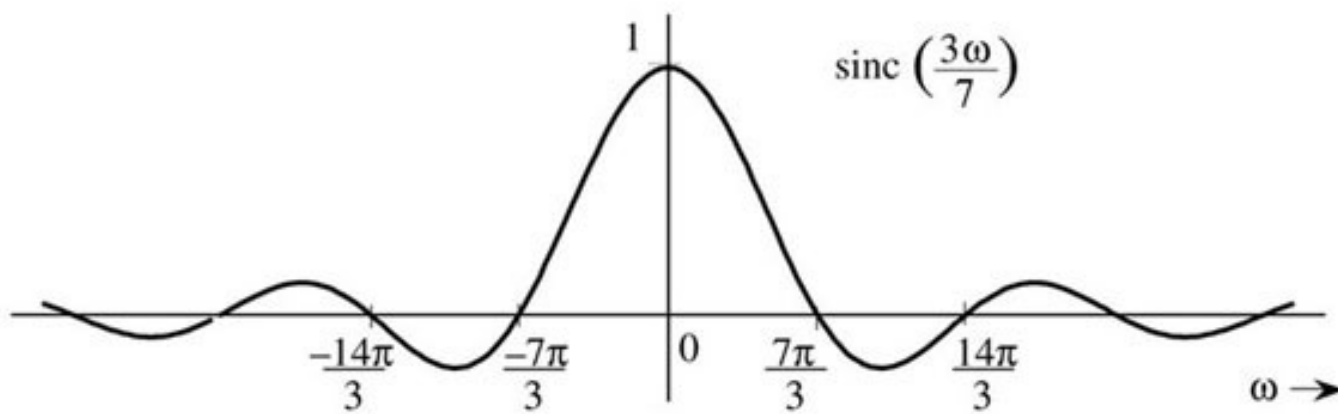
یعنی در $x = \pm\pi, \pm2\pi, \pm3\pi, \dots$

(۴) رفتار نوسانی تابع $\sin x$ با دوره تناوب 2π را دارد که به دلیل ضرب شدن

در تابع یکنوا نزولی $1/x$ ، اندازه این نوسانات مطابق تابع $1/x$ کاهش می‌یابد.



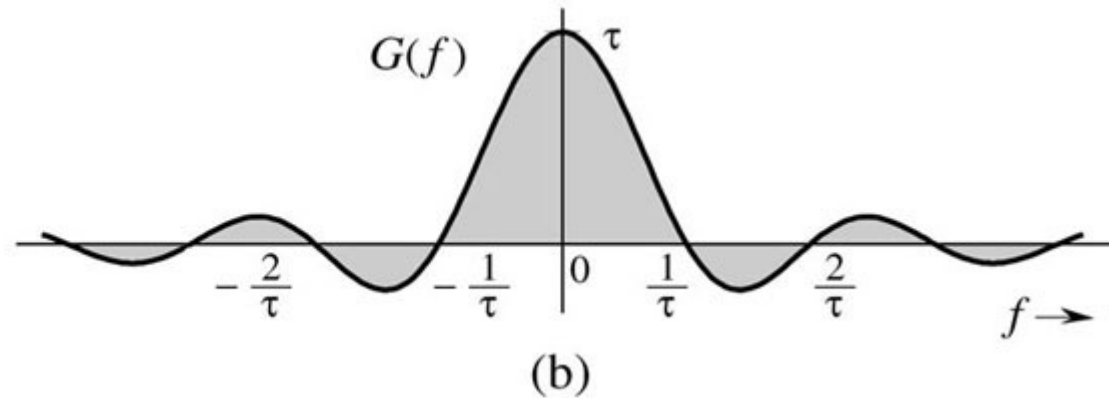
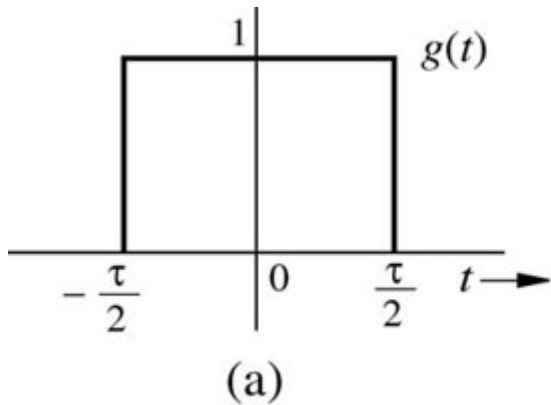
(a)



(b)

مثال: تبدیل فوریه $g(t)$ ، تابع مستطیلی واحد زیر را به دست آورید:

$$g(t) = \Pi\left(\frac{t}{\tau}\right)$$



$$g(t) = \Pi\left(\frac{t}{\tau}\right) \iff G(f) = \tau \operatorname{sinc}(\pi\tau f)$$

تعریف پهنای باند Bandwidth

پهنای باند یک سیگنال عبارت است از اختلاف بین بیشترین (بالا ترین) فرکانس و کمترین فرکانس موجود در طیف سیگنال.

از طرفی بیشتر سیگنال‌ها همه فرکانس‌ها از صفر تا بینهایت را در خود دارند. بنابراین پهنای باند همه این سیگنال‌ها طبق تعریف بالا بینهایت می‌شود. پس تعریف را تغییر می‌دهیم تا هدف از تعریف برآورده شود:

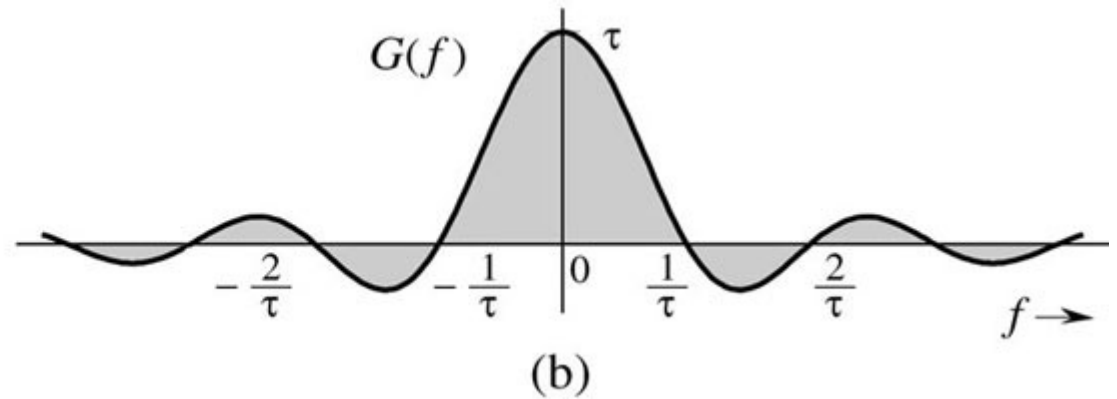
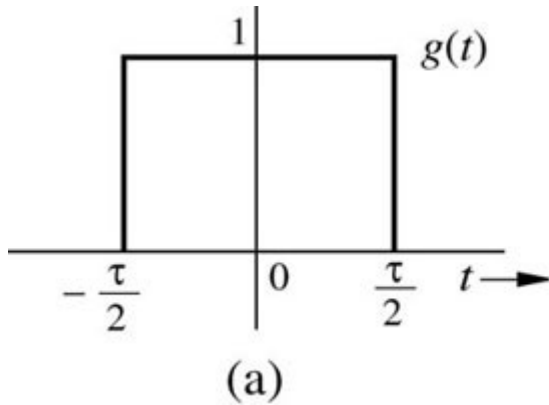
پهنای باند یک سیگنال عبارت است از اختلاف بین بیشترین (بالا ترین) فرکانس با اهمیت و قابل ملاحظه (*significant*) و کمترین فرکانس با اهمیت و قابل ملاحظه موجود در طیف سیگنال.

نکته ۱: بسته به کاربرد و دقت مورد نیاز می‌توان «با اهمیت» را در هر مورد مشخص کرد.

مثلاً در یک مورد در طیف سیگنال فرکانسی را مهم فرض می‌کنند که اندازه در طیف از 2% بیشترین مقدار آن کمتر نباشد.

یا مثلاً در یک مورد دیگر در طیف سیگنالی را مهم فرض می‌کنند که زاویه در طیف سیگنال، حداکثر 5% بیشترین مقدار تأخیر را ایجاد کند.

نکته ۲: در محاسبه پهنای باند فقط فرکانس فیزیکی (یعنی نیمه مثبت محور f در نظر گرفته می‌شود).

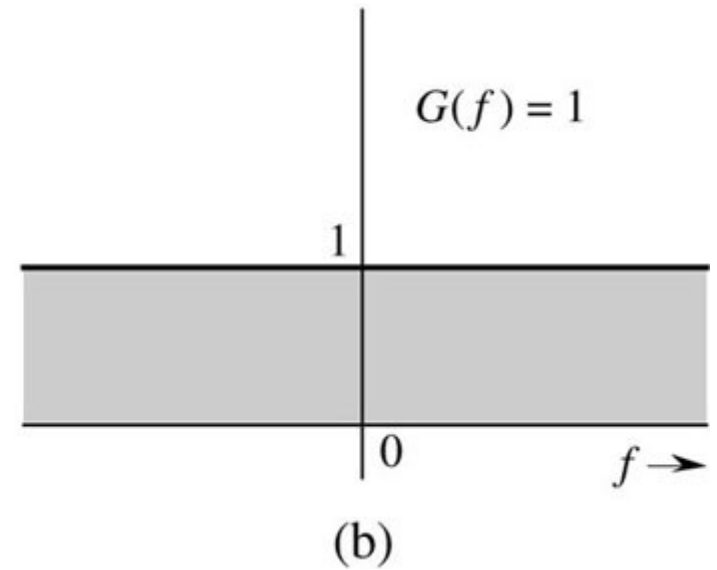
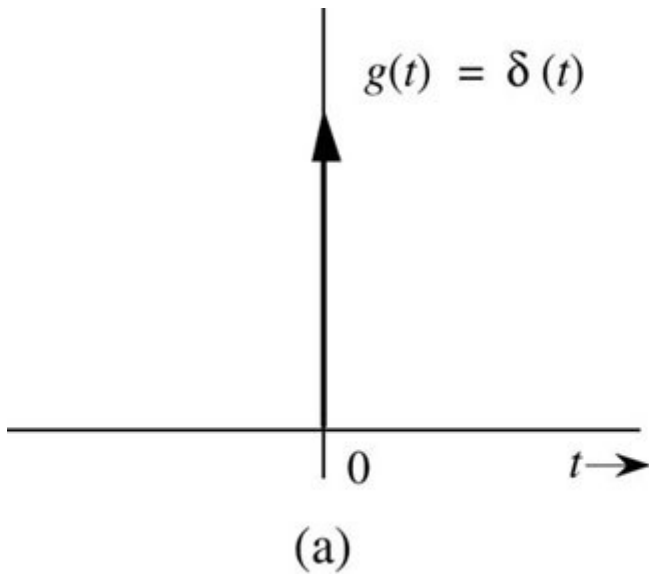


با یک تقریب نسبی قابل قبول برای بیشتر موارد عملی، برای تابع $\Pi(t/\tau)$ ، بیشترین سهم طیف را در لب (lobe) اول طیف قرار دارد، پس پهنای باند را با این تقریب $B = 1/\tau$ Hz در نظر می‌گیریم.

مسأله: یکبار با تقریب 5% و یکبار 1% بیشترین اندازه طیف، پهنای باند سیگنال $\Pi(t/\tau)$ را به دست آورید.

مثال: تبدیل فوریه تابع ضربیه واحد:

$$g(t) = \delta(t) \iff G(f) = 1$$

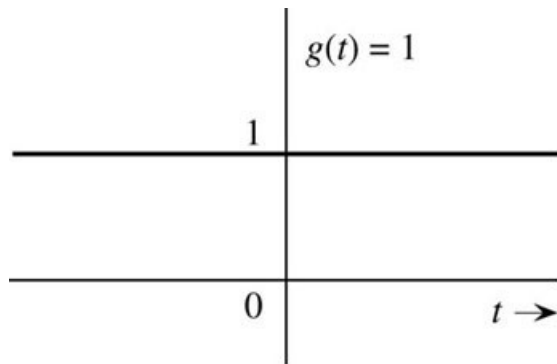


مثال: تبدیل معکوس تابع $G(f) = \delta(f)$ را پیدا کنید:

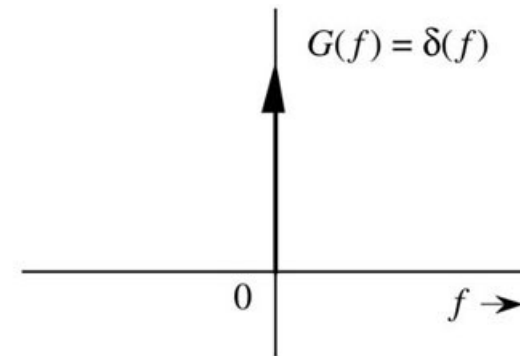
$$g(t) = 1 \iff G(f) = \delta(f)$$

یا چون $\delta(2\pi f) = \frac{1}{2\pi} \delta(f)$ بنابراین:

$$g(t) = 1/2\pi \iff G(f) = \delta(2\pi f)$$



(a)



(b)

مثال: تبدیل فوریه معکوس $G(f) = \delta(f - f_0)$:

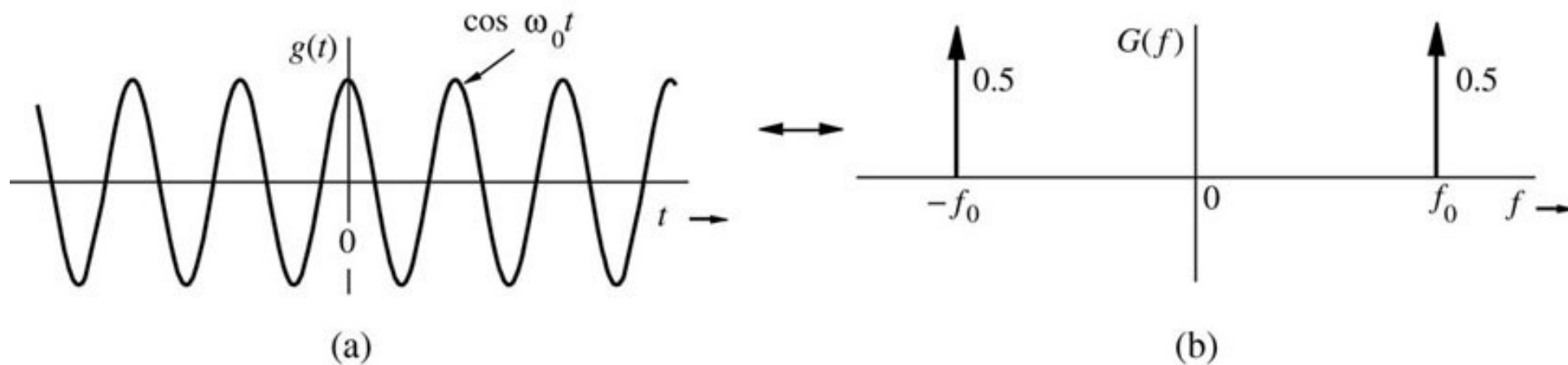
$$g(t) = e^{j2\pi f_0 t} \iff G(f) = \delta(f - f_0)$$

و بطور مشابه:

$$g(t) = e^{-j2\pi f_0 t} \iff G(f) = \delta(f + f_0)$$

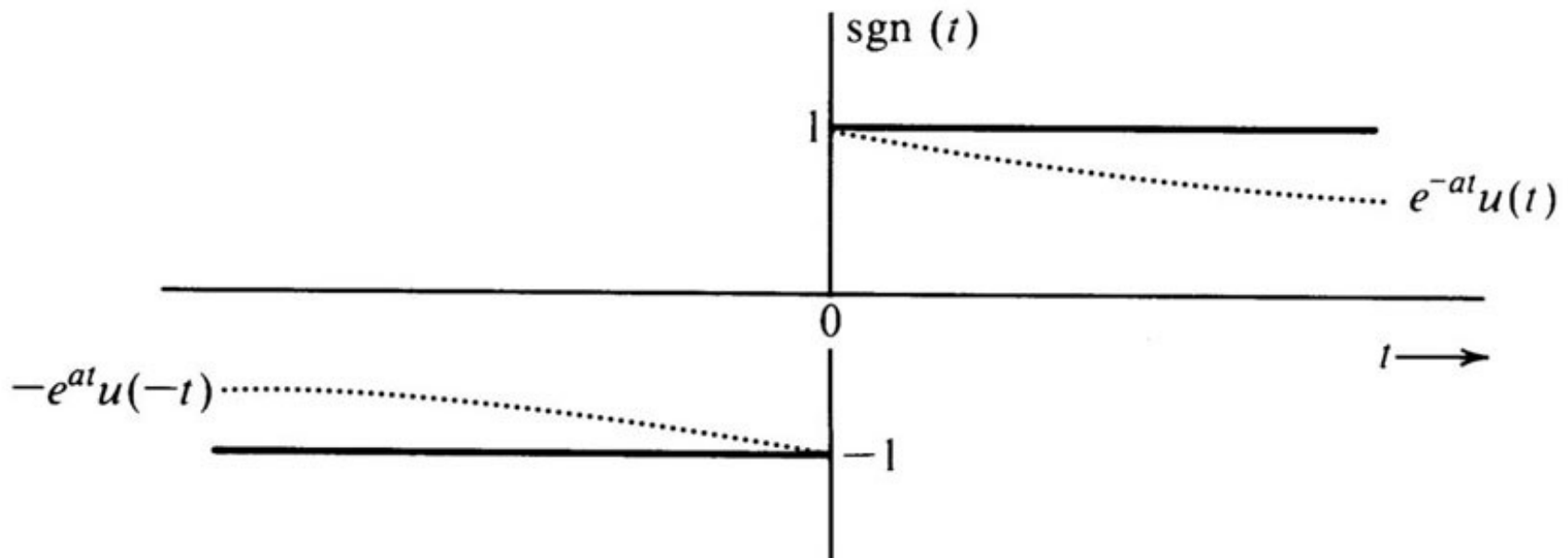
مثال: تابع سینوسی با فرکانس f_0 ، $\cos 2\pi f_0 t$:

$$\cos 2\pi f_0 t \iff \left(\frac{1}{2}\right) [\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0)]$$



مثال: تبدیل فوریه تابع $\text{sgn}(t)$ تابع علامت (sign):

$$\text{sgn}(t) = \begin{cases} 1 & t > 0 \\ 0 & t = 0 \\ -1 & t < 0 \end{cases}$$



$$\text{sgn}(t) \iff \frac{1}{j\pi f}$$

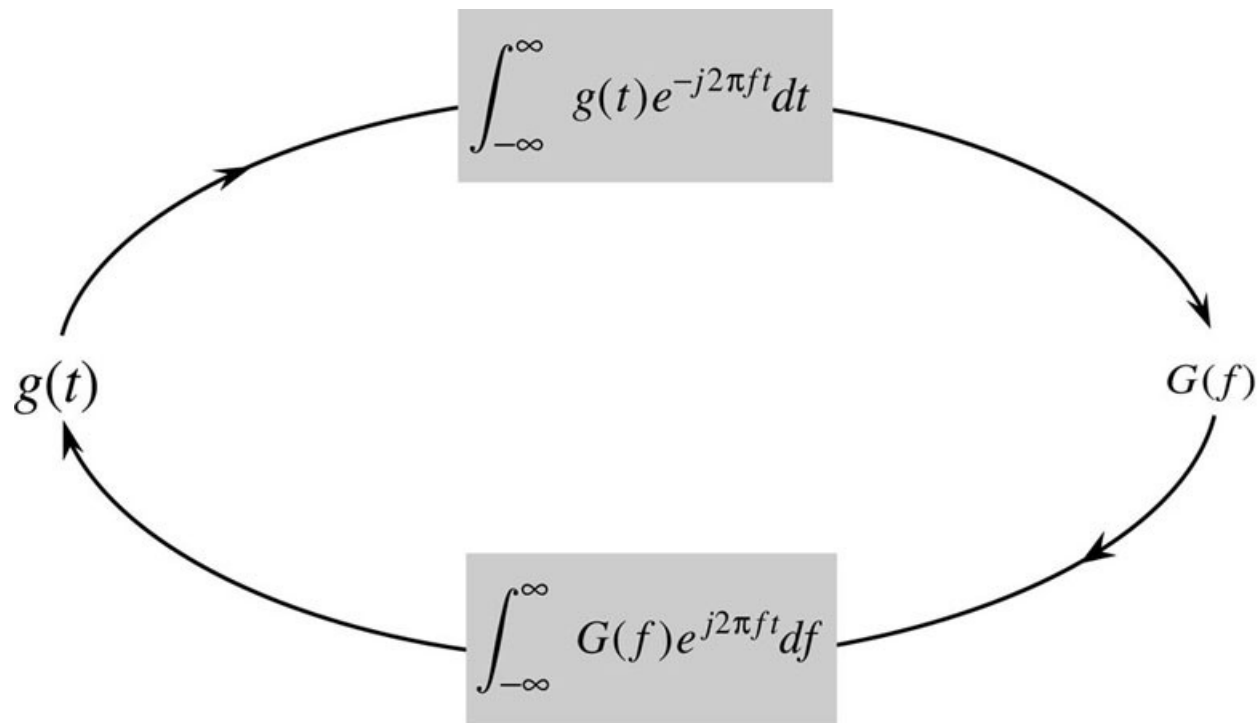
نتیجه: تبدیل فوریه تابع $u(t)$:

$$u(t) = (1/2)(\text{sgn}(t) + 1)$$

$$u(t) \iff \frac{1}{2j\pi f} + \frac{1}{2}\delta(f)$$

بعضی خواص تبدیل فوریه

(۱) رابطه حوزه زمان - فرکانس



(۲) خاصیت دوگانگی (Duality):

$$g(t) \iff G(f)$$



$$G(t) \iff g(-f)$$

و با استفاده از خاصیت قرینه کردن زمان یا فرکانس که کمی بعد اثبات خواهد شد نتیجه می شود که:



$$G(-t) \iff g(f)$$

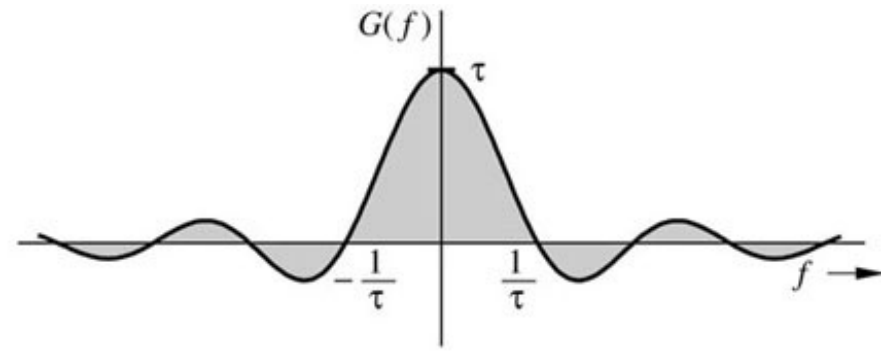
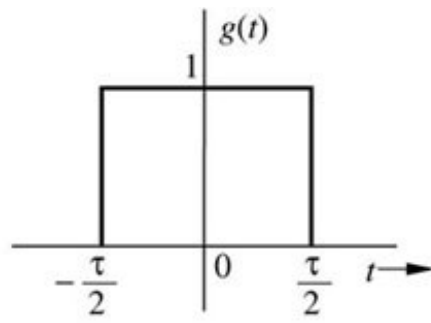
$$\Pi\left(\frac{t}{\tau}\right) \iff \tau \operatorname{sinc}(\pi\tau f)$$



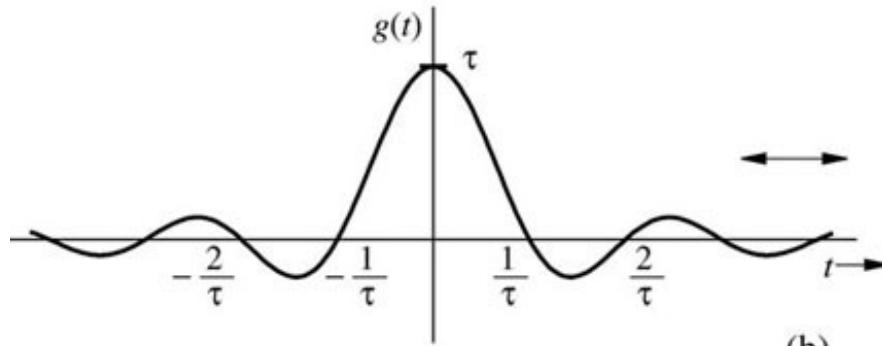
$$\alpha \operatorname{sinc}(\pi\alpha t) \iff \Pi\left(\frac{-f}{\alpha}\right) = \Pi\left(\frac{f}{\alpha}\right)$$



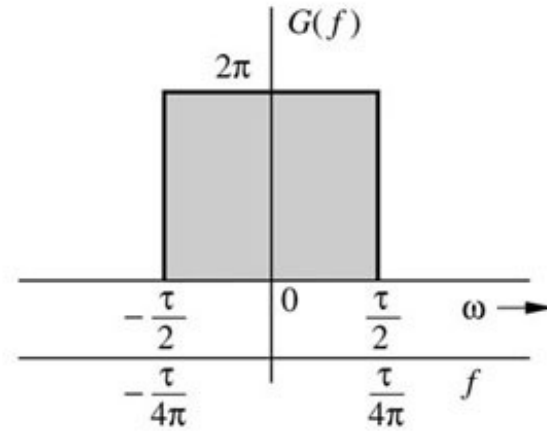
$$2B \operatorname{sinc}(2\pi Bt) \iff \Pi\left(\frac{f}{2B}\right)$$



(a)



(b)



شکل را اصلاح کنید (!) و شکل جدید را بکشید.

خاصیت تغییر مقیاس زمان:

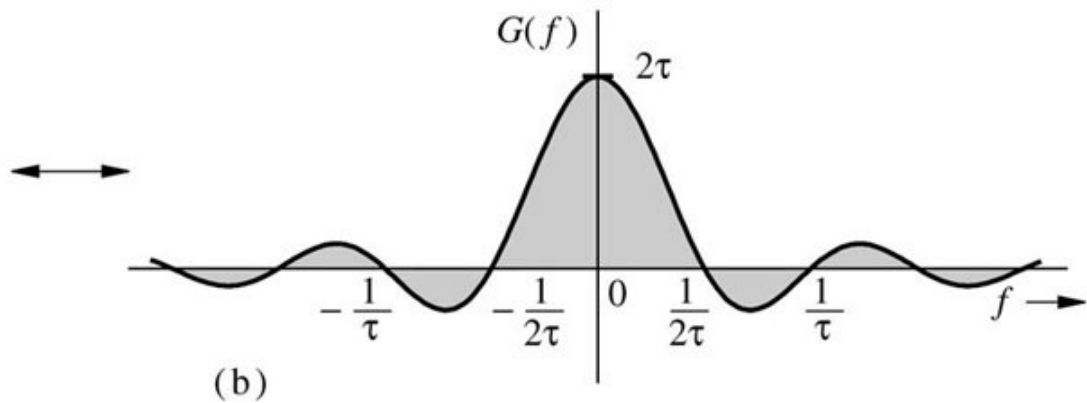
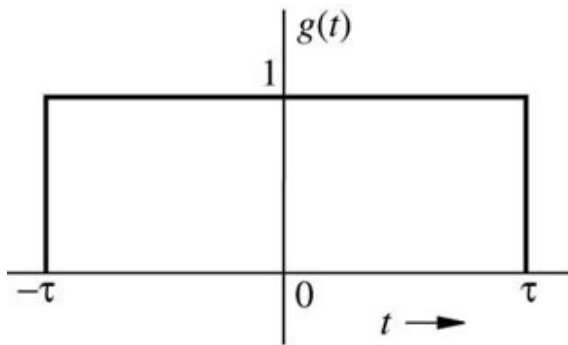
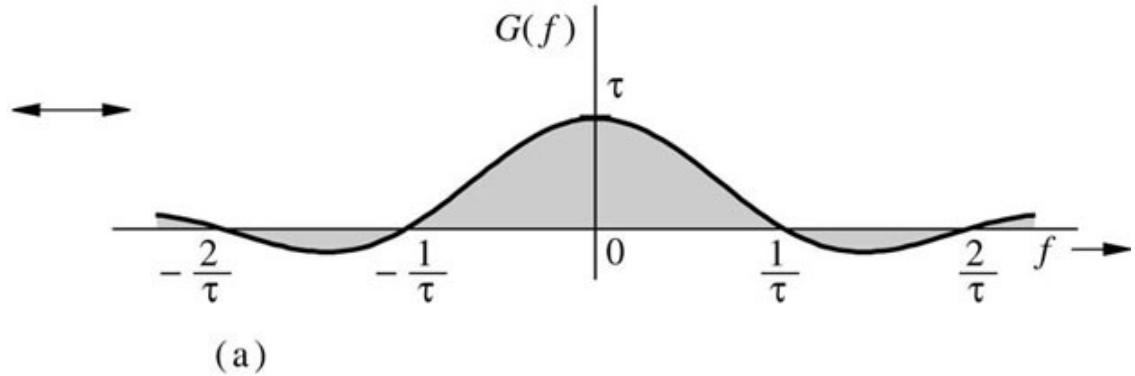
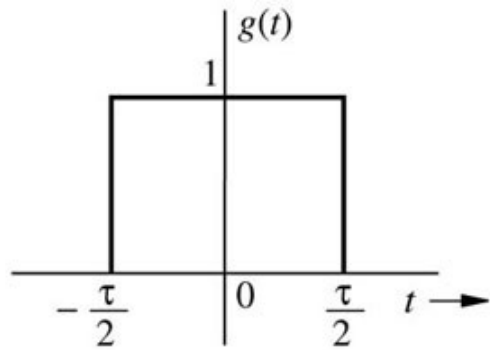
$$g(t) \iff G(f)$$

\Downarrow

$$g(at) \iff \frac{1}{|a|} G\left(\frac{f}{a}\right)$$

نتیجه: اگر $a = -1$:

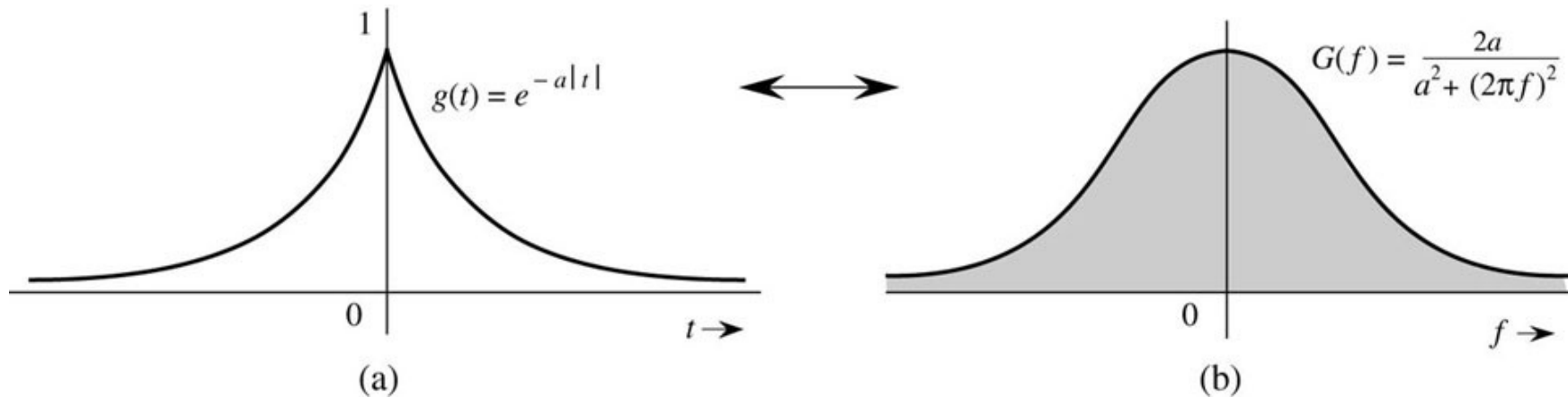
$$g(-t) \iff G(-f)$$



هرچه سیگنال در زمان پهن تر باشد در حوزه فرکانس باریک تر است و برعکس.
 پهنای باند (bandwidth) سیگنال (با واحد هرتز) با عرض یا مدت زمان
 (duration) (با واحد ثانیه) نسبت عکس دارد.

$$e^{-at}u(t) \iff \frac{1}{a + j2\pi f} \implies e^{at}u(-t) \iff \frac{1}{a - j2\pi f}$$

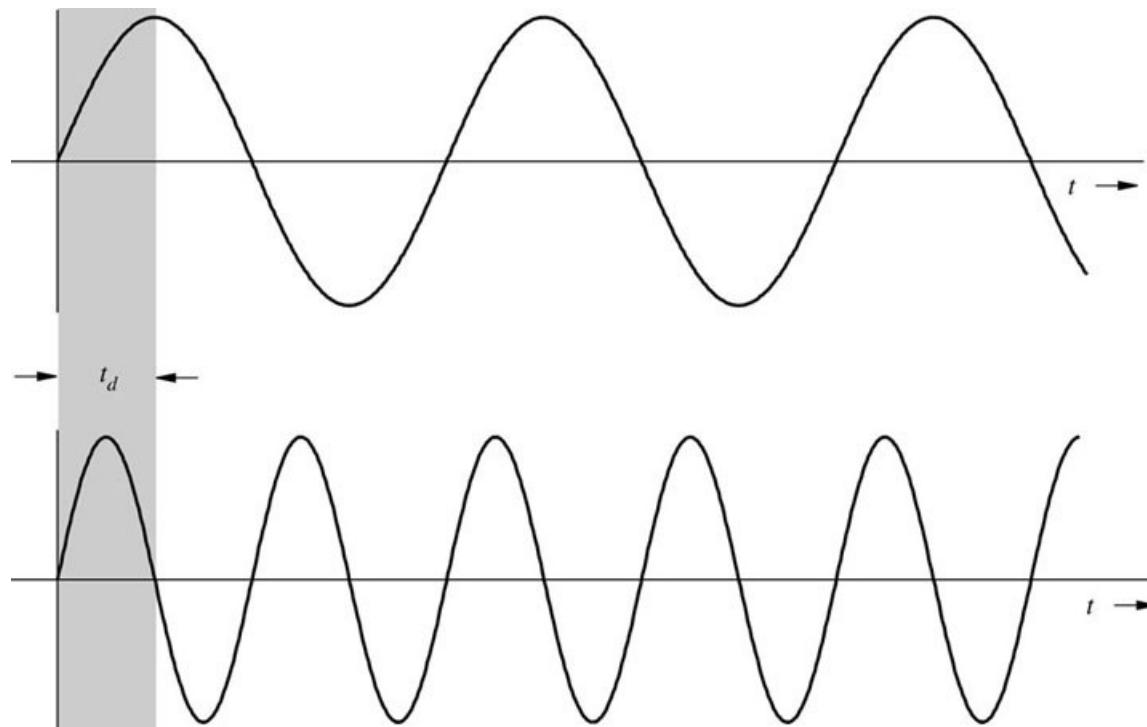
$$e^{-a|t|} \iff \frac{2a}{a^2 + (2\pi f)^2}$$



خاصیت انتقال زمانی:

$$\begin{aligned} g(t) &\iff G(f) \\ &\Downarrow \\ g(t - t_0) &\iff e^{-j2\pi f t_0} G(f) \end{aligned}$$

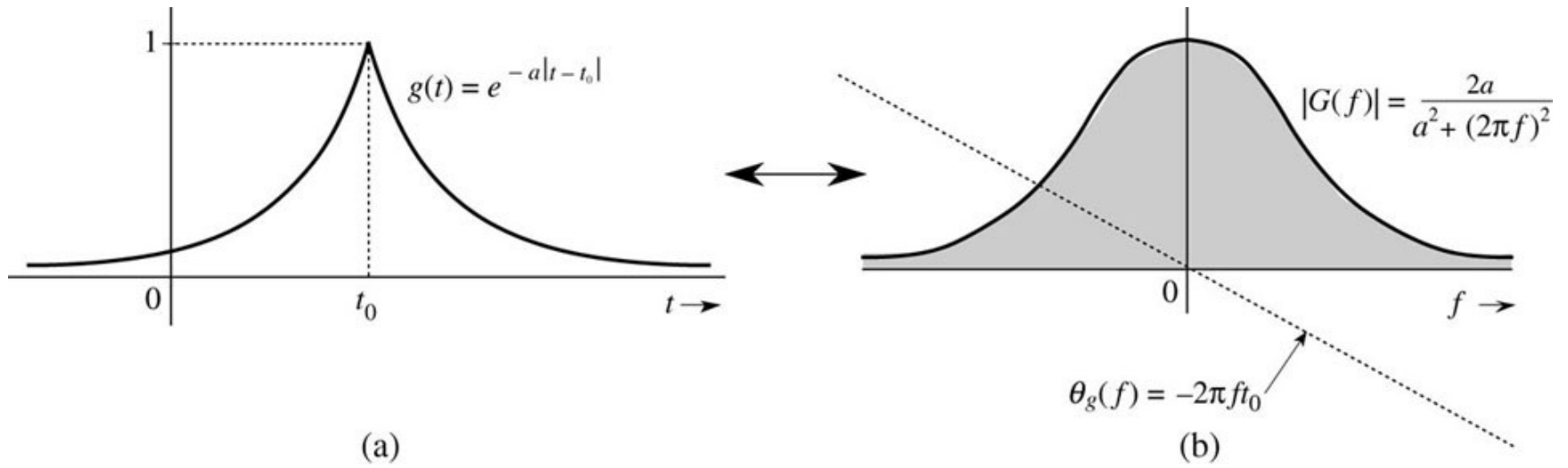
تأخیر در سیگنال به اندازه t_0 ، اندازه طیف سیگنال را تغییر نمی‌دهد و فاز آن را به اندازه $-j2\pi f t_0$ تغییر می‌دهد. این تغییر فاز تابعی خطی نسبت به f است. یعنی برای یک تأخیر مشخص در سیگنال، فرکانسهای بالاتر موجود در طیف در معرض تغییر فاز بیشتری قرار می‌گیرند تا فرکانسهای کوچکتر.



تأخیر ثابت t_d برای سینوسی بالا معادل تغییر فاز $\pi/2$ و برای سینوسی پایین که فرکانسش دو برابر است معادل تغییر فاز π است.

مثال: تبدیل فوریه $e^{-a|t-t_0|}$ را بیابید.

$$e^{-a|t-t_0|} \iff \frac{2a}{a^2 + (2\pi f)^2} e^{-j2\pi f t_0}$$



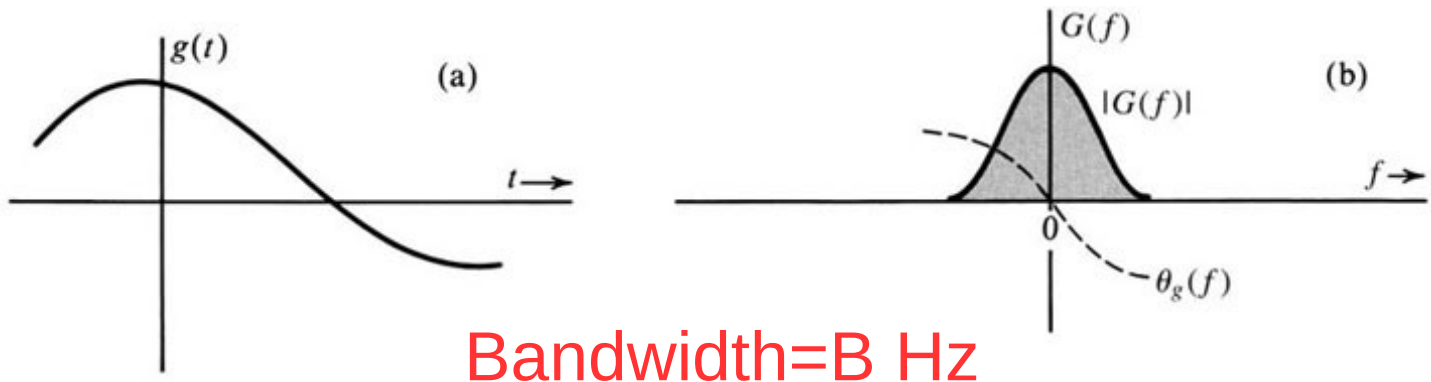
خاصیت انتقال فرکانسی:

$$\begin{aligned} g(t) &\iff G(f) \\ &\Downarrow \\ e^{j2\pi f_0 t} g(t) &\iff G(f - f_0) \end{aligned}$$

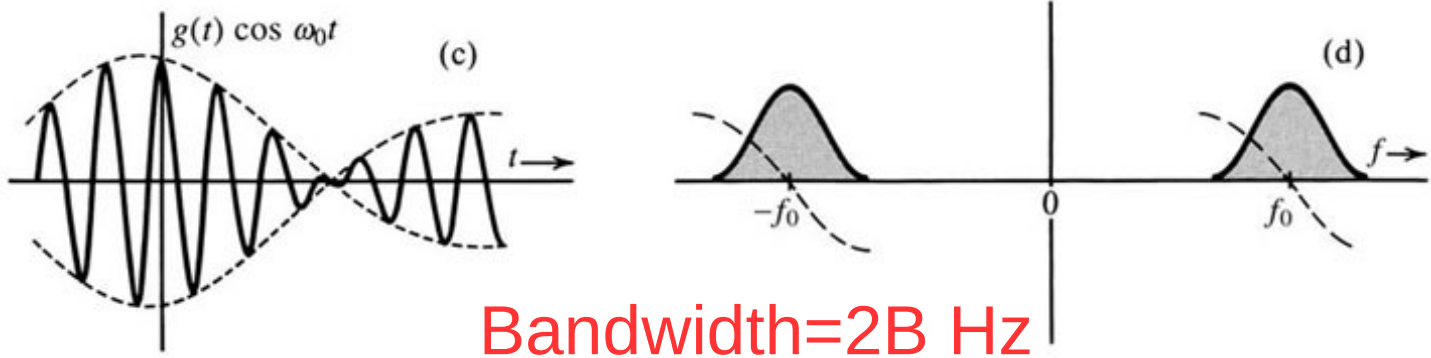
تابع $e^{j2\pi f_0 t}$ یک تابع حقیقی نیست و مقادیر آن مستقیماً قابل تولید نیست. بنابراین عمل انتقال فرکانسی در عمل با ضرب کردن تابع در توابع سینوسی انجام می‌شود.

$$g(t) \cos 2\pi f_0 t \iff \left(\frac{1}{2}\right) [G(f - f_0) + G(f + f_0)]$$

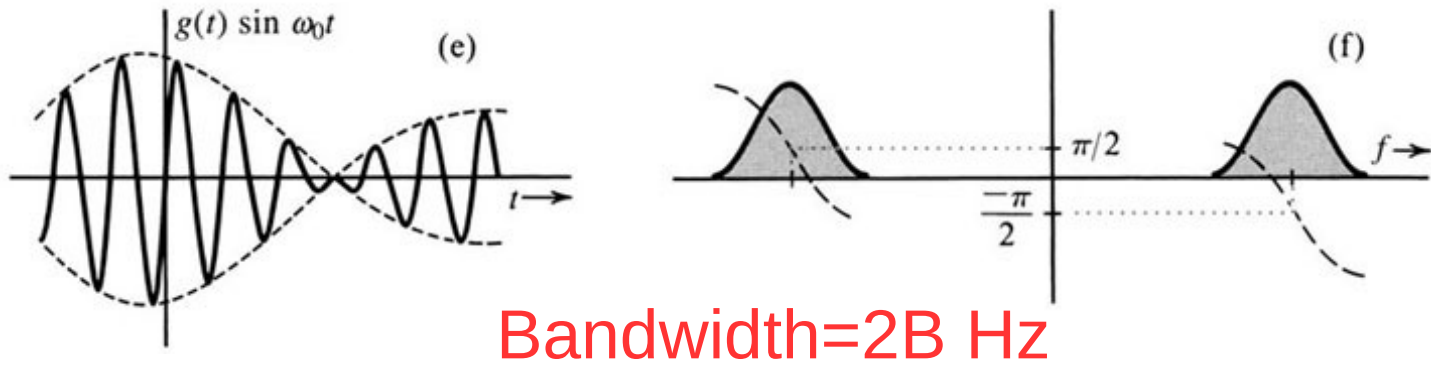
$$g(t) \sin 2\pi f_0 t \iff \left(\frac{1}{2}\right) [G(f - f_0)e^{-j\pi/2} + G(f + f_0)e^{j\pi/2}]$$



Bandwidth=B Hz



Bandwidth=2B Hz



Bandwidth=2B Hz

تبدیل فوریه توابع متناوب:

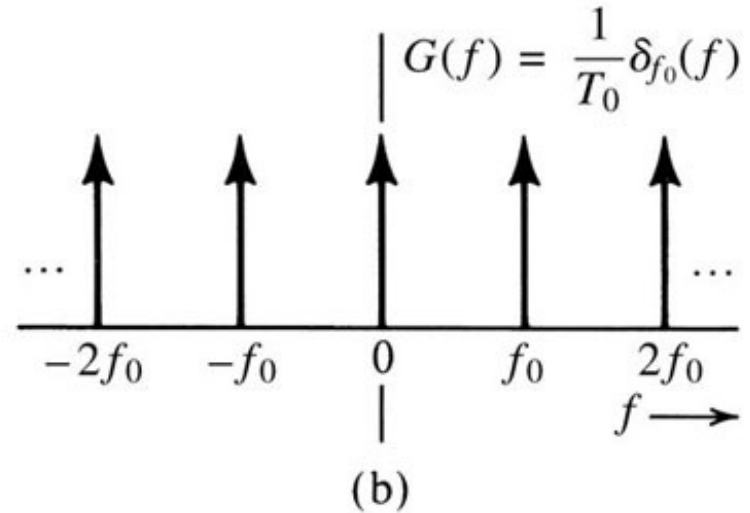
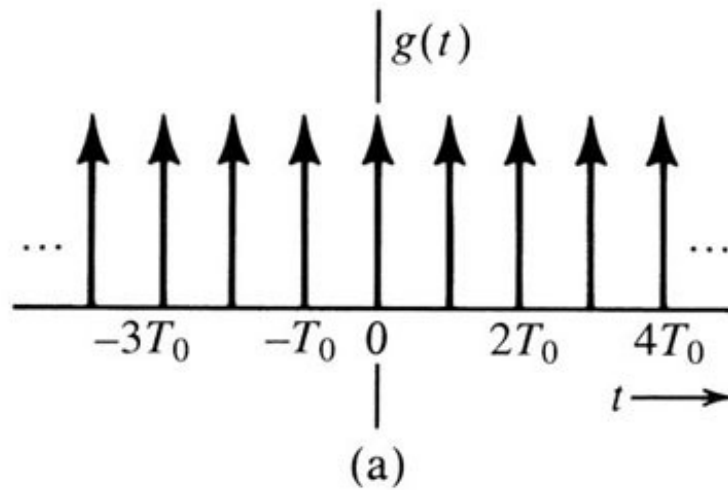
$$e^{j2\pi f_0 t} \iff \delta(f - f_0) \quad \text{یادآوری:}$$

به فرض $g(t)$ یک تابع متناوب با دوره تناوب T_0 باشد:

$$g(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} D_n e^{j2n\pi f_0 t}$$
$$\Downarrow$$
$$G(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} D_n \delta(f - n f_0)$$

مثال: تبدیل فوریه قطار ضربه:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_0) \iff \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{T_0} \delta(f - nf_0) \quad , f_0 = \frac{1}{T_0}$$



قضیه کانولوشن

یادآوری: کانولوشن دو تابع $g(t)$ و $w(t)$ را به شکل زیر تعریف می‌کنیم:

$$g(t) * w(t) = \int_{-\infty}^{\infty} g(\tau)w(t - \tau)d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} g(t - \tau)w(\tau)d\tau$$

حال اگر:

$$g_1(t) \iff G_1(f) \quad g_2(t) \iff G_2(f)$$

$$g_1(t) * g_2(t) \iff G_1(f).G_2(f)$$

کانولوشن حوزه زمان

$$g_1(t).g_2(t) \iff G_1(f) * G_2(f)$$

کانولوشن حوزه فرکانس
(ضرب در حوزه زمان)

یادآوری خاصیت عرض (پهنا) در کانولوشن (width property):
 اگر $f_1(x)$ و $f_2(x)$ به ترتیب دارای عرض W_1 و W_2 باشند، $f_1(x) * f_2(x)$ دارای عرض $W_1 + W_2$ خواهد بود.

نتیجه: اگر $g_1(t)$ و $g_2(t)$ به ترتیب دارای پهنای باند B_1 و B_1 هرتز باشند،
 (یعنی پهنای $G_1(f)$ و $G_2(f)$)، پهنای باند $g_1(t) \cdot g_2(t)$ (یعنی عرض $(G_1(f) * G_2(f))$)، $B_1 + B_2$ خواهد بود. [در اینجا معنای دقیق پهنای باند مورد نظر است و نه معنی تقریبی آن]
 بنابراین پهنای باند $g^2(t)$ ، $2B$ هرتز و پهنای باند $g^n(t)$ ، nB هرتز می باشد.

خاصیت مشتق‌گیری زمانی و انتگرال‌گیری زمانی:

$$g(t) \iff G(f) \quad \text{اگر}$$

آنگاه (خاصیت مشتق‌گیری):

$$\frac{d}{dt}g(t) \iff j2\pi f G(f)$$

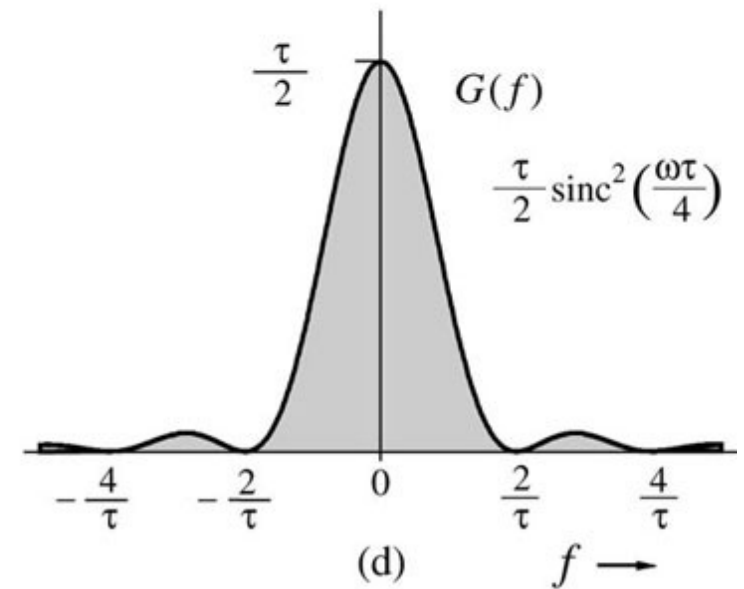
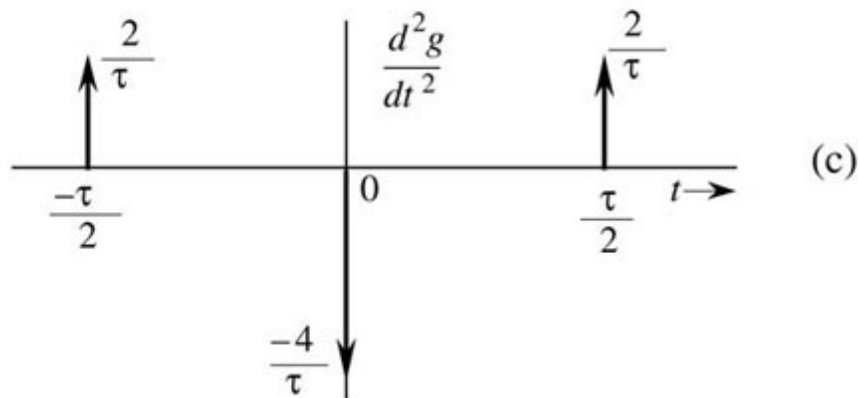
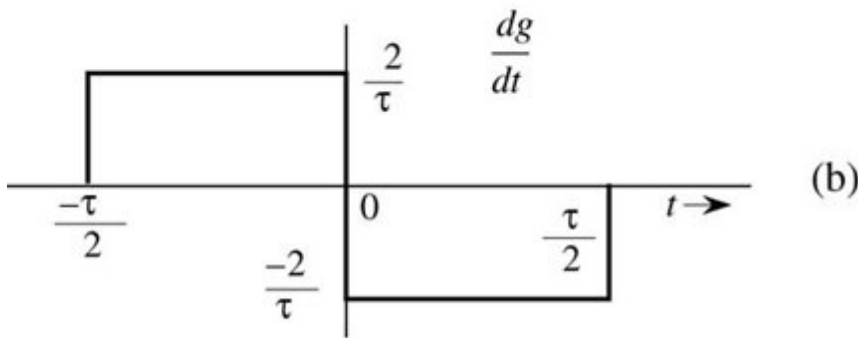
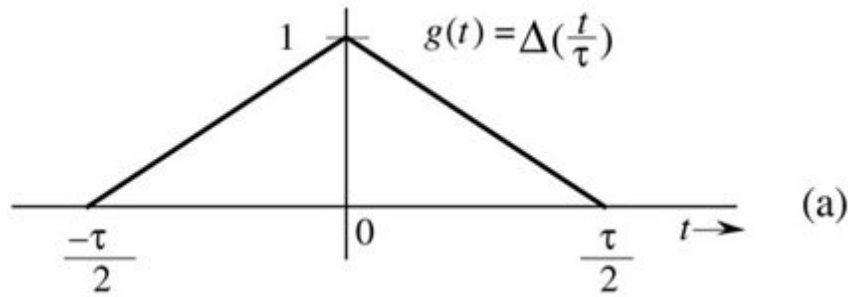
و (خاصیت انتگرال‌گیری):

$$\int_{-\infty}^t g(\tau) d\tau \iff \frac{G(f)}{j2\pi f} + \frac{1}{2}G(0)\delta(f)$$

تعمیم خاصیت مشتق‌گیری:

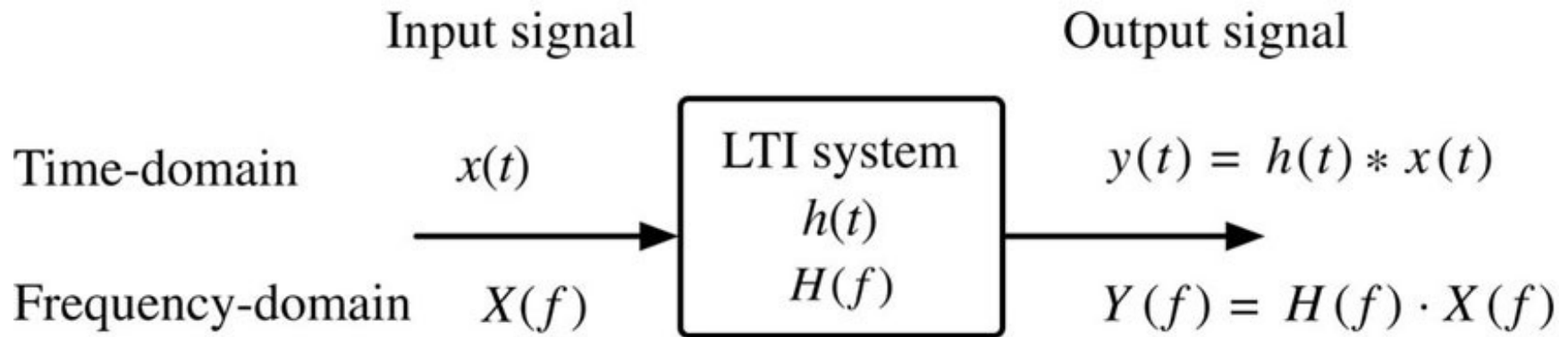
$$\frac{d^n}{dt^n}g(t) \iff (j2\pi f)^n G(f)$$

مثال: با استفاده از خاصیت مشتق‌گیری حوزه زمان، تبدیل فوریه پالس مثلثی $\Delta(t/\tau)$ را به دست آورید.



انتقال سیگنال از یک سیستم خطی

یک سیستم خطی تغییر ناپذیر با زمان (LTI)، هم در حوزه زمان و هم در حوزه فرکانس قابل توصیف است. در حوزه فرکانس با پاسخ ضربه سیستم $h(t)$ و در حوزه فرکانس با پاسخ فرکانسی $H(f)$.



فرض بر این است که سیستم‌های مورد بررسی، پایدار هستند یعنی ورودی‌های کراندار (Bounded Input) خروجی کراندار (Bounded Output) ایجاد می‌کنند (پایداری BIBO).

در حوزه زمان :

به فرض $h(t)$ پاسخ ضربه است. یعنی:

$$x(t) = \delta(t) \Rightarrow y(t) = h(t)$$

آنگاه:

$$y(t) = h(t) * x(t)$$

در حوزه فرکانس: به فرض تبدیل فوریه ورودی، خروجی و پاسخ ضربه سیستم:

$$x(t) \iff X(f) \quad y(t) \iff Y(f) \quad h(t) \iff H(f)$$

آنگاه با توجه به خاصیت تبدیل فوریه کانولوشن:

$$Y(f) = H(f)X(f)$$

به $H(f)$ ، تابع انتقال سیستم (transfer function) و یا پاسخ فرکانسی سیستم (frequency response) می‌گویند.

$$H(f) = |H(f)|e^{j\theta_h(f)},$$

$|H(f)|$: پاسخ اندازه سیستم (Amplitude response)

$\theta_h(f)$: پاسخ فاز سیستم (Phase response)

اعوجاج سیگنال (Signal Distortion) هنگام انتقال

$$|Y(f)| e^{j\theta_y(f)} = |X(f)| |H(f)| e^{j(\theta_x(f) + \theta_h(f))}$$

| | ورودی سیستم | خروجی سیستم |
|--------|---------------|-----------------------------|
| اندازه | $ X(f) $ | $ X(f) \cdot H(f) $ |
| فاز | $\theta_x(f)$ | $\theta_x(f) + \theta_h(f)$ |

یک مؤلفه موجود در طیف ورودی، در اندازه در ضریب $|H(f)|$ ضرب می‌شود و در فاز با زاویه $\theta_h(f)$ جمع می‌شود.

انتقال بدون اعوجاج (Distortionless Transmission)

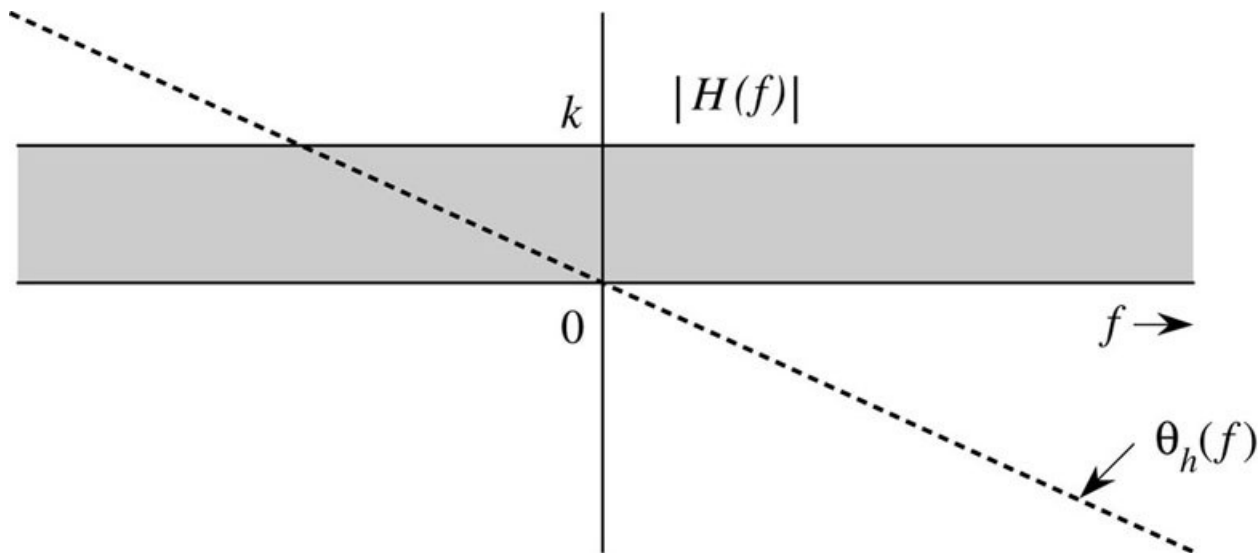
یک سیستم (مثلاً یک تقویت‌کننده و یا یک کانال مخابراتی) را بدون اعوجاج می‌گوییم اگر سیگنال خروجی همان سیگنال ورودی باشد الا اینکه حداکثر در یک ضریب ثابت ضرب شود و نسبت به ورودی تأخیر زمانی داشته باشد.

خروجی سیستم بدون اعوجاج در حوزه زمان: $y(t) = k \cdot x(t - t_d)$

پاسخ فرکانسی یا تابع انتقال سیستم بدون اعوجاج:

$$H(f) = k e^{-j2\pi f t_d}$$

$$\begin{cases} |H(f)| = k \\ \theta_h(f) = -2\pi f t_d \end{cases}$$



اندازه پاسخ فرکانسی سیستم بدون اعوجاج، یک ضریب ثابت است.
 فاز پاسخ فرکانسی یک سیستم بدون اعوجاج، یک تابع خطی است که از مبدأ
 می‌گذرد و شیب آن نسبت به فرکانس f برابر با $-2\pi t_d$ است که t_d
 تأخیری است که سیستم در سیگنال ورودی ایجاد می‌کند.
 نکته: در حالت کلیتر، فاز یک سیستم بدون اعوجاج می‌تواند مضارب صحیحی از
 π هم داشته باشد.

$$\theta_h(f) = n\pi - 2\pi f t_d$$

در حالت کلی، اگر پاسخ فاز یک سیستم، $\theta_h(f)$ باشد، تأخیر اعمال شده توسط این سیستم بر مؤلفه‌ای از سیگنال ورودی با فرکانس f ، عبارت است از:

$$t_d(f) = -\frac{1}{2\pi} \frac{d\theta_h(f)}{df}$$

پس برای اینکه تمام مؤلفه‌های فرکانسی موجود در سیگنال ورودی، به یک اندازه تأخیر داشته باشند (که در غیر اینصورت سیگنال دچار اعوجاج خواهد شد)، پاسخ فاز یک سیستم بدون اعوجاج، باید تابعی خطی از فرکانس باشد.

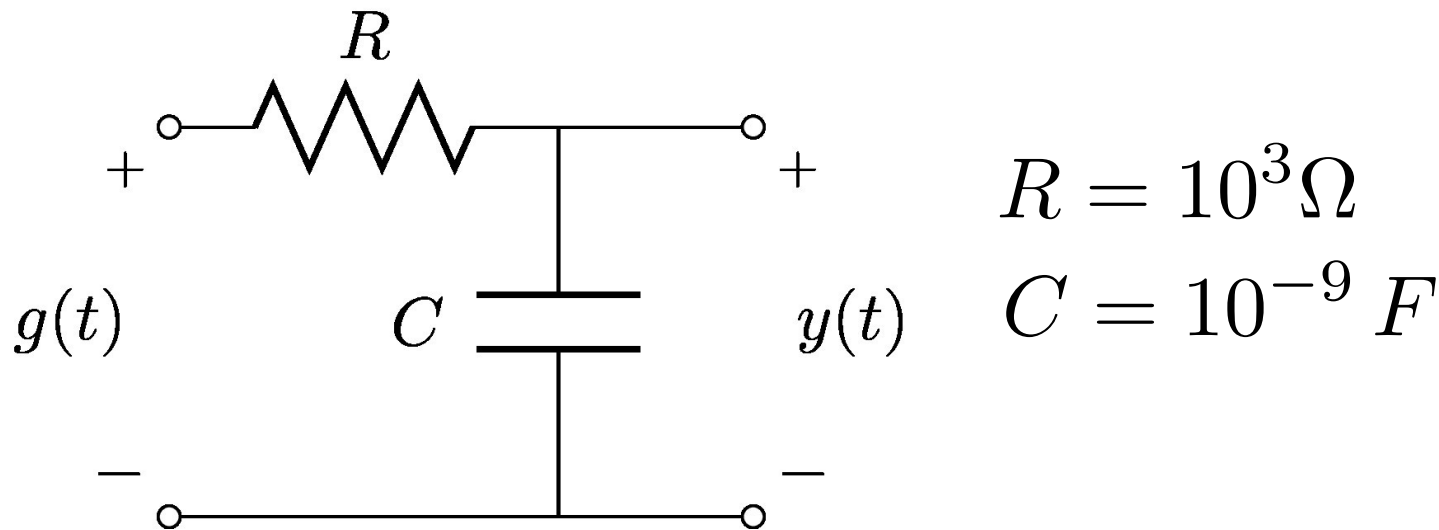
نتیجه: برای بدون اعوجاج بودن، یک شرط روی اندازه و یک شرط روی فاز پاسخ فرکانسی لازم است. اگر فقط اندازه پاسخ فرکانسی ثابت باشد (به این سیستمها **تمام-گذر** یا **all-pass** می‌گویند) مؤلفه‌های سیگنال در فرکانس‌های مختلف می‌تواند دچار تأخیرهای متفاوت شود و سیگنال را معوج کند.

مثال: اگر $g(t)$ و $y(t)$ به ترتیب ورودی و خروجی فیلتر پایین گذر زیر باشد:

الف) پاسخ فرکانسی سیستم $H(f)$ را به دست آورید و $|H(f)|$ و $\theta_h(f)$ و $t_d(f)$ را رسم کنید.

ب) برای یک انتقال بدون اعوجاج از این فیلتر، چه شرطی برای پهنای باند ورودی لازم است اگر تغییر 2% در پاسخ اندازه و تغییر 5% در تأخیر زمانی قابل قبول باشد.

ج) در این صورت تأخیر انتقال چقدر است و خروجی چیست؟



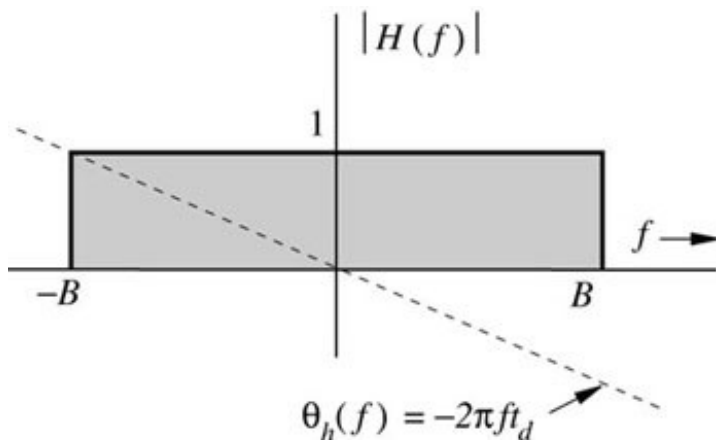
برای **سیگنال‌های صوتی** به دلیل طبیعت و جنس حساسیت گوش انسان: اعوجاج در اندازه اهمیت زیادی دارد و اعوجاج در فاز (غیر خطی بودن پاسخ فاز) اهمیت کمی دارد.

برای **سیگنال‌های ویدئویی** به دلیل حساسیت چشم: اعوجاج در اندازه اهمیت کمتری دارد و در مقابل اثر اعوجاج در فاز بر کیفیت ویدئو چشمگیرتر و مهمتر است.

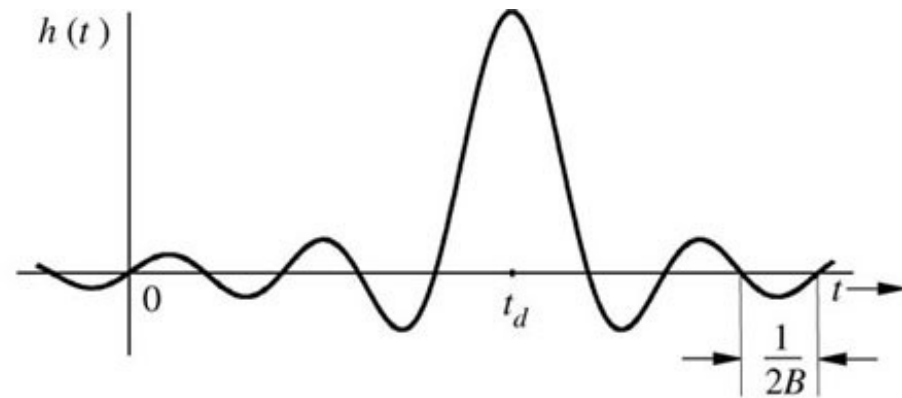
برای **سیگنال‌های دیجیتال** که در مخابرات دیجیتال ارسال می‌شوند: اعوجاج در اندازه اهمیت کمتری دارد ولی اعوجاج در فاز مهمتر است زیرا باعث گسترده شدن و پخش پالس‌ها و در هم فرو رفتن و تداخل پالس‌های مجاور می‌شود که باعث ایجاد خطا می‌گردد.

فیلترهای ایده‌آل و فیلترهای عملی

یک فیلتر ایده‌آل انتقال بدون اعوجاج را در یک باند فرکانسی مشخص اجازه می‌دهد و جلوی همه فرکانسهای دیگر را می‌گیرد.
مثلاً فیلتر پایین‌گذر ایده‌آل:



(a)



(b)

اگر $g(t)$ ورودی فیلتر همه مؤلفه‌هایش دارای فرکانس کمتر از B هرتز باشد (یعنی طیف حوزه فرکانسش بطور کامل بین 0 تا B هرتز قرار گیرد)، در این صورت سیگنال بدون تغییر و فقط با تأخیر t_d از فیلتر می‌گذرد.

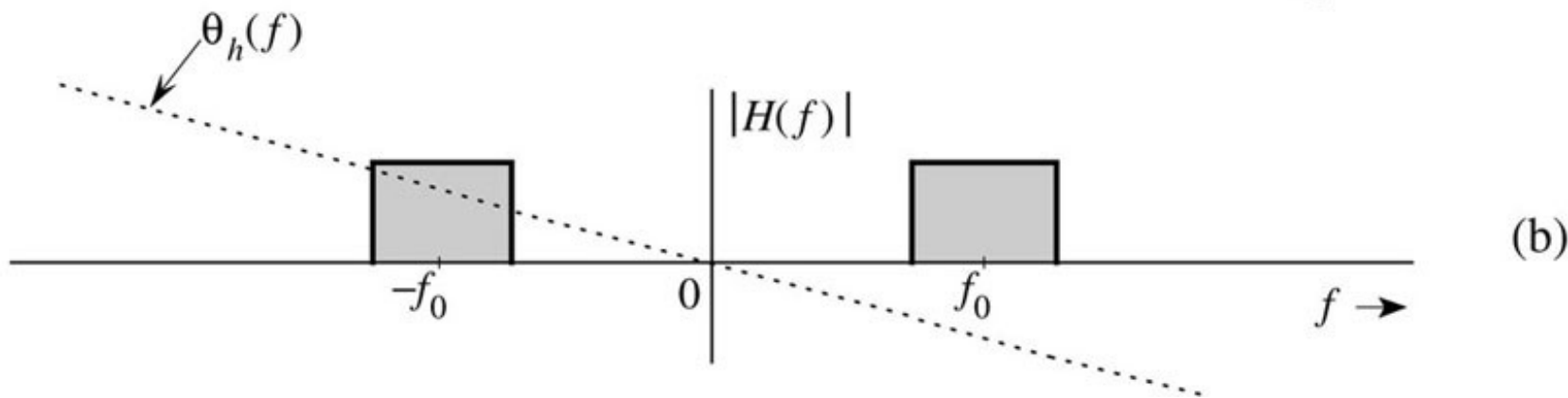
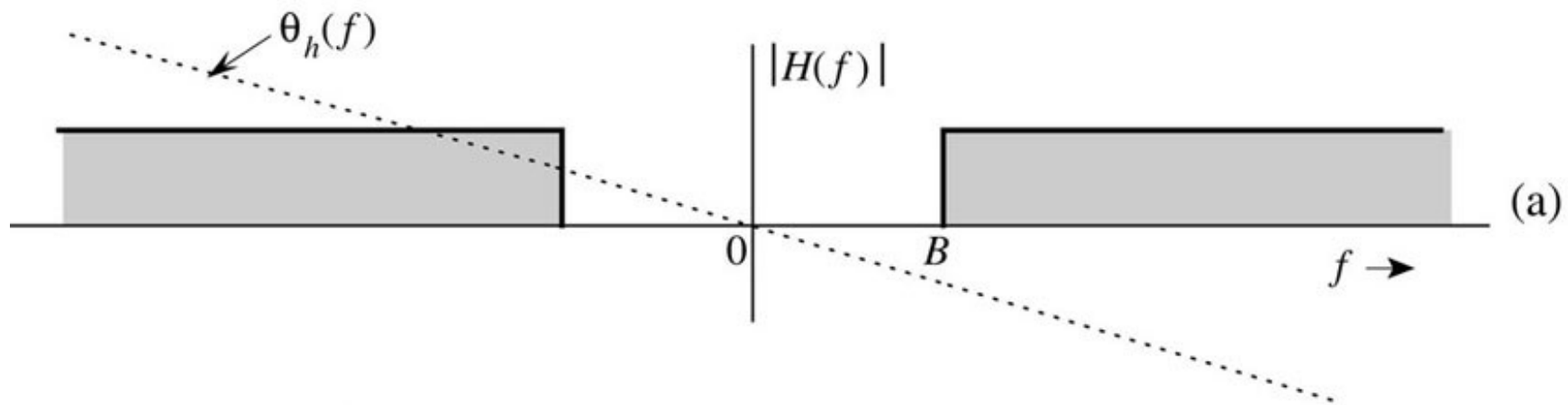
اگر ورودی $g(t)$ دارای طیف داخل 0 تا B هرتز باشد. $\Rightarrow y(t) = g(t - t_d)$

پاسخ فرکانسی فیلتر پایین گذر ایده‌آل:

$$\begin{cases} |H(f)| = \Pi\left(\frac{1}{2B}\right) \\ \theta_h(f) = -2\pi f t_d \end{cases} \Rightarrow H(f) = \Pi\left(\frac{1}{2B}\right) e^{-j2\pi f t_d}$$

پاسخ ضربه فیلتر:

$$h(t) = 2B \operatorname{sinc}[2\pi B(t - t_d)]$$



با توجه به پاسخ ضربه فیلتر پایین گذر ایده‌آل، آشکار می‌شود که این پاسخ، غیرعلی است و بنابراین عملی و قابل پیاده‌سازی نیست. باری علی بودن پاسخ ضربه، باید:

$$h(t) = 0 \quad \text{for } t < 0$$

این شرط معادل شرط پالی-وینر (Paley-Weiner) در حوزه فرکانس است:

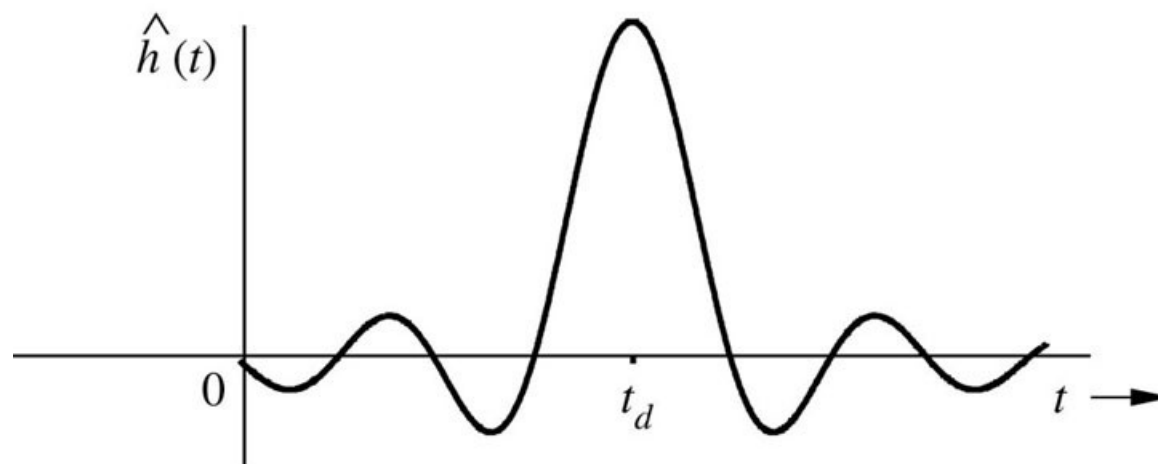
$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\ln |H(f)||}{1 + (2\pi f)^2} df < \infty$$

با توجه به جمله $|\ln |H(f)||$ ، اگر $|H(f)|$ در بازه‌ای از فرکانس صفر باشد، شرط پالی-وینر نقض می‌شود و فیلتر غیر علی و غیر عملی می‌شود. **نتیجه:** همه فیلترهای ایده‌آل پایین، میان و بالا گذر غیر علی هستند.

یک روش برای علی‌کردن پاسخ ضربه این است که از پاسخ ضربه تقریبی علی
به دست آوریم:

$$\hat{h}(t) = h(t)u(t)$$

در این صورت دیده می‌شود که هرچه t_d بزرگ‌تر باشد، تقریب بهتری به دست
می‌آید. و در عمل ۳ تا چهار برابر $1/2B$ ، برای فیلتر پایین‌گذر تأخیر مناسبی
است. مثلاً برای صدا، با پهنای باند ۲۰ کیلوهرتز، با تأخیر 0.1msec تقریب
خوبی به دست می‌آید.



اعوجاج سیگنال روی یک کانال مخابراتی

۱) **اعوجاج خطی:** این اعوجاج به صورت یک سیستم LTI قابل توصیف است. اگر کانال دارای پاسخ اندازه غیر ثابت و یا پاسخ فاز غیر خطی باشد، اتفاق می افتد.

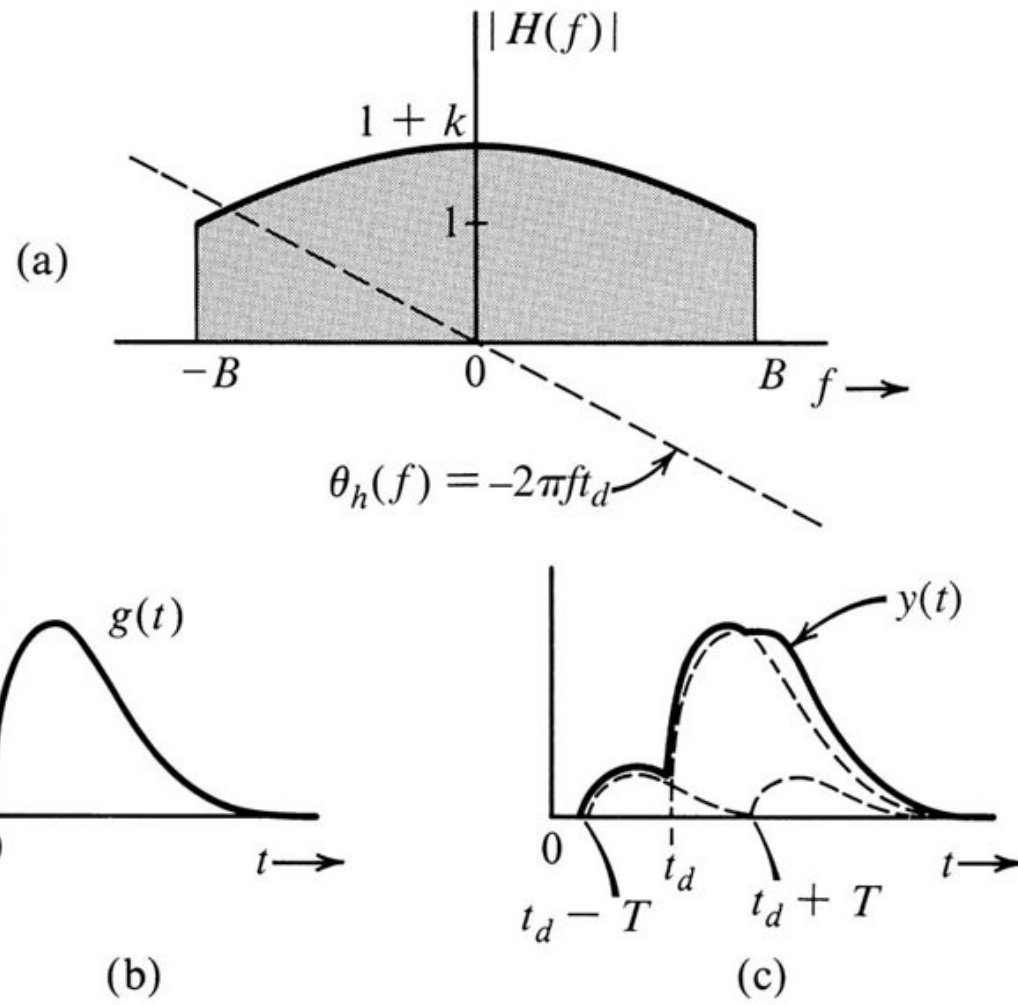
$$\begin{cases} |H(f)| \neq k \\ \vee \\ \theta_h(f) \neq -2\pi t_d f \end{cases}$$

یکی از مهمترین آثار این اعوجاج، پدیده **پخش کنندگی** (dispersion) یا گسترده کردن (spreading) (در حوزه زمان) است. پخش بخصوص در مخابرات دیجیتال مخرب است و باعث **تداخلهای بین سمبلی** (Intersymbol interferences: ISI) می شود.

مثال: فیلتر پایین گذر با پاسخ فرکانسی $H(f)$ داده شده است:

$$H(f) = \begin{cases} (1 + k \cos 2\pi fT) e^{-j2\pi f t_d} & |f| < B \\ 0 & |f| > B \end{cases}$$

پالس $g(t)$ با پهنای باند محدود به B هرتز به ورودی این فیلتر اعمال می شود. خروجی $y(t)$ را به دست آورید.



۲) اعوجاج ناشی از غیرخطی بودن کانال:

فرض خطی بودن کانال با افزایش دامنه سیگنال، کمتر قابل قبول است و کانال اثرات غیر خطی خود را برای سیگنال‌های بزرگ بروز می‌دهد.

$$y = f(g)$$

که f یک تابع غیر خطی است. بسط مک‌لورن این تابع:

$$y(t) = a_0 + a_1g(t) + a_2g^2(t) + \dots + a_kg^k(t) + \dots$$

دیده می شود که:

الف) برخلاف اعوجاج خطی، اگر ورودی $g(t)$ دارای پهنای باند محدود B هرتز باشد، خروجی بسته به تعداد جملات قابل اعتنای بسط بالا دارای پهنای باند kB یا بیشتر است. یعنی کانال خاصیت پخش کنندگی در حوزه فرکانس دارد.

ب) برخلاف اعوجاج خطی، اگر ورودی یک پالس با عرض محدود در زمان باشد، خروجی هم یک پالس دیگر با همان پهنای است. یعنی خاصیت پخش در حوزه زمان وجود ندارد.

اثر پخش در حوزه فرکانس بر مخابرات AM مخرب و قابل توجه است ولی بر مخابرات FM اثر اندکی دارد.

در مخابرات دیجیتال باعث تداخل در حوزه زمان میان پالس‌های مجاور (ISI) نمی‌شود.

همچنین در ارسال چندگانه با تقسیم زمانی (Time-Division Multiplexing: TDM) تداخل میان پالس‌ها ایجاد نمی‌شود.

ولی باعث تداخل در کانال‌های فرکانسی مجاور می‌شود.

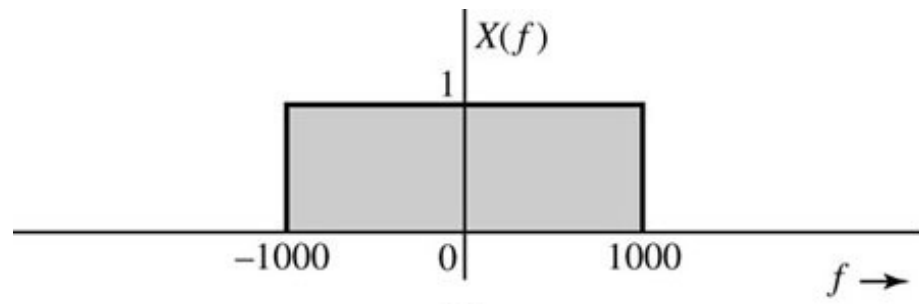
مثال: ورودی و خروجی یک کانال غیرخطی عبارت است از:

$$y(t) = x(t) + 0.000158 x^2(t)$$

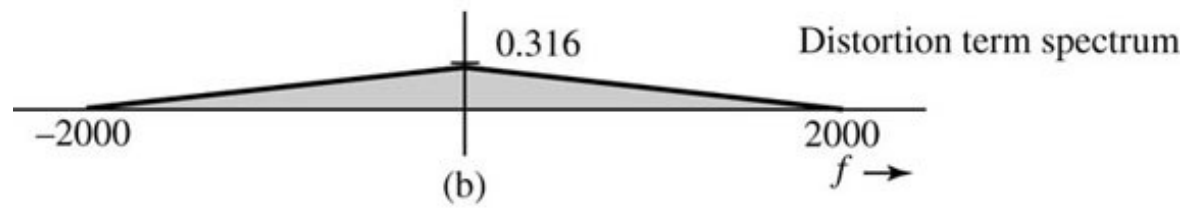
اگر ورودی

$$x(t) = 2000 \operatorname{sinc}(2000\pi t)$$

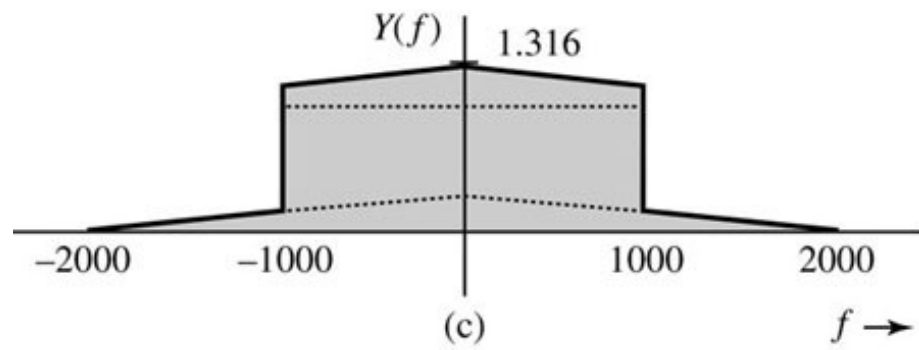
باشد، خروجی و طیف آن و پهنای باند آن را به دست آورید. آیا ورودی از روی خروجی قابل بازیابی است؟



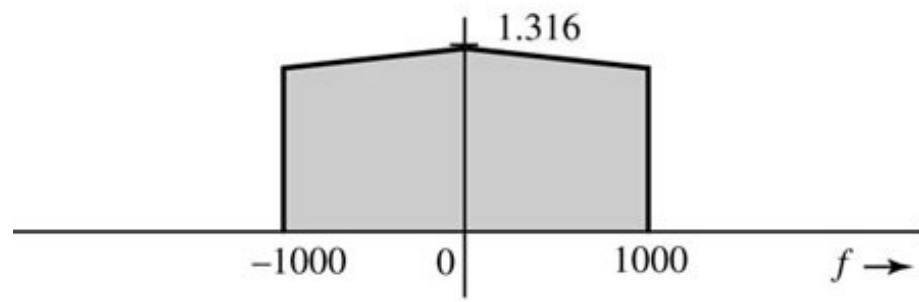
(a)



(b)



(c)



(d)

۳) اعوجاج ناشی از اثرات چند مسیره بودن کانال:

در این کانال‌ها سیگنال از چند مسیر مختلف به گیرنده می‌رسد که هر مسیر ضریب تضعیف و تأخیر متفاوتی دارد.

این چند مسیر بودن:

در کابل‌های انتقال سیگنال به دلیل عدم تطبیق کامل امپدانس

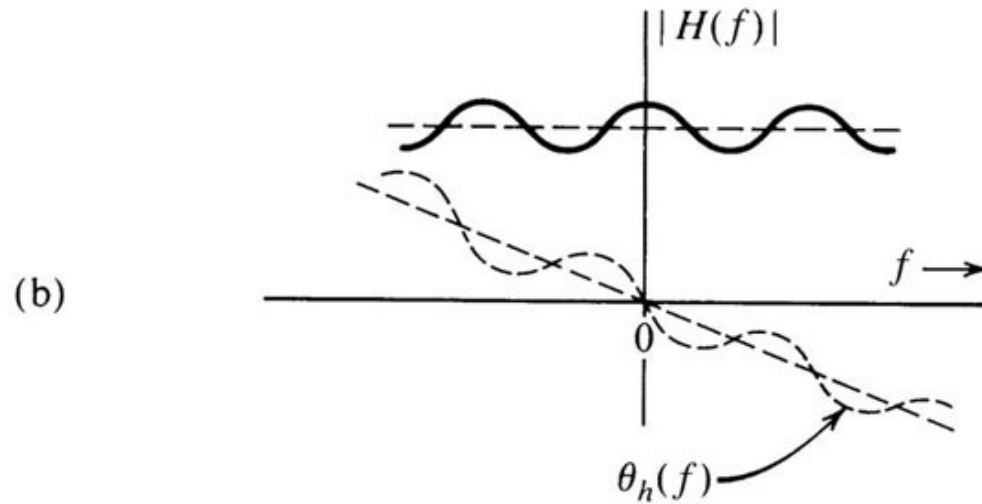
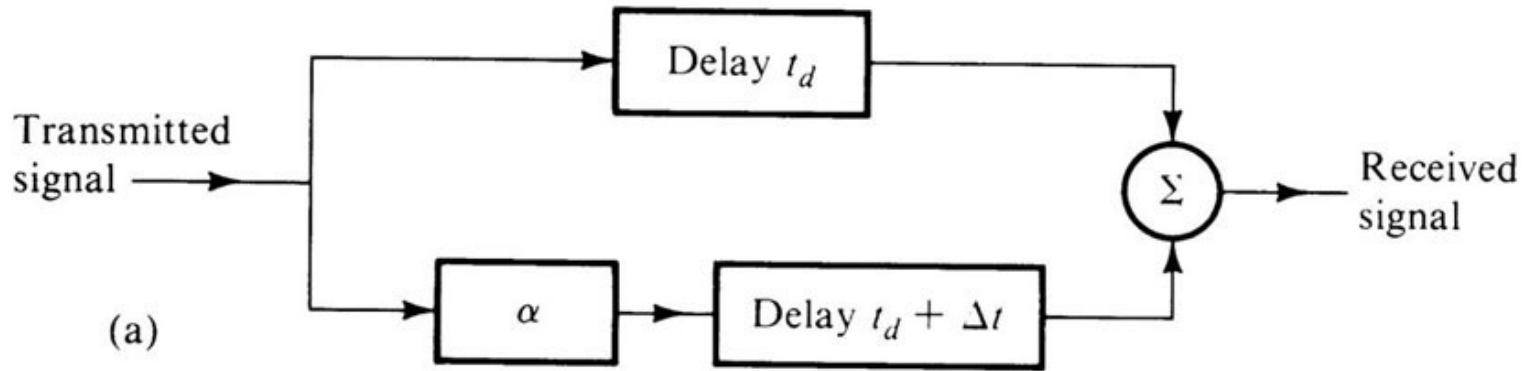
در لینک‌های رادیویی به دلیل انعکاس امواج الکترومغناطیسی بوسیله اشیایی مثل کوهها و ساختمانها

و در لینک‌های رادیویی راه دور انعکاس امواج توسط لایه‌های جو و بخصوص یونوسفر

ایجاد می‌شود.

یک کانال چند مسیره را می‌توان بصورت چند کانال موازی (هر کانال برای یک مسیر) در نظر گرفت.

برای یک کانال دو مسیره:



$$H(f) = e^{-j2\pi f t_d} + \alpha e^{-j2\pi f \Delta t}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} |H(f)| = (1 + \alpha^2 + 2\alpha \cos 2\pi f \Delta t)^{1/2} \\ \theta_h(f) = - \left(2\pi f t_d + \tan^{-1} \frac{\alpha \sin 2\pi f \Delta t}{1 + \alpha \cos 2\pi f \Delta t} \right) \end{array} \right.$$

دوره تناوب کانال: $1/\Delta t$

if $\alpha \approx 1$

$$\left\{ \begin{array}{l} f = \frac{n}{2\Delta t} \quad n \text{ odd} \quad \Rightarrow H(f) = 0 \quad : \text{ null frequency} \\ f = \frac{n}{2\Delta t} \quad n \text{ even} \quad \Rightarrow H(f) = 2e^{-j2\pi f t_d} \end{array} \right.$$

فیدینگ فرکانس گزین: frequency-selective fading

این اعوجاج بوسیله نوع خاصی تعدیل کننده (Equalizer) معروف به tapped delay-line equalizer (اکولایزر با خط‌های تأخیر قابل تنظیم) بصورت جزئی قابل اصلاح است.

۴) کانالهای فیدینگ (Fading channels)

تغییر مشخصه کانال با زمان

- بصورت تقریباً تناوبی (تغییرات فصلی یا روزانه مشخصات آب و هوایی - یا خواص انعکاسی لایه‌های اتمسفر - خواص انتشار محیط انتقال)
- تغییرات تصادفی و ناگهانی این مشخصات

فیدینگ ممکن است کند (slow) یا تند (fast) باشد.

فیدینگ کند، با کنترل کننده اتوماتیک گین (Automatic Gain Control: AGC) تقویت کننده‌ها قابل حل است.

فیدینگ می‌تواند فرکانس‌گزین باشد. (frequency selective fading)

دیدیم که انعکاس چند مسیر می‌تواند سبب فیدینگ فرکانس‌گزین شود.

انرژی سیگنال و چگالی طیفی سیگنال

$$E_g = \int_{-\infty}^{+\infty} |g(t)|^2 dt$$

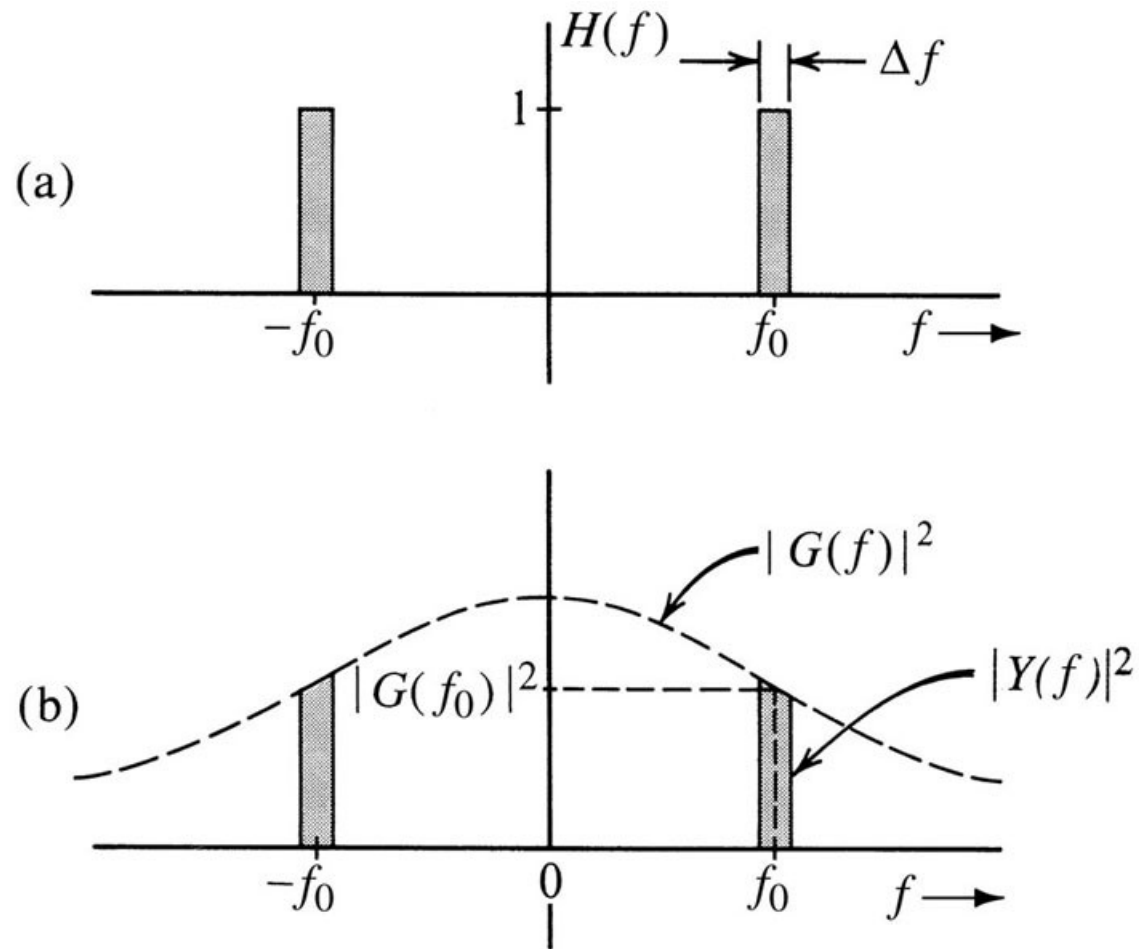
$$g(t) \iff G(f)$$

قضیه پارسوال:

$$E_g = \int_{-\infty}^{+\infty} |g(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |G(f)|^2 df$$

مفهوم چگالی طیفی انرژی:

$$E_g = \int_{-\infty}^{+\infty} |G(f)|^2 df$$



برای سیگنال $g(t)$ که تبدیل فوریه (چگالی طیفی) آن $G(f)$ است، می‌توان $|G(f)|^2$ را انرژی بر واحد فرکانس مؤلفه طیف تابع $g(t)$ در فرکانس دانست. به عبارتی $|G(f)|^2$ چگالی طیفی انرژی بر واحد پهنای باند (هرتز) سیگنال $g(t)$ است.

$$\Psi : \text{psi} \quad \Psi_g(f) = |G(f)|^2$$

در نتیجه:

$$E_g = \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi(f) dt$$

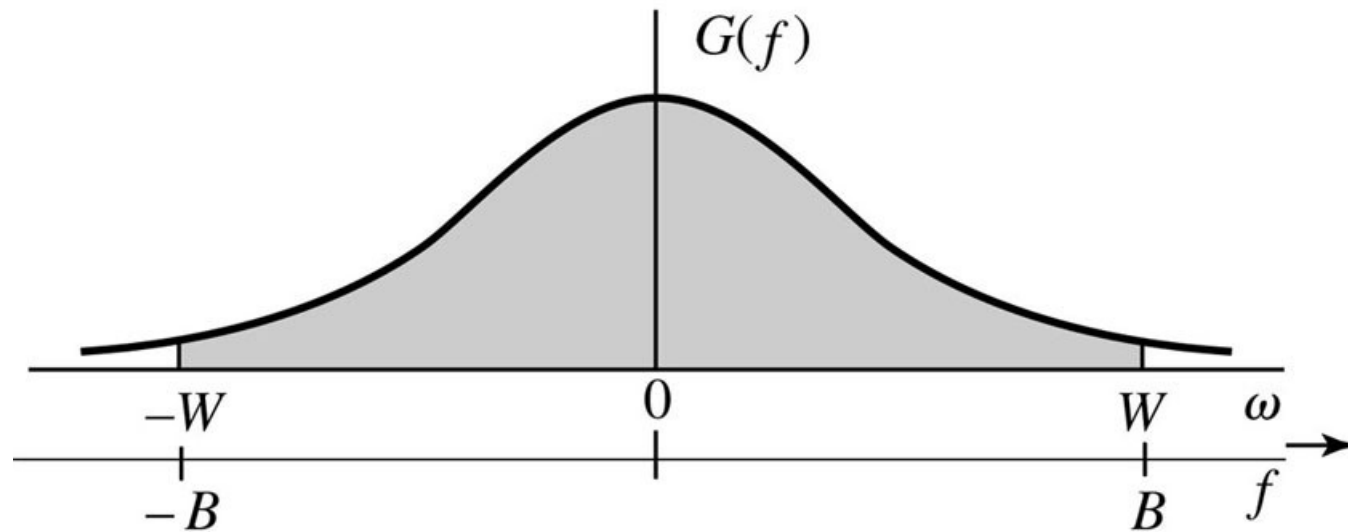
پهنای باند اساسی سیگنال:

اگر برای انتخاب فرکانس‌های با اهمیت در طیف یک سیگنال، معیار را انرژی در نظر بگیریم، پهنای باند به دست آمده را «پهنای باند اساسی» سیگنال می‌گوییم:

باندی از فرکانس که انرژی مؤلفه‌های سیگنال در آن حاوی بیشترین مقدار انرژی سیگنال هستند و خارج از آن باند، انرژی ناچیز و قابل صرف نظر دارد، پهنای باند اساسی سیگنال نامیده می‌شود.

دقت مورد نیاز در کاربرد مفهوم پهنای باند، مقدار بیشترین و کمترین را تعیین می‌کند. مثلاً پهنای باند اساسی یک سیگنال حاوی 95% و خارج از این باند حاوی 5% انرژی سیگنال می‌باشد.

مثال: پهنای باند اساسی سیگنال $e^{-at}u(t)$ را طوری محاسبه کنید که 95% کل انرژی سیگنال را در بر بگیرد.



مثال: پهنای باند اساسی یک پالس مستطیلی $g(t) = \Pi(t/T)$ را طوری محاسبه کنید که حاوی حداقل 90% انرژی سیگنال باشد.

$$\Pi\left(\frac{t}{T}\right) \iff T \operatorname{sinc}(\pi T f)$$

$$B = \frac{1}{T}$$

