پاسخنامه مسترزکاپ ۲۰۱۲

پاسخ سوال یکم ـ کافیست رشته‌ی گفته شده را بسازید. طول این رشته از ۶×۱۲۳۴۵۶ بیشتر نمی‌باشد. حال می‌خواهیم تعداد زیر رشته‌هایی را بیابیم که یک عدد فرد را نمایش می‌دهند و در اندیس j ام رشته تمام می‌شوند. می‌دانیم که رقم اندیس j ام باید فرد باشد. در این صورت شروع زیر رشته هر i می‌تواند باشد به شرطی که $i \le j$ و رقم اندیس i ام برابر صفر نباشد. می‌توان برای هر j تعداد صفرهای از ابتدا تا j را حساب کرد. پس مساله در O(nlgn) قابل حل است. در اینجا n برابر با ۱۲۳۴۵۶ است و طول دنباله O(nlgn) است.

پاسخ سوال دوم ـ اگر دو عضو متوالی از دنباله فیبوناچی به پیمانه ۱۰۰۰ تکرار شوند از آن به بعد مقادیر دنباله به پیمانه ۱۰۰۰ تکرار می‌شود. چون دست بالا ۱۰۰۰×۱۰۰۰ تا جفت وجود دارد می‌توان طول تکه‌ی تکراری را پیدا کرد. یعنی یک i وجود دارد که برای هر $j \geq i$ داریم fib(j)%1000 = fib(j+t)%1000 و می‌دانیم t از یک میلیون بیشتر نیست. می‌توان ثابت کرد که i برابر ۰ است (با استفاده از برهان خلف می‌توان یک واحد i را کاهش داد). پس رابطه بالا برای هر j برقرار است و کافی است مقدار t را پیدا کنید. سپس می‌توان نتیجه گرفت که fib(j)%1000 = fib(j%t)%1000 پس برای محاسبه fib(121212121212)%1000 کافیست fib(0) تا fib(t-1) را محاسبه کرده باشید. این مساله در $O(mod^2)$ قابل حل است. در اینجا mod برابر با ۱۰۰۰ بود.

پاسخ سوال سوم ـ اعدادی که ساخته می‌شوند را در مبنای ۳ بنویسید. مشاهده می‌کنید که هر عدد قابل ساخت در مبنای ۳ از ارقام ۰ و ۱ تشکیل شده‌است. هیچ‌گاه عدد ساخته شده در مبنای ۳ نمی‌تواند رقم ۲ داشته باشد. چون حداکثر یک بار می‌توانیم عدد را به صورت متوالی ۱+ کنیم. عمل ۳× هم یک صفر به سمت راست عدد ساخته شده در مبنای ۳ اضافه می‌کند. حال تمام اعداد ساخته شده را به ترتیب در مبنای ۳ بنویسید. عدد اول لیست ۱ است. مشاهده می‌شود که عدد i ام در مبنای ۳ برابر با بسط i در مبنای ۲ می‌باشد. پس اگر i را در مبنای ۲ بنویسید و مقدار این بسط را در مبنای ۳ حساب کنید i امین عدد قابل ساخت به دست می‌آید. این مساله در O(lgn) قابل حل است. در اینجا n برابر با ۷۴۷۴۷۴۷۴۷۴۷۴۷۴۷۴ بود.

پاسخ سوال چهارم ـ اگر هر اتاق زیر زمینی را یک راس از یک گراف در نظر بگیرید و هر راهرو را یک یال، گراف حاصل یک گراف جهت‌دار ۷۴۷۷ راسی و ۷۴۷۷ یالی می‌باشد و درجه خروجی هر راس برابر با یک می‌باشد. اگر تعداد راس‌های طولانی ترین مسیر در این گراف p باشد مقدار t در مساله اصلی می‌شود 2p+1. پس کافیست طول طولانی ترین مسیر را در گراف مساله پیدا کنید. فرض کنید مسیرمان از راس s شروع شود. چون درجه خروجی هر راس یک است طولانی ترین مسیری که از راس s شروع می‌شود یکتا می‌باشد. حال اگر به ازای هر راس شروع طولانی‌ترین مسیر را محاسبه کنید، طولانی‌ترین مسیر گراف پیدا خواهد شد. طولانی ترین مسیر از یک راس را می‌توان در $O(n)$ محاسبه کرد. پس مساله در $O(n^2)$ قابل حل می‌باشد. در اینجا n برابر با ۷۴۷۷ می‌باشد.

پاسخ سوال پنجم ـ گراف سوال قبلی را در نظر بگیرید. تعداد راس‌های گراف از ۷۴۷۷ به ۷۷۴۴۴۷ افزایش یافته است. دیگر راه حل $O(n^2)$ پاسخگو نیست. راه حلی از $O(n)$ برای این سوال وجود دارد. به شکل گراف جهت‌دار n راسی که درجه خروجی هر راسش برابر یک است توجه کنید. این گراف دقیقن یک دور جهت دار دارد. از هر راس که مسیر را شروع کنیم پس از مدتی وارد این دور می‌شویم. اگر طول این دور d باشد پس از لحظه وارد شدن به آن حداکثر d راس می‌توان دید. فرض کنید longest(i) برابر باشد با بیشترین تعداد راس‌های باشد که از راس i می‌توانیم شروع کنیم و ببینیم. می‌دانیم برای تمام راس‌های دور در گراف این مقدار برابر با d می‌باشد. برای هر راس خارج از دور نیز داریم longest(i) = 1+longest((7*i*i+47*i+474)%744477). پس با محاسبه طول دور در $O(n)$ و راس‌های درون دور (از یک راس شروع به گردش کنید تا به راس تکراری برسید.) می‌توان مقایر اولیه تابع longest را حساب کرد. سپس بقیه مقادیر را می‌توان با برنامه‌نویسی پویا و memoization محاسبه کرد. به این صورت که هربار longest(x) صدا می‌شود چک کنید اگر قبلا این تابع صدا نشده بود از روی longest((7*x*x+47*x+474)%7444777) محاسبه شود. در غیر این صورت مقداری که قبلن محاسبه شده‌است را برگرداند. به این طریق مساله در $O(n)$ حل می‌شود که در اینجا n برابر با ۷۷۴۴۴۷ بود.