خلاصه‌ی
ریاضیات تجربی کنکور

تهیه و تدوین: میثم حمزه‌لوئی

در این بخش تمام نکات و فرمول‌های مهم و کلیدی مباحث ریاضیات تجربی کنکور جمع‌آوری شده است و شما عزیزان می‌توانید به منظور آمادگی آزمون‌های کنکور و برای جمع‌بندی و بازنگری کلی کتاب و هم‌چنین برای مرور سریع روابط و فرمول‌ها از این ضمیمه استفاده نمایید.
در ضمن در این بخش سعی شده است که تمام نکات مهم مثل؛ فرمول‌های اصلی مثلثات، روابط معادلات درجه‌ی دوم، قوانین مشتق‌گیری و انتگرال، احتمال، اشکال هندسی و ... و همچنین نمودارهای مهم و اصلی و نحوه‌ی انتقال آن‌ها که در کتاب‌های درسی آمده به صورت دسته‌بندی شده، ارائه شود.

●●● اتحادهای جبری ●●●

اتحادهای اصلی	اتحادهای فرعی
$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$	$a^2+b^2=(a+b)^2-2ab$
$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$	$a^2+b^2=(a-b)^2+2ab$
$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$	$a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)$
$(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$	$a^3-b^3=(a-b)^3+3ab(a-b)$
$a^2-b^2=(a-b)(a+b)$	----
$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$	----
$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^3)$	----
$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ac$	$a^2+b^2+c^2=(a+b+c)^2-2(ab+bc+ac)$

●●● خواص ترتیبی اعداد حقیقی ●●●

۱ $a<b \Rightarrow a\pm c<b\pm c$	۲ $a<b \xrightarrow{c>0} ac<bc$
۳ $a<b \xrightarrow{c<0} ac>bc$	۴ (a و b هم‌علامت) $a<b \Rightarrow \frac{1}{a}>\frac{1}{b}$
۵ (a و b غیر هم‌علامت) $a<b \Rightarrow \frac{1}{a}<\frac{1}{b}$	۶ $a<b \Rightarrow a^{2n+1}<b^{2n+1}$
۷ $(a,b>0)\, a<b \Rightarrow a^{2n}<b^{2n}$	۸ $(a,b<0)\ a<b \Rightarrow a^{2n}>b^{2n}$
۹ $a\le b,\ b\le c \Rightarrow a\le c$	۱۰ (a و b غیر هم‌علامت) $a<x<b \Rightarrow 0\le x^{2n}<\max\{a^{2n},b^{2n}\}$

نکته‌ی ۱۰ در مورد قدرمطلق هم صادق است.

●●● خط و روابط آن ●●●

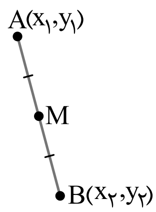
فاصله‌ی دو نقطه‌ی A و B (طول پاره‌خط AB):

فاصله‌ی دو نقطه‌ی $A(x_1,y_1)$ و $B(x_2,y_2)$ برابر است با:

$$AB=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$

مختصات وسط پاره‌خط:

$$M=\frac{A+B}{2} \Rightarrow \begin{cases} x_M=\dfrac{x_1+x_2}{2} \\ y_M=\dfrac{y_1+y_2}{2} \end{cases}$$



معادله‌ی خط:

۱ گذرنده از نقطه‌ی $A(x_1,y_1)$ و با شیب m :

معادله‌ی خط : $y-y_1=m(x-x_1)$

۲ گذرنده از دو نقطه‌ی $A(x_1,y_1)$ و $B(x_2,y_2)$:

معادله‌ی خط : $y-y_1=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)$

۳ گذرنده از نقطه‌ی $A(x_1,y_1)$ به طوری که با محور xها زاویه‌ی α بسازد:

$y-y_1=\tan\alpha(x-x_1)$

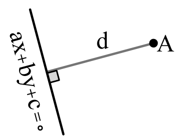
معادله‌ی محورxها: $y=0$

معادله‌ی محورyها: $x=0$

معادله‌ی خط نیمساز ناحیه‌ی اول و سوم: $y=x$

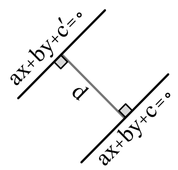
معادله‌ی خط نیمساز ناحیه‌ی دوم و چهارم: $y=-x$

فاصله‌ی نقطه از خط: فاصله‌ی نقطه‌ی $A(x_0,y_0)$ از خط $ax+by+c=0$ برابر است با:



$$d=\frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

فاصله‌ی دو خط موازی:

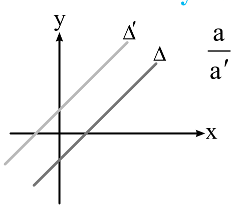


$$d=\frac{|c-c'|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

اوضاع نسبی دو خط $ax+by+c=0$ و $a'x+b'y+c'=0$

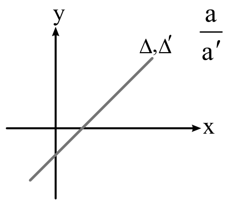
۱ دو خط موازی‌اند. در این حالت: $\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}\ne\frac{c}{c'}$

دستگاه $\begin{cases} ax+by+c=0 \\ a'x+b'y+c'=0 \end{cases}$ جواب ندارد.



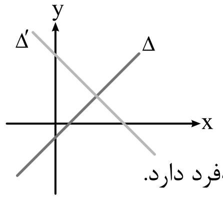
۲ دو خط منطبق‌اند. در این حالت: $\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}$

دستگاه $\begin{cases} ax+by+c=0 \\ a'x+b'y+c'=0 \end{cases}$ بی‌شمار جواب دارد.

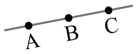


۳ دو خط متقاطع‌اند. در این حالت: $\frac{a}{a'} \neq \frac{b}{b'}$

دستگاه $\begin{cases} ax+by+c=۰ \\ a'x+b'y+c'=۰ \end{cases}$ جواب منحصربه‌فرد دارد.



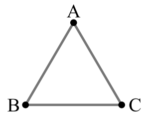
شرط آنکه سه نقطه بر یک استقامت باشند:



$$\Rightarrow m_{AB} = m_{BC} \Rightarrow \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{y_C - y_B}{x_C - x_B}$$

مساحت مثلثی که مختصات سه رأس آن معلوم است:

$$S = \frac{۱}{۲}\left|x_A(y_B - y_C) + x_B(y_C - y_A) + x_C(y_A - y_B)\right|$$



●●● لگاریتم ●●●

۱ $\log_a^۱ = ۰$

۲ $\log_a^a = ۱$

۳ $\log_b^a = \frac{۱}{\log_a^b}$

۴ $\log a + \log b = \log ab$

۵ $\log a - \log b = \log \frac{a}{b}$

۶ $\log_{b^m}^{a^n} = \frac{n}{m}\log_b^a$

۷ $\log_b^a = \frac{\log_c^a}{\log_c^b}$

۸ $a^{\log_c^b} = b^{\log_c^a}$

۹ $\log_b^a = c \Rightarrow a = b^c$

تابع رشد و زوال: برخی پدیده‌های طبیعی به صورت تابع $P(t) = P_۰e^{kt}$ تغییر می‌کنند که در آن $P(t)$ مقدار بعد از گذشت زمان t، $P_۰$ مقدار اولیه، t زمان و k ضریب رشد است. اگر $k > ۰$ باشد، تابع رشد و اگر $k < ۰$ باشد، تابع زوال است.

●●● ترکیبیات ●●●

رابطه:

۱ $n! = n(n-۱)(n-۲)...(۲)(۱)$

۲ جایگشت (ترتیب) k شیء از n شیء: $P(n,k) = \frac{n!}{(n-k)!}$

۳ ترکیب k شیء از n شیء: $C(n,k) = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

۴ قاعده‌ی پاسکال: $\binom{n}{k-۱} + \binom{n}{k} = \binom{n+۱}{k}$

۵ $\binom{n}{۰} + \binom{n}{۱} + \binom{n}{۲} + ... + \binom{n}{n} = ۲^n$

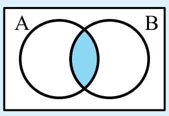
حالات اساسی:

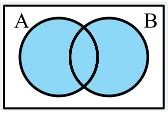
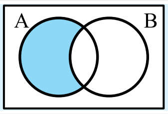
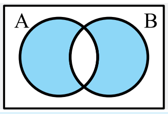
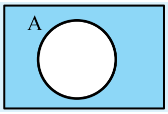
$P(n,k) = n(n-۱)...(n-k+۱)$	$n! = n(n-۱)!\,, n! = n(n-۱)(n-۲)!$
----	$\binom{n}{۰} = \binom{n}{n} = ۱\,, \binom{n}{۱} = \binom{n}{n-۱} = n\,, \binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}\,, \binom{n}{۲} = \binom{n}{n-۲} = \frac{n(n-۱)}{۲}$

نکته: اگر در n شیء، $n_۱$ شیء از نوع اول، $n_۲$ شیء از نوع دوم و ... و n_k شیء از نوع kاُم باشد، جایگشت این n شیء برابر است با: $\frac{n!}{n_۱!n_۲!...n_k!}$

●●● احتمال ●●●

نکات مهم:

$P(A) = ۰$: پیشامد نشدنی، $P(A) = ۱$: پیشامد حتمی، همیشه $۰ \leq P(A) \leq ۱$	$\frac{\text{تعداد عضوهای پیشامد مطلوب}}{\text{تعداد عضوهای فضای نمونه‌ای}} = $ احتمال پیشامد A $\Rightarrow P(A) = \frac{n(A)}{n(S)}$
 $\Rightarrow \begin{cases} P(A \cap B) = P(A)P(B) : \text{دو پیشامد مستقل} \\ P(A \cap B) = ۰ : \text{دو پیشامد ناسازگار} \end{cases}$	$P(A \cap B) = $ احتمال رخ دادن A و B

 $\Rightarrow P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$	$P(A\cup B)=$ احتمال رخ دادن حداقل یکی از دو پیشامد A یا B= احتمال رخ دادن A یا B
 $\Rightarrow P(A-B)=P(A)-P(A\cap B)$	$P(A-B)=$احتمال اینکه فقط A رخ دهد = A رخ دهد و B رخ ندهد.
 $\Rightarrow P(A-B)+P(B-A)=$ $P(A)+P(B)-2P(A\cap B)$	$P(A-B)+P(B-A)=$ احتمال اینکه فقط یکی رخ دهد.
 $\Rightarrow P(A')=1-P(A)$	$P(A')=$ احتمال اینکه A رخ ندهد.
$P(B\|A)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(A)}$	$P(B\|A)=$ احتمال اینکه B رخ دهد به شرط رخ دادن A
$P(X=k)=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$ (p: احتمال پیروزی)	در n بار انجام یک آزمایش، می‌خواهیم k بار پیروز شویم: توزیع دوجمله‌ای

●●● آمار و مدلسازی ●●●

شاخص‌های پراکندگی

■ اگر داده‌ها در a ضرب شوند، دامنه‌ی تغییرات و انحراف معیار $|a|$ برابر و واریانس a^2 برابر می‌شوند و ضریب تغییرات بدون تغییر باقی می‌ماند. اگر داده‌ها با b جمع شوند، تنها ضریب تغییرات تغییر می‌کند و سایر شاخص‌های پراکندگی تغییر نمی‌کنند.

■ اگر هریک از شاخص‌های پراکندگی صفر باشند، داده‌ها باهم برابرند.

■ **ضریب تغییرات:** (بدون واحد است) $CV=\dfrac{\sigma}{\bar{x}}$

■ **انحراف معیار:** (واحد آن همان واحد متغیر است.)

$\sqrt{\text{واریانس}}=$انحراف معیار(σ)

■ **محاسبه‌ی واریانس:** (واحد آن مربع واحد داده‌هاست.)

۱ روش عمومی:

$$\sigma^2=\frac{\sum(x_i-\bar{x})^2}{n}$$

۲ دسته‌بندی گسسته:

$$\sigma^2=\frac{\sum f_i(x_i-\bar{x})^2}{n}$$

۳ دسته‌بندی پیوسته:

$$\sigma^2=\frac{\sum f_i(x_i-\bar{x})^2}{n}$$

(x_i در اینجا مرکز دسته است.)

۴

$$\sigma^2=\frac{\sum x_i^2}{n}-\bar{x}^2$$

■ **دامنه‌ی تغییرات:** R

شاخص‌های مرکزی

■ اگر داده‌ها در a ضرب و با b جمع شوند، شاخص‌های مرکزی هم در a ضرب و با b جمع می‌شوند.

■ مجموع تفاضل هر داده از میانگین (انحراف از میانگین) صفر است:

$$\sum(x_i-\bar{x})=0 \xrightarrow{\text{در داده‌های دسته‌بندی شده}} \sum f_i(x_i-\bar{x})=0$$

■ **محاسبه‌ی میانگین:**

۱ روش عمومی:

$$\bar{x}=\frac{\sum x_i}{n}$$

۲ در دسته‌بندی‌های گسسته:

$$\bar{x}=\frac{\sum f_i x_i}{\sum f_i}$$

۳ در دسته‌بندی‌های پیوسته: (در اینجا x_i مرکز دسته است)

$$\bar{x}=\frac{\sum f_i x_i}{\sum f_i}$$

۴ در جدول فراوانی نسبی:

$\bar{x}=\sum x_i$ (فراوانی نسبی)

۵ میانگین حدسی $(\bar{y})$: اگر مجموع تفاضل هر داده از میانگین حدسی t باشد ($\bar{x}$: میانگین واقعی و n تعداد داده‌ها) $\bar{x}=\bar{y}+\dfrac{t}{n}$

■ **نمودار جعبه‌ای:** برای رسم این نمودار از بزرگ‌ترین و کوچک‌ترین داده و چارک‌ها استفاده می‌کنیم. داده‌هایی که در داخل جعبه قرار می‌گیرند، بین Q_1 و Q_3 قرار دارند.

■ **محاسبه‌ی میانه و چارک‌ها:** داده‌ها را به صورت صعودی مرتب و از جدول زیر استفاده می‌کنیم:

	تعداد داده‌ها فرد	تعداد داده‌ها زوج
Q_1	میانه‌ی داده‌های قبل از داده‌ی وسط	میانه‌ی نصف اول داده‌ها
Q_2	داده وسط	میانگین دو داده وسط
Q_3	میانه‌ی داده‌های بعد از داده‌ی وسط	میانه‌ی نصف دوم داده‌ها

Q_1: چارک اول، Q_2: میانه، Q_3: چارک سوم

■ **مد:** داده‌ای که بیشترین فراوانی را دارد.

نمودارها

■ **نمودار فراوانی تجمعی:** برای رسم این نمودار از کران بالای هر دسته و فراوانی تجمعی آن استفاده می‌شود.

- **نمودار ساقه و برگ:** قسمت اصلی داده‌ها در قسمت ساقه و سایر ارقام در قسمت برگ است. مزیت نمودار این است که به تمام داده‌ها (به صورت مرتب) دسترسی داریم.
- **نمودار دایره‌ای:** برای متغیرهای کمی گسسته و کیفی مناسب‌تر است.
- زاویه‌ی مرکزی هر متغیر = $\frac{f_i}{n}\times ۳۶۰^\circ$
- **نمودار چندبر فراوانی:** از به هم وصل کردن مرکز دسته‌ها (در نمودار مستطیلی) رسم می‌شود. مساحت زیر آن با مساحت زیر نمودار مستطیلی برابر است.
- **نمودار مستطیلی:** برای متغیرهای کمی مناسب است. اگر عرض‌ها (طول دسته‌ها) یکسان نباشند، مساحت‌ها با هم مقایسه می‌شوند.

دسته‌بندی داده‌ها

- فراوانی تجمعی نسبی دسته‌ی آخر = ۱
- فراوانی تجمعی دسته‌ی آخر = n
- $F_i - F_{i-۱} = f_i$ (تعداد کل داده‌ها)
- جمع کل درصد فراوانی‌های نسبی = ۱۰۰
- جمع کل فراوانی‌های نسبی = ۱
- (تعداد کل داده‌ها) n= جمع کل فراوانی‌های مطلق
- درصد فراوانی نسبی دسته‌ی iام $= \frac{f_i}{n}\times ۱۰۰$
- فراوانی نسبی دسته‌ی iام $= \frac{f_i\,(\text{فراوانی مطلق})}{n}$
- (طول دسته) $L = \frac{a_n - a_m}{n-m}$

a_n و a_m می‌توانند کران بالای دسته‌های nام و mام، مرکز دسته‌های nام و mام یا کران پایین دسته‌های nام و mام باشند.

- (طول دسته) $L = \frac{R\,(\text{دامنه تغییرات})}{n\,(\text{تعداد دسته})}$
- R= کوچک‌ترین داده - بزرگ‌ترین داده

R: دامنه‌ی تغییرات

••• مثلثات •••

نحوه‌ی محاسبه‌ی نسبت‌های مثلثاتی کمان‌های معلوم: ابتدا به جدول زیر توجه کنید:

نسبت \ کمان	۰	$\frac{\pi}{۶}\,(۳۰^\circ)$	$\frac{\pi}{۴}\,(۴۵^\circ)$	$\frac{\pi}{۳}\,(۶۰^\circ)$	$\frac{\pi}{۲}\,(۹۰^\circ)$	$\pi\,(۱۸۰^\circ)$	$\frac{۳\pi}{۲}\,(۲۷۰^\circ)$
sin	۰	$\frac{۱}{۲}$	$\frac{\sqrt{۲}}{۲}$	$\frac{\sqrt{۳}}{۲}$	۱	۰	-۱
cos	۱	$\frac{\sqrt{۳}}{۲}$	$\frac{\sqrt{۲}}{۲}$	$\frac{۱}{۲}$	۰	-۱	۰
tan	۰	$\frac{\sqrt{۳}}{۳}$	۱	$\sqrt{۳}$	تعریف نشده	۰	تعریف نشده
cot	تعریف نشده	$\sqrt{۳}$	۱	$\frac{\sqrt{۳}}{۳}$	۰	تعریف نشده	۰

روش محاسبه‌ی نسبت‌های سایر کمان‌ها به صورت زیر است:

الگوریتم	$\sin(\frac{۷\pi}{۶})$	$\tan(\frac{۵\pi}{۳})$
۱ کمان داده شده را به صورت $k\pi \pm \alpha$ طوری نمایش می‌دهیم که $۰ < \alpha < \frac{\pi}{۲}$ باشد.	$\sin(\pi + \frac{\pi}{۶})$	$\tan(۲\pi - \frac{\pi}{۳})$
۲ با توجه به روابط نسبت‌های مثلثاتی $\frac{k\pi}{۲} \pm \alpha$ عبارت را ساده‌تر می‌کنیم.	$-\sin\frac{\pi}{۶}$	$-\tan\frac{\pi}{۳}$
۳ با کمک داده‌های جدول بالا حاصل را می‌یابیم.	$-\frac{۱}{۲}$	$-\sqrt{۳}$

قضیه‌ی سینوس‌ها:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

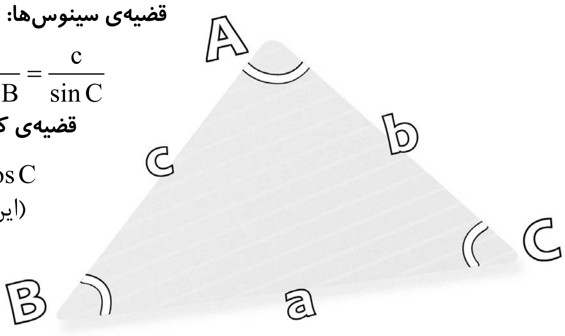
قضیه‌ی کسینوس‌ها:

$$c^۲ = a^۲ + b^۲ - ۲ab\cos C$$

(این رابطه قابل تعمیم به دو ضلع دیگر نیز می‌باشد.)

مساحت مثلث:

$$S = \frac{۱}{۲}ab\sin C = \frac{۱}{۲}ac\sin B = \frac{۱}{۲}bc\sin A$$



••• روابط مثلثاتی •••

۱	$1+\tan^2\alpha=\frac{1}{\cos^2\alpha}$	۱۱	$\sin^2\alpha=\frac{1-\cos2\alpha}{2}$
۲	$1+\cot^2\alpha=\frac{1}{\sin^2\alpha}$	۱۲	$\tan^2\alpha=\frac{1-\cos2\alpha}{1+\cos2\alpha}$
۳	$\sin(\alpha\pm\beta)=\sin\alpha\cos\beta\pm\cos\alpha\sin\beta$	۱۳	$\cos2\alpha=\frac{1-\tan^2\alpha}{1+\tan^2\alpha}$
۴	$\cos(\alpha\pm\beta)=\cos\alpha\cos\beta\mp\sin\alpha\sin\beta$	۱۴	$\sin2\alpha=\frac{2\tan\alpha}{1+\tan^2\alpha}$
۵	$\sin\alpha\pm\cos\alpha=\sqrt{2}\sin(\alpha\pm\frac{\pi}{4})$	۱۵	$\tan2\alpha=\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$
۶	$\tan(\alpha\pm\beta)=\frac{\tan\alpha\pm\tan\beta}{1\mp\tan\alpha\tan\beta}$	۱۶	$\tan\alpha+\cot\alpha=\frac{2}{\sin2\alpha}$
۷	$\tan(\frac{\pi}{4}\pm\alpha)=\frac{1\pm\tan\alpha}{1\mp\tan\alpha}$	۱۷	$\cot\alpha-\tan\alpha=2\cot2\alpha$
۸	$\sin2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$	۱۸	$1\pm\sin2\alpha=(\sin\alpha\pm\cos\alpha)^2$
۹	$\cos2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=2\cos^2\alpha-1=1-2\sin^2\alpha$	۱۹	$\cos^4\alpha-\sin^4\alpha=\cos2\alpha$
۱۰	$\cos^2\alpha=\frac{1+\cos2\alpha}{2}$	۲۰	$\sin^4\alpha+\cos^4\alpha=1-\frac{1}{2}\sin^2 2\alpha$

••• تابع •••

تابع مرکب: $D_{fog}=\{x\in D_g \mid g(x)\in D_f\}$

- اگر f و g به صورت زوج مرتبی بودند، برای تشکیل fog از دامنه‌ی g شروع کنید و تشکیل شدن fog را بررسی کنید.
- اگر g و fog معلوم باشند و f را بخواهیم با فرض $g(x)=t$ و محاسبه‌ی x برحسب t، $f(t)$ را برحسب t و در نتیجه $f(x)$ را می‌یابیم.
- اگر f و fog معلوم باشند، با کمک f، تابع $f(g(x))$ را برحسب g می‌یابیم و با برابر قراردادن سمت راست دو تساوی موجود از $f(g(x))$، تابع g را می‌یابیم.

تابع معکوس: $f^{-1}=\{(y,x) \mid (x,y)\in f\}$

- شرط معکوس‌پذیری یک تابع، یک‌به‌یک بودن تابع است.
- دامنه‌ی f، همان برد f^{-1} و برد f، همان دامنه‌ی f^{-1} است.
- نمودار f و f^{-1} نسبت به خط $y=x$ قرینه‌اند.
- اگر f و f^{-1} تلاقی داشته باشند، حداقل یکی از نقاط تلاقی روی خط $y=x$ است.
- اگر f صعودی اکید باشد، تمام نقاط تلاقی روی خط $y=x$ است.
- $(f^{-1}of)(x)=x, x\in D_f$ و $(fof^{-1})(x)=x, x\in D_{f^{-1}}$
- $(fog)^{-1}=g^{-1}of^{-1}$

- برای محاسبه‌ی تابع معکوس تابع f، در معادله‌ی $y=f(x)$، x را برحسب y یافته و سپس با تبدیل y به x و x به y، f^{-1} را می‌یابیم.

اعمال روی توابع

$$D_{f\overset{+}{\underset{\times}{-}}g}=D_f\cap D_g \qquad D_{\frac{f}{g}}=D_f\cap D_g-\{x:g(x)=0\}$$

- قبل از محاسبه‌ی ضابطه‌ها، حتماً دامنه را محاسبه کنید.

توابع متناوب

- تابع f متناوب با دوره‌ی T است هرگاه: $f(x+T)=f(x)$

تابع	T	تابع	T
$\sin(ax+b)$ $\cos(ax+b)$	$\frac{2\pi}{\lvert a\rvert}$	$\tan(ax+b)$ $\cot(ax+b)$	$\frac{\pi}{\lvert a\rvert}$
$[ax]+[-ax]$ $ax-[ax]$	$\frac{1}{\lvert a\rvert}$	$(-1)^{[x]}$	$\frac{2}{\lvert a\rvert}$

- قدرمطلق و توان زوج، دوره‌ی تناوب توابع sin و cos را نصف می‌کنند و بر دوره‌ی تناوب tan و cot بی‌اثر است.

دامنه

- تابع چندجمله‌ای : $\mathbb{R}$
- $\sqrt[2n+1]{g(x)} : D_g$
- $\sqrt[2n]{g(x)} : g(x) \geq 0$
- تابع کسری گویا : $\mathbb{R} - \{$ریشه‌های مخرج$\}$
- $\sin(g(x)) : D_g$
- $\cos(g(x)) : D_g$
- $\tan(g(x)) : \mathbb{R} - \left\{ g(x) = k\pi + \frac{\pi}{2} \right\}$
- $\cot(g(x)) : \mathbb{R} - \{ g(x) = k\pi \}$
- $\log_{u(x)}^{g(x)} : \begin{cases} g(x) > 0 \\ u(x) > 0 \\ u(x) \neq 1 \end{cases}$ (اشتراک بگیرید)
- $[g(x)] : D_g$
- $|g(x)| : D_g$

محاسبه‌ی برد

۱ مربع کامل کردن: $x^2 \pm ax = (x \pm \frac{a}{2})^2 - \frac{a^2}{4}$

۲ محاسبه‌ی x برحسب y : با کمک روش Δ در حل معادله‌ی درجه دو یا طرفین وسطین و جدا کردن x، به یکی از دو حالت زیر می‌رسیم:

۱ $x = g(y) \Rightarrow$ برد $= g$ دامنه‌ی

۲ $\sqrt{x}$ یا x^{2n} یا $|x| = g(y) \Rightarrow$ برد $= g(y) \geq 0$ مجموعه جواب

۳ استفاده از **نامساوی‌ها:**

A $(x > 0) x + \frac{1}{x} \geq 2$

B $(x < 0) x + \frac{1}{x} \leq -2$

C $\sqrt{u} \geq 0, |u| \geq 0$

D روابط براکتی و قدرمطلق

۴ استفاده از روش رسم نمودار

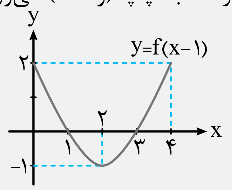
۵ ساختن تابع

مثال:

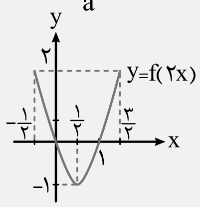
$$y = \frac{1}{1+x^2} \Rightarrow x^2 \geq 0 \Rightarrow 1 + x^2 \geq 1 \Rightarrow 0 < \frac{1}{1+x^2} \leq 1 \Rightarrow \text{برد} = (0, 1]$$

انتقال نمودار

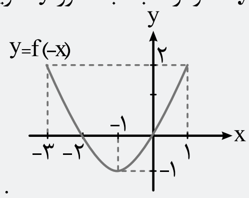
$y = f(x+a)$: اگر a مثبت (منفی) باشد، نمودار $|a|$ واحد به چپ (راست) می‌رود.



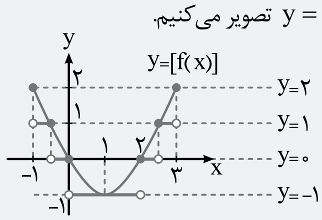
$y = f(ax)$: اگر $a > 1$، نمودار در راستای افقی منقبض (با ضریب $\frac{1}{a}$) و اگر $0 < a < 1$ باشد، نمودار منبسط (با ضریب $\frac{1}{a}$) می‌شود.

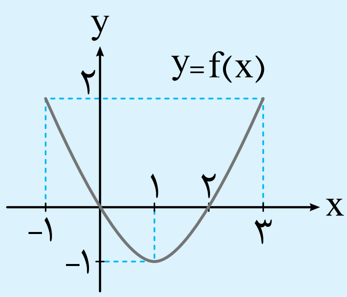


$y = f(-x)$: نمودار نسبت به محور yها قرینه می‌شود.

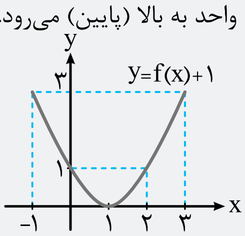


$y = [f(x)]$: روی نمودار f خطوط موازی محورxها با معادلات $y = n\ (n \in \mathbb{Z})$ را رسم می‌کنیم. نقاط تقاطع این خطوط با نمودار f را توپر می‌کنیم. بخشی از نمودار f که بین دو خط $y = n$ و $y = n+1$ قرار دارد را روی خط $y = n$ تصویر می‌کنیم.

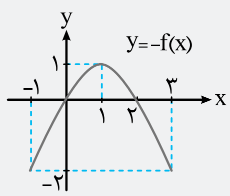




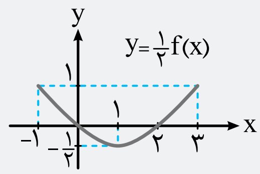
$y = f(x) + a$: اگر a مثبت (منفی) باشد، نمودار $|a|$ واحد به بالا (پایین) می‌رود.



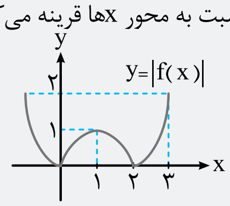
$y = -f(x)$: نمودار نسبت به محور xها قرینه می‌شود.



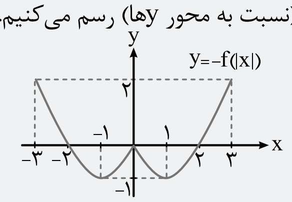
$y = af(x)$: اگر $a > 1$، نمودار در راستای عمودی کشیده می‌شود و اگر $0 < a < 1$، نمودار فشرده خواهد شد.



$y = |f(x)|$: قسمت‌هایی از منحنی که پایین محور xها است را نسبت به محور xها قرینه می‌کنیم.



$y = f(|x|)$: قسمتی از نمودار که سمت چپ محور yهاست را حذف و به جای آن قرینه‌ی سمت راست را (نسبت به محور yها) رسم می‌کنیم.



●●● رفع ابهام‌های صفر صفرم ●●●

۱ **حذف عامل صفرشونده:** با توجه به اینکه $x \to a$، عامل صفرشونده $(x-a)$ است. با حذف آن از صورت و مخرج، رفع ابهام می‌کنیم.

۲ **گویا کردن:** در توابع شامل رادیکال، معمولاً می‌توان با گویا کردن و سپس حذف عامل صفرشونده، رفع ابهام کرد.

۳ **استفاده از هوپیتال:** $\text{هوپیتال} = \dfrac{\text{مشتق صورت}}{\text{مشتق مخرج}}$

۴ **استفاده از هم‌ارزی‌ها:**

۱ $\sin^n u \underset{u\to 0}{\sim} u^n$

۲ $\tan^n u \underset{u\to 0}{\sim} u^n$

۳ $1-\cos u \underset{u\to 0}{\sim} \dfrac{u^2}{2}$

۴ $1-\cos^m u \underset{u\to 0}{\sim} \dfrac{mu^2}{2}$

۵ $(1\pm u)^m \underset{u\to 0}{\sim} 1\pm mu$

۶ $\tan u-\sin u \underset{u\to 0}{\sim} \dfrac{u^3}{2}$

۷ چندجمله‌ای P (فاقد عدد ثابت) $\underset{u\to 0}{\sim}$ جمله‌ی با توان کم‌تر

۵ **تغییر متغیر:** عامل صفرشونده‌ی $(x-a)$ را برابر t قرار داده، پس $x=a+t$. در این حالت $t\to 0$ و در نتیجه می‌توان از هم‌ارزی‌ها کمک گرفت.

●●● رفع ابهام‌های بی‌نهایتی ●●●

۱ $\dfrac{\infty}{\infty}$:

۱ هر چندجمله‌ای از x وقتی $x\to\infty$، هم‌ارز است با جمله‌ای که توان x در آن بزرگ‌تر است.

۲ اگر $a>b>0$: $a^x+b^x \underset{x\to\infty}{\sim} a^x$ (اگر $0<a,b<1$ باشد، تنها زمانی می‌توان از این هم‌ارزی استفاده کرد که تابع فاقد عدد ثابت باشد.)

۲ $\infty-\infty$:

۱ هم‌ارزی رادیکالی: $\sqrt[k]{ax^k+bx^{k-1}+\dots} \underset{x\to\infty}{\sim} \sqrt[k]{a}\left|x+\dfrac{b}{ak}\right|$

(اگر k فرد باشد، قدرمطلق نمی‌گذاریم.)

۲ گویا کردن

۳ مخرج مشترک‌گیری - بسط - اتحادها و ...

۳ 1^∞ (یک‌حدی):

۱ $(1+\dfrac{1}{x})^x \underset{x\to\infty}{\sim} e$

۲ اگر $\lim\limits_{x\to\infty}(f)^g = (\text{یک حدی})^\infty$ آن‌گاه:

$$\text{حاصل حد} = e^{\lim\limits_{x\to\infty}(f-1)g}$$

●●● مجانب‌ها ●●●

مجانب قائم: خط $x=a$ مجانب قائم تابع f است هرگاه یکی از سه حالت زیر رخ دهد:

۱ $\lim\limits_{x\to a} f=+\infty$ یا $-\infty$

۲ $\lim\limits_{x\to a^-} f=+\infty$ یا $-\infty$

۳ $\lim\limits_{x\to a^+} f=+\infty$ یا $-\infty$

مجانب افقی: خط $y=L$ مجانب افقی f است هرگاه:

۱ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=L$

۲ $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=L$

مجانب مایل: اگر خط $y=mx+h$ مجانب مایل تابع f باشد، آن‌گاه:

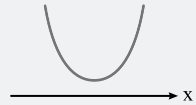
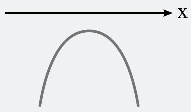
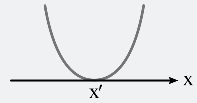
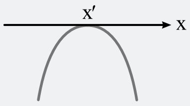
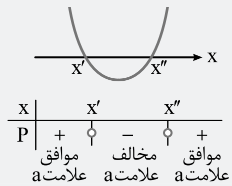
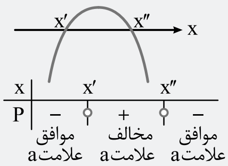
۱ $m=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}$

۲ $h=\lim\limits_{x\to\infty}(f(x)-mx)$

- در توابع کسری که درجه‌ی صورت، یک واحد از درجه‌ی مخرج بیشتر است، از تقسیم صورت بر مخرج، مجانب مایل را می‌یابیم.
- در توابع رادیکالی در صورت امکان از هم‌ارزی رادیکالی استفاده می‌کنیم.

●●● تعیین علامت دوجمله‌ای‌ها ●●●

برای تعیین علامت عبارت $P = ax^2 + bx + c$ کافی است به جدول زیر توجه کنید.

	$a > 0$ (می‌نیمم دارد)	$a < 0$ (ماکزیمم دارد)
$\Delta < 0$ (ریشه ندارد)	 تابع همواره مثبت یا بالای محور xها	 تابع همواره منفی یا پایین محور xها
$\Delta = 0$ (یک ریشه‌ی مضاعف دارد)	 تابع همواره نامنفی (بر محور xها مماس و بالای آن)	 تابع همواره نامثبت (بر محور xها مماس و پایین آن)
$\Delta > 0$ (دو ریشه‌ی حقیقی دارد)		

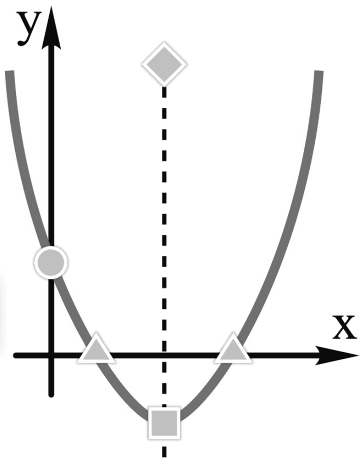
نکات متفرقه

۱ اگر $a + b + c = 0$، یک ریشه ۱ و دیگری $\frac{c}{a}$ است.

۲ اگر $a + c = b$، یک ریشه (۱-) و دیگری $-\frac{c}{a}$ است.

۳ اگر ضرایب گویا و یک ریشه $a - \sqrt{b}$ باشد، دیگری $a + \sqrt{b}$ است.

۴ یک ریشه x برابر ریشه‌ی دیگر باشد: $\frac{b^2}{ac} = \frac{(k+1)^2}{k}$



محور تقارن

معادله: $x = -\frac{b}{2a}$

مرکز تقارن ندارد.

رأس سهمی

$$\begin{vmatrix} -\frac{b}{2a} \\ f(-\frac{b}{2a}) = \frac{-\Delta}{4a} \end{vmatrix}$$

$a < 0$: تابع ماکزیمم دارد.

$a > 0$: تابع می‌نیمم دارد.

عرض از مبدأ

مختصات: $\begin{vmatrix} 0 \\ c \end{vmatrix}$

ریشه (طول از مبدأ)

$\Delta < 0$: ریشه ندارد.

$\Delta = 0$: ریشه‌ی مضاعف دارد. $\Rightarrow$ ریشه $= \frac{-b}{2a}$

$\Delta > 0$: دو ریشه دارد.

ریشه‌ها هم‌علامت: $\frac{c}{a} > 0 \Rightarrow$ ضرب ریشه‌ها $= \frac{c}{a}$

ریشه‌ها مختلف العلامت: $\frac{c}{a} < 0$
نمودار، از هر چهار ناحیه می‌گذرد.

$$\left\{\begin{array}{l} \text{ریشه‌ها مثبت: } -\frac{b}{a} > 0 \\ \text{ریشه‌ها منفی: } -\frac{b}{a} < 0 \end{array}\right. \Rightarrow \text{جمع ریشه‌ها} = -\frac{b}{a}$$

$$\left|\text{تفاضل ریشه‌ها}\right| = \frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}$$

••• دنباله‌های حسابی و هندسی •••

دنباله‌ی هندسی		دنباله‌ی حسابی (عددی)
$a_n = a_۱ q^{n-۱}$	جمله‌ی عمومی	$a_n = a_۱ + (n-۱)d$
$q^{n-m} = \frac{a_n}{a_m}$	محاسبه‌ی قدرنسبت با کمک جمله‌ی nام و mام	$d = \frac{a_n - a_m}{n-m}$
$b^۲ = ac$	واسطه‌ها برای سه‌جمله‌ی a، b، c	$b = \frac{a+c}{۲}$
$q = \sqrt[n+۱]{\frac{b}{a}}$	قرار دادن n واسطه بین دو عدد a و b	$d = \frac{b-a}{n+۱}$
$S_n = \frac{a_۱(۱-q^n)}{۱-q}$	مجموع جملات	$S_n = \frac{n}{۲}[a_۱ + a_n] = \frac{n}{۲}[۲a_۱ + (n-۱)d]$
$a_n \times a_m = a_p \times a_k$	$n+m=p+k$	$a_n + a_m = a_p + a_k$

نکات متفرقه

■ نسبت مجموع ۲n جمله‌ی اول به مجموع n جمله‌ی اول در دنباله‌ی هندسی برابر $۱+q^n$ است.

■ نسبت مجموع n جمله‌ی دوم به مجموع n جمله‌ی اول در دنباله‌ی هندسی برابر q^n است.

■ جمله‌ی عمومی یک دنباله‌ی حسابی به صورت $a_n = An + B$ هم قابل نمایش است. در این حالت: $d = A$.

■ مجموع n جمله‌ی اول یک دنباله‌ی حسابی به صورت $S_n = An^۲ + Bn$ قابل نمایش است، که در آن $d = ۲A$ و $a_۱ = S_۱$

دنباله	حسابی	هندسی
صعودی اکید	$d > ۰$	$q > ۱$
نزولی اکید	$d < ۰$	$۰ < q < ۱$
هم صعودی و هم نزولی	$d = ۰$	$q = ۱$
غیر یکنوا	-	$q < ۰$

••• دنباله •••

کرانداری در دنباله‌ها:

کراندار: حاصل $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ برابر $\pm\infty$ نشود.
از پایین کراندار: حاصل $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ برابر $-\infty$ نشود.
از بالا کراندار: حاصل $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ برابر $+\infty$ نشود.

یکنوایی در دنباله‌ها:

۱

۱ اگر به ازای $n \geq ۱$، $a_{n+۱} - a_n \geq ۰$ آن‌گاه دنباله صعودی است.

۲ اگر به ازای $n \geq ۱$، $a_{n+۱} - a_n \leq ۰$ آن‌گاه دنباله نزولی است.

۲ اگر تمام جملات دنباله مثبت باشند، آن‌گاه به ازای $n \geq ۱$:

۱ اگر $\frac{a_{n+۱}}{a_n} \geq ۱$، دنباله صعودی است.

۲ اگر $\frac{a_{n+۱}}{a_n} \leq ۱$، دنباله نزولی است.

(از این نکته بیشتر در دنباله‌های نمایی و فاکتوریلی استفاده می‌شود.)

۳ استفاده از نمودار تابع نظیر دنباله (به ازای $n \geq ۱$) (در دنباله به جای n، x قرار دهید، تابع نظیر دنباله به دست می‌آید.)

۴ استفاده از مشتق تابع نظیر دنباله به ازای $x \geq ۱$:

۱ اگر $f' \geq ۰$ تابع و در نتیجه دنباله، صعودی است.

۲ اگر $f' \leq ۰$ تابع و در نتیجه دنباله، نزولی است.

۵ اگر جملات دنباله‌ی $\{a_n\}$ هم‌علامت باشند:

۱ اگر $\{a_n\}$ صعودی (یا نزولی) باشد، $\left\{\frac{۱}{a_n}\right\}$ نزولی (یا صعودی) است.

۲ اگر $\{a_n\}$ صعودی (یا نزولی) باشد، $\{-a_n\}$ نزولی (یا صعودی) است.

۶ اگر بدانیم دنباله یا صعودی است یا نزولی، تنها کافی است دو جمله‌ی اول را پیدا کنیم:

۱ اگر $a_۲ > a_۱$؛ دنباله صعودی

۲ اگر $a_۲ < a_۱$؛ دنباله نزولی است.

اگر دنباله همگرا به L باشد، می‌توانید به جای $a_۲$ از L استفاده کنید.

••• قوانین براکت •••

۱ $x \in \mathbb{R} : [x] \in \mathbb{Z}$

۲ $k \in \mathbb{Z} : [x+k] = [x] + k$

۳ $[x] = a \xrightarrow{a\in\mathbb{Z}} a \leq x < a+۱$

۴ $[nx] = [x] + \left[x + \frac{۱}{n}\right] + \ldots + \left[x + \frac{n-۱}{n}\right]$

۵ $[x] + [-x] = \begin{cases} ۰, & x \in \mathbb{Z} \\ -۱, & x \notin \mathbb{Z} \end{cases}$

۶ $[x] \leq a \xrightarrow{a\in\mathbb{Z}} x < a+۱$

۷ $[x] \geq a \xrightarrow{a\in\mathbb{Z}} x \geq a$

۸ $x - ۱ < [x] \leq x$

۹ $[x] \leq x < [x] + ۱$

۱۰ $۰ \leq x - [x] < ۱$

●●● قوانین قدرمطلق ●●●

۱ $|a|=-a \Leftrightarrow a<0$

۲ $|a|=a \Leftrightarrow a\geq 0$

۳ $|a|>0 \Rightarrow a\neq 0$

۴ $|x|>a \xrightarrow{a>0} \begin{cases} x>a \\ \text{یا} \\ x<-a \end{cases}$

۵ $|-a|=|a|$

۶ $|x|<a \xrightarrow{a>0} -a<x<a$

۷ $-|a|\leq a\leq |a|$

۸ $a\in\mathbb{R}: |a|\geq 0$

۹ $a^2=|a|^2$

۱۰ $\sqrt{a^2}=|a|$

۱۱ $|a|>a \Rightarrow a<0$

۱۲ $|ab|=|a||b|$

۱۳ $|a-b|\geq |a|-|b|$

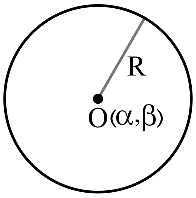
۱۴ $\sqrt[2n]{a^{2k}}=\sqrt[n]{|a|^k}$

۱۵ $|a\pm b|\leq |a|+|b|$

۱۶ $|x|=|y| \Rightarrow x=\pm y$

۱۷ $|x|=a \xrightarrow{a>0} x=\pm a$

●●● دایره ●●●



$\Rightarrow \begin{cases} \text{معادله‌ی استاندارد}: (x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=R^2 \\ \text{معادله‌ی گسترده}: x^2+y^2+ax+by+c=0 \\ \text{نکته: در معادله‌ی گسترده:} \\ O=(-\frac{a}{2},-\frac{b}{2}), R=\frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2-4c} \end{cases}$

نکته: اگر از معادله‌ی گسترده‌ی دایره به صورت جداگانه نسبت به x و نسبت به y مشتق بگیریم و برابر صفر قرار دهیم، مختصات مرکز به دست می‌آید.

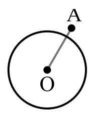
وضعیت نقطه نسبت به دایره:

نکته: برای بررسی وضعیت نقطه‌ی $A(x_0,y_0)$ نسبت به دایره‌ی $C(x,y)$ داریم:

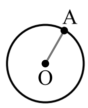
۱) $C(x_0,y_0)>0 \Rightarrow$ نقطه خارج دایره است.

۲) $C(x_0,y_0)=0 \Rightarrow$ نقطه روی دایره است. $\Rightarrow OA=R$

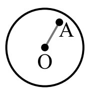
۳) $C(x_0,y_0)<0 \Rightarrow$ نقطه داخل دایره است.



$OA>R$
نقطه خارج دایره

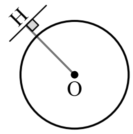


$OA=R$
نقطه روی دایره

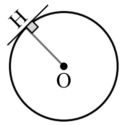


$OA<R$
نقطه داخل دایره

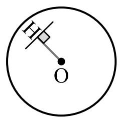
وضعیت خط نسبت به دایره:



$OH>R$
خط، خارج دایره است.



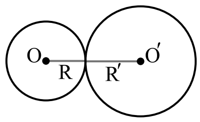
$OH=R$
خط بر دایره مماس است.



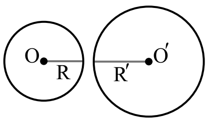
$OH<R$
خط، دایره را در دو نقطه قطع می‌کند.

نکته: در حالتی که خط بر دایره مماس است، فاصله‌ی مرکز دایره از خط (همان OH) برابر شعاع دایره است.

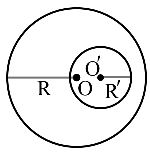
وضعیت دو دایره نسبت به هم:

مماس خارج


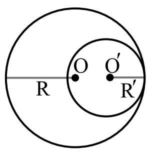
$OO'=R+R'$

متخارج


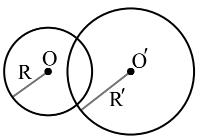
$OO'>R+R'$

متداخل


$OO'<|R-R'|$

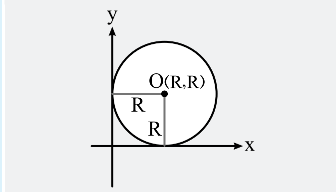
مماس داخل


$OO'=|R-R'|$

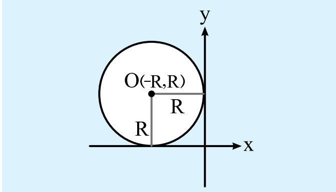
متقاطع


$|R-R'|<OO'<R+R'$

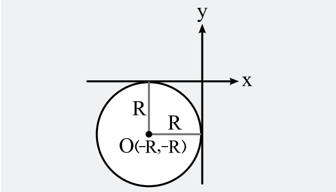
دایره‌ی مماس بر محورهای مختصات:



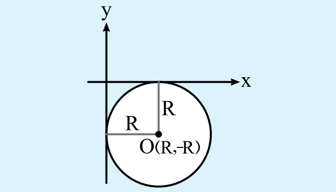
$(x-R)^2+(y-R)^2=R^2$



$(x+R)^2+(y-R)^2=R^2$



$(x+R)^2+(y+R)^2=R^2$

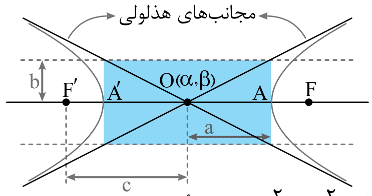


$(x-R)^2+(y+R)^2=R^2$

نکته: از نقطه‌ای خارج دایره به مختصات $A(x_0, y_0)$ دو مماس با طول‌های برابر بر دایره می‌توان رسم کرد. طول این مماس‌ها برابر است با: $L=\sqrt{C(x_0, y_0)}$. یعنی کافیست نقطه را در دایره قرار دهیم و سپس جذر بگیریم.

●●● هذلولی ●●●

■ قدرمطلق تفاضل هر نقطه روی آن از دو کانون برابر $2a$ است.



رأس‌های کانونی: A و A' $\qquad c^2=a^2+b^2$

کانون: F و F'

هذلولی افقی: $\dfrac{(x-\alpha)^2}{a^2}-\dfrac{(y-\beta)^2}{b^2}=1$

هذلولی قائم: $\dfrac{(y-\beta)^2}{a^2}-\dfrac{(x-\alpha)^2}{b^2}=1$

■ معادله‌ی گسترده‌ی هذلولی به صورت $Ax^2+By^2+Cx+Dy+E=0$ است که در آن $AB<0$.

خروج از مرکز هذلولی:

$$e=\frac{c}{a}=\sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}}$$

نکته: طول وتر کانونی هذلولی: $MN=\dfrac{2b^2}{a}$

نکته: اگر θ زاویه‌ی بین مجانب‌های هذلولی باشد آن‌گاه: $\tan\dfrac{\theta}{2}=\dfrac{b}{a}$

نکته: فاصله‌ی هر کانون از خطوط مجانب برابر b است.

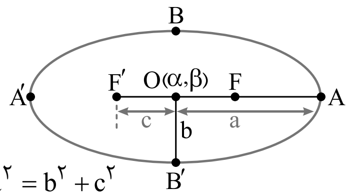
هذلولی متساوی‌القطرین: در هذلولی متساوی‌القطرین $a=b$ است.

در نتیجه خروج از مرکز برابر $\sqrt{2}$ و زاویه‌ی بین مجانب‌ها 90° است.

نکته: در هذلولی افقی، شیب مجانب‌ها $\pm\dfrac{b}{a}$ و در هذلولی قائم، شیب مجانب‌ها $\pm\dfrac{a}{b}$ است.

●●● بیضی ●●●

■ مجموع فواصل هر نقطه روی آن از دو کانون برابر $2a$ است.



رأس‌های کانونی: A و A'

کانون: F و F'

رأس غیرکانونی: B و B'

$a^2=b^2+c^2$

بیضی افقی: $\dfrac{(x-\alpha)^2}{a^2}+\dfrac{(y-\beta)^2}{b^2}=1$

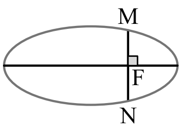
بیضی قائم: $\dfrac{(x-\alpha)^2}{b^2}+\dfrac{(y-\beta)^2}{a^2}=1$

■ معادله‌ی گسترده‌ی بیضی نیز به صورت $Ax^2+By^2+Cx+Dy+E=0$ است. برای محاسبه‌ی مختصات مرکز می‌توانیم به صورت جداگانه نسبت به x و y مشتق بگیریم و برابر صفر قرار دهیم.

خروج از مرکز بیضی:

$$e=\frac{c}{a}=\sqrt{1-\frac{b^2}{a^2}}=\sqrt{1-\frac{\text{کم‌ترین ضریب } x^2, y^2}{\text{بیشترین ضریب } x^2, y^2}}$$

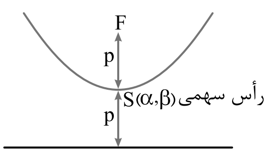
نکته: طول وتر کانونی بیضی یعنی پاره‌خطی که دو سر آن روی بیضی است و در کانون بر محور کانونی عمود است برابر است با:



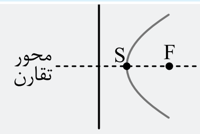
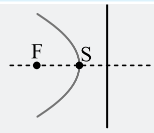
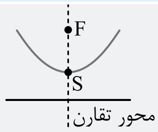
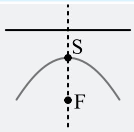
$\Rightarrow MN=\dfrac{2b^2}{a}$

●●● سهمی ●●●

■ هر نقطه روی سهمی از کانون و خط هادی به یک فاصله است و این فاصله برابر p (پارامتر سهمی) است.



نمودارهای سهمی به همراه ضابطه‌ی آن‌ها به صورت زیر است: $(p > 0)$

سهمی افقی		سهمی قائم	
سهمی افقی با دهانه‌ی رو به راست	**سهمی افقی با دهانه‌ی رو به چپ**	**سهمی قائم با دهانه‌ی رو به بالا**	**سهمی قائم با دهانه‌ی رو به پایین**
			
$(y-\beta)^2 = 4p(x-\alpha)$	$(y-\beta)^2 = -4p(x-\alpha)$	$(x-\alpha)^2 = 4p(y-\beta)$	$(x-\alpha)^2 = -4p(y-\beta)$
$F(\alpha+p,\beta)$	$F(\alpha-p,\beta)$	$F(\alpha,\beta+p)$	$F(\alpha,\beta-p)$
خط هادی : $x=\alpha-p$	خط هادی : $x=\alpha+p$	خط هادی : $y=\beta-p$	خط هادی : $y=\beta+p$

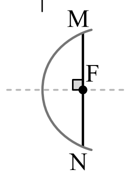
معادله‌ی گسترده: معادله‌ی گسترده‌ی سهمی افقی به صورت $Ay^2+By+Cx+D=0$ و معادله‌ی گسترده‌ی سهمی قائم به صورت $Ax^2+Bx+Cy+D=0$ است.

نکته: برای محاسبه‌ی مختصات رأس سهمی از معادله‌ی سهمی نسبت به عامل درجه‌ی دوم، مشتق می‌گیریم و برابر صفر قرار می‌دهیم. مؤلفه‌ی دیگر سهمی با قرار دادن این مقدار در سهمی حاصل می‌شود.

نکته: اگر معادله‌ی گسترده داشته باشیم:

$$p = \left|\frac{\text{ضریب } x \text{ یا } y \text{ (متغیری که عامل درجه‌ی دوم ندارد)}}{4(\text{ضریب } x^2 \text{ یا } y^2)}\right| = \left|\frac{C}{4A}\right|$$

نکته: طول پاره‌خطی که دو سر آن روی سهمی است و در کانون بر محور تقارن سهمی عمود است (طول وتر کانونی سهمی) برابر $4p$ است.



$\Rightarrow MN = 4p$

••• مشتق •••

تابع	مشتق	تابع	مشتق
$y=u^n$	$y'=nu^{n-1}(u')$	$y=\cot^n u$	$y'=n\cot^{n-1}u(-u'(1+\cot^2 u))$
$y=\sqrt[n]{u^m}\ (m<n)$	$y'=\dfrac{mu'}{n\sqrt[n]{u^{n-m}}}$	$y=\ln\lvert u\rvert$	$y'=\dfrac{u'}{u}$
$y=\dfrac{au+b}{cu+d}$	$y'=\dfrac{ad-bc}{(cu+d)^2}$	$y=e^u$	$y'=u'e^u$
$y=\sin^n u$	$y'=n\sin^{n-1}u(u'\cos u)$	$y=a^u$	$y'=u'a^u\ln a$
$y=\cos^n u$	$y'=n\cos^{n-1}u(-u'\sin u)$	$y=\log_a^u$	$y'=\dfrac{u'}{u}\times\dfrac{1}{\ln a}$
$y=\tan^n u$	$y'=n\tan^{n-1}u(u'(1+\tan^2 u))$		

مشتق ضمنی: اگر $f(x,y)=0$ باشد، داریم:

$$y' = -\frac{f'_x}{f'_y} = -\frac{x \text{ مشتق نسبت به}}{y \text{ مشتق نسبت به}}$$

••• انتگرال •••

$\int (ax+b)^n dx = \frac{1}{a}\times\frac{(ax+b)^{n+1}}{n+1}+c\ (n\neq -1)$	$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}+c$
$\int (f(x)\pm g(x))dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$	$\int kf(x)dx = k\int f(x)dx$
$\int \cos ax dx = \frac{1}{a}\sin ax + c$	$\int \sin ax dx = \frac{-1}{a}\cos ax + c$
$\int (1+\cot^2 ax)dx = \frac{-1}{a}\cot ax + c$	$\int (1+\tan^2 ax)dx = \frac{1}{a}\tan ax + c$
$\int e^{ax+b}dx = \frac{1}{a}e^{ax+b}+c$	$\int \frac{dx}{ax+b} = \frac{1}{a}\ln\lvert ax+b\rvert + c$
$\int \cot ax dx = \frac{1}{a}\ln\lvert\sin ax\rvert + c$	$\int \tan ax dx = \frac{-1}{a}\ln\lvert\cos ax\rvert + c$

••• ویژگی‌های انتگرال معین •••

$$\int_a^a f(x)dx = 0 \qquad \int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$$

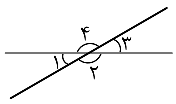
$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

قضیه‌ی بنیادی اول:

$$y = \int_{u(x)}^{v(x)} f(t)dt \Rightarrow y' = v'(x)f(v(x)) - u'(x)f(u(x))$$

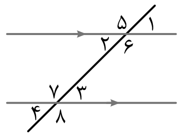
••• خط و زاویه •••

زوایای متقابل به رأس:



$$\Rightarrow \hat{1} = \hat{3},\ \hat{2} = \hat{4}$$

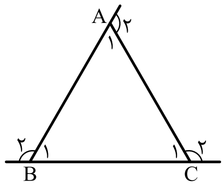
خط‌های موازی و مورب:



$$\Rightarrow \hat{1} = \hat{2} = \hat{3} = \hat{4}$$
$$\Rightarrow \hat{5} = \hat{6} = \hat{7} = \hat{8}$$

هر زاویه‌ی حاده با هر زاویه‌ی منفرجه، مکمل هستند.

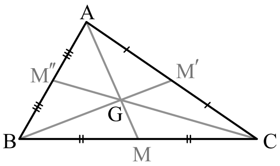
••• زوایا در مثلث •••



$$\Rightarrow \hat{A}_1 + \hat{B}_1 + \hat{C}_1 = 180^\circ$$
$$\Rightarrow \hat{B}_2 = \hat{A}_1 + \hat{C}_1$$
$$\Rightarrow \hat{A}_2 = \hat{B}_1 + \hat{C}_1$$
$$\Rightarrow \hat{C}_2 = \hat{A}_1 + \hat{B}_1$$

••• اجزای مثلث •••

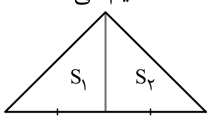
۱ میانه: ضلع مقابل را نصف می‌کند.



$$BG = 2GM'$$
$$BG = \frac{2}{3}BM'$$
$$GM'' = \frac{1}{3}BM'$$

این روابط برای سایر میانه‌ها هم برقرار است.

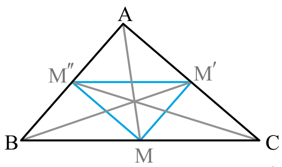
نکته: هر میانه، مثلث را به دو مثلث هم مساحت تقسیم می‌کند.



$$\Rightarrow S_1 = S_2$$

نکته: همه‌ی میانه‌ها، مثلث را به ۶ مثلث هم‌مساحت تقسیم می‌کنند.

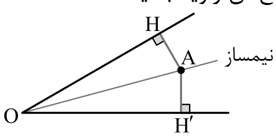
نکته: اگر پای سه میانه‌ی یک مثلث به هم وصل شود، مثلثی ایجاد می‌شود که مساحت آن $\frac{1}{4}$ مساحت مثلث اصلی است.



$$\Rightarrow S_{\overset{\Delta}{MM'M''}} = \frac{1}{4}S_{\overset{\Delta}{ABC}}$$

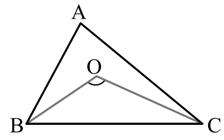
۲ نیمساز: زاویه‌ی هر رأس را نصف می‌کند.

نکته: هر نقطه روی نیمساز از دو ضلع آن زاویه به یک فاصله است.



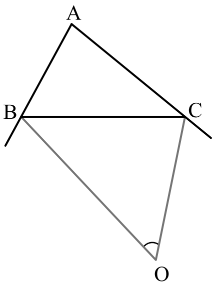
$$\Rightarrow AH = AH'$$

زاویه‌ی بین نیمسازهای داخلی:



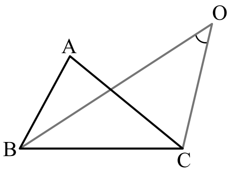
$$\Rightarrow \hat{O} = 90^\circ + \frac{\hat{A}}{2}$$

زاویه‌ی بین نیمسازهای خارجی:



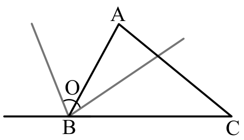
$$\Rightarrow \hat{O} = 90^\circ - \frac{\hat{A}}{2}$$

زاویه‌ی بین نیمساز داخلی یک زاویه و نیمساز خارجی زاویه‌ی دیگر:



$$\Rightarrow \hat{O} = \frac{\hat{A}}{2}$$

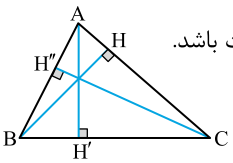
زاویه‌ی بین نیمساز داخلی و خارجی یک زاویه:



$$\Rightarrow \hat{O} = 90^\circ$$

۳ ارتفاع:

نقطه‌ی تلاقی می‌تواند درون، بیرون یا روی مثلث باشد.

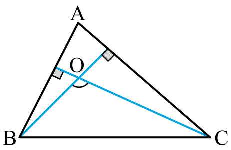


رابطه‌ی بین اضلاع و ارتفاع:

$$S_{\overset{\Delta}{ABC}} = \frac{1}{2}(AH')(BC) = \frac{1}{2}(CH'')(AB) \Rightarrow \boxed{\frac{AB}{BC} = \frac{AH'}{CH''}}$$

یعنی نسبت اضلاع، عکس نسبت ارتفاع‌هاست.

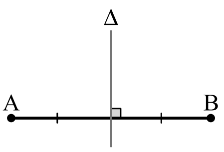
زاویه‌ی بین ارتفاع‌ها:



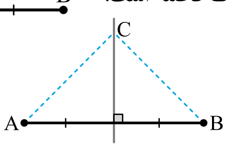
$$\Rightarrow \hat{O} = 180^\circ - \hat{A}$$

۴ عمود منصف

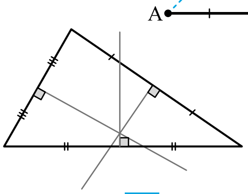
خط Δ عمودمنصف پاره‌خط AB است.



نکته: هر نقطه روی عمودمنصف یک پاره‌خط از دو سر آن پاره‌خط به یک فاصله است.



$$\Rightarrow AC = BC$$



عمودمنصف در مثلث: نقطه‌ی تلاقی می‌تواند داخل، بیرون یا روی مثلث باشد.

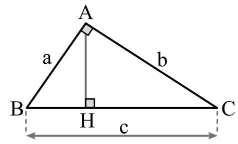
هم‌نهشتی مثلث‌ها: حالت‌های هم‌نهشتی به صورت زیر هستند:

۱ دو ضلع و زاویه‌ی بین **۲** دو زاویه و ضلع بین **۳** سه ضلع

دو مثلث هم‌نهشت، قابل انطباق هستند.

●●● انواع مثلث ●●●

۱ مثلث قائم‌الزاویه:



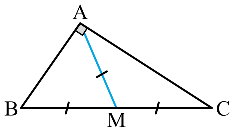
۱ $a^۲+b^۲=c^۲$

۲ $ab=c(AH)\Rightarrow AH=\frac{ab}{c}$

۳ $AH^۲=BH\times HC$

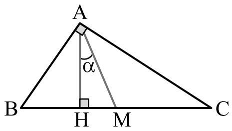
۴ $AB^۲=BH\times BC$ ۵ $AC^۲=CH\times BC$

نکته: در هر مثلث قائم‌الزاویه، میانه‌ی وارد بر وتر، نصف وتر است.



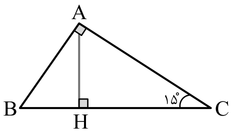
$AM=BM=MC$

نکته: در هر مثلث قائم‌الزاویه، زاویه‌ی بین ارتفاع و میانه برابر است با:



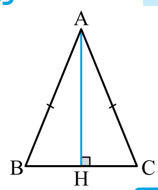
$\Rightarrow \hat{\alpha}=|\hat{B}-\hat{C}|$

نکته: در هر مثلث قائم‌الزاویه با زاویه ۱۵° ارتفاع وارد بر وتر $\frac{۱}{۴}$ وتر است.



$\Rightarrow AH=\frac{۱}{۴}BC$

۲ مثلث متساوی‌الساقین:

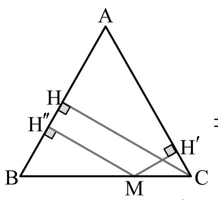


۱ $AB=AC,\ \hat{B}=\hat{C}$

۲ AH؛ نیمساز، عمودمنصف، میانه و ارتفاع است.

۳ $AH^۲+(\frac{BC}{۲})^۲=AB^۲$

نکته: مجموع فواصل هر نقطه روی قاعده از دو ساق، برابر ارتفاع وارد بر ساق است.

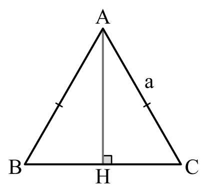


$\Rightarrow MH'+MH''=CH$

(دقت کنید که ارتفاع‌های وارد بر ساق‌ها با هم برابرند.)

نکته: تفاضل فواصل هر نقطه روی امتداد قاعده‌ی مثلث متساوی‌الساقین از دو ساق، برابر ارتفاع وارد بر ساق است.

۳ مثلث متساوی‌الاضلاع:



۱ $AB=BC=AC,\ \hat{A}=\hat{B}=\hat{C}=۶۰^\circ$

۲ AH؛ ارتفاع، نیمساز، عمودمنصف و میانه است.

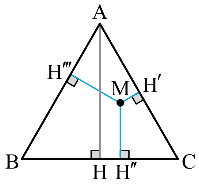
۳ ارتفاع‌های مثلث با هم برابرند.

۴ $B\hat{A}H=C\hat{A}H=۳۰^\circ$

۵ $AH=\frac{\sqrt{۳}}{۲}a$

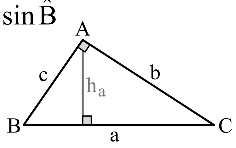
۶ $S=\frac{\sqrt{۳}}{۴}a^۲$

نکته: مجموع فواصل هر نقطه داخل مثلث متساوی‌الاضلاع از سه ضلع، برابر ارتفاع مثلث است.



$MH'+MH''+MH'''=AH=\frac{\sqrt{۳}}{۲}a$

●●● مساحت مثلث ●●●



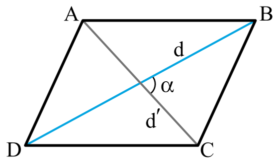
۱ $S=\frac{۱}{۲}ah_a=\frac{۱}{۲}bh_b=\frac{۱}{۲}ch_c$

۲ $S=\frac{۱}{۲}ab\sin\hat{C}=\frac{۱}{۲}bc\sin\hat{A}=\frac{۱}{۲}ac\sin\hat{B}$

۳ با فرض: $P=\frac{a+b+c}{۲}$

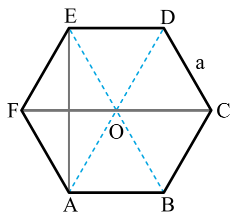
۴ $S=\sqrt{P(P-a)(P-b)(P-c)}$

نکته: مساحت هر چهارضلعی که طول قطرهای آن d و d' و زاویه‌ی بین قطرهای آن α باشد برابر است با:



$S=\frac{۱}{۲}dd'\sin\alpha$

شش‌ضلعی منتظم: از ۶ مثلث متساوی‌الاضلاع و هم‌نهشت تشکیل شده است.



۱ $S=۶(\frac{\sqrt{۳}}{۴})a^۲$

۲ $AE=\sqrt{۳}a$

۳ $CF=۲a$

●●● چندضلعی‌ها ●●●

نکات کلی:

۱ از هر رأس یک n ضلعی محدب، $(n-۳)$ قطر می‌گذرد.

۲ تعداد کل قطرهای n ضلعی محدب برابر $\frac{n(n-۳)}{۲}$ است.

۳ مجموع زوایای داخل هر n ضلعی برابر $(n-۲)۱۸۰^\circ$ است.

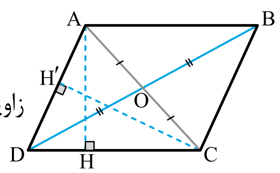
۴ هر زاویه‌ی داخلی n ضلعی منتظم برابر $\frac{(n-۲)۱۸۰^\circ}{n}$ است.

۵ زاویه‌ی بین دو قطر متوالی n ضلعی منتظم برابر $\frac{۱۸۰^\circ}{n}$ است.

۶ مجموع تمام زوایای خارجی در هر n ضلعی محدب برابر ۳۶۰° است.

●●● چندضلعی‌های خاص ●●●

۱ متوازی‌الاضلاع:



۱ $AB=DC, AD=BC$

۲ $AB \parallel DC, AD \parallel BC$

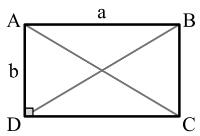
۳ $\hat{A}=\hat{C}, \hat{B}=\hat{D}$، زاویه‌های مجاور مکمل‌اند.

۴ قطرها همدیگر را نصف می‌کنند.

۵ اگر مختصات نقاط A، B، C و D را داشته باشیم، $A+C=B+D$

۶ $S=(AD)(DC)\sin\hat{D}=(AD)(AB)\sin\hat{A}=(AH)DC=(CH')AD$

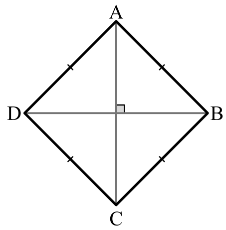
۲ مستطیل: متوازی‌الاضلاعی است که تمام زوایای آن 90° است.



۱ $AC = BD$

۲ $S = ab$

۳ لوزی: متوازی‌الاضلاعی که تمام اضلاع آن باهم برابر است.



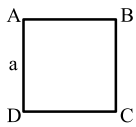
۱ قطرها برهم عمودند.

۲ قطرها همدیگر را نصف می‌کنند.

۳ $S = (AB^2)\sin\hat{A} = (AB)^2\sin\hat{B}$

$= \frac{1}{2}(AC)(DB)$

۴ مربع: مستطیلی که اضلاع برابر دارد.

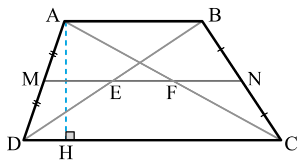


$S = a^2$

قطرها عمودمنصف هم هستند و باهم برابرند.

۵ ذوزنقه: چهارضلعی است که فقط دو ضلع مقابل آن باهم موازیند. این دو ضلع را قاعده و دو ضلع دیگر را ساق می‌نامند.

$S = \frac{1}{2}(AB + DC)AH$



۱ $MN = \frac{1}{2}(AB + DC)$

۲ $EF = \frac{1}{2}(DC - AB)$

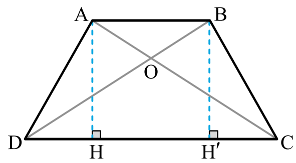
اگر دو ساق باهم برابر باشند، ذوزنقه را ذوزنقه‌ی متساوی‌الساقین می‌نامند.

۱ $AD = BC, AC = BD, \hat{D} = \hat{C}, \hat{A} = \hat{B}$

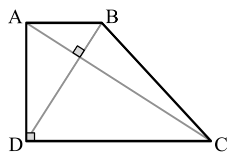
۲ $S_{\overset{\triangle}{AOB}} = S_{\overset{\triangle}{BOC}}$

۳ $S^2_{\overset{\triangle}{AOD}} = S_{\overset{\triangle}{AOB}} . S_{\overset{\triangle}{DOC}}$

۴ $DH = CH' = \frac{DC - AB}{2}$



ذوزنقه‌ای که یکی از ساق‌هایش بر قاعده‌ها عمود باشد، **ذوزنقه‌ی قائم‌الزاویه** نام دارد. اگر در این ذوزنقه دو قطر بر هم عمود باشند آن‌گاه:



$AD^2 = AB \times DC$

$S = \frac{1}{2}(AB + DC)AD$

••• نسبت و تناسب •••

۱ $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a}{c} = \frac{b}{d}$ یا $\frac{d}{b} = \frac{c}{a} \Rightarrow ad = bc$

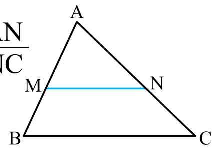
۲ $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a \pm b}{b} = \frac{c \pm d}{d}$

۳ $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a}{a \pm b} = \frac{c}{c \pm d}$

۴ $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a + b}{a - b} = \frac{c + d}{c - d}$

۵ $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} \Rightarrow \frac{a + c + e}{b + d + f} = \frac{a}{b}$

••• قضیه‌ی تالس •••



۱ $\frac{BM}{AB} = \frac{CN}{AC}, MN \parallel BC \Leftrightarrow \frac{AM}{MB} = \frac{AN}{NC}$

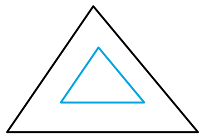
۲ $MN \parallel BC \Leftrightarrow \frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$

••• مثلث‌های متشابه •••

۱ اگر دو زاویه از مثلثی با دو زاویه از مثلث دیگر برابر باشند.

۲ اگر دو ضلع از مثلثی با دو ضلع از مثلث دیگر متناسب و زوایای بین آن‌ها برابر باشند.

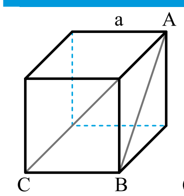
۳ اگر سه ضلع از مثلثی با سه ضلع از مثلث دیگر متناسب باشد.



نکته: اگر در دو مثلث متشابه نسبت اضلاع k باشد آن‌گاه نسبت محیط‌ها، ارتفاع‌ها، نیمسازها و میانه‌های نظیر برابر k و نسبت مساحت‌ها برابر k^2 است.

••• اشکال فضایی •••

۱ مکعب:



۱ $S_{\text{جانبی}} = 4a^2$

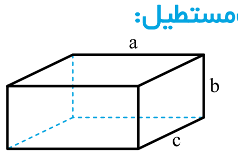
۲ $S_{\text{کل}} = 6a^2$ ۳ $V = a^3$

نکته: طول قطرهای وجه‌های جانبی (AB) برابر $\sqrt{2}a$ و طول قطر مکعب برابر $\sqrt{3}a$ است.

۲ مکعب‌مستطیل:

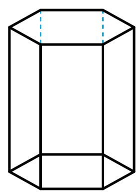
۱ $S_{\text{کل}} = 2(ab + bc + ac)$

۲ $V = abc$



نکته: طول قطر مکعب‌مستطیل برابر $\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$ است.

۳ منشور: چندوجهی که دو وجه هم‌نهشت دارد که در دو صفحه‌ی موازی قرار دارند.

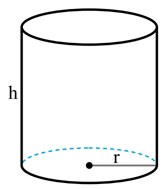


۱ $S_{\text{جانبی}} =$ محیط قاعده × ارتفاع

۲ $S_{\text{کل}} = S_{\text{جانبی}} + 2$ (مساحت قاعده)

۳ $V =$ مساحت قاعده × ارتفاع

۴ استوانه: منشوری که قاعده‌ی آن دایره است.

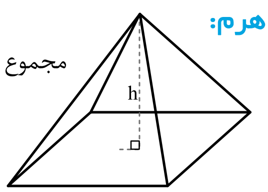


۱ $S_{\text{جانبی}} = 2\pi rh$

۲ $S_{\text{کل}} = 2\pi rh + 2\pi r^2$

۳ $V = \pi r^2 h$

۵ هرم:

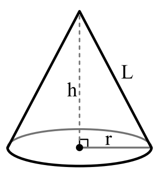


۱ $S_{\text{جانبی}} =$ مجموع مساحت وجه‌های جانبی

۲ $S_{\text{کل}} = S_{\text{جانبی}} + S_{\text{قاعده}}$

۳ $V = \frac{1}{3} S_{\text{قاعده}} \times h$

۶ مخروط: هرمی که قاعده‌ی آن دایره است.



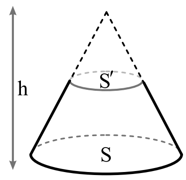
۱ $S_{\text{جانبی}} = \pi rL$

۲ $S_{\text{کل}} = \pi rL + \pi r^2$

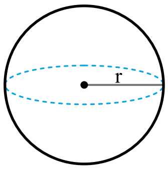
۳ $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$

حجم مخروط (هرم) ناقص:

$$V = \frac{h}{3}(S + S' + \sqrt{SS'})$$



۷ کره:



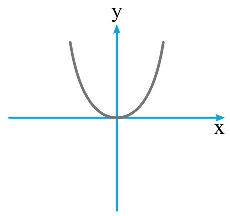
۱ $S = 4\pi r^2$

۲ $V = \frac{4}{3}\pi r^3$

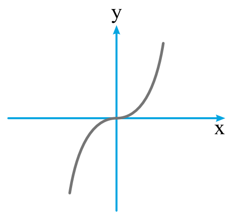
۳ $V_{\text{نیمکره}} = \frac{2}{3}\pi r^3$

●●● نمودارهای مهم ●●●

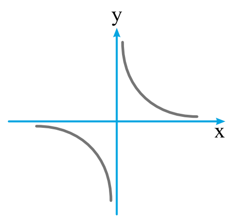
توابع گویا و قدرمطلق



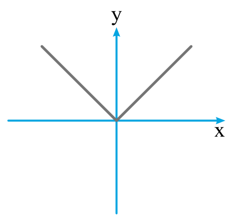
$y = x^{2n}$



$y = x^{2n+1}$

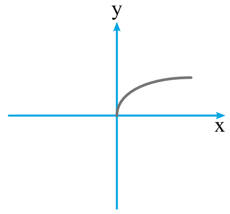


$y = \frac{1}{x}$

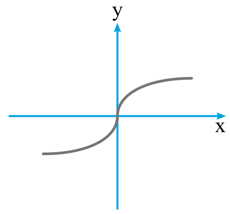


$y = |x|$

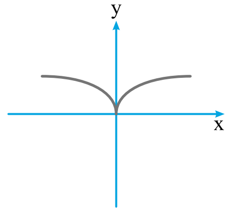
توابع رادیکالی



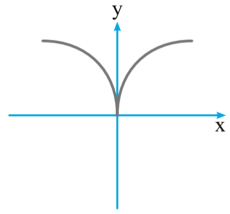
$y = \sqrt{x}$



$y = \sqrt[3]{x}$

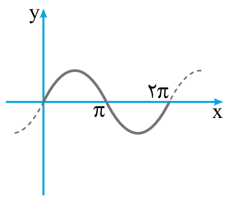


$y = \sqrt{|x|}$

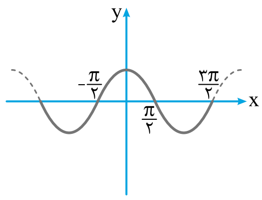


$y = \sqrt[3]{x^2}$

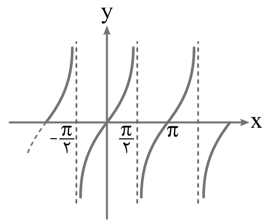
توابع مثلثاتی



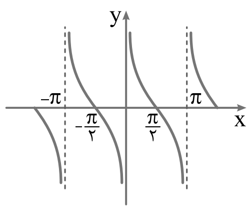
$y = \sin x$



$y = \cos x$

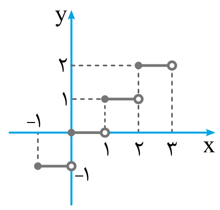


$y = \tan x$

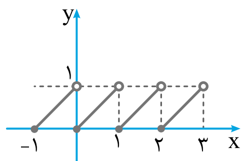


$y = \cot x$

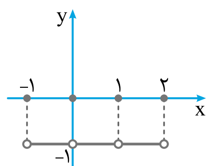
توابع براکتی



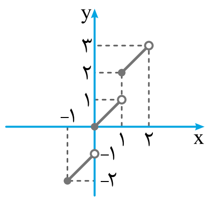
$y = [x]$



$y = x - [x]$

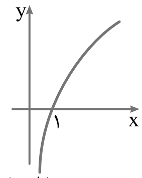


$y = [x] + [-x]$



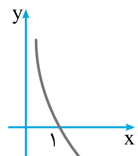
$y = x + [x]$

توابع نمایی و لگاریتمی



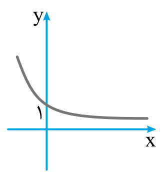
$(a > 1)$

$y = \log_a^x$



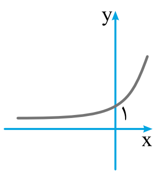
$(0 < a < 1)$

$y = \log_a^x$



$(0 < a < 1)$

$y = a^x$



$(a > 1)$

$y = a^x$