

راهنمایی تمرینات ترکیبیات

سری نخست

۱. هر دو اسبی که یکدیگر را تهدید می‌کنند، در یک زیرجدول ۲ هستند.
۲. با معادله‌ی سیاله راحت مسئله رو حل کنید.
۳. (۱) استقرایش واضح. برای معادله‌ی سیالش حالت‌بندی کنید روی این که جمع چند تا عدد شده n . برای تناظرش هم عبارت

$$1 + 1 + \dots + 1 = n$$

رو در نظر بگیرید.

(ب) استقرا بزنیید و از اتحاد پاسکال استفاده کنید.

(پ) همش م‌ت قسمت (۱) می‌مونه.

(ت) $a_n = a_{n-1} + a_{n-k}$

۴. تمرین تحویلی!

۵. از فرمول φ استفاده کنید.

۶. (۱) معادله‌ی $x_1 + x_2 + \dots + x_n = 2n$ رو در نظر بگیرید.

(ب) تعداد روش‌های قرار دادن اعداد $1, 2, \dots, 2n$ در یک جدول $2 \times n$ ؛ طوری که هر عدد دقیقن یک بار بیاد و از اعداد چپ و پایین‌ش بیش‌تر باشه برابر C_n هست! حالا از تناظر یک به یک استفاده کنید و هر حالت از C_n رو به یه حالت معتبر از مسئله ببرید و هر حالت معتبری که تو تناظر ساخته میشه رو به یه حالت C_n ببرید.

۷. جدول رو به قطرها افراز کنید و ثابت کنید جواب از ۴۸ بیش‌تر نیست. بعدش مثال بزنیید.

۸. تمرین تحویلی

۹. استقرا بزنیید!

۱۰. دو تا قطعی که یک دارن رو در نظر بگیرید. می‌تونید با لانه مسئله رو جمع و جور کنید.

راهنمایی تمرینات ترکیبیات

سری دوم

۱. عینشو تو کلاس حل کردیم. هم می‌تونید دنباله هندسی بنویسید هم معادله‌ی احتمالی.
۲. خرکاری کنید!
۳. p_i رو احتمال این که با i شروع کنیم و با ۱ تموم کنیم در نظر بگیرید.
۴. تمرین تحویلی
۵. معادله‌ی احتمالی بازگشتی بنویسید.
۶. اول از همه این رو در نظر بگیرید که ابوالفضل و سلطان باید قوی باشن و همش ببرن! ضمنن به این دقت کنید که اگه جای کار بالاخره ابوالفضل و سلطان روبه‌روی یک‌دیگه قرار بگیرن در ادامه چی میشه.
۷. تمرین تحویلی

سری سوم

۱. با فرمول احتمال شرطی حل کنید.
۲. خیلی راحت بشمرید در مجموع چند رقم متوالی متفاوت تو کل رشته‌ها داریم و بعدش تقسیم کنید.
۳. تمرین تحویلی
۴. متغیرهای تصادفی X_1, X_2, \dots, X_b رو این طوری تعریف کنید که X_i مربوط به نیم‌قرص شماره i باشه. $X_i = 1$ باشه؛ اگر نیم‌قرص شماره i قبل از بهبودی خورده بشه و در غیر این صورت 0 باشه. متغیرهای تصادفی Y_1, Y_2, \dots, Y_a رو در نظر بگیرید که Y_i مربوط به i -امین قرص کاملی باشه که دستش می‌زنیم. قرص کامل i -امی که دست می‌زنیم رو در نظر بگیرید. یه نیم‌قرصش که تا قبل بهبودی حتمن خورده میشه. $Y_i = 1$ باشه اگر اون یکی نیم‌قرصش هم تا قبل بهبودی خورده بشه و در غیر این صورت برابر 0 باشه.

راهنمایی تمرینات ترکیبیات

حالا ثابت کنید $E(X_i) = \frac{a}{a+1}$ و $E(Y_i) = \frac{n-i}{n-i+1}$. تهنش این در نظر بگیرید که چیزی که ما می‌خوایم برابر با امید ریاضی

$$X_1 + X_2 + \dots + X_b + Y_1 + Y_2 + \dots + Y_a + a$$

هست و ثابت کنید این مقدار تقریباً برابر

$$2a + \frac{ab}{a+1} - \ln(a)$$

هست.

سری چهارم

۱. اول مثال برای ۱۲ و ۲۲ بنویسید. بعدش حل کنید.
۲. تمرین تحویلی
۳. ثابت کنید بعد از چند مرحله مجبوریم ۴ مثلث قائم‌الزاویه هم‌نهشت بسازیم. راه با ناوردایی هم وجود دارد!
۴. (۱) ۵ تا نقطه‌ی با فاصله‌ی برابر روی یک خط در نظر بگیرید.
(ب) با استفاده از (۱) مسئله رو حل کنید.
(پ) یک شبکه‌ی 3×9 از نقاط در نظر بگیرید.
(ت) برهان خلف بنویسید.
۵. یک شبکه‌ی $(n+1) \times (2^n+1)$ در نظر بگیرید.
۶. ثابت کنید یک خط افقی وجود دارد که تمام نقاطش هم‌رنگ باشد. بعدش مسئله راحت حل میشه.
۷. استقرا بنویسید.
۸. اول سعی کنید دو تا متوازی‌الاضلاع با مساحت و قاعده‌ی برابر رو به هم تبدیل کنید. بعدش ثابت کنید هر دو متوازی‌الاضلاع با مساحت برابر رو همیشه به هم تبدیل کرد. بعدش چندضلعی رو مثلث‌بندی کنید و مسئله رو حل کنید.

راهنمایی تمرینات ترکیبیات

۹. راهنمایش رو فایل کمکی ۱ بخونید. حل کاملش هم توی فایل کمکی ۲ هست. (چون سوال خیلی سخت بود حل کاملش رو گذاشتم براتون).

سری پنجم

۱. باید استقرا بزنی و جایی که گیر کردید از همون گراف فرد-رأسی فرد-منتظمه که تو کلاس گفتیم استفاده کنید.
۲. تمرین تحویلی
۳. بازم به گراف و رمزی ربطش بدید.
۴. استقرا بزنی. یکم حالت بندی ممکنه داشته باشه.
۵. یک دایره به شعاع واحد در نظر بگیرید.
۶. ثابت کنید اگر x یک عدد مختلط غیر حقیقی باشه و ریشه‌ی این چندجمله‌ای باشه، مزدوجش هم ریشه‌ی چندجمله‌ایه. هم‌چنین از این استفاده کنید که هر چندجمله‌ای درجه n دقیقن n تا ریشه (مختلط) داره.
۷. نقاط رو به ترتیب y -اشون مرتب کنید و بعد بر اساس زاویشون با خط افقی گذرنده از پایین‌ترین نقطه مرتب‌شون کنید.
۸. اول مرکز چندضلعی رو پیدا کنید.

موفق باشید

-اسدی