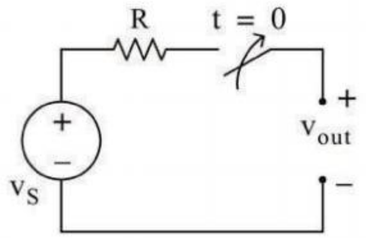
فصل 1

سیگنال های پایه

این فصل با بحث سیگنال های پایه که در معادلات الکتریکی مورد استفاده قرار می گیرند آغاز می شود. سپس توابع پله واحد، شیب واحد، و دلتا معرفی می شوند. خاصیت نمونه برداری و غربالی تابع دلتا تعریف و بدست آورده می شود. چندین مثال برای بیان شکل موج هایی بر پایه این سیگنال ها، ارائه خواهد شد.

1.1 توصیف سیگنال ها بفرم ریاضی

شبکه زیر را در نظر بگیرید که سوییچ در زمان $t = 0$ بسته می شود



شکل 1.1 یک شبکه سوییچ شده با سرهای باز (مدار باز)

می خواهیم v_{out} را برای بازه $-\infty < t < +\infty$ بفرم ریاضی تعریف کنیم. برای این کار بازه زمانی را به دو بخش $-\infty < t < 0$ و $0 < t < +\infty$ تقسیم می کنیم.

در بازه زمانی $-\infty < t < 0$ سوییچ باز است و بنابراین ولتاژ خروجی v_{out} صفر می باشد، به بیان دیگر،

$$v_{out} = 0 \qquad -\infty < t < 0 \tag{1.1}$$

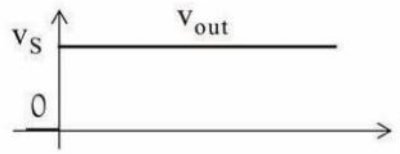
سوییچ در بازه زمانی $-\infty < t < 0$ بسته است بنابراین ولتاژ ورودی v_S دو سر خروجی ظاهر می شود، به بیان دیگر

$$v_{out} = v_S \qquad 0 < t < \infty \tag{1.2}$$

با ترکیب روابط (1.1) و (1.2) خواهیم داشت،

$$\boxed{v_{out} = \begin{cases} 0 & -\infty < t < 0 \\ v_S & 0 < t < \infty \end{cases}} \tag{1.3}$$

می توانیم رابطه (1.3) **را بصورت شکل موج نشان داده شده در شکل** 1.2 **نمایش دهیم.**



شکل 1.2 شکل موج v_{out} طبق رابطه (1.3)

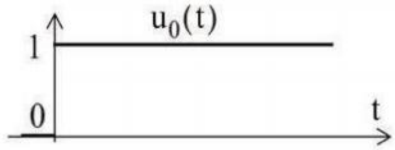
شکل موج شکل 1.2 **مثالی از یک** تابع گسسته است. تابعی گسسته نامیده **می شود اگر دارای نقاط گسستگی باشد، بعبارت دیگر، تابع از مقداری به** مقدار دیگر بدون مقادیر میانی جهش کند.

1.2 تابع پله واحد $u_0(t)$

یک تابع معروف گسسته، ***تابع پله واحد*** $u_0(t)$ * است که بفرم زیر تعریف می شود،

$$\boxed{u_0(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & t > 0 \end{cases}} \qquad (1.4)$$

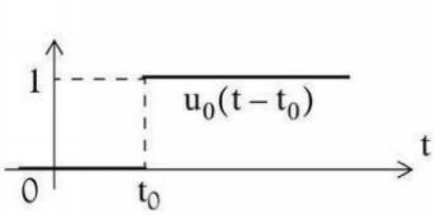
همچنین توسط شکل موج شکل 1.3 نشان داده می شود



شکل 1.3 شکل موج $u_0(t)$

در شکل موج شکل 1.3**، تابع پله واحد** $u_0(t)$ بطور ناگهانی در $t = 0$ از 0 تا 1 **تغییر می کند. اما اگرتغییر در** $t = t_0$ **رخ دهد، با رابطه** $u_0(t - t_0)$ **نمایش** داده می شود. در اینصورت شکل موج **و رابطه آن بترتیب در شکل** 1.4**، و رابطه** (1.5) **ارائه می شوند.**

$$u_0(t - t_0) = \begin{cases} 0 & t < t_0 \\ 1 & t > t_0 \end{cases} \qquad (1.5)$$

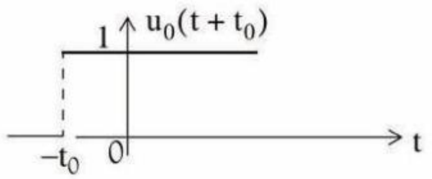


شکل 1.4 شکل موج $u_0(t - t_0)$

---

* **در برخی کتاب ها تابع پله واحد را بدون اندیس** 0 **یا بعبارت دیگر با** $u(t)$ **نشان می دهند. اما در این کتاب از** $u(t)$ **بعنوان هر ورودی دلخواه استفاده شده که در مبحث متغیرهای حالت فصل** 5 **مطرح خواهد شد.**

اگر تابع، بطور ناگهانی در $t = -t_0$ **از** 0 **به** 1 **تغییر** کند، با $u_0(t + t_0)$ نمایش داده می شود. در اینصورت بترتیب **شکل موج و رابطه آن با شکل** 1.5، **و رابطه** (1.6) نشان داده می شود.

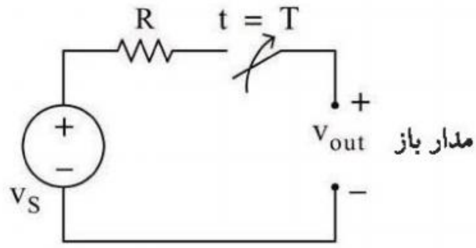


شکل 1.5 شکل موج $u_0(t + t_1)$

$$u_0(t+t_0) = \begin{cases} 0 & t < -t_0 \\ 1 & t > -t_0 \end{cases} \tag{1.6}$$

مثال 1.1

در شبکه شکل 1.6، **سوییچ در** زمان $t = T$ بسته می شود.



شکل 1.6 شبکه مثال 1.1

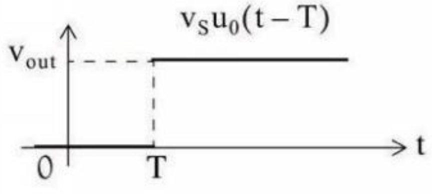
ولتاژ خروجی را بصورت تابع پله واحد نشان دهید، و شکل موج مناسب را ترسیم نمایید.

حل:

دراین مثال، به ازای $t < T$، $v_{out} = 0$، و به ازای $t > T$، $v_{out} = v_S$ می باشد. بنابراین،

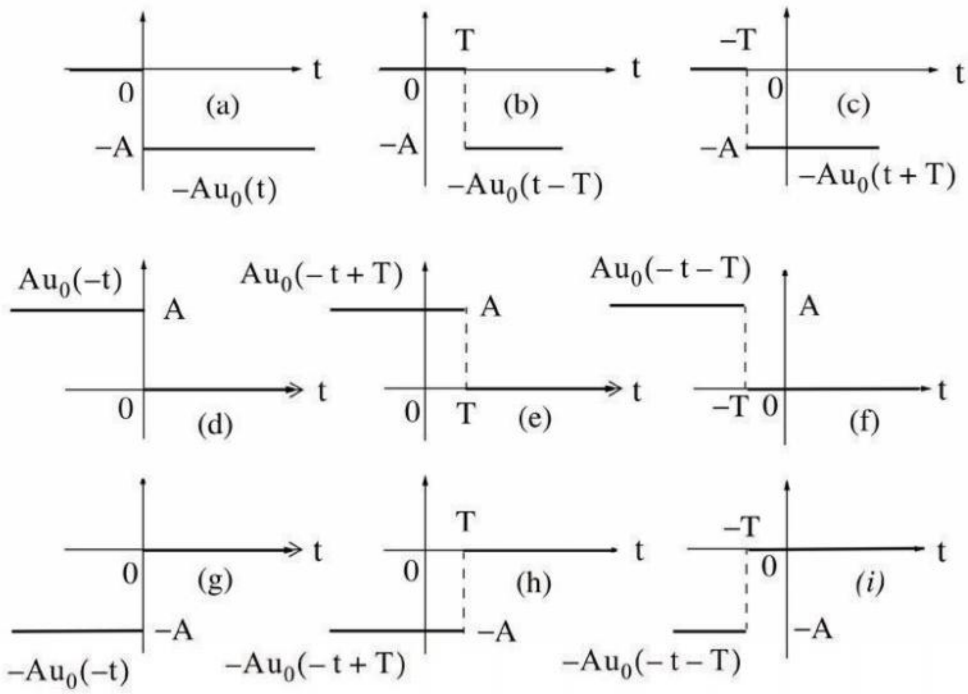
$$v_{out} = v_S u_0(t-T) \tag{1.7}$$

و شکل موج، در شکل 1.7 **نشان** داده شده است.



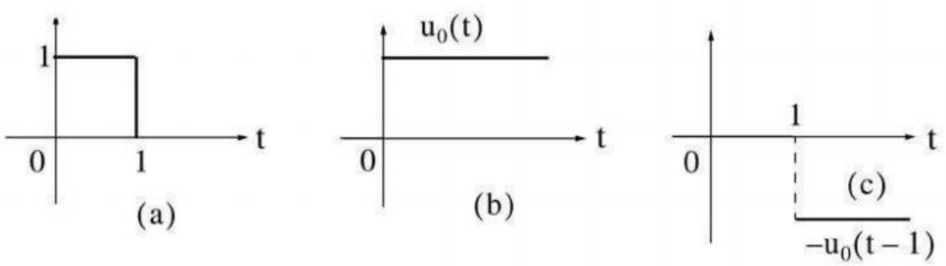
شکل 1.7 شکل موج مثال 1.1

فرم های دیگر تابع پله واحد در شکل 1.8 **نشان داده شده اند.**



شکل 1.8 فرم های دیگر تابع پله واحد

تابع پله واحد، برای نمایش دیگر توابع متغیر با زمان مانند پالس مستطیلی نشان داده شده در شکل 1.9، بکار برده می شود.



شکل 1.9 یک پالس مستطیلی بصورت مجموع دو تابع پله واحد

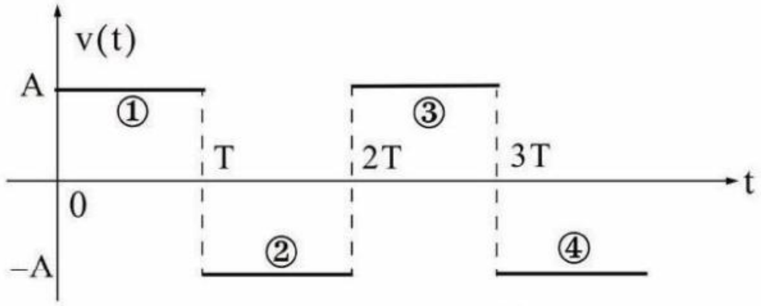
بنابراین، پالس شکل 1.9(a) مجموع دو تابع پله واحد شکل های 1.9(b) و 1.9(c) است، و بصورت $u_0(t) - u_0(t-1)$ بیان می شود.

تابع پله واحد روش آسانی برای توصیف کاربرد منبع ولتاژ یا جریان ناگهانی است. بعنوان مثال یک منبع ولتاژ ثابت 24 V که در $t = 0$ اعمال می شود، با $24u_0(t)$ V نشان داده می شود. بطریق مشابه منبع ولتاژ $v(t) = (V_m\cos\omega t)u_0(t - t_0)$ V، بیانگر ولتاژ سینوسی $v(t) = V_m\cos\omega t$ است که در $t = t_0$ به مدار اعمال می شود. همچنین اگر تحریک یک مدار بصورت موج مستطیلی، و یا مثلثی، یا دندانه اره ای، یا هر پالس تکرار شونده دیگری باشد، بصورت مجموع (تفاضل) توابع پله واحد قابل توصیف است.

مثال 1.2

شکل موج مربعی شکل 1.10 را به صورت مجموع توابع پله واحد بیان کنید. خطوط نقطه‌چین، وجود گسستگی را

در T، 2T، 3T، ... نشان می دهند.



شکل 1.10 شکل موج مربعی مثال 1.2

حل:

بخش① شکل موج با مقدار A، در $t = 0$ شروع شده و در $t = T$ پایان می یابد. بنابراین مانند مثال 1.1، این بخش **با رابطه** زیر بیان می شود

$$v_1(t) = A[u_0(t) - u_0(t-T)] \tag{1.8}$$

بخش② شکل موج با مقدار A–، در $t = T$ شروع شده و در $t = 2T$ پایان می یابد. این بخش با رابطه زیر بیان **می شود**

$$v_2(t) = -A[u_0(t-T) - u_0(t-2T)] \tag{1.9}$$

بخش③ شکل موج با مقدار A، در $t = 2T$ شروع شده و در $t = 3T$ پایان می یابد. این بخش با رابطه زیر بیان **می شود**

$$v_3(t) = A[u_0(t-2T) - u_0(t-3T)] \tag{1.10}$$

بخش④ شکل موج با مقدار A–، در $t = 3T$ شروع شده و در $t = 4T$ پایان می یابد. این بخش با رابطه زیر بیان **می شود**

$$v_4(t) = -A[u_0(t-3T) - u_0(t-4T)] \tag{1.11}$$

بنابراین شکل موج شکل 1.10، توسط مجموع روابط (1.8) تا (1.11) بصورت زیر بیان می شود،

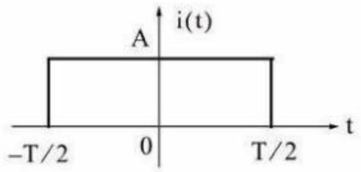
$$\begin{aligned} v(t) &= v_1(t) + v_2(t) + v_3(t) + v_4(t) \\ &= A[u_0(t) - u_0(t-T)] - A[u_0(t-T) - u_0(t-2T)] \\ &\quad + A[u_0(t-2T) - u_0(t-3T)] - A[u_0(t-3T) - u_0(t-4T)] \end{aligned} \tag{1.12}$$

با ادغام جمله های مشابه خواهیم داشت،

$$v(t) = A[u_0(t) - 2u_0(t-T) + 2u_0(t-2T) - 2u_0(t-3T) + \dots] \tag{1.13}$$

مثال 1.3

پالس مستطیلی متقارن شکل 1.11 را بصورت مجموع توابع پله واحد بیان کنید.



شکل 1.11 شکل موج مستطیلی متقارن مثال 1.3

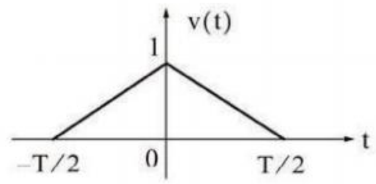
حل:

این پالس دارای مقدار (ارتفاع) A می باشد، در $t = -T/2$ شروع شده، و در $t = T/2$ پایان می یابد. **بنابراین با** مراجعه به شکل های 1.5 و (b) 1.8 خواهیم داشت،

$$i(t) = Au_0\left(t+\frac{T}{2}\right) - Au_0\left(t-\frac{T}{2}\right) = A\left[u_0\left(t+\frac{T}{2}\right) - u_0\left(t-\frac{T}{2}\right)\right] \qquad (1.14)$$

مثال 1.4

شکل موج مثلثی متقارن شکل 1.12 را بصورت مجموع توابع پله واحد بیان نمایید.



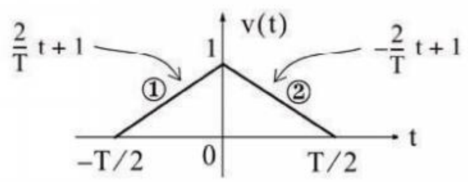
شکل 1.12 شکل موج مثلثی متقارن مثال 1.4

حل:

ابتدا معادلات بخش های خطی ① و ② نشان داده شده در شکل 1.13 را بدست می آوریم.

بخش خطی ①

$$v_1(t) = \left(\frac{2}{T}t+1\right)\left[u_0\left(t+\frac{T}{2}\right) - u_0(t)\right] \qquad (1.15)$$



شکل 1.13 معادلات بخش های خطی شکل 1.12

و بخش خطی ②

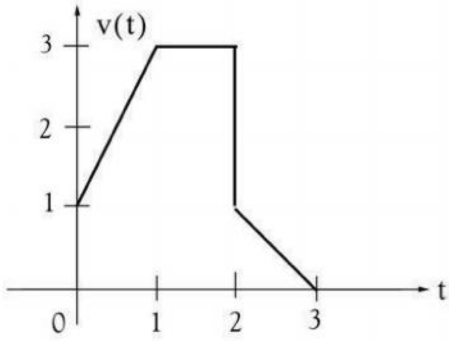
$$v_2(t) = \left(-\frac{2}{T}t+1\right)\left[u_0(t) - u_0\left(t-\frac{T}{2}\right)\right] \tag{1.16}$$

با ترکیب معادلات (1.15) و (1.16) خواهیم داشت،

$$\begin{aligned} v(t) &= v_1(t) + v_2(t) \\ &= \left(\frac{2}{T}t+1\right)\left[u_0\left(t+\frac{T}{2}\right) - u_0(t)\right] + \left(-\frac{2}{T}t+1\right)\left[u_0(t) - u_0\left(t-\frac{T}{2}\right)\right] \end{aligned} \tag{1.17}$$

مثال 1.5

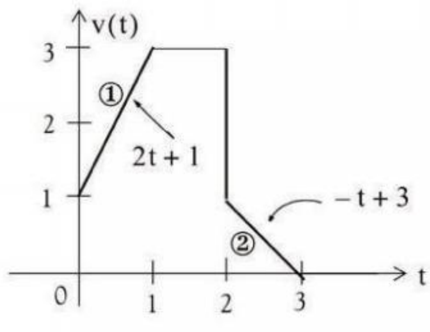
شکل موج شکل 1.14 را بصورت توابع پله واحد بیان نمایید.



شکل 1.14 شکل موج مثال 1.5

حل:

مانند مثال قبل، ابتدا معادلات بخش های خطی① و ② نشان داده شده در شکل 1.15 را بدست می آوریم.



شکل 1.15 معادلات بخش های خطی شکل 1.14

با استفاده از روش بکار رفته در مثال قبل داریم

$$\begin{aligned} v(t) &= (2t+1)[u_0(t) - u_0(t-1)] + 3[u_0(t-1) - u_0(t-2)] \\ &\quad + (-t+3)[u_0(t-2) - u_0(t-3)] \end{aligned}$$

از ضرب مقادیر داخل پرانتز با مقادیر درون براکت خواهیم داشت،

$$\begin{aligned} v(t) = {} & (2t+1)u_0(t) - (2t+1)u_0(t-1) + 3u_0(t-1) \\ & - 3u_0(t-2) + (-t+3)u_0(t-2) - (-t+3)u_0(t-3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v(t) = {} & (2t+1)u_0(t) + [-(2t+1)+3]u_0(t-1) \\ & + [-3+(-t+3)]u_0(t-2) - (-t+3)u_0(t-3) \end{aligned}$$

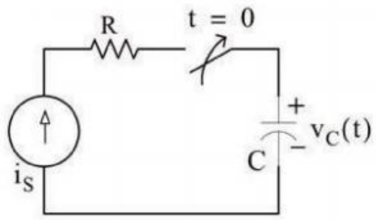
با ترکیب نمودن عبارات درون براکت ها خواهیم داشت،

$$v(t) = (2t+1)u_0(t) - 2(t-1)u_0(t-1) - tu_0(t-2) + (t-3)u_0(t-3) \tag{1.18}$$

دو تابع مورد علاقه دیگر، *توابع شیب واحد* و *ضربه واحد* یا *دلتا* هستند. آنها را با مثال های بعد **معرفی خواهیم** نمود.

مثال 1.6

در شبکه شکل 1.16 i_S یک منبع جریان ثابت است. سوییچ در زمان $t = 0$ بسته می شود. ولتاژ **خازن** $v_C(t)$ **را به** عنوان تابعی از پله واحد بیان نمایید.



شکل 1.16 شبکه مثال 1.6

حل:

جریان خازن مقدار ثابت $i_C(t) = i_S$ می باشد، و ولتاژ خازن $v_C(t)$ دارای رابطه (1.19) می باشد.

$$v_C(t) = \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} i_C(\tau)d\tau^{*} \tag{1.19}$$

که τ متغیر انتگرال می باشد.

بدلیل اینکه سوییچ در $t = 0$ بسته می شود، می توانیم $i_C(t)$ را بصورت زیر بیان کنیم

$$i_C(t) = i_S\, u_0(t) \tag{1.20}$$

با فرض اینکه به ازای $t < 0$، $v_C(t) = 0$ **می باشد، معادله** (1.19) **را بصورت رابطه** (1.21) **صفحه بعد می نویسیم**

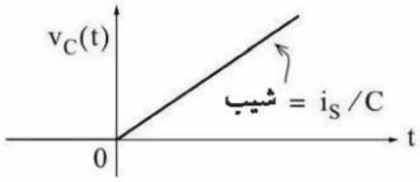
* **بدلیل اینکه شرط اولیه ولتاژ خازن مشخص نشده است، حد پایین انتگرال را $-\infty$ درنظر می گیریم بطوریکه تمام مقادیر غیر صفر** $t < 0$ **در انتگرال لحاظ شوند.**

$$v_C(t) = \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} i_S\, u_0(\tau)d\tau = \underbrace{\frac{i_S}{C}\int_{-\infty}^{0} u_0(\tau)\, d\tau}_{0} + \frac{i_S}{C}\int_{0}^{t} u_0(\tau)d\tau \qquad (1.21)$$

یا

$$\boxed{v_C(t) = \frac{i_S}{C}\, tu_0(t)} \qquad (1.22)$$

بنابراین مشاهده می کنیم زمانیکه خازن با جریان ثابت شارژ می شود، ولتاژ دو سر آن مطابق شکل 1.17 یک تابع **خطی با شیب** i_S/C می باشد.



شکل 1.17 ولتاژ دو سر خازن زمانیکه با یک جریان ثابت شارژ شود

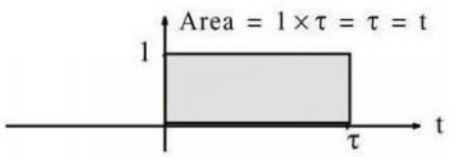
1.3 تابع شیب واحد $u_1(t)$

تابع شیب واحد $u_1(t)$ بصورت زیر تعریف می شود

$$\boxed{u_1(t) = \int_{-\infty}^{t} u_0(\tau)d\tau} \qquad (1.23)$$

که τ متغیر انتگرال است.

انتگرال رابطه (1.23)، طبق شکل 1.18 با محاسبه سطح زیر منحنی تابع پله واحد $u_0(t)$، از $-\infty$ تا t بدست **می آید.**



شکل 1.18 سطح زیر منحنی تابع پله واحد از $-\infty$ تا t

بنابراین تابع $u_1(t)$ با رابطه (1.24) تعریف می شود

$$\boxed{u_1(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ t & t \ge 0 \end{cases}} \qquad (1.24)$$

بدلیل اینکه $u_1(t)$، انتگرال $u_0(t)$ می باشد، بنابراین $u_0(t)$ باید مشتق $u_1(t)$ باشد، بدین معنی که،

$$\boxed{\frac{d}{dt}u_1(t) = u_0(t)} \qquad (1.25)$$

توابع مرتبه بالاتر t را می توان با تکرار انتگرال تابع پله واحد بدست آورد. بعنوان مثال با دو بار **انتگرال گیری از** $u_0(t)$ و ضرب در عدد 2، تابع $u_2(t)$ تعریف می شود:

$$u_2(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ t^2 & t \geq 0 \end{cases} \quad \textbf{یا} \quad u_2(t) = 2\int_{-\infty}^{t} u_1(\tau)d\tau \tag{1.26}$$

بطریق مشابه،

$$u_3(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ t^3 & t \geq 0 \end{cases} \quad \textbf{یا} \quad u_3(t) = 3\int_{-\infty}^{t} u_2(\tau)d\tau \tag{1.27}$$

و بطور کلی،

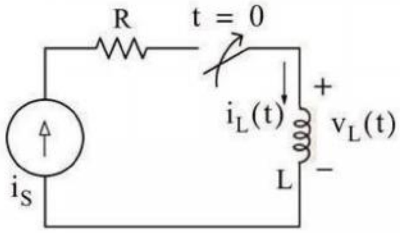
$$u_n(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ t^n & t \geq 0 \end{cases} \quad \textbf{یا} \quad u_n(t) = n\int_{-\infty}^{t} u_{n-1}(\tau)d\tau \tag{1.28}$$

همچنین،

$$u_{n-1}(t) = \frac{1}{n}\frac{d}{dt}u_n(t) \tag{1.29}$$

مثال 1.7

در شبکه شکل 1.19، سوییچ در زمان $t = 0$ بسته شده و به ازای $t < 0$، $i_L(t) = 0$ می باشد. **ولتاژ القاگر** $v_L(t)$ **را** بر حسب تابع پله واحد بدست آورید.



شکل 1.19 شبکه مثال 1.7

حل:

ولتاژ دو سر القاگر برابر است با

$$v_L(t) = L\frac{di_L}{dt} \tag{1.30}$$

و بدلیل اینکه سوییچ در $t = 0$ بسته می شود،

$$i_L(t) = i_S\, u_0(t) \tag{1.31}$$

بنابراین رابطه (1.30) بصورت زیر بازنویسی می شود،

$$\boxed{v_L(t) = Li_S\frac{d}{dt}u_0(t)} \qquad (1.32)$$

اما همانطور که می دانیم $u_0(t)$ در همه زمان ها بجز $t = 0$ که گسسته است، ثابت (0 یا 1) می باشد. بدلیل اینکه مشتق هر مقدار ثابتی صفر است، مشتق پله واحد $u_0(t)$ فقط در $t = 0$ غیر صفر می باشد. مشتق تابع پله واحد در بخش بعد ارائه خواهد شد.

1.4 تابع دلتا $\delta(t)$

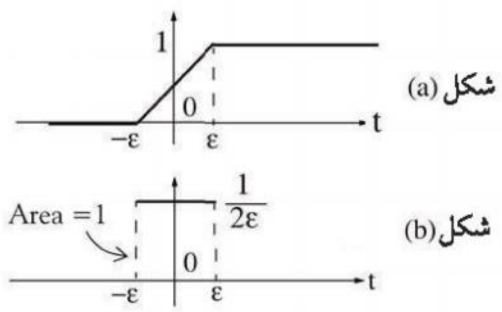
تابع ضربه یا دلتا که با $\delta(t)$ نشان داده می شود، مشتق تابع پله واحد $u_0(t)$ است. همچنین بصورت زیر تعریف می شود:

$$\boxed{\int_{-\infty}^{t}\delta(\tau)d\tau = u_0(t)} \qquad (1.33)$$

و

$$\boxed{\delta(t) = 0 \quad t \neq 0 \ \text{به ازای همه}} \qquad (1.34)$$

برای درک بهتر تابع دلتا $\delta(t)$، تابع پله واحد $u_0(t)$ را مانند شکل (a) 1.20 بیان می نماییم،



شکل 1.20 نمایش حدی پله واحد

تابع شکل (a) 1.20، زمانیکه $\varepsilon \to 0$ میل می کند، تبدیل به تابع پله واحد می شود. شکل (b) 1.20، مشتق شکل (a) 1.20 می باشد و مشاهده می کنیم زمانیکه $\varepsilon \to 0$، مقدار $1/2\varepsilon$ بسمت بینهایت میل می کند، اما مساحت مستطیل برابر با 1 باقی می ماند. بنابراین، در حالت حدی می توان $\delta(t)$ را بصورت یک اسپایک خیلی بزرگ یا ضربه در مبدا با دامنه نامحدود، عرض صفر، و مساحت 1 تصور نمود.

1.4.1 خاصیت نمونه برداری تابع دلتا $\delta(t)$

خاصیت نمونه برداری تابع دلتا بیانگر رابطه (1.35) و (1.36) است

$$\boxed{f(t)\delta(t-a) = f(a)\delta(t)} \qquad (1.35)$$

یا زمانیکه $a = 0$ باشد،

$$\boxed{f(t)\delta(t) = f(0)\delta(t)} \tag{1.36}$$

بعبارت دیگر ضرب هر تابع $f(t)$ درتابع دلتا $\delta(t)$ منجر به نمونه بردای تابع در زمان هایی که **تابع دلتا صفر نیست** می شود. مطالعه سیستم های زمانی گسسته بر مبنای همین خاصیت است.

اثبات :

بدلیل اینکه به ازای $t < 0$ و $t > 0$ ، $\delta(t)=0$ می باشد بنابراین،

$$f(t)\delta(t) = 0 \quad \text{for} \quad t<0 \quad \text{و} \quad t>0 \tag{1.37}$$

با باز نویسی $f(t)$ بصورت زیر داریم،

$$f(t) = f(0) + [f(t) - f(0)] \tag{1.38}$$

و با انتگرال گیری از رابطه (1.37) دربازه $-\infty$ تا t و استفاده از رابطه (1.38) خواهیم داشت،

$$\int_{-\infty}^{t} f(\tau)\delta(\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{t} f(0)\delta(\tau)d\tau + \int_{-\infty}^{t} [f(\tau) - f(0)]\delta(\tau)d\tau \tag{1.39}$$

انتگرال اول سمت راست رابطه (1.39)، شامل جمله ثابت $f(0)$ است و از انتگرال خارج می شود. **بعبارت دیگر،**

$$\int_{-\infty}^{t} f(0)\delta(\tau)d\tau = f(0)\int_{-\infty}^{t} \delta(\tau)d\tau \tag{1.40}$$

انتگرال دوم سمت راست رابطه (1.39) همواره برابر صفر است بدلیل اینکه،

$$\delta(t) = 0 \qquad t<0 \quad \text{و} \quad t>0$$

و

$$[f(\tau) - f(0)]\big|_{\tau = 0} = f(0) - f(0) = 0$$

بنابراین، رابطه (1.39) به رابطه زیر تبدیل می شود

$$\int_{-\infty}^{t} f(\tau)\delta(\tau)d\tau = f(0)\int_{-\infty}^{t} \delta(\tau)d\tau \tag{1.41}$$

با مشتق گیری از دو طرف رابطه (1.41) و با جایگزاری t بجای τ رابطه (1.42) صفحه بعد را **خواهیم داشت،**

$$\boxed{\begin{gathered} f(t)\delta(t) = f(0)\delta(t) \\ \text{خاصیت نمونه برداری } \delta(t) \end{gathered}} \tag{1.42}$$

1.4.2 خاصیت غربالی تابع دلتا $\delta(t)$

خاصیت غربالی تابع دلتا با رابطه زیر بیان می شود

$$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t-\alpha)dt = f(\alpha)} \tag{1.43}$$

بعبارت دیگر اگر تابع $f(t)$ را در $\delta(t-\alpha)$ ضرب نموده و از $-\infty$ تا $+\infty$ انتگرال گیری کنیم، مقدار $f(t)$ به ازای $t = \alpha$ **بدست می آید.**

اثبات:

انتگرال زیر را ملاحظه نمایید،

$$\int_{a}^{b} f(t)\delta(t-\alpha)dt \qquad a<\alpha<b \tag{1.44}$$

از روش انتگرال گیری جزء به جزء برای محاسبه این انتگرال استفاده می نماییم. طبق خاصیت مشتق حاصلضرب **داریم،**

$$d(xy) = xdy + ydx \;\; \text{or} \;\; xdy = d(xy) - ydx \tag{1.45}$$

و با انتگرال گیری از دو طرف خواهیم داشت،

$$\int xdy = xy - \int ydx \tag{1.46}$$

حال فرض کنید $x = f(t)$ باشد؛ پس $dx = f'(t)$ خواهد بود. همچنین فرض کنید $dy = \delta(t-\alpha)$ باشد؛ پس $y = u_0(t-\alpha)$ خواهد بود. با جایگزاری در رابطه (1.44) خواهیم داشت،

$$\int_{a}^{b} f(t)\delta(t-\alpha)dt = f(t)u_0(t-\alpha)\Big|_a^b - \int_{a}^{b} u_0(t-\alpha)f'(t)dt \tag{1.47}$$

با فرض $a<\alpha<b$؛ بنابراین به ازای $\alpha<a$، $u_0(t-\alpha)=0$ می باشد و در نتیجه اولین جمله سمت راست رابطه (1.47) به $f(b)$ تبدیل می شود. همچنین انتگرال سمت راست به ازای $\alpha<a$ برابر صفر است، و بنابراین α را بجای a درکران پایین انتگرال قرار می دهیم. حال با بازنویسی رابطه (1.47) خواهیم داشت،

$$\int_{a}^{b} f(t)\delta(t-\alpha)dt = f(b) - \int_{\alpha}^{b} f'(t)dt = f(b) - f(b) + f(\alpha)$$

و با فرض $a \to -\infty$ و $b \to \infty$ به ازای همه مقادیر $|\alpha| < \infty$ رابطه (1.47) را خواهیم داشت،

$$\boxed{\begin{array}{c}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t-\alpha)dt = f(\alpha) \\ \text{خاصیت غربالی } \delta(t)\end{array}} \tag{1.48}$$

1.5 توابع دلتای مرتبه بالاتر

تابع دلتای مرتبه nام، بعنوان مشتق nام تابع $u_0(t)$ تعریف می شود. به بیان دیگر:

$$\boxed{\delta^n(t) = \frac{\delta^n}{dt}[u_0(t)]} \qquad (1.49)$$

تابع $\delta'(t)$ *دوبلت*، و تابع $\delta''(t)$ *تریپلت* نامیده می شود و به همین ترتیب. با رویه ای مشابه مشتق گیری خاصیت نمونه برداری تابع دلتا، می توان نشان داد که

$$\boxed{f(t)\delta'(t-a) = f(a)\delta'(t-a) - f'(a)\delta(t-a)} \qquad (1.50)$$

همچنین با مشتق گیری از خاصیت غربالی تابع دلتا می توان نشان داد که

$$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta^n(t-\alpha)dt = (-1)^n \frac{d^n}{dt^n}[f(t)]\bigg|_{t=\alpha}} \qquad (1.51)$$

مثال 1.8

مقدار عبارات زیر را بدست آورید.

a. $3t^4\delta(t-1)$ b. $\int_{-\infty}^{\infty} t\delta(t-2)dt$ c. $t^2\delta'(t-3)$

حل:

a. طبق خاصیت نمونه برداری، $f(t)\delta(t-a) = f(a)\delta(t)$، و در این مثال $f(t) = 3t^4$ و $a = 1$ می باشد. بنابراین،

$$3t^4\delta(t-1) = \{3t^4|_{t=1}\}\delta(t-1) = 3\delta(t)$$

b. طبق خاصیت غربالی داریم $\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t-\alpha)dt = f(\alpha)$، و در این مثال $f(t) = t$ و $\alpha = 2$ می باشد. بنابراین،

$$\int_{-\infty}^{\infty} t\delta(t-2)dt = f(2) = t|_{t=2} = 2$$

c. عبارات این بخش از مساله، دارای تابع دوبلت است پس از رابطه زیر استفاده می نماییم،

$$f(t)\delta'(t-a) = f(a)\delta'(t-a) - f'(a)\delta(t-a)$$

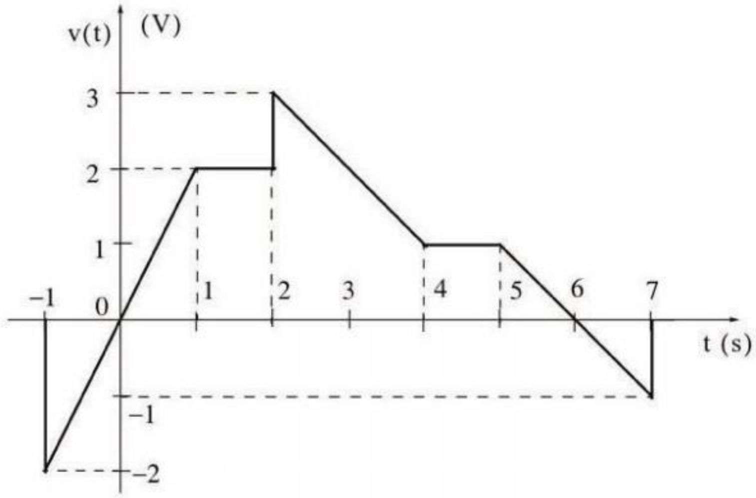
در نتیجه دراین مثال خواهیم داشت،

$$t^2\delta'(t-3) = t^2|_{t=3}\delta'(t-3) - \frac{d}{dt}t^2|_{t=3}\delta(t-3) = 9\delta'(t-3) - 6\delta(t-3)$$

مثال 1.9

a. **شکل موج** ولتاژ $v(t)$ نشان داده شده در شکل 1.21 را، بصورت مجموع توابع پله واحد درباره زمانی $-1 < t < 7\ s$ بیان نمایید.

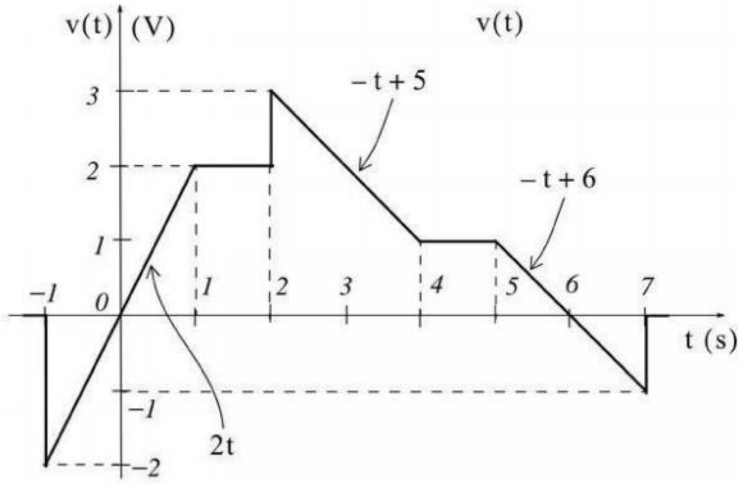
b. **با استفاده از** نتیجه قسمت (a)، مشتق $v(t)$ را محاسبه نموده و شکل موج آن را ترسیم کنید.



شکل 1.21 شکل موج مثال 1.9

حل:

a. **ابتدا معادلات** بخش های خطی شکل موج های شکل 1.22 شروع می کنیم،



شکل 1.22 معادلات بخش های خطی شکل 1.21

سپس $v(t)$ **را** برحسب تابع پله واحد $u_0(t)$ بیان نموده، و خواهیم داشت،

$$\begin{aligned} v(t) = {} & 2t[u_0(t+1) - u_0(t-1)] + 2[u_0(t-1) - u_0(t-2)] \\ & + (-t+5)[u_0(t-2) - u_0(t-4)] + [u_0(t-4) - u_0(t-5)] \qquad (1.52) \\ & + (-t+6)[u_0(t-5) - u_0(t-7)] \end{aligned}$$

با ضرب و پس از آن جمع نمودن جمله های مشابه در رابطه (1.52) داریم،

$$\begin{aligned}v(t) = {} & 2tu_0(t+1) - 2tu_0(t-1) - 2u_0(t-1) - 2u_0(t-2) - tu_0(t-2)\\ & + 5u_0(t-2) + tu_0(t-4) - 5u_0(t-4) + u_0(t-4) - u_0(t-5)\\ & - tu_0(t-5) + 6u_0(t-5) + tu_0(t-7) - 6u_0(t-7)\end{aligned}$$

یا

$$\begin{aligned}v(t) = {} & 2tu_0(t+1) + (-2t+2)u_0(t-1) + (-t+3)u_0(t-2)\\ & + (t-4)u_0(t-4) + (-t+5)u_0(t-5) + (t-6)u_0(t-7)\end{aligned}$$

b. با مشتق گیری از v(t) خواهیم داشت،

$$\begin{aligned}\frac{dv}{dt} = {} & 2u_0(t+1) + 2t\delta(t+1) - 2u_0(t-1) + (-2t+2)\delta(t-1)\\ & - u_0(t-2) + (-t+3)\delta(t-2) + u_0(t-4) + (t-4)\delta(t-4)\\ & - u_0(t-5) + (-t+5)\delta(t-5) + u_0(t-7) + (t-6)\delta(t-7)\end{aligned} \tag{1.53}$$

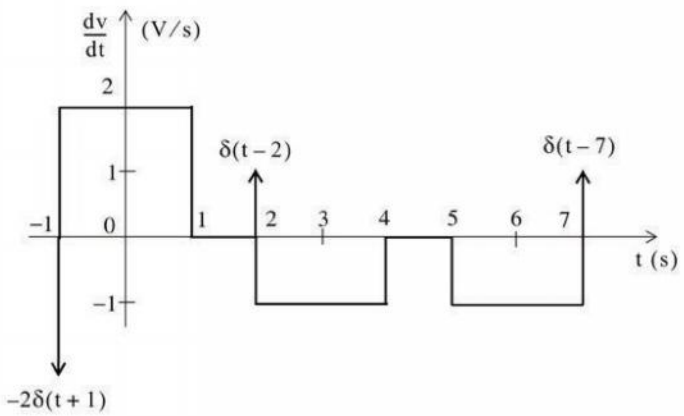
در شکل موج داده شده مشاهده می کنیم که گسستگی فقط در $t = -1$، $t = 2$، و $t = 7$ **رخ می دهد.** بنابراین $\delta(t-1) = 0$، $\delta(t-4) = 0$، $\delta(t-5) = 0$ می باشد، و جمله هایی که این توابع **دلتا را دارند** حذف می شوند. همچنین با استفاده از خاصیت نمونه برداری خواهیم داشت،

$$\begin{aligned}2t\delta(t+1) &= \{2t|_{t=-1}\}\delta(t+1) = -2\delta(t+1)\\ (-t+3)\delta(t-2) &= \{(-t+3)|_{t=2}\}\delta(t-2) = \delta(t-2)\\ (t-6)\delta(t-7) &= \{(t-6)|_{t=7}\}\delta(t-7) = \delta(t-7)\end{aligned}$$

و با جایگزاری در رابطه (1.53) خواهیم داشت،

$$\begin{aligned}\frac{dv}{dt} = {} & 2u_0(t+1) - 2\delta(t+1) - 2u_0(t-1) - u_0(t-2)\\ & + \delta(t-2) + u_0(t-4) - u_0(t-5) + u_0(t-7) + \delta(t-7)\end{aligned} \tag{1.54}$$

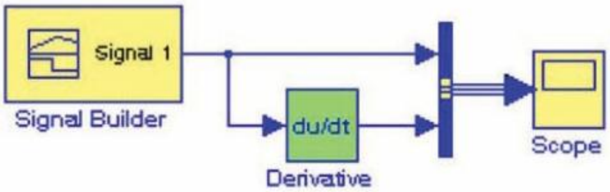
نمودار dv/dt در شکل 1.23 صفحه بعد نشان داده شده است.



شکل 1.23 نمودار مشتق شکل موج شکل 1.21

مشاهده می کنیم که یک اسپایک منفی با دامنه 2، در $t = -1$ رخ می دهد و دو اسپایک مثبت با دامنه 1، در $t = 2$ و $t = 7$ رخ می دهند. این اسپایک ها بواسطه گسستگی این نقاط ظاهر می شوند.

مشاهده سیگنال و مشتق های آن در بلوک Scope در مدل سیمولینک* شکل 1.24 جالب است. آن ها، در **شکل** 1.25 **نشان داده شده** اند.



شکل 1.24 مدل سیمولینک مثال 1.9

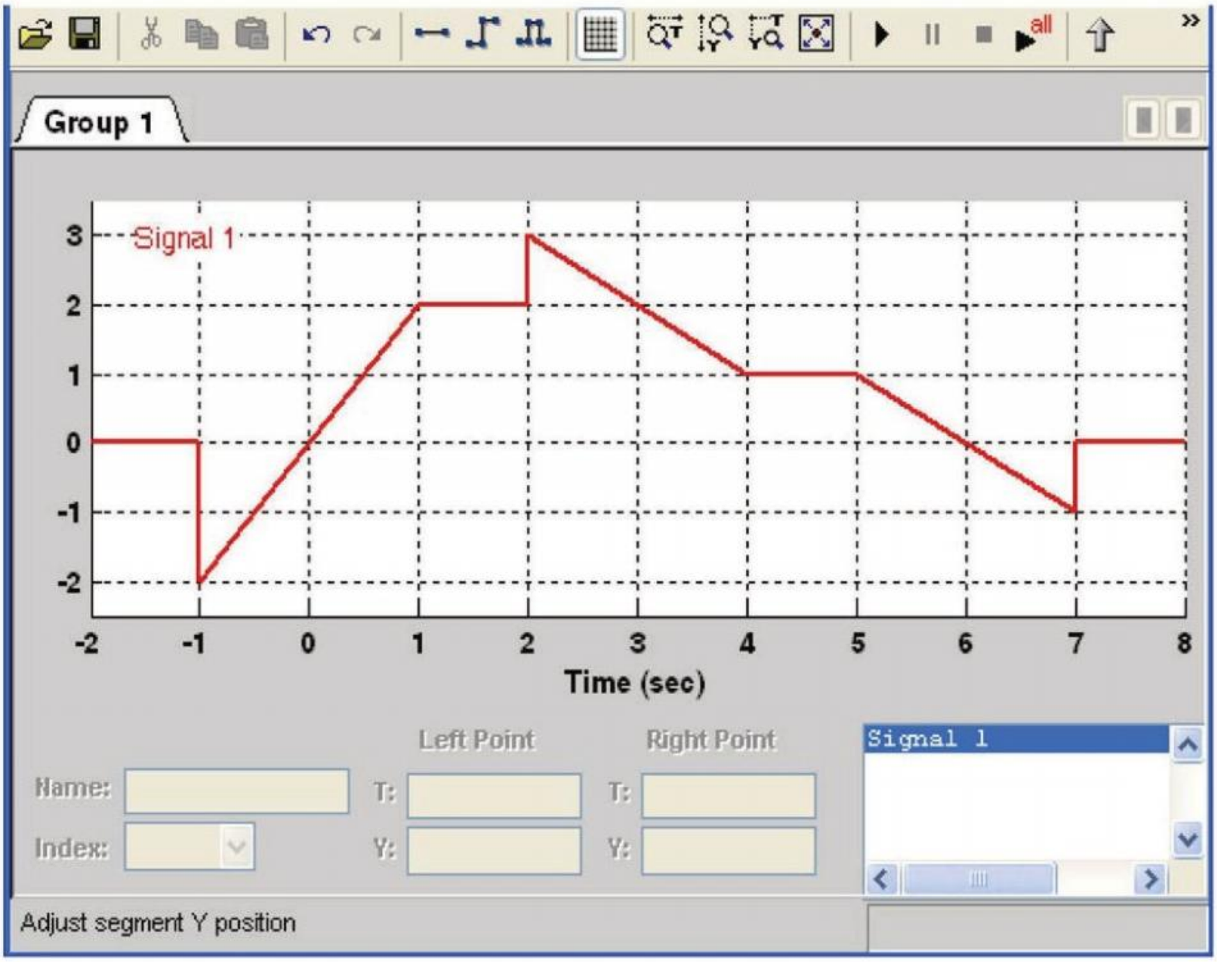
شکل موج تولید شده توسط بلوک Signal Builder **برنامه** Simulink **(سیمولینک)*، در شکل** 1.25 **نشان داده شده است.**

شکل موج شکل 1.25 **صفحه بعد، توسط پروسه زیر ایجاد می شود:**

1. **با کلیک بر آیکون** new model **که بصورت یک صفحه خالی در گوشه سمت چپ در نوار بالایی** menu **قرار دارد، یک مدل جدید باز می کنیم. در ابتدا نام Untitled در بالای این مدل جدید ظاهر می شود. آن را با نام Figure_1.25 و پسوند فایل سیمولینک mdl. ذخیره می نماییم.**
2. **از کتابخانه Sources بلوک Signal Builder را به این مدل جدید می کشانیم. همچنین بلوک Derivative را از کتابخانه Continuous، و از کتابخانه Commonly Used Blocks، بلوک Bus Creator و بلوک Scope را به این مدل می کشانیم، و این بلوک ها را مانند شکل** 1.24 **به هم متصل می کنیم.**
3. دو بار بر بلوک **Signal Builder** در شکل 1.24 کلیک نموده و بر نمودار موج مربعی ظاهر شده، کلیک **می کنیم. بر محور** y **کلیک کرده و مقدار 2.5– را برای Minimum، و مقدار 3.5 را برای maximum وارد می نماییم. بطریق مشابه بر مکانی روی نمودار راست کلیک کرده و برای** Change Time Range **در** Min time: –2**، و در** Max time: 8 **را تعیین می کنیم.**
4. **برای انتخاب یک نقطه مشخص، نشانگر موس را روی آن نقطه قرار داده وکلیک می کنیم. یک دایره دور نقطه کشیده می شود تا نشان دهد که نقطه انتخاب شده است.**

- **معرفی مقدماتی سیمولینک** (Simulink) **در ضمیمه** B **ارائه شده است. برای دریافت اطلاعات کامل در مورد تولید توابع خطی– قطعه ای با بلوک سازنده سیگنال** Signal Builder **سیمولینک، به کتاب مقدمه ای بر** Simulink **با کاربردهای مهندسی، مراجعه نمایید.**

5. برای انتخاب یک بخش از خط، روی آن بخش کلیک می کنیم. آن قسمت خط بصورت ضخیم نشان داده می شود، که بیانگر انتخاب شدن آن است. برای لغو نمودن انتخاب، کلید <Esc> را فشار می دهیم.



شکل 1.25 شکل موج خطی–قطعه ای بلوک سازنده سیگنال سیمولینک شکل 1.24

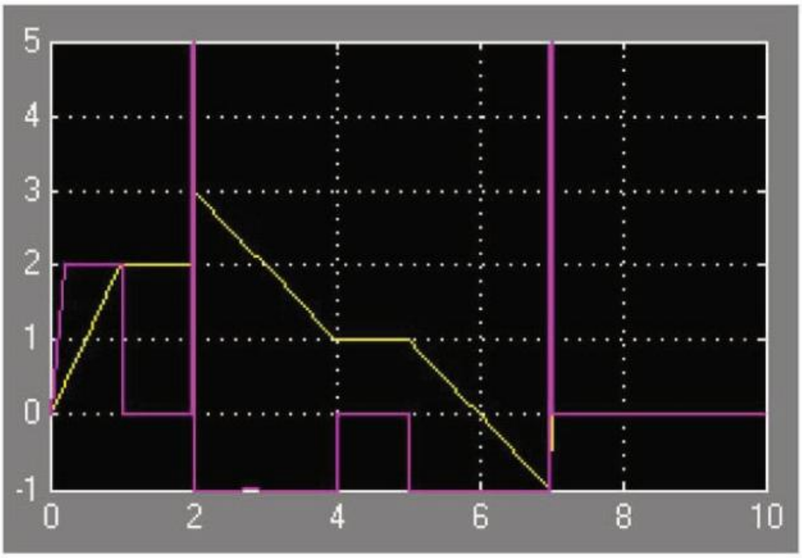
6. **برای کشاندن یک بخش خط به موقعیت جدید، نشانگر موس را روی آن بخش از خط قرار داده و نشانگر ماوس محلی که می توانیم بخش مورد نظر را به آن جا بکشانیم، نشان می دهد.**

7. **برای کشاندن یک نقطه در راستای محور** y، **نشانگر ماوس را روی آن نقطه قرار داده و مکان نما تبدیل به یک دایره شده که بیانگر امکان کشاندن نقطه مورد نظر می باشد. سپس می توانیم آن نقطه را در جهت موازی با محور** x **جابجا نماییم.**

8. **برای کشاندن یک نقطه در امتداد محور** x، **آن نقطه را انتخاب نموده و کلید** <Shift> **را حین کشاندن آن نقطه، نگه می داریم.**

9. **زمانیکه یک بخش خط را روی محور زمان (محور**x**) انتخاب می نماییم مشاهده می کنیم که در قسمت پایینی شکل موج، فیلدهای Left Point و Right Point نمایان می شوند. سپس می توانیم شکل موج را با تعیین نقاط (T)** Time **و (Y)** Amplitude **تغییر دهیم.**

دو اسپایک مثبت که در $t = 2$ و $t = 7$ ظاهر می شوند، و در شکل 1.26 بوضوح نشان داده شده اند.



شکل 1.26 شکل موج ها و مدل سیمولینک شکل 1.24

MATLAB* دارای توابعی درون ساخته برای توابع پله واحد و دلتاست. نامگذاری آن ها براساس نام ریاضیدانانی است که از آنها در مطالعات خود استفاده نموده اند. تابع پله واحد $u_0(t)$ به **Heaviside(t)**، و تابع دلتا به **Dirac(t)** معروف است. کاربرد آنها توسط مثال های زیر روشن می شود.

```
syms k a t;                    % Define symbolic variables
u=k*sym('Heaviside(t-a)')      % Create unit step function at t = a

u =
k*Heaviside(t-a)

d=diff(u)                      % Compute the derivative of the unit step function

d =
k*Dirac(t-a)

int(d)                         % Integrate the delta function

ans =
Heaviside(t-a)*k
```

1.6 خلاصه

- تابع پله واحد $u_0(t)$ بصورت زیر تعریف می شود

$$u_0(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & t > 0 \end{cases}$$

* معرفی MATLAB در ضمیمه A ارائه شده است.