ضرب عدد در بردار

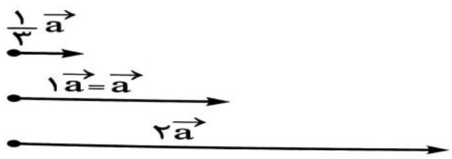
هر گاه عددی را در مختصات ضرب کنیم ، این عدد هم در طول و هم در عرض ضرب می شود

$$k \times \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} kx \\ ky \end{bmatrix} \qquad \text{مثال :} \; ۲ \times \begin{bmatrix} -۳ \\ ۴ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۲ \times -۳ \\ ۲ \times ۴ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -۶ \\ ۸ \end{bmatrix}$$

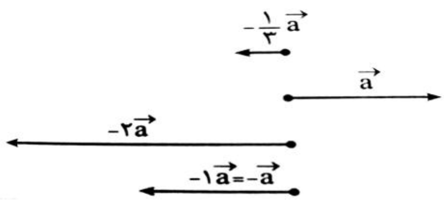
ضرب عدد در بردار (هندسی)

اگر عدد ضرب شده در بردار مثبت باشد ، جهت بردار عوض نمی شود . اگر عدد ضرب شده بین ۰و ۱ باشد اندازه بردار کوچک می شود و اگر عدد ضرب شده بزرگتر از ۱ باشد ، اندازه بردار بزرگتر می شود

اگر عدد ضرب شده ۱ باشد ، برداری مساوی با بردار اولیه به دست می آید



اگر عدد ضرب شده در بردار منفی باشد :



بردار های مساوی :

دو بردار $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix}$ به شرطی مساوی هستند که :

$$a = c \qquad , \qquad b = d$$

بردارهای قرینه :

دو بردار $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix} m \\ n \end{bmatrix}$ قرینه یکدیگرند به شرطی که :

$$m = -a \qquad , \qquad n = -b$$

انتقال متوالی (جمع مختصاتی بردارها)

مثلا $\vec{a} = \begin{bmatrix} x_a \\ y_a \end{bmatrix}$ **و** $\vec{b} = \begin{bmatrix} x_b \\ y_b \end{bmatrix}$ را در نظر بگیرید

$$\vec{a} + \vec{b} = \begin{bmatrix} x_a \\ y_a \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_b \\ y_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{a+x_b} \\ y_{a+y_b} \end{bmatrix}$$

مثال: اگر $\begin{bmatrix} ۳ \\ ۲ \end{bmatrix}$ را به ترتیب توسط بردار های $\vec{a} = \begin{bmatrix} -۲ \\ ۴ \end{bmatrix}$ و $\vec{b} = \begin{bmatrix} ۳ \\ ۵ \end{bmatrix}$ انتقال دهیم به چه نقطه ای می رسیم؟

پاسخ :

ابتدا $\vec{a} + \vec{b}$ را به دست می آوریم $\begin{bmatrix} -۲ \\ ۴ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ۳ \\ ۵ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱ \\ ۹ \end{bmatrix}$

سپس نقطه $\begin{bmatrix} ۳ \\ ۲ \end{bmatrix}$ را توسط بردار $\begin{bmatrix} ۱ \\ ۹ \end{bmatrix}$ انتقال می دهیم

$$\begin{bmatrix} ۳ \\ ۲ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ۱ \\ ۹ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۴ \\ ۱۱ \end{bmatrix}$$

مثال : نقطه (آ) به مختصات $\begin{bmatrix} ۳ \\ ۳ \end{bmatrix}$ را توسط بردار $\begin{bmatrix} ۱ \\ -۳ \end{bmatrix}$ انتقال داده ایم تا به نقطه (ب) رسیده ایم .

قرینه (ب) نسبت به نقطه ای ، برابر $\begin{bmatrix} ۴ \\ ۴ \end{bmatrix}$ شده است .آن نقطه را بیابید ؟

پاسخ :

$$(آ) + \begin{bmatrix} +۱ \\ -۳ \end{bmatrix} = (ب) \Rightarrow \begin{bmatrix} ۳ \\ ۳ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ۱ \\ -۳ \end{bmatrix} = (ب) \Rightarrow (ب) = \begin{bmatrix} ۴ \\ ۰ \end{bmatrix}$$

حالا فرض می‌کنیم قرینهٔ (ب) نسبت به نقطهٔ $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ (پ)، نقطهٔ $\begin{bmatrix} ۴ \\ ۴ \end{bmatrix}$ شده است، در این صورت باید داشته باشیم:

قرینهٔ (ب) نسبت به (پ): $\begin{bmatrix} ۲x - ۴ \\ ۲y - ۰ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۴ \\ ۴ \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} ۲x - ۴ = ۴ \Rightarrow ۲x = ۸ \Rightarrow x = ۴ \\ ۲y - ۰ = ۴ \Rightarrow y = ۲ \end{cases} \Rightarrow (پ) = \begin{bmatrix} ۴ \\ ۲ \end{bmatrix}$

مثال : اگر انتقال یافته $A\begin{bmatrix} ۲a-۱ \\ ۲-b \end{bmatrix}$ تحت $\vec{m} = \begin{bmatrix} -۲ \\ -۳ \end{bmatrix}$ نقطه $B\begin{bmatrix} b+۲ \\ b-a-۳ \end{bmatrix}$ باشد ، آن وقت مقدار $\frac{a+b}{ab}$ را به دست آورید ؟

پاسخ :

$$A+\vec{m}=B \Rightarrow \vec{m}=B-A \Rightarrow \begin{bmatrix}-۲\\-۳\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}b+۲\\b-a-۳\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}۲a-۱\\۲-b\end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix}-۲\\-۳\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}b+۲-۲a+۱\\b-a-۳-۲+b\end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases}b+۲-۲a+۱=-۲\\b-a-۳-۲+b=-۳\end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases}b-۲a=-۵ \Rightarrow b=۲a-۵\ (۱)\\ ۲b-a=۲ \xrightarrow{(۱)} ۲(۲a-۵)-a=۲ \Rightarrow ۴a-۱۰-a=۲ \Rightarrow ۳a=۱۲ \Rightarrow a=۴ \xrightarrow{(۱)} b=۲\times۴-۵=۳\end{cases}$$

بنابراین جواب مسئله برابر است با: $\frac{a+b}{ab}=\frac{۴+۳}{۴\times۳}=\frac{۷}{۱۲}$

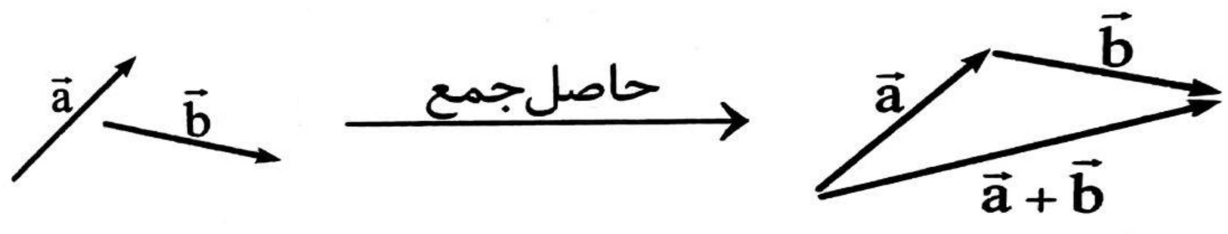
نکته : دو بردار موازی در دستگاه مختصات

$\vec{a}=\begin{bmatrix}x_a\\y_a\end{bmatrix}$ و $\vec{b}=\begin{bmatrix}x_b\\y_b\end{bmatrix}$ با هم موازی اند . اگر یکی از دو رابطه زیر برقرار باشد

$$\frac{x_a}{x_b}=-\frac{y_a}{y_b} \qquad \text{یا} \qquad \frac{x_a}{x_b}=\frac{y_a}{y_b}$$

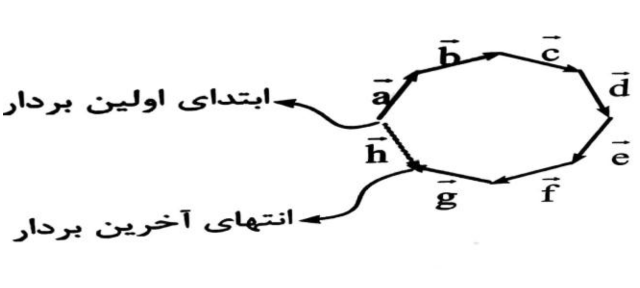
جمع هندسی بردار ها

اگر دو بردار $\vec{b}$ و$\vec{a}$ را در نظر بگیریم برای به دست آوردن جمع بردارها کافی است ابتدا بردار $\vec{a}$ را رسم می کنیم سپس از انتهای آن بردار $\vec{b}$ را رسم می کنیم و از ابتدای $\vec{a}$ به انتهای $\vec{b}$ وصل میکنیم

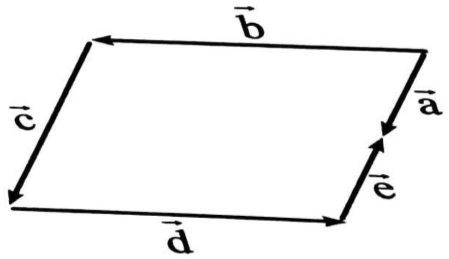


برای به دست آوردن جمع چند بردار هم می توان از این روش استفاده کرد

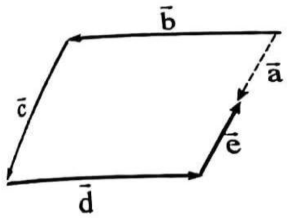
مثال :



مثال : با توجه به شکل زیر ، حاصل جمع همه بردار ها چقدر است ؟



پاسخ :



همان طور که مشاهده می کنید :

$$\vec{b} + \vec{c} + \vec{d} + \vec{e} = \vec{a}$$

باتوجه به رابطه بالا :

$$\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d} + \vec{e} = \vec{a} + \vec{a} = ۲\vec{a}$$

مثال : اگر بردار $\vec{a} = \begin{bmatrix} ۳m-۶ \\ ۲m+۸ \end{bmatrix}$ موازی محور طول ها و بردار $\vec{b} = \begin{bmatrix} ۵n-۱۰ \\ ۷n+۲۱ \end{bmatrix}$ موازی محور عرض ها باشند ، آن وقت مجموع فاصله های نقطه $C\begin{bmatrix} m \\ n \end{bmatrix}$ از محور های مختصات چقدر است ؟

پاسخ :

چون $\vec{a}$ موازی طول هاست پس عرض آن صفر و چون $\vec{b}$ موازی محور عرض ها است طولش صفر است

۱) $۲m + ۸ = ۰ \Rightarrow ۲m = -۸ \Rightarrow m = -۴$

۲) $۵n - ۱۰ = ۰ \Rightarrow ۵n = ۱۰ \Rightarrow n = ۲$

پس مختصات نقطهٔ C به صورت $C\begin{bmatrix} -۴ \\ ۲ \end{bmatrix}$ است و این یعنی فاصلهٔ نقطهٔ C تا محور طول‌ها، برابر ۲ و فاصلهٔ آن تا محور عرض‌ها، برابر ۴ است.

موسوی