آزمون نسبت

فرضیات آزمون به یکی از سه صورت زیر مطرح می‌شود

الف $\begin{cases} H_0 : P = P_0 \\ H_1 : P \neq P_0 \end{cases}$ ب $\begin{cases} H_0 : P \leq P_0 \\ H_1 : P > P_0 \end{cases}$ ج $\begin{cases} H_0 : P \geq P_0 \\ H_1 : P < P_0 \end{cases}$

برای انجام آزمون نمونه‌ای n تایی به تصادف از جامعه انتخاب و نسبت در نمونه ($\hat{p}$)

را محاسبه می‌کنیم . سپس مقدار

$$z^* = \frac{\hat{p} - P_0}{\sqrt{\frac{P_0(1-P_0)}{n}}}$$

را بدست می‌آوریم .

H_0 را در سطح خطای α رد می‌کنیم اگر

الف $|z^*| > z_{\alpha/2}$

ب $z^* > z_\alpha$

ج $z^* < -z_\alpha$

مثال: در یک نمونه تصادفی 60 نفری از ساکنان یک شهر 12 نفر خودشان را پیرو یک کیش

مشاهده کردیم. آیا در سطح خطای 5٪ می‌توان نتیجه گرفت که حداقل 25 درصد

ساکنان این شهر دارای مذهب فرقه یک کیش هستند؟

$$\begin{cases} H_0 : p \geq 0.25 \\ H_1 : p < 0.25 \end{cases}$$

کرانه چپ

$$\hat{p} = \frac{12}{60} = 0.2 \qquad z^* = \frac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}} = \frac{0.2 - 0.25}{\sqrt{\frac{0.25(1-0.25)}{60}}} = -0.89$$

$$\alpha = 0.05 \qquad Z_{0.05} = 1.64$$

H_0 را رد می‌کنیم اگر

$$z^* < -1.64$$

چون $z^* = -0.89 \not< -1.64$ پس H_0 رد نمی‌شود

یعنی نمی‌توان نتیجه گرفت که حداقل 25 درصد دارای مذهب فرقه کیش هستند

آزمون واریانس جامعه

سوالهای در مورد واریانس جامعه به یکی از سه صورت زیر مطرح می‌شود.

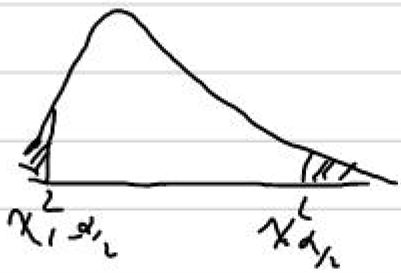
الف $\begin{cases} H_0: \sigma^2 = \sigma_0^2 \\ H_1: \sigma^2 \neq \sigma_0^2 \end{cases}$ ب $\begin{cases} H_0: \sigma^2 \leq \sigma_0^2 \\ H_a: \sigma^2 > \sigma_0^2 \end{cases}$ ج $\begin{cases} H_0: \sigma^2 \geq \sigma_0^2 \\ H_1: \sigma^2 < \sigma_0^2 \end{cases}$

با برداشتن نمونه‌ای n تایی به تصادف از جامعه مربوطه s^2 را بدست آورده سپس مقدار

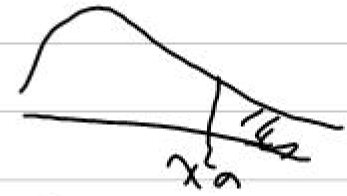
$$\chi^{2*} = \frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2}$$

زمانی می‌گوییم H_0 را در سطح خطای α رد کرده‌ایم اگر

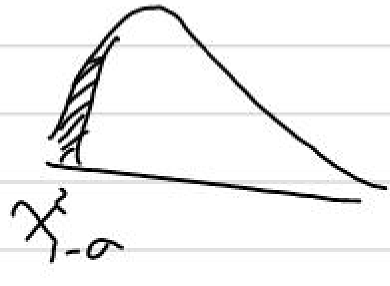
الف $\chi^{2*} > \chi^2_{\alpha/2}$ یا $\chi^{2*} < \chi^2_{1-\alpha/2}$



ب $\chi^2 > \chi^2_{\alpha}$



ج $\chi^2 < \chi^2_{1-\alpha}$



مثال: ادعا شده است واریانس سابقه خدمت معلمان یک منطقه 12 می‌باشد

گزینش تصادفی 8 نفر از معلمان، سابقه خدمت آنها به صورت زیر بوده است

15 11 7 14 10 2 9 10

آیا در سطح خطای 5% با ادعای مطرح شده موافقید؟

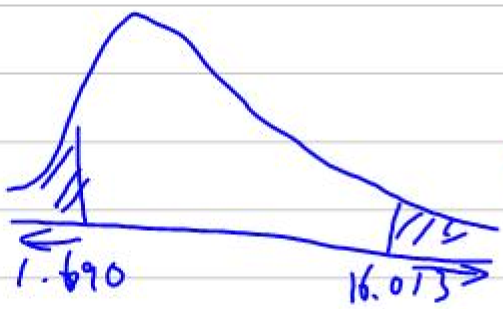
$$\begin{cases} H_0: \sigma^2 = 12 \\ H_1: \sigma^2 \neq 12 \end{cases}$$

x_i	15	11	7	14	10	2	9	10	78
x_i^2	225	121	49	196	100	4	81	100	876

$$S^2 = \frac{n\sum x_i^2 - (\sum x_i)^2}{n(n-1)} = \frac{8(876) - (78)^2}{8(7)} = 16.5$$

$$\chi^{2*} = \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} = \frac{(8-1)(16.5)}{12} = 9.625$$

$\alpha = 0.05 \quad \frac{\alpha}{2} = 0.025$ $\qquad \chi^2_{0.025,7} = 16.013 \qquad \chi^2_{0.975,7} = 1.690$



چون $\chi^{2*} \nless 1.690$ و $\chi^{2*} \ngtr 16.013$

پس H_0 رد نشده یعنی ادعا در مورد واریانس

قابل پذیرش است.

آزمون اختلاف میانگینها در دو جامعه مستقل

الف $\begin{cases} H_0: \mu_1 - \mu_2 = d_0 \\ H_a: \mu_1 - \mu_2 \neq d_0 \end{cases}$ ب $\begin{cases} H_0: \mu_1 - \mu_2 \leq d_0 \\ H_1: \mu_1 - \mu_2 > d_0 \end{cases}$ ج $\begin{cases} H_0: \mu_1 - \mu_2 \geq d_0 \\ H_1: \mu_1 - \mu_2 < d_0 \end{cases}$

این آزمون در سه حالت مجزا برگزار می‌گردد

1 واریانس دو جامعه معلوم است.

در این حالت با استفاده از نمونه‌های تصادفی n_1 و n_2 تایی به ترتیب از دو جامعه مقادیر $\bar{X}_1$ و $\bar{X}_2$ را بدست آورده‌ایم پس مقدار

$$Z^* = \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - d_0}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}}$$

را محاسبه می‌کنیم. H_0 را در سطح خطای α رد می‌کنیم هرگاه:

الف $|Z^*| > Z_{\alpha/2}$

ب $Z^* > Z_\alpha$

ج $Z^* < -Z_\alpha$

مثال: نمره‌های یک کلاس با 4 و 5 نفر به ترتیب از دو کلاس به تصادف انتخاب و نمره ریاضی آنها به صورت زیر ثبت شده است.

کلاس 1 : 15 7 11 4

کلاس 2 : 12 13 10 9 8

اگر واریانس نمرات ریاضی دو کلاس به ترتیب 20 و 15 باشد آیا در سطح خطای 5٪ می‌توان نتیجه گرفت که بین نمره ریاضی دو کلاس تفاوت است؟

$$\begin{cases} H_0: \mu_1 - \mu_2 = 0 \\ H_1: \mu_1 - \mu_2 \neq 0 \end{cases}$$

$n_1 = 4 \quad \bar{x}_1 = \frac{37}{4} = 9.25 \quad \sigma_1^2 = 20$

$n_2 = 5 \quad \bar{x}_2 = \frac{52}{5} = 10.4 \quad \sigma_2^2 = 15$

$$z^* = \frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - d_0}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}} = \frac{(9.25 - 10.4) - 0}{\sqrt{\frac{20}{4} + \frac{15}{5}}} = -0.41$$

$\alpha = 0.05 \quad \alpha/2 = 0.025 \quad Z_{0.025} = 1.96$

پس $|z^*| = |-0.41| \not> 1.96$ ، H_0 رد نمی‌شود.

۲) واریانس‌ها در جامعه مجهول اما مساوی‌اند $\sigma_1^2=\sigma_2^2$

در این حالت با استفاده از نمونه‌های تصادفی n_1 و n_2 تایی از دو جامعه مقادیر $\bar{X}_1$ و $\bar{X}_2$ و S_1^2 و S_2^2 را بدست آورده سپس مقدار

$$S_p^2=\frac{(n_1-1)S_1^2+(n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2}$$

را بدست آوریم و آنگاه مقدار

$$t^*=\frac{(\bar{X}_1-\bar{X}_2)-d_0}{S_p\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}}$$

را بدست آورده H_0 را در سطح خطای α رد می‌کنیم اگر:

الف) $|t^*|>t_{\frac{\alpha}{2},n_1+n_2-1}$

ب) $t^*>t_{\alpha,n_1+n_2-2}$

ج) $t^*<-t_{\alpha,n_1+n_2-2}$

مثال: سابقه خدمت در نمونه‌های 5 و 6 نفری از پرسنل 2 منطقه به شرح زیر بوده است

منطقه ۱ : 7 11 14 3 2

منطقه ۲ : 14 10 6 6 9 15

آیا در سطح خطای ۵٪ می‌توان گفت که پرسنل منطقه ۱، حداقل یک سال کمتر سابقه دارند؟ (فرض کنید واریانس سابقه خدمت پرسنل در دو منطقه یکسان است).

$$\begin{cases} H_0: \mu_1 - \mu_2 \leq -1 \\ H_1: \mu_1 - \mu_2 > -1 \end{cases}$$

x_i	7	11	14	3	2	37
x_i^2	49	121	196	9	4	379

$$\bar{x}_1 = \frac{37}{5} = 7.4$$

$$S_1^2 = \frac{5(379) - (37)^2}{5(4)} = 26.3$$

x_i	14	10	6	6	9	15	60
x_i^2	196	100	36	36	81	225	674

$$\bar{x}_2 = \frac{60}{6} = 10$$

$$S_2^2 = \frac{6(674) - (60)^2}{6(5)} = 14.8$$

$$S_p^2 = \frac{(5-1)26.3 + (6-1)14.8}{5+6-2} = 19.91 \qquad S_p = 4.46$$

$$t^* = \frac{(7.4 - 10) - (-1)}{4.46\sqrt{\frac{1}{5} + \frac{1}{6}}} = -0.59$$

$$t_{0.05, 9} = 3.25$$

$t^* = -0.59 \not> 3.25$ جدول

پس H_0 را رد نمی‌کنیم

③ واریانس دو جامعه مجهول و نامساوی باشند $\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$

در این حالت از دو جامعه نمونه‌ای به تعداد n_1 و n_2 از دو جامعه مقادیر $\bar{x}_1$ ، $\bar{x}_2$ ، S_1^2 و S_2^2 را بدست می‌آوریم سپس مقدار

$$t^* = \frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - d_0}{\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}}}$$

را محاسبه می‌کنیم H_0 را در سطح خطای α رد می‌کنیم اگر

الف) $|t^*| > t_{\frac{\alpha}{2}, df}$

ب) $t^* > t_{\alpha, df}$ $\qquad df = \dfrac{\left(\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}\right)^2}{\frac{\left(\frac{S_1^2}{n_1}\right)^2}{n_1 - 1} + \frac{\left(\frac{S_2^2}{n_2}\right)^2}{n_2 - 1}}$

ج) $t^* < -t_{\alpha, df}$

مثال: ادعا شده است که دانش‌آموزان دبستانی به طور متوسط مسافت 100 متری را با دو ثانیه کمتر نسبت به دانش‌آموزان دبیرستانی می‌دوند. برای بررسی این ادعا نمونه‌ای تصادفی 4 و 6 نفری به ترتیب از دبستانی‌ها و دبیرستانی‌ها انتخاب و به صورت زیر ثبت شده است (فرض کنید واریانس‌ها نامساوی‌اند) آیا در سطح خطای 5% این ادعا مورد تایید است؟

دبستانی: 18 15 11 19

دبیرستانی: 20 11 12 16 14 10

$$\begin{cases} H_0: \mu_1 - \mu_2 = -2 \\ H_1: \mu_1 - \mu_2 \neq -2 \end{cases}$$

x_i	18	15	11	19	63
x_i^2	324	225	121	361	1031

$$\bar{x}_1 = \frac{63}{4} = 15.75$$

$$S_1^2 = \frac{4(1031) - (63)^2}{4(3)} = 12.92$$

x_i	20	11	12	16	14	10	83
x_i^2	400	121	144	256	196	100	1217

$$\bar{x}_2 = \frac{83}{6} = 13.83$$

$$S_2^2 = \frac{6(1217) - (83)^2}{6(5)} = 13.77$$

$$t^* = \frac{(15.75 - 13.83) - (-2)}{\sqrt{\frac{12.92}{4} + \frac{13.77}{6}}} = 1.67$$

$$df = \frac{\left(\frac{12.92}{4} + \frac{13.77}{6}\right)^2}{\frac{\left(\frac{12.92}{4}\right)^2}{3} + \frac{\left(\frac{13.77}{6}\right)^2}{5}} = 6.7 \simeq 6$$

$\alpha = 0.05 \quad t_{0.025,\, df=6} = 2.447$

$|t^*| > 2.447$

H_0 را رد می‌کنیم

غلط

$|t^*| = |1.67| \not> 2.447$

H_0 را رد نمی‌کنیم

آزمون اختلاف نسبتها در دو جامعه مستقل

$$\begin{cases} H_0 : P_1 = P_2 \\ H_1 : P_1 \neq P_2 \end{cases}$$

در این حالت از دو جامعه نمونه‌هایی به اندازه n_1 و n_2 از دو جامعه نسبتهای نمونه‌ای p_1 , p_2 را به دست آورده‌ایم. سپس

$$p = \frac{n_1 p_1 + n_2 p_2}{n_1 + n_2}$$

را حساب می‌کنیم.

آنگاه قرار دهیم:

$$Z^* = \frac{p_1 - p_2}{\sqrt{p(1-p)\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}}$$

را به دست آورده H_0 را در سطح خطای α رد می‌کنیم اگر $|Z^*| > Z_{\alpha/2}$

مثال: ادعا شده است که نسبت قبولی داوطلبان زن در دو شهر در آزمون ورودی دانشگاهها یکسان است. برای بررسی این ادعا نمونه‌هایی به ترتیب 60 و 80 نفری از دو شهر انتخاب کرده و تعداد قبولی آزمون ورودی دانشگاهها به ترتیب 10 و 11 نفر بوده است. آیا در سطح خطای ۵٪ می‌توان این ادعا را پذیرفت

$$\begin{cases} H_0 : P_1 = P_2 \\ H_1 : P_1 \neq P_2 \end{cases}$$

$p_1 = \frac{10}{60} = 0.17$

$p_2 = \frac{11}{80} = 0.14$

$p = \frac{n_1 p_1 + n_2 p_2}{n_1 + n_2} = \frac{10 + 11}{60 + 80} = 0.15$

$$z^* = \frac{p_1 - p_2}{\sqrt{p(1-p)\left(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}\right)}} = \frac{0.17-0.14}{\sqrt{0.15(1-0.15)\left(\frac{1}{60}+\frac{1}{80}\right)}} = 0.49$$

$\alpha = 0.05 \quad \alpha/2 = 0.025 \quad Z_{0.025} = 1.96$

چون

$$|z^*| = |0.49| \not> 1.96$$

پس H_0 را رد نمی‌کنیم یعنی بین نسبت خرابی در دو کارخانه تفاوتی نیست

آزمون تساوی واریانس‌های دو جامعه

$$\begin{cases} H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2 \\ H_1 : \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2 \end{cases}$$

برای نمونه‌ها تصادفی n_1 و n_2 تایی از دو جامعه s_1^2 , s_2^2 را حساب می‌کنیم

$$F^* = \frac{s_1^2}{s_2^2}$$ را بدست می‌آوریم

H_0 را در سطح خطای α رد می‌کنیم اگر

$$F^* > f_{\frac{\alpha}{2}, n_1-1, n_2-1}$$ یا

$$F^* < f_{1-\alpha/2, n_1-1, n_2-1}$$

لازم به تذکر است در جداول توزیع F فقط مقادیر $F_{\alpha/2}$ را داریم

برای بدست آوردن $F_{1-\alpha/2}$ از فرمول زیر استفاده میکنیم

$$F_{1-\alpha/2,\, n_1-1,\, n_2-1} = \frac{1}{F_{\alpha/2,\, n_2-1,\, n_1-1}}$$

مثال: نمونه‌هایی به حجم 4 و 5 نفر به ترتیب از دو کلاس به تصادف انتخاب و نمره ریاضی آنها به صورت زیر ثبت شده است.

	225	49	121	16	
کلاس ۱ :	15	7	11	4	
کلاس ۲ :	12	13	10	9	8

آیا در سطح خطای ۵٪ می‌توان

نتیجه گرفت که واریانس نمره ریاضی دو کلاس یکسان است؟

$$\begin{cases} H_0: \sigma_1^2 = \sigma_2^2 \\ H_1: \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2 \end{cases}$$

کلاس ۱ : $\sum x_i = 37 \quad \sum x_i^2 = 411$

$$S_1^2 = \frac{4(411) - (37)^2}{4(3)} = 22.92$$

کلاس ۲ : $\sum x_i = 52 \quad \sum x_i^2 = 558$

$$S_2^2 = \frac{5(558) - (52)^2}{5(4)} = 4.3$$

$$F^* = \frac{S_1^2}{S_2^2} = \frac{22.92}{4.3} = 5.33$$

$n_1 = 4$

$n_2 = 5$

$$F^* = \frac{S_1^2}{S_2^2} = \frac{22.92}{4.3} = 5.33$$

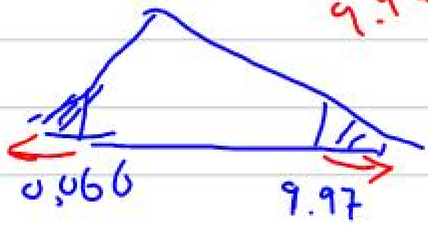
$F^* = 5.33$ چون

9.97 , 0.066 بین

فرض H_0

رد نمی‌شود

$$f_{0.025, 3, 4} = 9.9792$$



$$f_{0.975, 3, 4} = \frac{1}{f_{0.025, 4, 3}} = \frac{1}{15.1010} = 0.066$$