گاما، شماره ی ِ ۱۱، تابستان ِ ۱۳۸۵

بیضی‌گون ِ دوار ِ توپر ِ یک‌نواخت‌باردار[1]

محمد خرمی mamwad@mailaps.org X1-035 (2006/01/08)

پتانسیل ِ الکتریکی یِ حاصل از یک بیضی‌گون ِ دوار ِ توپر ِ یک‌نواخت‌باردار، بر حسب ِ مختصات ِ بیضوی محاسبه می‌شود.

0 مقدمه

چنان که در [1] هم آمده، در سه بُعد دو نوع مختصات ِ بیضوی تعریف می‌کنند. تعریف ِ این مختصات بر حسب ِ مختصات ِ استوانه‌ای ساده‌تر است. در نوع ِ اول، مختصات ِ (u,ϕ,v) از رو یِ مختصات ِ استوانه‌ای یِ (ρ,ϕ,z) چنین تعریف می‌شود.

$$\begin{aligned}\rho &= c\,\cosh u\,\cos v,\\ z &= c\,\sinh u\,\sin v.\end{aligned}\tag{1}$$

گستره یِ (u,v) را می‌شود $0\le u<\infty$ و $-(\pi/2)\le v\le(\pi/2)$، یا $-\infty<u<\infty$ و $0\le v\le(\pi/2)$ گرفت. در حالت ِ اول، رویه‌ها یِ $u=\text{const}$ بیضی‌گون‌ها یِ دوار ِ پخ اند، و رویه‌ها یِ $v=\text{const}$ نیم‌هذلولی‌گون‌ها یِ یک‌پارچه. در حالت ِ دوم، رویه‌ها یِ $u=\text{const}$ نیم‌بیضی‌گون‌ها یِ دوار ِ پخ اند، و رویه‌ها یِ $v=\text{const}$ هذلولی‌گون‌ها یِ یک‌پارچه. این رویه‌ها یِ مختصاتی، از دوران ِ (حولِ‌محورِ z ِ) بیضی‌ها یا هذلولی‌ها یی به دست می‌آیند که دوران‌یافته یِ کانون‌ها یشان دایره یِ $(\rho=c, z=0)$ است.

بر حسب ِ این مختصات، لَپلَسی می‌شود

[1] این مقاله، با اجازه یِ نویسنده، از منزل‌گاه ِ نویسنده برداشته شده است، و همه یِ حقوق ِ آن برا یِ نویسنده محفوظ است.
http://staff.alzahra.ac.ir/mamwad/x1/x1-035.pdf

$$\nabla^2 = \frac{1}{D^2(u,v)} \left(\frac{1}{\cosh u}\frac{\partial}{\partial u} \cosh u \frac{\partial}{\partial u} + \frac{1}{\cos v}\frac{\partial}{\partial v} \cos v \frac{\partial}{\partial v}\right)$$

$$+\frac{1}{c^2 \cosh^2 u \cos^2 v}\frac{\partial^2}{\partial \phi^2}, \tag{2}$$

که

$$\begin{aligned} D^2(u,v) :=&\ c^2 (\cosh^2 u - \cos^2 v), \\ =&\ c^2 (\sinh^2 u + \sin^2 v). \end{aligned} \tag{3}$$

در نوع ـِ دوم، مختصات ـِ (s,ϕ,t) از رو یِ مختصات ـِ استوانه‌ای یِ (ρ,ϕ,z) چنین تعریف می‌شود.

$$\begin{aligned} \rho &= c \sinh s \cos t, \\ z &= c \cosh s \sin t. \end{aligned} \tag{4}$$

گستره یِ (s,t) می‌شود $0 \le s < \infty$ و $-(\pi/2) \le t \le \pi/2$. رویه‌ها یِ $s = \mathrm{const}$ بیضی‌گون‌ها یِ دوار ـِ کشیده اند، و رویه‌ها یِ $t = \mathrm{const}$ نیم‌هذلولی‌گون‌ها یِ دوپارچه. این رویه‌ها یِ مختصاتی دوران‌یافته یِ (حولِ‌محورِ ـِ z) بیضی‌ها و هذلولی‌ها یی اند با کانون‌ها یِ $(\rho = 0, z = \pm c)$.

بر حسب ـِ این مختصات، لَپلَسی می‌شود

$$\nabla^2 = \frac{1}{F^2(s,t)} \left(\frac{1}{\sinh s}\frac{\partial}{\partial s} \sinh s \frac{\partial}{\partial s} + \frac{1}{\cos t}\frac{\partial}{\partial t} \cos t \frac{\partial}{\partial t}\right)$$

$$+\frac{1}{c^2 \sinh^2 s \cos^2 t}\frac{\partial^2}{\partial \phi^2}, \tag{5}$$

که

$$\begin{aligned} F^2(s,t) :=&\ c^2 (\cosh^2 s - \sin^2 t), \\ =&\ c^2 (\sinh^2 s + \cos^2 t). \end{aligned} \tag{6}$$

بر حسب ِ هردو ي این مختصات، معادله يِ پواسُن [a] جداشدنی است. بر حسب ِ مختصات ِ اول، این معادله می‌شود

$$\left[A+B+\left(\frac{1}{\cos^2 v}-\frac{1}{\cosh^2 u}\right)\,\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}\right]\Phi_{\rm o}=-D^2(u,v)\,\varrho, \tag{7}$$

که $\Phi_{\rm o}$ پتانسیل و ϱ چگالی يِ بار است، و

$$A\;:=\;\frac{1}{\cosh u}\,\frac{\partial}{\partial u}\,\cosh u\,\frac{\partial}{\partial u},$$

$$B\;:=\;\frac{1}{\cos v}\,\frac{\partial}{\partial v}\,\cos v\,\frac{\partial}{\partial v}. \tag{8}$$

بر حسب ِ مختصات ِ دوم، معادله يِ پواسُن [a] می‌شود

$$\left[C+E+\left(\frac{1}{\cos^2 t}+\frac{1}{\sinh^2 s}\right)\,\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}\right]\Phi_{\rm p}=-F^2(s,t)\,\varrho, \tag{9}$$

که $\Phi_{\rm p}$ پتانسیل و ϱ چگالی يِ بار است، و

$$C\;:=\;\frac{1}{\sinh s}\,\frac{\partial}{\partial s}\,\sinh s\,\frac{\partial}{\partial s},$$

$$E\;:=\;\frac{1}{\cos t}\,\frac{\partial}{\partial t}\,\cos t\,\frac{\partial}{\partial t}. \tag{10}$$

به ویژه اگر پتانسیل تابع ِ ϕ نباشد، معادله‌ها يِ (7) و (9) می‌شوند

$$\left(\frac{1}{\cosh u}\,\frac{\partial}{\partial u}\,\cosh u\,\frac{\partial}{\partial u}+\frac{1}{\cos v}\,\frac{\partial}{\partial v}\,\cos v\,\frac{\partial}{\partial v}\right)\Phi_{\rm o}=-D^2(u,v)\,\varrho, \tag{11}$$

و

$$\left(\frac{1}{\sinh s}\,\frac{\partial}{\partial s}\,\sinh s\,\frac{\partial}{\partial s}+\frac{1}{\cos t}\,\frac{\partial}{\partial t}\,\cos t\,\frac{\partial}{\partial t}\right)\Phi_{\rm p}=-F^2(s,t)\,\varrho. \tag{12}$$

1 بیضی‌گون ِ دوار ِ پخ

یک بیضی‌گون ِ دوار ِ پخ در نظر می‌گیریم که نیم‌محورها يِ بزرگ و کوچک َ ش، به ترتیب a و b اند. محور ِ تقارن ِ این بیضی‌گون را محور ِ z، و مرکز ِ آن را مبدئ ِ مختصات می‌گیریم. معادله يِ این بیضی‌گون در مختصات ِ بیضوی يِ نوع ِ اول با

$$c = \sqrt{a^2 - b^2} \tag{13}$$

می‌شود

$$u = u_0, \tag{14}$$

که

$$u_0 := \sinh^{-1} \frac{b}{\sqrt{a^2 - b^2}}. \tag{15}$$

فرض کنیم چگالی يِ بار ـِ الکتریکی درون ـِ این بیضی‌گون مقدار ـِ ثابت ـِ ϱ_0، و بیرون ـِ آن صفر است:

$$\varrho = \varrho_0 \, H(u_0 - u), \tag{16}$$

که H تابع ـِ پله است. بر حسب ـِ متغیرها يِ U و V و ثابت ـِ Λ:

$$\begin{aligned} U &:= \sinh u, \\ V &:= \sin v, \\ \Lambda &:= c^2 \, \varrho, \end{aligned} \tag{17}$$

معادله يِ پواسُن [a] می‌شود

$$\begin{aligned} (A + B)\, \Phi_{\mathrm{o}} &= -\Lambda\, (U^2 + V^2)\, H(U_0 - U), \\ &= -\frac{2\,\Lambda}{3}\, [P_2^A(U)\, P_0^B(V) + P_0^A(U)\, P_2^B(V)]\, H(U_0 - U), \end{aligned} \tag{18}$$

که P_l^B چندجمله‌ای يِ لُژاندر [b] از درجه يِ l است و

$$P_l^A(U) := i^{-l}\, P_l^B(i\, U). \tag{19}$$

به ویژه،

$$P_0^A(U) \, = \, 1,$$

$$P_2^A(U) \;=\; \frac{3\,U^2+1}{2},$$

$$P_0^B(V) \;=\; 1,$$

$$P_2^B(V) \;=\; \frac{3\,V^2-1}{2}. \tag{20}$$

ضمناً عمل‌گرها یِ A و B، بر حسب ِ U و V می‌شوند

$$A \;=\; \frac{\partial}{\partial U}\,(1+U^2)\,\frac{\partial}{\partial U},$$

$$B \;=\; \frac{\partial}{\partial V}\,(1-V^2)\,\frac{\partial}{\partial V}. \tag{21}$$

هم‌چنین،

$$U_0 \;:=\; \frac{b}{\sqrt{a^2-b^2}}. \tag{22}$$

هدف حل ِ معادله یِ (18) با شرایط ِ مرزی یِ

$$\left.\frac{\partial \Phi_{\rm o}}{\partial U}\right|_{U=0} \;=\; 0, \tag{23}$$

$$\lim_{U\to\infty} \Phi_{\rm o} \;=\; 0 \tag{24}$$

است.

P_l^B ویژه‌تابع ِ B با ویژه‌مقدار ِ $[-l\,(l+1)]$ است. پس نهاده یِ

$$\Phi_{\rm o}(U,V) =: \Upsilon_0(U)\,P_0^B(V) + \Upsilon_2(U)\,P_2^B(V) \tag{25}$$

را در نظر می‌گیریم. چون P_l^B ها خطی‌مستقل اند، از معادله یِ (18) نتیجه می‌شود

$$A\,\Upsilon_0(U) \;=\; -\frac{2\,\Lambda}{3}\,P_2^A(U)\,H(U_0-U), \tag{26}$$

$$(A-6)\,\Upsilon_2(U) \;=\; -\frac{2\,\Lambda}{3}\,P_0^A(U)\,H(U_0-U). \tag{27}$$

شرایط ِ مرزی یِ (24) و (25) هم می‌شوند

$$\left.\frac{\mathrm{d}\Upsilon_0}{\mathrm{d}U}\right|_{U=0} = 0, \tag{28}$$

$$\lim_{U\to\infty} \Upsilon_0 = 0, \tag{29}$$

$$\left.\frac{\mathrm{d}\Upsilon_2}{\mathrm{d}U}\right|_{U=0} = 0, \tag{30}$$

$$\lim_{U\to\infty} \Upsilon_2 = 0. \tag{31}$$

نقطه یِ $U \to \infty$ یک تکینه‌گی یِ منظم برا یِ عمل‌گر ِ دیفرانسیل ِ A است. معادله یِ

$$[A - l\,(l+1)]\,\Pi_l^A(U) = 0, \tag{32}$$

را در نظر بگیرید. اگر رفتار ِ Π_l^A در $U \to \infty$ را به شکل ِ U^k بگیریم، با جاگذاری در معادله دیده می‌شود

$$k = l,\ -(l+1). \tag{33}$$

با فرض ِ این که l نامنفی باشد، جواب ِ متناظر با U^{-l-1} در $U \to \infty$ صفر می‌شود. این جواب را با $R_l^A(U)$ نمایش می‌دهیم. هم‌چنین، اگر l صحیح باشد یک جواب ِ معادله یِ (32) همان $P_l^A(U)$ است، که چندجمله‌ای است و به ازا یِ l ها یِ فرد فرد و به ازا یِ l ها یِ زوج زوج است. پس برا یِ l ها یِ صحیح ِ نامنفی، جواب ِ (32) می‌شود

$$\Pi_l^A = \mu\,P_l^A + \nu\,R_l^A. \tag{34}$$

بهنجارش ِ R_l^A را چنان می‌گیریم که

$$R_l^A(U) = P_l^A(U)\,\cot^{-1}U + \tilde{P}_l^A(U), \tag{35}$$

که $\tilde{P}_l^A$ چندجمله‌ای یی از درجه یِ $(l-1)$ است، چنان که

$$[A - l\,(l+1)]\,\tilde{P}_l^A(U) = -2\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}U}\,P_l^A(U). \tag{36}$$

از جمله،

$$R_0^A(U) \,=\, \cot^{-1} U,$$

$$R_2^A(U) \,=\, P_2^A(U)\,\cot^{-1} U - \frac{3}{2}\,U. \tag{37}$$

معادله يِ (26) هم‌راه با شرايط ِ مرزی يِ (28) و (29) نتيجه می‌دهد

$$\Upsilon_0(U) = \begin{cases} -\dfrac{\Lambda}{9}\,P_2^A(U) + \alpha\,P_0^A(U), & U < U_0 \\ \beta\,R_0^A(U), & U > U_0 \end{cases}. \tag{38}$$

با استفاده از پی‌وسته‌گی يِ Υ_0 و مشتق ِش در $U = U_0$، ضريب‌ها يِ α و β به دست می‌آيند:

$$\alpha \,=\, -\frac{\Lambda}{9}\,\frac{W(P_2^A, R_0^A; U_0)}{W(R_0^A, P_0^A; U_0)},$$

$$\beta \,=\, -\frac{\Lambda}{9}\,\frac{W(P_2^A, P_0^A; U_0)}{W(R_0^A, P_0^A; U_0)}, \tag{39}$$

که W وِرُنسکی [c] است:

$$W(f, g; x) := f(x)\,g'(x) - g(x)\,f'(x). \tag{40}$$

با جاگذاری يِ (39) در (38) نتيجه می‌شود

$$\Upsilon_0(U) = \begin{cases} \dfrac{\Lambda}{6}\,(U_0^2 - U^2) + \dfrac{\Lambda}{3}\,U_0\,(U_0^2 + 1)\,\cot^{-1} U_0, & U < U_0 \\ \dfrac{\Lambda}{3}\,U_0\,(U_0^2 + 1)\,\cot^{-1} U, & U > U_0 \end{cases}. \tag{41}$$

به همين ترتيب، معادله يِ (27) هم‌راه با شرايط ِ مرزی يِ (30) و (31) نتيجه می‌دهد

$$\Upsilon_2(U) = \begin{cases} \dfrac{\Lambda}{9}\,P_0^A(U) + \gamma\,P_2^A(U), & U < U_0 \\ \delta\,R_2^A(U), & U > U_0 \end{cases}. \tag{42}$$

با استفاده از پی‌وسته‌گی يِ Υ_2 و مشتق ِش در $U = U_0$، ضريب‌ها يِ γ و δ به دست می‌آيند:

$$\gamma \,=\, \frac{\Lambda}{9}\,\frac{W(P_0^A, R_2^A; U_0)}{W(R_2^A, P_2^A; U_0)},$$

$$\delta = \frac{\Lambda}{9}\,\frac{W(P_0^A, P_2^A; U_0)}{W(R_2^A, P_2^A; U_0)}. \tag{43}$$

با گذاشتن ِ این‌ها در (42) نتیجه می‌شود

$$\Upsilon_2(U) = \begin{cases} \dfrac{\Lambda}{18}\,\{[3\,U_0\,(U_0^2+1)\,\cot^{-1}U_0 - 3\,U_0^2 - 2]\,(3\,U^2+1)+2\}, & U < U_0 \\ \dfrac{\Lambda}{6}\,U_0\,(U_0^2+1)\,[(3\,U^2+1)\,\cot^{-1}U - 3\,U], & U > U_0 \end{cases}. \tag{44}$$

از (25)، (41)، و (44) نتیجه می‌شود

$$\Phi_{\rm o} = \Phi_{\rm o}^-\,H(U_0-U) + \Phi_{\rm o}^+\,H(U-U_0), \tag{45}$$

که

$$\Phi_{\rm o}^- = \frac{\Lambda}{36}\,\{[3\,U_0\,(U_0^2+1)\,\cot^{-1}U_0 - 3\,U_0^2 - 2]\,(3\,U^2+1)+2\}\,(3\,V^2-1)$$

$$+\frac{\Lambda}{6}\,(U_0^2-U^2) + \frac{\Lambda}{3}\,U_0\,(U_0^2+1)\,\cot^{-1}U_0 \tag{46}$$

و

$$\Phi_{\rm o}^+ = \frac{\Lambda}{12}\,U_0\,(U_0^2+1)\,\{4\,\cot^{-1}U + [(3\,U^2+1)\,\cot^{-1}U - 3\,U]\,(3\,V^2-1)\}. \tag{47}$$

این عبارت را می‌شود بر حسب ِ $Q_{\rm o}$ (بار ِ درون ِ بیضی‌گون) هم نوشت. داریم

$$Q_{\rm o} = \frac{4\,\pi}{3}\,\frac{\Lambda\,b\,a^2}{c^2}, \tag{48}$$

و

$$U_0\,(U_0^2+1) = \frac{b\,a^2}{c^3}. \tag{49}$$

از این‌جا،

$$\Phi_{\rm o}^+ = \frac{Q_{\rm o}}{16\,\pi\,c}\,\{4\,\cot^{-1}U + [(3\,U^2+1)\,\cot^{-1}U - 3\,U]\,(3\,V^2-1)\},$$

$$= \frac{Q_{\rm o}}{4\,\pi\,c}\,[R_0^A(U) + R_2^A(U)\,P_2^B(V)]. \tag{50}$$

نقاط ِ دور از بیضی‌گون متناظر اند با U ها یِ بزرگ. در این نقاط،

$$\Phi_{\rm o} \approx \frac{Q_{\rm o}}{4\,\pi\,c\,U},$$

$$\approx \frac{Q_{\rm o}}{4\,\pi\,r}, \tag{51}$$

که r فاصله از مرکز ِ بیضی‌گون است.

یک حالت ِ حدی این است که بیضی‌گون به قرص تبدیل شود. این یعنی حد ِ $b \to 0$ با a و $Q_{\rm o}$ ثابت. در این حالت a همان c است، و پتانسیل همه‌جا $\Phi_{\rm o}^{+}$ است. می‌شود دید چگالی ِسطحی ِ قرص ِ حاصل چه قدر است. داریم

$$\sigma = -2 \lim_{z\to 0^+} \left(\frac{\partial \Phi_{\rm o}}{\partial z}\right)_\rho,$$

$$= -2 \lim_{z\to 0^+} \left[\left(\frac{\partial \Phi_{\rm o}}{\partial u}\right)_v \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)_\rho + \left(\frac{\partial \Phi_{\rm o}}{\partial v}\right)_u \left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)_\rho\right]. \tag{52}$$

از این‌جا نتیجه می‌شود

$$\sigma = \frac{3\,Q_{\rm o}}{2\,\pi\,c^2}\,\sin v,$$

$$= \frac{3\,Q_{\rm o}}{2\,\pi\,c^2}\,\sqrt{1-(\rho/c)^2}. \tag{53}$$

این چگالی یک‌نواخت نیست، و نباید هم باشد. به‌ساده‌گی دیده می‌شود عبارت ِ $\sqrt{1-(\rho/c)^2}$ نسبت ِ کلفتی ِ بیضی‌گون در فاصله ِ ρ از محور ِ z، به کلفتی ِ بیضی‌گون در محور ِ z، در حد ِ $b \to 0$ است. این چگالی ِ سطحی هم حد ِ چگالی ِ حجمی در کلفتی ِ بیضی‌گون، در $b \to 0$ است.

2 بیضی‌گون ِ دوار ِ کشیده

یک بیضی‌گون ِ دوار ِ کشیده در نظر می‌گیریم که نیم‌محورها ِ بزرگ و کوچک َ ش، به ترتیب a و b اند. محور ِ تقارن ِ این بیضی‌گون را محور ِ z، و مرکز ِ آن را مبدئ ِ مختصات می‌گیریم. معادله ِ این بیضی‌گون در مختصات ِ بیضوی ِ نوع ِ دوم با

$$c = \sqrt{a^2 - b^2} \tag{54}$$

می‌شود

$$s = s_0, \tag{55}$$

که

$$s_0 := \cosh^{-1} \frac{a}{\sqrt{a^2 - b^2}}. \tag{56}$$

فرض کنیم چگالی ِ بار ِ الکتریکی درون ِ این بیضی‌گون مقدار ِ ثابت ِ ϱ_0، و بیرون ِ آن صفر است:

$$\varrho = \varrho_0\, H(s_0 - s), \tag{57}$$

بر حسب ِ متغیرها یِ S و T و ثابت ِ Λ:

$$\begin{aligned} S &:= \cosh s, \\ T &:= \sin t, \\ \Lambda &:= c^2\, \varrho, \end{aligned} \tag{58}$$

معادله یِ پواسُن [a] می‌شود

$$\begin{aligned} (C + E)\, \Phi_{\mathrm{p}} &= -\Lambda\, (S^2 - T^2)\, H(S_0 - S), \\ &= -\frac{2\,\Lambda}{3}\, [P_2^C(S)\, P_0^E(T) - P_0^C(S)\, P_2^E(T)]\, H(S_0 - S), \end{aligned} \tag{59}$$

که P_l^E و P_l^C چندجمله‌ای‌ها یِ لُژاندر [b] از درجه یِ l اند. به ویژه،

$$\begin{aligned} P_0^C(S) &= 1, \\ P_2^C(S) &= \frac{3\,S^2 - 1}{2}, \\ P_0^E(T) &= 1, \\ P_2^E(T) &= \frac{3\,T^2 - 1}{2}. \end{aligned} \tag{60}$$

ضمناً عمل‌گرها یِ C و E، بر حسب ـِ S و T می‌شوند

$$C \;=\; \frac{\partial}{\partial S}\,(-1+S^2)\,\frac{\partial}{\partial S},$$

$$E \;=\; \frac{\partial}{\partial T}\,(1-T^2)\,\frac{\partial}{\partial T}. \tag{61}$$

هم‌چنین،

$$S_0 := \frac{a}{\sqrt{a^2-b^2}}. \tag{62}$$

می‌شود با روش ی مشابه با روش ـِ بخش ـِ پیش پتانسیل ـِ $\Phi_{\rm p}$ را حساب کرد. اما ساده‌تر این است که توجه کنیم عمل‌گر ـِ C به عمل‌گر ـِ A، و عمل‌گر ـِ E به عمل‌گر ـِ B مربوط است:

$$\begin{aligned} C \;&=\; A(U \to i\,S),\\ E \;&=\; B(V \to T), \end{aligned} \tag{63}$$

و از آن‌جا دیده می‌شود اگر $\Phi_{\rm o}$ جواب ـِ (18) باشد، آن‌گاه $\Phi_{\rm p}$ با

$$\Phi_{\rm p}(S,T) := -\Phi_{\rm o}(i\,S,T) \tag{64}$$

جواب ـِ (59) است. در این جاگذاری،

$$\cot^{-1}(i\,S) = -i\,\coth^{-1} S. \tag{65}$$

به این ترتیب،

$$\Phi_{\rm p} = \Phi_{\rm p}^-\,H(S_0-S) + \Phi_{\rm p}^+\,H(S-S_0), \tag{66}$$

که

$$\begin{aligned} \Phi_{\rm p}^- \;=\; &\frac{\Lambda}{36}\,\{[-3\,S_0\,(S_0^2-1)\,\coth^{-1}S_0 + 3\,S_0^2-2]\,(3\,S^2-1)-2\}\,(3\,V^2-1)\\ &+\frac{\Lambda}{6}\,(S_0^2-S^2)+\frac{\Lambda}{3}\,S_0\,(S_0^2-1)\,\coth^{-1}S_0 \end{aligned} \tag{67}$$

و

$$\Phi_{\rm p}^{+} = \frac{\Lambda}{12}\, S_0\, (S_0^2 - 1)\, \{4\, \coth^{-1} S - [(3\, S^2 - 1)\, \coth^{-1} S - 3\, S]\, (3\, V^2 - 1)\}. \tag{68}$$

این عبارت را می‌شود بر حسب ِ $Q_{\rm p}$ (بار ِ درون ِ بیضی‌گون) هم نوشت. داریم

$$Q_{\rm p} = \frac{4\,\pi}{3}\, \frac{\Lambda\, a\, b^2}{c^2}, \tag{69}$$

و

$$S_0\, (S_0^2 - 1) = \frac{a\, b^2}{c^3}. \tag{70}$$

از این‌جا،

$$\begin{aligned} \Phi_{\rm p}^{+} \;&=\; \frac{Q_{\rm p}}{16\,\pi\, c}\, \{4\, \coth^{-1} S - [(3\, S^2 - 1)\, \coth^{-1} S - 3\, S]\, (3\, T^2 - 1)\}, \\ &=\; \frac{Q_{\rm p}}{4\,\pi\, c}\, [R_0^C(S) - R_2^C(S)\, P_2^B(T)], \end{aligned} \tag{71}$$

که

$$\begin{aligned} R_0^C(S) \;&:=\; \coth^{-1}(S), \\ R_2^C(S) \;&:=\; P_2^C(S)\, \coth^{-1} S - \frac{3}{2}\, S. \end{aligned} \tag{72}$$

$R_0^C(S)$ و $R_2^C(S)$ آن جواب‌ها یِ معادله یِ لُژاندر [b] با $l = 0$ و $l = 2$ اند، که در $S \to \infty$ مثل ِ S^{-l-1} رفتار می‌کنند. نقاط ِ دور از بیضی‌گون متناظر اند با S ها یِ بزرگ. در این نقاط،

$$\begin{aligned} \Phi_{\rm p} \;&\approx\; \frac{Q_{\rm p}}{4\,\pi\, c\, S}, \\ &\approx\; \frac{Q_{\rm p}}{4\,\pi\, r}, \end{aligned} \tag{73}$$

که r فاصله از مرکز ِ بیضی‌گون است.

یک حالت ِ حدی این است که بیضی‌گون به میله تبدیل شود. این یعنی حد ِ $b \to 0$ با a و $Q_{\rm p}$ ثابت. در این حالت a همان c است، و پتانسیل همه‌جا $\Phi_{\rm p}^{+}$ است. می‌شود دید چگالی‌یِ طولی یِ میله یِ حاصل چه قدر است. داریم

$$\begin{aligned}\lambda &= -2\,\pi\,\lim_{\rho\to 0}\left[\rho\,\left(\frac{\partial\Phi_{\rm p}}{\partial\rho}\right)_z\right],\\ &= -2\,\pi\,\lim_{\rho\to 0}\left\{\rho\,\left[\left(\frac{\partial\Phi_{\rm p}}{\partial s}\right)_t\,\left(\frac{\partial s}{\partial\rho}\right)_z+\left(\frac{\partial\Phi_{\rm p}}{\partial t}\right)_s\,\left(\frac{\partial t}{\partial\rho}\right)_z\right]\right\}.\end{aligned}\tag{74}$$

از این‌جا نتیجه می‌شود

$$\begin{aligned}\lambda &= \frac{Q_{\rm p}}{2\,c}\,[1-P_2^C(\sin v)],\\ &= \frac{3\,Q_{\rm p}}{4\,c}\,\left[1-\left(\frac{z}{c}\right)^2\right].\end{aligned}\tag{75}$$

این چگالی یک‌نواخت نیست، و نباید هم باشد. می‌شود دید عبارت ِ $[1-(z/c)^2]$ نسبت ِ مساحت ِ مقطع ِ بیضی‌گون در فاصله ی z از صفحه یِ $x\,y$، به مساحت ِ مقطع ِ بیضی‌گون در صفحه یِ $x\,y$، در حد ِ $b\to 0$ است. این چگالی یِ طولی هم حد ِ چگالی یِ حجمی در مساحت ِ مقطع ِ بیضی‌گون، در $b\to 0$ است.

3 مرجع

[1] محمد خرمی؛ ” مختصات ِ بیضوی در چند مسئله یِ الکترومغناطیس“،
(2002/04/17) X1-010 (گاما، شماره ی ِ ۷، تابستان ِ ۱۳۸۴، صص ۲۸ تا ۴۳)

4 اسم‌ها یِ خاص

[a] Poisson

[b] Legendre

[c] Wronski