۱) مقادیر b,a را طوری تعیین کنید که تابع روبرو در $x=۰$ پیوسته باشد .

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin x}{\sqrt{۱-\cos ۲x}} & x>۰\\ a+|x-۱| & x=۰\\ [۲x]+b & x<۰\end{cases}$$

حل :

$$\lim_{x\to ۰^+}\frac{\sin x}{\sqrt{۱-\cos ۲x}}=\lim_{x\to ۰^+}\frac{\sin x}{\sqrt{۲\sin^۲ x}}=\lim_{x\to ۰^+}\frac{\sin x}{\sqrt{۲}|\sin x|}=\lim_{x\to ۰^+}\frac{\sin x}{\sqrt{۲}\sin x}=\frac{۱}{\sqrt{۲}}=\frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

$$\Rightarrow a+۱=\frac{\sqrt{۲}}{۲}\Rightarrow a=\frac{\sqrt{۲}}{۲}-۱$$

$$\lim_{x\to ۰^-}[۲x]+b=[۰^-]+b=-۱+b\Rightarrow -۱+b=\frac{\sqrt{۲}}{۲}\Rightarrow b=\frac{\sqrt{۲}}{۲}+۱$$

۲) حاصل $\lim_{x\to ۰}\sin^۲ x\left[\frac{۱}{۱-\cos x}\right]$ را بیابید .

حل : با توجه به رابطه $t-۱\le [t]\le t$ داریم .

$$\frac{۱}{۱-\cos x}-۱\le\left[\frac{۱}{۱-\cos x}\right]\le\frac{۱}{۱-\cos x}\Rightarrow$$

$$\frac{\sin^۲ x}{۱-\cos x}-\sin^۲ x\le \sin^۲ x\left[\frac{۱}{۱-\cos x}\right]\le\frac{\sin^۲ x}{۱-\cos x}$$

$$=\lim_{x\to ۰}\left(\frac{\sin^۲ x}{۱-\cos x}-\sin^۲ x\right)=\lim_{x\to ۰}\frac{۱-\cos^۲ x}{۱-\cos x}-\sin^۲ x=\lim_{x\to ۰}۱+\cos x-\sin^۲ x=۲$$

$$\lim_{x\to ۰}\frac{\sin^۲ x}{۱-\cos x}=\lim_{x\to ۰}\frac{(۱-\cos x)(۱+\cos x)}{۱-\cos x}=۲$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to ۰}\sin^۲ x\left[\frac{۱}{۱-\cos x}\right]=۲$$

۳) حاصل $\lim_{x\to ۲}\sin(\pi\sqrt{\frac{x^۲+۵}{۴}})$ را بیابید ؟

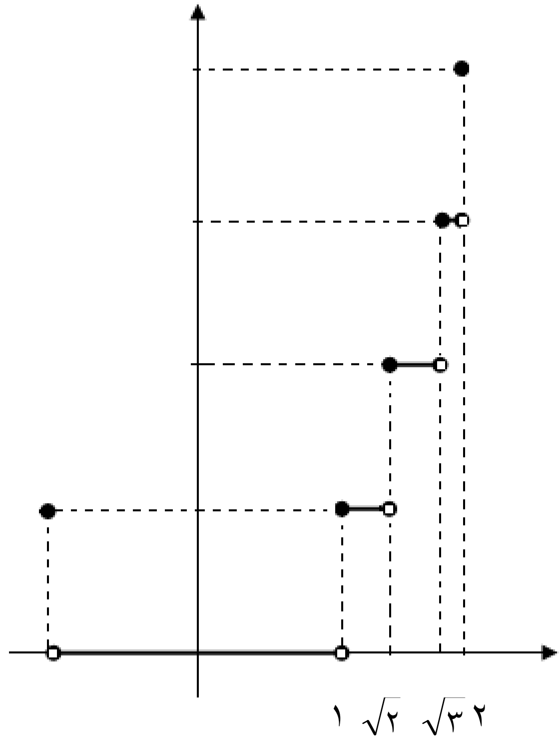
حل :

$$\sin(\lim_{x\to ۲}\pi\sqrt{\frac{x^۲+۵}{۴}} = \sin(\pi\sqrt{\lim_{x\to ۲}\frac{x^۲+۵}{۴}}) = \sin(\pi\sqrt{\frac{۴+۵}{۴}}) = \sin(\frac{۳}{۲}\pi) = -۱$$

۴) تابع $y=\lfloor x^۲\rfloor$ در فاصله $[-۱,۲]$ چند نقطه ی ناپیوستگی دارد ؟

$$x=-۱ \Rightarrow x^2=۱ \to [x^۲]=۱ \to y=۱$$
$$-۱<x<1 \to 0\le x^2<۱ \to [x^۲]=۰ \to y=0$$
$$1\le x<\sqrt{2} \to ۱\le x^۲<۲ \to [x^۲]=۱ \to y=۱$$
$$\sqrt{۲}\le x<\sqrt{۳} \to ۲\le x^۲<۳ \to [x^۲]=۲ \to y=۲$$
$$\sqrt{۳}\le x<۲ \Rightarrow ۳\le x^2<۴ \to [x^۲]=۳ \to y=۳$$
$$x=۲ \to x^۲=۴ \to [x^۲]=۴ \to y=۴$$

(۵ نقطه نا پیوستگی دارد: ۲ ،$\sqrt{۳}$ ،$\sqrt{۲}$ ،۱ ،۱-)



۵) حاصل $\lim_{x\to n}\frac{x}{[x]+[-x]+۲}$ را بیابید ؟

حل :

$$[-x]=\{-[x], x\in Z \quad , \quad -1-[x], x\notin Z \quad \Rightarrow [x]+[-x]=\begin{cases}۰ & x\in Z\\ -1 & x\notin Z\end{cases}$$

وقتی $x\to n$ مقدار x هیچ وقت برابر n نمی شود ،بنابراین $x\notin Z$ و $[x]+[-x]=-۱$ می شود . پس داریم:

$$\lim_{x\to n}\frac{x}{-۱+۲}=\lim_{x\to n}x=n$$

۶) b,a را چنان بیابید تا تابع f روی R پیوسته باشد ؟

$$f(x)=\begin{cases} ۲\sin x & x \le \frac{-\pi}{2} \\ a\sin x - b & \frac{-\pi}{2} \prec x \prec \frac{\pi}{۲} \\ \cos x & x \ge \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

حل :

$$f(-\frac{\pi}{۲}) = ۲\sin(-\frac{\pi}{۲}) = -۲$$

$$\lim_{x\to \frac{-\pi}{۲}^-} f(x) = \lim_{x\to \frac{-\pi}{۲}^-} ۲\sin x = -۲ \qquad \Rightarrow -a-b=-۲(۱)$$

$$\lim_{x\to \frac{-\pi}{۲}^+} f(x) = \lim_{x\to \frac{-\pi}{۲}^+} a\sin x - b = -a-b$$

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{۲}^-} f(x) = \lim_{x\to \frac{\pi}{۲}^-} a\sin x - b = a-b$$

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{۲}^+} f(x) = \lim_{x\to \frac{\pi}{۲}^+} \cos x = ۰ \qquad \Rightarrow a-b=۰$$

$$f(\frac{\pi}{۲}) = \cos\frac{\pi}{۲} = ۰$$

$$\begin{cases} -a-b=-۲ \\ a-b=۰ \end{cases} \to -۲b=-۲ \to b=۱ \quad , \quad a=۱$$

۷) حدهای زیر را بدست آورید

الف) $\lim_{x\to\pi} \frac{\sin^۲ x}{۱+\cos^۳ x} =$

حل :

$$\lim_{x\to\pi}\frac{۱-\cos^۲ x}{۱+\cos^۳ x} = \lim_{x\to\pi}\frac{(۱-\cos x)(۱+\cos x)}{(۱+\cos x)(۱-\cos x+\cos^۲ x)} = \frac{۱+۱}{۱+۱+۱} = \frac{۲}{۳}$$

ب) $\lim_{x\to ۱}\frac{\sqrt[۳]{x}-۱}{\sqrt{x}-۱} =$

حل :

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt{x}-1}\times\frac{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1}{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1}\times\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(\sqrt{x}+1)}{(x-1)(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1)}=\frac{2}{3}$$

۸) حد زیر را محاسبه کنید .

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[5]{1+2x}-1}{x}$$

حل : فرض می کنیم $\sqrt[5]{1+2x}=t$ بنابراین $x=\frac{t^5-1}{2}$.

اگر $x\to 0$ آنگاه $t\to 1$. خواهیم داشت :

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[5]{1+2x}-1}{x}=\lim_{t\to 1}\frac{t-1}{\frac{t^5-1}{2}}=\lim_{t\to 1}\frac{2(t-1)}{(t-1)(t^4+t^3+t^2+t+1)}=\frac{2}{5}$$

۹) b,a را طوری به دست آورید که تابع $f(x)=\begin{cases}a[x]+b[-x] & x>2\\ 2a+3 & x=2\\ \left[\frac{x}{2}\right]-2b & x<2\end{cases}$ در $x=2$ پیوسته باشد .

حل :

$$\lim_{x\to 2^+}f(x)=\lim_{x\to 2^-}f(x)=f(2)\to a\left[2^+\right]+b\left[-(2)^+\right]=\left[\frac{(2)^-}{2}\right]-2b=2a+3$$

$$2a-3b=-2b=2a+3\to\left\{2a-3b=2a+3\to b=-1\to 2a+3=2\to a=-\frac{1}{2}\right.$$

۱۰) مقدار $\lim_{n\to\infty}\frac{1+2+3+\dots+n}{n+2}-\frac{n}{2}$ را بدست آورید

حل :

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1+2+3+\dots+n}{n+2}-\frac{n}{2}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n(n+1)}{2}}{n+2}-\frac{n}{2}=$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n(n+1)-n(n+2)}{2(n+2)}=\lim_{n\to\infty}\frac{-n}{2n+4}=\frac{-1}{2}$$

۱۱) اگر $f(x)=\frac{-x}{x+۵}$ و $\lim_{x\to+\infty}(fof)(x)$ را بدست آورید .

حل :

$$\lim_{x\to+\infty} f\left(f(x)\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{-x}{x+۵}}{\frac{-x}{x+۵}+۵}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-x}{۴x+۲۵}=\frac{-۱}{۴}$$

۱۲) در تابع $f(x)=\begin{cases}[x]+[-x]+a & x<۱\\ ۲x+b+۲ & ۱\le x\le ۲\\ \frac{x^۲-۴}{x-۲} & x>۲\end{cases}$ ، b,a را طوری بدست آورید که تابع در $x=۲$ و $x=۱$ پیوسته باشد .

حل :

$$x=۱\Rightarrow \lim_{x\to۱^+}f(x)=\lim_{x\to۱^-}f(x)=f(۱)\to$$
$$۲+b+۲=\left[۱^+\right]+\left[-(۱)^+\right]+a\to ۴+b=۱-۲+a\to a-b=۵$$
$$x=۲\Rightarrow \lim_{x\to۲^+}f(x)=\lim_{x\to۲^-}f(x)=f(۲)\to$$
$$۴+b+۲=۲+۲\to b=-۲\to a+۲=۵\to a=۳$$

۱۳) مقادیر a و b را چنان بیابید که تابع f با ضابطه داده شده روی R پیوسته باشد .

$$f(x)=\begin{cases}x & x\le۱\\ ax+b & ۱<x<۴\\ -۲x & ۴\le x\end{cases}$$

حل :

$$f(۱)=\lim_{x\to۱^+}f(x)=\lim_{x\to۱^-}f(x)\to۱=a+b \qquad (۱)$$
$$f(۴)=\lim_{x\to۴^+}f(x)=\lim_{x\to۴^-}f(x)\to۴a+b=-۸ \quad (۲)$$
$$(۱),(۲)\to\begin{cases}a+b=۱\\ ۴a+b=-۸\end{cases}\to\begin{cases}-a-b=-۱\\ ۴a+b=-۸\end{cases}\to۳a=-۹\to a=-۳\to-۳+b=۱\to b=۴$$

۱۴) حدود زیر را محاسبه کنید .

الف) $\lim_{x\to۱}\frac{۴x^۳+۳x^۲-۷}{x^۳-۱}$

حل :

$$\lim_{x\to 1}\frac{4x^3+3x^2-7}{x^3-1}=\frac{4+3-7}{1-1}=\frac{0}{0}$$ مبهم

رفع ابهام $$\lim_{x\to 1}\frac{4x^3+3x^2-7}{x^3-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(4x^2+7x+7)}{(x-1)(x^2+x+1)}=\frac{4+7+7}{1+1+1}=6$$

ب) $$\lim_{x\to 0^-}\frac{\sin 2x}{\sqrt{1-\cos 2x}}$$

حل :

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{\sin 2x}{\sqrt{1-\cos 2x}}=\frac{\sin 0}{\sqrt{1-\cos 0}}=\frac{0}{0}$$ مبهم

رفع ابهام $$\lim_{x\to 0^-}\frac{\sin 2x}{\sqrt{1-\cos 2x}}=\lim_{x\to 0^-}\frac{\sin 2x}{\sqrt{2\sin^2 x}}=\lim_{x\to 0^-}\frac{2\sin x\cos x}{\sqrt{2}|\sin x|}=\lim_{x\to 0^-}\frac{2\sin x\cos x}{-\sqrt{2}\sin x}=\frac{2}{-\sqrt{2}}$$

۱۵) تابع f در $x=3$ پیوسته است . $a+b$ را به دست آورید .

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{|x^2-9|}{x-3}+ax+5 & x<3\\ 2 & x=3\\ \dfrac{2x-6}{x^2-5x+6}+bx & x>3\end{cases}\rightarrow f(x)=\begin{cases}-|x+3|+ax+5 & x<3\\ 2 & x=3\\ \dfrac{2}{x-2}+bx & x>3\end{cases}$$

$$f(3)=\lim_{x\to 3^+}f(x)=\lim_{x\to 3^-}f(x)$$

$$2=\lim_{x\to 3^+}\frac{2}{x-2}+bx=\lim_{x\to 3^-}-|x+3|+ax+5$$

$$2=2+3b=-6+3a+5\rightarrow\begin{cases}b=0\\ a=1\end{cases}\rightarrow a+b=1$$

۱۶) حاصل حدهای زیر را به دست آورید .

الف) $$\lim_{x\to 0^+}\frac{x}{\sqrt{x}}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x}{\sqrt{x}}\times\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x\sqrt{x}}{x}=\lim_{x\to 0^+}\sqrt{x}=0$$

ب) $$\lim_{x\to(\frac{3\pi}{2})^-}\frac{1-\cos x}{[\sin x]}=\frac{1-\cos\frac{3\pi}{2}}{[-1^+]}=\frac{1}{-1}=-1$$

ج) $$\lim_{x\to 0}x\cos\frac{1}{x}$$

$$x>0: -1\le \cos\frac{1}{x}\le 1 \rightarrow -x\le x\cos\frac{1}{x}\le x \rightarrow \lim_{x\to 0}(-x)\le \lim_{x\to 0} x\cos\frac{1}{x}\le \lim_{x\to 0} x \rightarrow$$

$$0\le \lim_{x\to 0} x\cos\frac{1}{x}\le 0 \rightarrow \lim_{x\to 0} x\cos\frac{1}{x}=0$$

برای $x<0$ با تغییر جهت نامساوی همین نتیجه به دست می آید .

۱۷) a و b را چنان تعیین کنید که تابع f در $x=1$ پیوسته باشد .

$$f(x)=\begin{cases}|x-1|+b & x<1\\ 2 & x=2\\ 2[x]+a & x>1\end{cases}$$

حل :

$$f(2)=\lim_{x\to 1^+} f(x)=\lim_{x\to 1^-} f(x)\rightarrow 2=\lim_{x\to 1^+}(2[x]+a)=\lim_{x\to 1^-}(|x-1|+b)$$

$$2=2+a=b\rightarrow \begin{cases}a=0\\ b=2\end{cases}$$

۱۸) حد تابع زیر را محاسبه کنید .

$$\lim_{x\to 0}\left[\frac{1-x^2}{1+x^2}\right]$$

حل :

$$\lim_{x\to 0}\left[\frac{1}{1+x^2}-1\right]=\lim_{x\to 0}\left(\left[\frac{1}{1+x^2}\right]-1\right)$$

$$0<\frac{1}{1+x^2}<1\rightarrow \left[\frac{1}{1+x^2}\right]=0\rightarrow \lim_{x\to 0}(0-1)=-1$$

۱۹) حد $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}}\frac{[\cos x]}{x}$ را بیابید .

حل :

$$x\to \frac{\pi}{2}^- \rightarrow 0\le \cos x<1\rightarrow [\cos x]=0\rightarrow \lim_{x\to \frac{\pi}{2}^-}\frac{[\cos x]}{x}=0$$

$$x\to \frac{\pi}{2}^+ \rightarrow -1\le \cos x<0\rightarrow [\cos x]=-1\rightarrow \lim_{x\to \frac{\pi}{2}^+}\frac{-1}{x}=\frac{-2}{\pi}$$

لذا تابع در نقطه $x=\frac{\pi}{2}$ حد ندارد .

۲۰) اگر $\lim_{x\to 1}(x^3+x+b)\sin\frac{1}{x-1}=0$ باشد ، مقدار b را بیابید .

حل :

$$\lim_{x\to ۱}(x^۳+x+b)\sin\frac{۱}{x-۱}=۰\to \lim_{x\to ۱}(x^۳+x+b)=۰\to ۱+۱+b=۰\to b=-۲$$

۲۱) تابع با ضابطه ی $f(x)=\begin{cases} x^۲+ax & x>a \\ \dfrac{bx+۲}{x} & x<a \\ ۸ & x=a \end{cases}$ در $x=a$ پیوسته است . b,a را بیابید .

حل :

$$f(a)=\lim_{x\to a^+}f(x)=\lim_{x\to a^-}f(x)\to ۸=a^۲+a^۲=\frac{ba+۲}{a}\to$$

$$\begin{cases} a^۲=۴\to a=\pm ۲ \\ ba+۲=۸a\to \begin{cases} a=۲\to ۲b+۲=۱۶\to b=۷ \\ a=-۲\to -۲b+۲=-۱۶\to b=۹ \end{cases} \end{cases}$$

۲۲) تابع f به ازای هر y,x حقیقی در رابطه ی $f(x+y)=f(x)+f(y)$ صدق می کند اگر در $x=۰$ پیوسته باشد ثابت کنید در R پیوسته است .

حل :

$$f(۰)=f(۰+۰)=f(۰)+f(۰)=۲f(۰)\to f(۰)=۰$$

تابع f در $x=۰$ پیوسته است بنابراین $\lim_{x\to ۰}f(x)=f(۰)$

(اگر تابع f در نقطه $x=x_۰$ پیوسته باشد آنگاه $\lim_{h\to ۰}f(x_۰+h)=f(x_۰)$)

$$\lim_{h\to ۰}f(x_۰+h)=\lim_{h\to ۰}(f(x_۰)+f(h))=f(x_۰)+\lim_{h\to ۰}f(h)=f(x_۰)+f(۰)=f(x_۰)+۰=f(x_۰)$$

تابع f در هر نقطه $x=x_۰$ پیوسته می باشد پس در R پیوسته است .

۲۳) حد زیر را به دست آورید .

$$\lim_{x\to ۱^+}\frac{x^۲+[x]}{۲x^۳+۵[x+۱]}$$

حل :

$$x\to ۱^+\to x>۱\to [x]=۱$$

$$\lim_{x\to ۱^+}\frac{x^۲+[x]}{۲x^۳+۵[x]+۱}=\lim_{x\to ۱^+}\frac{x^۲+۱}{۲x^۳+۵+۱}=\frac{۱+۱}{۲+۶}=\frac{۱}{۴}$$

۲۴) حد راست و حد چپ تابع $f(x)=\dfrac{[x^۲]-[x]^۲}{x^۲-۴}$ را در نقطه $x=۲$ بیابید و تعیین کنید آیا تابع f در $x=۲$ حد دارد؟

حل :

$$\lim_{x\to ۲^+}\frac{[x^۲]-[x]^۲}{x^۲-۴}=\frac{[(۲^+)^۲]-[۲^+]^۲}{(۲^+)^۲}=\frac{۴-۴}{۰^+}=\frac{۰}{۰^+}=۰$$

$$\lim_{x\to ۲^-}\frac{[x^۲]-[x]^۲}{x^۲-۴}=\frac{[(۲^-)^۲]-[۲^-]^۲}{(۲^-)^۲-۴}=\frac{۳-۱}{۰^-}=\frac{۲}{۰^-}=-\infty$$

تابع f در این نقطه حد ندارد .

۲۵) اگر $f(۳x^۲-۱)=x^۲+|x|-۲$ باشد آنگاه مقدار $\lim\limits_{x\to ۲}f(x)$ را حساب کنید .

حل :

$$t=۳x^۲-۱\to x=\pm\sqrt{\frac{t+۱}{۳}}\to\begin{cases}x=\sqrt{\dfrac{t+۱}{۳}}\to f(t)=\dfrac{t+۱}{۳}+\sqrt{\dfrac{t+۱}{۳}}-۲ & (۱)\\ x=-\sqrt{\dfrac{t+۱}{۳}}\to f(t)=\dfrac{t+۱}{۳}+\sqrt{\dfrac{t+۱}{۳}}-۲ & (۲)\end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l}(۱)\to\lim\limits_{x\to ۲}f(x)=۱+۱-۲=۰\\(۲)\to\lim\limits_{x\to ۲}f(x)=۱+۱-۲=۰\end{array}\right\}\to\lim_{x\to ۲}f(x)=۰$$

۲۶) مقادیر a,b را طوری بدست آورید که تابع $f(x)$ در نقطه $x=۰$ پیوسته باشد .

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin ۲x}{\sqrt{۲-۲\cos x}} & x>۰\\ a & x=۰\\ [x]+b & x<۰\end{cases}$$

حل :

$\lim\limits_{x\to ۰^-}f(x)=\lim\limits_{x\to ۰^+}f(x)=f(۰)$ شرط پیوستگی

$$\lim_{x\to ۰^-}([x]+b)=\lim_{x\to ۰^+}\frac{\sin ۲x}{\sqrt{۲-۲\cos x}}=a\to[۰^-]+b=\lim_{x\to ۰^+}\frac{\sin ۲x}{\sqrt{۴\sin^۲(\frac{x}{۲})}}=a\to$$

$$-۱+b=۲=a\to\begin{cases}a=۲\\b=۳\end{cases}$$

۲۷) نشان دهید به ازای هیچ مقداری از a,b تابع زیر پیوسته نخواهد شد.

$$f(x)=\begin{cases} a\sin x+bx+a+1 & x<0 \\ 1 & x=0 \\ b\sin x+a & x>0 \end{cases}$$

حل :

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-}(a\sin x+bx+a+1)=a+1$$
$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}(b\sin x+a)=a$$
$$f(0)=1$$

این تساوی همزمان برای هیچ مقداری از a برقرار نمی باشد $\Rightarrow a+1=a=1$

۲۸) در تابع با ضا بطه ی $f(x)=\begin{cases}\sqrt{1 \quad x} & x>0 \\ -\sqrt{1+x} & x\le 0\end{cases}$ ،حاصل $\lim_{x\to 0^-} f(x^3-x)$ چقدر است؟

حل :

$$\lim_{x\to 0^-} f(x^3-x)=\lim_{x\to 0^-} f\left(x(x^2-1)\right)=f\left(0^-\times(-1)\right)=f(0^+)=\sqrt{1-0}=\sqrt{1}=1$$

۲۹) پیوستگی تابع $f(x)=x[\sin x]$ را در $x=-\frac{\pi}{2}$ بررسی کنید .

حل :

$$\lim_{x\to -\frac{\pi}{2}^+} x[\sin x]=-\frac{\pi}{2}[-1^+]=\left(-\frac{\pi}{2}\right)(-1)=\frac{\pi}{2}$$
$$\lim_{x\to -\frac{\pi}{2}^-} x[\sin x]=-\frac{\pi}{2}(-1^+)=\left(-\frac{\pi}{2}\right)(-1)=\frac{\pi}{2}$$
$$f\left(-\frac{\pi}{2}\right)=\left(-\frac{\pi}{2}\right)\left[\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right]=\left(-\frac{\pi}{2}\right)(-1)=\frac{\pi}{2}$$

تابع در $x=-\frac{\pi}{2}$ پیوسته است .

۳۰) اگر f با ضابطه $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin x}{\sqrt{1-\cos 2x}} & x>0 \\ a & x=0 \\ [x]+b & x<0\end{cases}$ در $x_0=0$ پیوسته باشد مقادیر b,a را محاسبه کنید.

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin x}{\sqrt{1-\cos 2x}}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin x}{\sqrt{2\sin^2 x}}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin x}{\sqrt{2}\,|\sin x|}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\lim_{x\to 0^-}[x]+b=-1+b$$

$$-1+b=\frac{\sqrt{2}}{2}\to b=1+\frac{\sqrt{2}}{2}\qquad f(0)=a=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

۳۱) حاصل $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-1}{1-\sqrt{x}}$ کدام است ؟

حل :

$$\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x^2+x+1)(\sqrt{x}+1)}{(1-\sqrt{x})(1+\sqrt{x})}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x^2+x+1)(\sqrt{x}+1)}{1-x}=-(1+1+1)(1+1)=-6$$

۳۲) حاصل $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{x}-x}{x+\sqrt[3]{x}}$ را حساب کنید .

حل :

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{x}-x}{x+\sqrt[3]{x}}=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{x}(1-\sqrt[3]{x^2})}{\sqrt[3]{x}(1+\sqrt[3]{x^2})}=\frac{1-0}{0+1}=1$$

۳۳) آیا تابع زیر در $x=1$ پیوسته است ؟

$$f(x)=Arc\tan(\frac{x}{1-x^2})$$

حل :

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 1^+}Arc\tan(\frac{x}{1-x^2})=-\frac{\pi}{2}\\ \lim\limits_{x\to 1^-}Arc\tan(\frac{x}{1-x^2})=\frac{\pi}{2}\end{array}\right\}\to \lim_{x\to 1}f(x)$$ وجود ندارد $\to$ تابع در $x=1$ پیوسته نیست

$$f(1)=Arc\tan(+\infty)=\frac{\pi}{2}$$

۳۴) **نشان دهید** $\lim\limits_{x\to 0}xSin\dfrac{1}{x}=0$

حل :

$$-۱ \le Sin\frac{۱}{x} \le ۱ \Rightarrow \lim_{x\to ۰} x \le \underset{x\to ۰}{Lim}\, xSin\frac{۱}{x} \le \underset{x\to ۰}{Lim} x \Rightarrow ۰ \le \underset{x\to ۰}{Lim} xSin\frac{۱}{x} \le ۰ \Rightarrow \underset{x\to ۰}{Lim}\ x\ Sin\frac{۱}{x} = ۰$$

۳۵) حاصل $\underset{x\to ۲^+}{Lim}\frac{|۲-x|[x]}{|x|-۲}$ را بیابید .

حل :

$$۲ < x < ۳ \Rightarrow [x] = ۲, |۲-x| = x-۲, |x| = x \Rightarrow \underset{x\to ۲^+}{Lim}\frac{(x-۲)(۲)}{x-۲} = ۲$$

۳۶) حاصل $\underset{x\to \frac{۳\pi}{۴}^-}{Lim}\frac{۱+Cotgx}{۱+tgx}$ را محاسبه نمائید .

حل :

$$\lim_{x\to \frac{۳\pi}{۴}^-}\frac{۱+\frac{۱}{tgx}}{۱+tgx} = \lim_{x\to \frac{۳\pi}{۴}^-}\frac{\frac{۱+tgx}{tgx}}{۱+tgx} = \lim_{x\to \frac{۳\pi}{۴}^-}\frac{۱}{tgx} = -۱$$

۳۷) a,bرا چنان بیابید که تابع $f(x)$ در نقطه‌ی ۲ و ۲- حد داشته باشید.

$$f(x) = \begin{cases} ax+b & x < -۲ \\ ۲ax^۲+bx+۱ & -۲ \le x \le ۲ \\ ۳ax-۲ & x > ۲ \end{cases}$$

حل :

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to ۲^+} ۳ax-۲ = \lim\limits_{x\to ۲^-} ۲ax^۲-bx+۱ \Rightarrow ۲a+۲b = -۳ \\ \lim\limits_{x\to -۲^+} ۲ax^۲+bx+۱ = \lim\limits_{x\to -۲^-} ax+b \Rightarrow ۱۰a-۳b = -۱ \end{array}\right\} \Rightarrow a = -\frac{۱۱}{۲۶}, b = \frac{۱۴}{۱۳}$$

۳۸) a,b را چنان بیابید که تابع $f(x) = \begin{cases} ax^۲+bx & x > ۱ \\ ۴ & x = ۱ \\ x^۲+۲ax-۳b & x < ۱ \end{cases}$ در نقطه‌ی $x = ۱$ پیوسته باشد.

حل :

$$\lim_{x\to ۱^+} f(x) = \lim_{x\to ۱^-} f(x) = f(۱)$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 1^+} ax^2+bx=4 \Rightarrow a+b=4 \\ \lim\limits_{x\to 1^-} x^2+2ax-3b=4 \Rightarrow 2a-3b=3 \end{array}\right\} \Rightarrow a=3, b=1$$

۳۹) تابع $f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{x} & x>1 \\ \cos\dfrac{\pi x}{2} & x<1 \end{cases}$ مفروض است. مطلوب است $\lim\limits_{x\to 1^+}(fof)(x)$.

حل :

$$x>1 \Rightarrow \frac{1}{x}<1 \Rightarrow f(f((x)) = f(\frac{1}{x}) = \cos\frac{\pi}{2}(\frac{1}{x}) = \cos(\frac{\pi}{2x})$$

$$\lim_{x\to 1^+}(fof)(x) = \lim_{x\to 1^+}\cos\frac{\pi}{2x} = 0$$

۴۰) حدود زیر را محاسبه کنید .

الف) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{2x^2-11x+15}{3x^2-5x-12} = \lim\limits_{x\to 3}\dfrac{(x-3)(2x-5)}{(x-3)(3x+4)} = \dfrac{1}{13}$

ب) $\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{[x]-1}{\left[\sin\frac{\pi}{2}x\right]} = \dfrac{\lfloor 1^+\rfloor-1}{\left[\sin(\frac{\pi}{2})^+\right]} = \dfrac{0}{1} = 0$

۴۱) حد بگیرید:

الف) $\lim\limits_{x\to +\infty}\sqrt{x^2-3x+7}-\sqrt{x^2+5x}$

حل :

$$\lim_{x\to +\infty}\frac{(\sqrt{x^2-3x+7}-\sqrt{x^2+5x})(\sqrt{x^2-3x+7}+\sqrt{x^2+5x})}{\sqrt{x^2-3x+7}+\sqrt{x^2+5x}} = \lim_{x\to +\infty}\frac{x^2-3x+7-x^2-5x}{\sqrt{x^2-3x+7}+\sqrt{x^2+5x}}$$

$$= \lim_{x\to +\infty}\frac{-8x+7}{|x|+|x|} = \lim_{x\to +\infty}\frac{-8x}{2x} = -4$$

ب) $\lim\limits_{x\to 1}(x^2-1)\cot\pi x$

حل :

$$\lim_{t\to ۰} t(t+۲)\cot \pi t = \lim_{x\to ۱}(x-۱)(x+۱)\cot \pi x \Rightarrow \lim_{x\to ۱} t(t+۲)\cot \pi(t+۱)$$

$$\left| \begin{array}{ll} x\to ۱ & x-۱=t \\ t\to ۰ & x=t+۱ \end{array}\right. \qquad = \lim_{t\to ۰} t(t+۲)\cot \pi t = \frac{۲}{\pi}$$

ج) $\lim\limits_{x\to ۲^+} \frac{[x]+x}{[x]-x}$

حل :

$$\lim_{x\to ۲^+} \frac{[x]+x}{[x]-x} = \frac{۲+۲}{۲-۲} = \frac{۴}{۰^-} = -\infty$$

۴۲) مقدار k را طوری بیابید که $\lim\limits_{x\to ۰} \frac{\tan kx}{\cos kx.\sin ۳x} = ۵$

حل :

$$\lim_{x\to ۰} \frac{kx}{\cos o \times ۳x} = ۵ \Rightarrow \frac{k}{۳} = ۵ \to k = ۱۵$$

۴۳) حد بگیرید.

الف) $\lim\limits_{x\to ۱^-} \frac{x^۲-۱}{۱-\sqrt{x}}$

ب) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{۲}} (\sin x-۱)\tan x$

حل) $\lim\limits_{x\to ۱^-} \frac{x^۲-۱}{۱-\sqrt{x}} \times \frac{۱+\sqrt{x}}{۱+\sqrt{x}} = \lim\limits_{x\to ۱^-} \frac{(x^۲-۱)(۱+\sqrt{x})}{۱-x} = \lim\limits_{x\to ۱^-} \frac{(x+۱)(\sqrt{x}+۱)}{-۱} = -۴$

الف

حل ب) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{۲}} -(۱-\sin x)\tan x = \lim\limits_{x\to \frac{\pi}{۲}} -(۱-\sin x)\times \frac{۱}{\cot x} = -\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{۲}} \frac{۱-\sin x}{\cot x} \times \frac{۱+\sin x}{۱+\sin x}$

$$= -\lim_{x\to \frac{\pi}{۲}} \frac{۱-\sin^۲ x}{\cot x(۱+\sin x)} = -\lim_{x\to \frac{\pi}{۲}} \frac{\cos^۲ x}{\frac{\cos x}{\sin x}(۱+\sin x)} = -\lim_{x\to \frac{\pi}{۲}} \frac{\sin x Cosx}{۱+\sin x} = -\frac{۱\times ۰}{۲} = ۰$$

۴۴) اگر داشته باشیم: $|g(x)-۲|\le (x+۲)^۲$ آنگاه $\lim\limits_{x\to -۲} g(x)$ را محاسبه کنید.

حل :

$$-(x+۲)^۲ \le g(x)-۲ \le (x+۲)^۲ \qquad ۲-(x+۲)^۲ \le g(x) \le (x+۲)^۲+۲$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to -۲} ۲-(x+۲)^۲ = ۲ \\ \lim\limits_{x\to -۲} ۲+(x+۲)^۲ = ۲ \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x\to -۲} g(x) = ۲$$

۴۵) آیا تابع $f(x)=\begin{cases} \dfrac{|x|}{x} & x\ne ۱ \\ ۱ & x=۱ \end{cases}$ در نقطه $x=۱$ پیوسته است؟

حل :

$$f(۱)=۱ \quad \text{و} \quad \left\{\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to ۱^+} \dfrac{x}{x} = ۱ \\ \lim\limits_{x\to ۱^-} \dfrac{-x}{x} = ۱ \end{array}\right\} \to \text{حد ندارد} \to \text{پیوسته نیست}$$

۴۶) اگر شعاع همسایگی متقارن محذوف $(-۲a+۱,-b)\cup(-b,۲a-۳)$ برابر $\frac{۵}{۲}$ باشد، مقدار شعاع همسایگی $|۲x-۱|<a-\frac{۱}{۴}$ را بیابید .

حل :

$$-b+۲a-۱ = ۲a-۳+b \;\Rightarrow\; b=۱$$

$$۲a-۳+۲a-۱ = ۲\times\frac{۵}{۲} \;\Rightarrow\; a=\frac{۹}{۴}$$

شعاع همسایگی دوم $a-\frac{۱}{۴}=\frac{۹}{۴}-\frac{۱}{۴}=۲$

۴۷) حدود زیر را در صورت وجود محاسبه کنید.

الف : $\lim\limits_{x\to ۰} \dfrac{\sqrt{x+۴}-۲}{x}$ ب : $\lim\limits_{x\to -۱} \dfrac{x^۲+۱}{[x-۱]}$

حل الف)

$$\lim_{x\to ۰}\frac{\sqrt{x+۴}-۲}{x}\times\frac{\sqrt{x+۴}+۲}{\sqrt{x+۴}+۲}=\lim_{x\to ۰}\frac{(\sqrt{x+۴})^۲-۲^۲}{x(\sqrt{x+۴}+۲)}=\lim_{x\to ۰}\frac{x+۴-۴}{x(\sqrt{x+۴}+۲)}$$

$$=\lim_{x\to ۰}\frac{x}{x(\sqrt{x+۴}+۲)}=\lim_{x\to ۰}\frac{۱}{\sqrt{x+۴}+۲}=\frac{۱}{۴}$$

حل ب)

$$\lim_{x\to -۱}\ \frac{x^۲+۱}{[x-۱]}=\lim_{x\to (-۱)^+}\ \frac{x^۲+۱}{[x]+(-۱)}=\lim\frac{(-۱)^۲+۱}{(-۱)+(-۱)}=\frac{۲}{-۲}=-۱$$

$$=\lim_{x\to -۱^-}\ \frac{x^۲+۱}{[x]+(-۱)}=\lim\frac{(-۱)^۲+۱}{(-۲)+(-۱)}=\frac{-۲}{۳}$$

چون حد چپ و راست با هم برابر نیستند ، بنابراین حد ندارد.

۴۸) حدود زیر را حساب کنید.

الف) $\lim_{x\to -۱}\ \frac{x^۲+۱}{[x-۱]}$ ب) $\lim_{x\to \bar{۰}}\ \frac{\sqrt{۱-\cos ۲x}}{\tan x}$

حل الف)

$$\lim_{x\to -۱^+}\ \frac{x^۲+۱}{[x]-۱}=\frac{+۱+۱}{-۱-۱}=\frac{۲}{-۲}=-۱ \quad و \quad \lim_{x\to -۱^-}\ \frac{x^۲+۱}{[x]-۱}=\frac{+۱+۱}{-۲+۱}=\frac{۲}{-۳}$$

حد چپ و راست برابر نیست پس حد ندارد .

حل ب)

$$\lim_{x\to \bar{۰}}\frac{\sqrt{۲}(-Sinx)}{\frac{Sin\ x}{\cos x}}=\lim_{x\to \bar{۰}}-\sqrt{۲}\cos x=-\sqrt{۲}\lim_{x\to \bar{۰}}\quad \frac{\sqrt{۲Sin^۲x}}{\tan x}=\lim_{x\to \bar{۰}}\frac{\sqrt{۲}|Sinx|}{\tan x}=$$

۴۹) پیوستگی تابع f را در $x=۰$ بررسی کنید.

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin x}{۲x+|x|} & x\neq ۰\\ ۱ & x=۰\end{cases}$$

حل :

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin x}{\text{۳}x} & x\rangle \circ \\ \dfrac{Sinx}{x} & x\langle \circ \\ \text{۱} & x=\circ\end{cases} \qquad f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin x}{\text{۲}x+x} & x\rangle \circ \\ \dfrac{Sinx}{\text{۲}x-x} & x\langle \circ \\ \text{۱} & x=\circ\end{cases}$$

$$L_{\text{۱}}=\lim_{x\to \bar{\circ}} f(x)=\lim_{x\to \bar{\circ}}\frac{Sinx}{x}=\text{۱}$$

$$L_{\text{۲}}=\lim_{x\to \overset{+}{\circ}} f(x)=\lim_{x\to \overset{+}{\circ}}\frac{Sinx}{\text{۳}x}=\frac{\text{۱}}{\text{۳}} \quad L_{\text{۱}}\neq L_{\text{۲}}\Rightarrow$$ حدندارد و پیوسته نیست

۵۰) حد $x\left[\dfrac{\text{۱}}{x}\right]$ را در صفر بدست آورید .

حل : از آنجا که $\dfrac{\text{۱}}{x}-\text{۱}<\left[\dfrac{\text{۱}}{x}\right]\leq\dfrac{\text{۱}}{x}$ برای مقدارهای مثبت x داریم $\text{۱}-x<x\left[\dfrac{\text{۱}}{x}\right]\leq \text{۱}$ و

برای مقدارهای منفی x داریم $\text{۱}\leq x\left[\dfrac{\text{۱}}{x}\right]<\text{۱}-x$. توابعی که در دو طرف نامساوی هستند در صفر حد یکسان ۱ دارند پس طبق قضیه فشردگی $\lim\limits_{x\to \cdot}x\left[\dfrac{\text{۱}}{x}\right]=\text{۱}$.

۵۱) فرض کنید $f(x)=\begin{cases}x^{2}-2a & x>1\\ 2bx^2+a & x<1\end{cases}$ اگر $\lim\limits_{x\to1^+}f(x)=2\lim\limits_{x\to1^-}f(x)$ آنگاه مقدار $a+b$ را بدست آورید .

حل :

$$1-2a=2(2b+a)\rightarrow 4b+4a=1\rightarrow a+b=\frac{1}{4}$$

۵۲) تابع $f(x)=(x^{\text{۲}}-\text{۴})[x]$ در مجموعه ی اعداد صحیح در کدام نقاط پیوسته است؟

حل : می دانیم $[x]$ در تمام نقاط $x\in Z$ ناپیوسته است و چون $(x^{\text{۲}}-\text{۴})$ در نقاط $x=\text{۲}$ و $x=-\text{۲}$ پیوسته و برابر صفر است پس تابع $f(x)=(x^{\text{۲}}-\text{۴})[x]$ در مجموعه ی اعداد صحیح در نقاط $x=\text{۲}$ و $x=-\text{۲}$ پیوسته است .

۵۳) مقادیر b,a را چنان بیابید که تابع روبرو در $x_{\circ}=\text{۴}$ پیوسته باشد .

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{|x^{۲}-۱۶|}{x-۴}+b & , \quad x>۴\\ ۳ & , \quad x=۴\\ [-x]+a & , \quad x<۴\end{cases}$$

حل :

$$f(۴)=۳$$
$$۳=-۴+a=۴+۴+b \quad \Rightarrow a=۷, b=-۵$$

۵۴) حدود زیر را در صورت وجود، تعیین کنید.

(الف) $\lim\limits_{x\to\pi^+}\dfrac{\sqrt{۱+\cos x}}{\sin x}$ (ب) $\lim\limits_{x\to ۰}\dfrac{x}{|x|}$

حل الف)

$$\lim_{x\to\pi^+}\frac{\sqrt{۱+\cos x}}{\sin x}=\lim_{x\to\pi^+}\frac{\sqrt{۲\cos^{۲}\frac{x}{۲}}}{\sin x}=\lim_{x\to\pi^+}\frac{\sqrt{۲}|\cos\frac{x}{۲}|}{۲\sin\frac{x}{۲}\cos\frac{x}{۲}}=\lim_{x\to\pi^+}\frac{-\sqrt{۲}\cos\frac{x}{۲}}{۲\sin\frac{x}{۲}\cos\frac{x}{۲}}=\frac{-\sqrt{۲}}{۲}$$

حل ب)

$$\lim_{x\to ۰^+}\frac{x}{|x|}=\lim_{x\to ۰^+}\frac{x}{x}=۱$$

پس این حد موجود نیست.

$$\lim_{x\to ۰^-}\frac{x}{|x|}=\lim_{x\to ۰^+}\frac{x}{-x}=-۱$$

۵۵) مقدار a را طوری به دست آورید که تابع $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{۲+x}-x}{ax-۲a} & x\neq ۲\\ x+۱ & x=۲\end{cases}$ در $x=۲$ پیوسته باشد.

حل :

$$\lim_{x\to ۲}\frac{\sqrt{۲+x}-x}{ax-۲a}=\lim_{x\to ۲}\frac{\sqrt{۲+x}-x}{ax-۲a}\times\frac{\sqrt{۲+x}+x}{\sqrt{۲+x}+x}=\lim_{x\to ۲}\frac{-x^{۲}+x+۲}{(ax-۲a)(\sqrt{۲+x}+x)}$$
$$=\lim_{x\to ۲}\frac{(x+۱)(-x+۲)}{-a(-x+۲)(\sqrt{۲+x}+x)}=\frac{-۳}{۴a}$$

از طرفی $f(۲)=۳$ پس $\frac{-۳}{۴a}=۳ \Rightarrow a=-\frac{۱}{۴}$

۵۶) حدهای زیر را درصورت وجود حساب کنید :

الف) $\lim\limits_{x\to ۰^+}\sqrt{x-\sqrt{x}}$

ب) $\lim\limits_{x\to ۱^-}\sin^{-۱}x$

ج) $\lim\limits_{x\to ۳}\frac{\sqrt{۳x+۷}-۴}{۹-x^۲}$

حل الف) تابع در صفرحد ندارد

$$x\to ۰^+ \to ۰<x<۱ \to x<\sqrt{x} \to x-\sqrt{x}<۰ \to$$

حل ب) مطابق قرارداد کتاب چون تابع درهمسایگی چپ ۱ تعریف شده پس جواب حد $\frac{\pi}{2}$ است .

ج)

$$\lim_{x\to ۳}\frac{\sqrt{۳x+۷}-۴}{۹-x^۲}\times\frac{\sqrt{۳x+۷}+۴}{\sqrt{۳x+۷}+۴}=\lim_{x\to ۳}\frac{۳(x-۳)}{(۳-x)(۳+x)(\sqrt{۳x+۷}+۴)}=\frac{-۳}{۴۸}=\frac{-۱}{۱۶}$$

۵۷) حد $\lim\limits_{x\to ۰}\frac{x^۲+\sin^۲x}{x^۲}$ را حساب کنید .

حل :

$$\lim_{x\to ۰}(\frac{x^۲}{x^۲}+\frac{Sin^۲x}{x^۲})=۱+\lim_{x\to ۰}(\frac{Sinx}{x})^۲=۱+۱=۲$$

۵۸) اگر فرض کنیم $\lim\limits_{x\to ۱}\frac{x^۲-۶x+۵}{x^۲+ax+b}=۲$ مقدار b,a را بدست آورید.

حل : چون $\lim\limits_{x\to ۱}(x^۲-۶x+۵)=۰$ پس باید حد مخرج کسر وقتی $x\to ۱$ صفر شود.

$$\lim_{x\to ۱}(x^۲+ax+b)=۱+a+b=۰\Rightarrow b=-a-۱$$

$$x^۲+ax+b=x^۲+ax-a-۱=(x-۱)(x+۱)+a(x-۱)=(x-۱)(x+۱+a)$$

$$\lim_{x\to ۱}\frac{(x-۱)(x-۵)}{(x-۱)(x+۱+a)}=\frac{-۴}{۱+۱+a}=۲\Rightarrow a=-۴\Rightarrow b=۴-۱=۳$$

۵۹) تعداد نقاط ناپیوستگی تابع $f(x)=[x]^۲-[x]$ روی بازه $(-۱,۲)$ چند تاست؟

حل : در بازه ی $(-۱,۲)$ تنها باید نقاط $x=۰$ و $x=۱$ را بررسی کنیم.

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to ۰^+} f(x)=\lim\limits_{x\to ۰^+}([x]^۲-[x])=۰-۰=۰\\ \lim\limits_{x\to ۰^-} f(x)=(-۱)^۲-(-۱)=۲\end{array}\right\}\to$$ f درصفر پیوسته نیست

$$\lim_{x\to ۱^+} f(x)=۱^۲-۱=۰\quad ,\lim_{x\to ۱^-} f(x)=۰-۰=۰,\ f(۱)=۰$$

پس f در ۱ پیوسته است.

۶۰) تابع f با ضابطه $f(x)=-۲[n]-[-n]$ مفروض است حدود زیر را در صورت وجود تعیین کنید.

الف) $\lim\limits_{x\to ۲^-} f(x)$ ب) $\lim\limits_{x\to ۲^+} f(x)$ ج) $\lim\limits_{x\to ۲} f(x)$

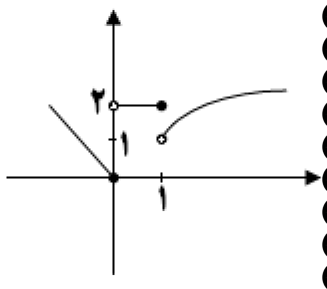
الف) $\lim\limits_{x\to ۲^-} f(x)=-۲(۱)-(-۲)=-۲+۲=۰$

ب) $\lim\limits_{x\to ۲^+} f(x)=-۲(۲)-(-۳)=-۴+۳=-۱$

ج) $\lim\limits_{x\to ۲} f(x)$ حد ندارد

۶۱) نمودار تابع زیر را رسم کرده و پیوستگی تابع را در نقطه x = ۰ و x = ۱ را بررسی کنید .

$$f(x)=\begin{cases}|x|=-x & x\le ۰\\ ۲ & ۰<x\le ۱\\ \sqrt{x} & x>۱\end{cases}$$



$$\lim_{x\to ۰^-} f(x)=۰\qquad \lim_{x\to ۰^+} f(x)=۲\qquad f(۰)=۰$$

$\lim\limits_{x\to ۰^-} f(x)=f(۰)\neq \lim\limits_{x\to ۰^+} f(x)\Rightarrow$ تابع در نقطه $x=۰$ پیوستگی ندارد

$$\lim_{x\to ۱^+} f(x)=۱\qquad \lim_{x\to ۱^-} f(x)=۲\qquad f(۱)=۲$$

$\lim\limits_{x\to ۱^+} f(x)\neq \lim\limits_{x\to ۱^-}=f(۱)\Rightarrow$ تابع در نقطه $x=۱$ پیوستگی ندارد.

۶۲) حدهای زیر را بدست آورید.

الف) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{۲}}\left(x-\frac{\pi}{۲}\right)\tan x$

حل :

$$x-\frac{\pi}{۲}=\theta \Rightarrow \lim_{\theta\to ۰}\theta\tan\left(\frac{\pi}{۲}+\theta\right)=\lim -\theta\cot\theta=\lim_{\theta\to ۰}\frac{-\theta}{\tan\theta}=-۱$$

ب) $\lim_{x\to ۰^-}\frac{\sqrt{۱-\cos ۴x}}{\tan ۵x}=\lim_{x\to ۰^-}\frac{|Sin ۲x|\sqrt{۲}}{\tan ۵x}=\frac{-۲\sqrt{۲}}{۵}$

۶۳) تابع $f(x)=\begin{cases}[\sin x+\cos x]+a & \frac{\pi}{۴}\le x\le\frac{\pi}{۲}\\ [-\cos x] & ۰\le x<\frac{\pi}{۴}\end{cases}$ مفروض است a را تعیین کنید

طوری که f در $\frac{\pi}{۴}$ پیوسته باشد.

حل :

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{۴}^+} f(x)=\lim_{x\to\frac{\pi}{۴}^-}[Sinx+Cos\,x]+a=۱+a=f\left(\frac{\pi}{۴}\right)$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{۴}^-}=\lim_{x\to\frac{\pi}{۴}^-}[-Cos\,x]=-۱$$

بنابراین $a=-۲$

۶۴) اگر تابع $f(x)=\begin{cases}\left\{\frac{\sin x}{\sqrt{۱-\cos ۲x}}\right. & , \quad x\langle ۰\\ a & , \quad x=۰\\ [x]+b & , \quad x\rangle ۰\end{cases}$ در نقطه صفر پیوسته باشد a و b را بیابید ؟

حل :

$$\lim_{x\to ۰^-}\frac{\sin x}{\sqrt{۱-\cos ۲x}}=\lim_{x\to ۰^-}\frac{\sin x}{|\sin x|\sqrt{۲}}=\frac{-\sqrt{۲}}{۲}\Rightarrow a=\frac{-\sqrt{۲}}{۲}$$

$$\lim_{x\to ۰^+}([x]+b)=b\Rightarrow a=b=\frac{-\sqrt{۲}}{۲}$$

۶۵) حاصل $\lim_{x\to 0} x^2\left(1-\sin\frac{1}{x}\right)$ را بیابید ؟

حل :

$$-1\le \sin\frac{1}{x}\le 1 \Rightarrow 0\le 1-\sin\frac{1}{x}\le 2 \Rightarrow 0\le x^2\left(1-\sin\frac{1}{x}\right)\le 2x^2$$

$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to 0} 0 = 0\\ \lim\limits_{x\to 0} 2x^2 = 0\end{cases} \Rightarrow \lim_{x\to 0} x^2\left(1-\sin\frac{1}{x}\right)=0$$

۶۶) $\lim_{x\to 3^-}\frac{[x]-3}{x-3}$ را محاسبه کنید .

حل :

$$\lim_{x\to 3^-}\frac{[x]-3}{x-3}=\frac{[3^-]-3}{3^- -3}=\frac{2-3}{0^-}=\frac{-1}{0^-}=+\infty$$

۶۷) حدود a را چنان بیابید که تابع $f(x)=\begin{cases}-2x+a & x\ge 1\\ x^2+3x & x<1\end{cases}$ در نقطه $x=1$ پیوسته نباشد .

حل :

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=1+3=4\\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=-2+a\end{array}\right\}\to -2+a\ne 4\to a\ne 6$$

۶۸) اگر تابع $f(x)=\begin{cases}ax+1 & x>-2\\ 13 & x=-2\\ 2ax^2+bx-1 & x<-2\end{cases}$ در نقطه $x=-2$ پیوسته باشد مقدار $2a-b$ را بیابید

حل :

$$\lim_{x\to -2^+} f(x)=-2a+1=13\to -2a=12\to a=-6$$

$$\lim_{x\to -2^-} f(x)=8a-2b-1=13\to -48-2b-1=13\to b=-31$$

$$2a-b=2(-6)-(-31)=-12+31=19$$

۶۹) حدهای زیر را محاسبه کنید.

الف) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^+}([\sin x]+[\cos x])$

ب) $\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{x^3+x^2-5x+3}{(x-1)^2}$

ج) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x-4}{\sqrt{x}-2}$

حل الف) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^+}([\sin x]+[\cos x])=\left[\sin\dfrac{\pi}{2}^+\right]+\left[\cos\dfrac{\pi}{2}^+\right]=0-1=-1$

حل ب) $\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{x^3+x^2-5x+3}{(x-1)^2}=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{(x+3)(x-1)^2}{(x-1)^2}=4$

حل ج) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x-4}{\sqrt{x}-2}=\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{(x-4)(\sqrt{x}+2)}{x-4}=\sqrt{4}+2=4$

۷۰) اگر $f(x)=\begin{cases}x^2+1 & x\le 1\\ x^2-1 & x>1\end{cases}$ مطلوب است محاسبه :

$$\lim_{x\to 0^-} f\left(\frac{Sinx}{x}\right)+\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{\tan x}{x}\right)$$

حل : اگر $x<0$ باشد داریم :

$$x<0\to Sinx>x>\tan x\to Sinx>x\to\frac{Sinx}{x}<1\Rightarrow\lim_{x\to 0^-} f\left(\frac{Sinx}{x}\right)=1^2+1=2$$

اگر $x>0$ باشد داریم :

$$x>0\to Sinx<x<\tan x\to \tan x>x\to\frac{\tan x}{x}>1\Rightarrow\lim_{x\to 0^+} f\left(\frac{\tan x}{x}\right)=1^2-1=0$$

پس:

$$\lim_{x\to 0^-} f\left(\frac{Sinx}{x}\right)+\lim_{x\to 0^-} f\left(\frac{\tan x}{x}\right)=2+0=2$$

۷۱) حدتابع مقابل را بدست آورید .

$$\lim_{x\to ۰}\frac{x+\sqrt[۳]{x}}{\sqrt[۳]{x^۲+x}}=?$$

حل :

$$\lim_{x\to ۰}\frac{x+\sqrt[۳]{x}}{\sqrt[۳]{x^۲+x}}=\lim_{x\to ۰}\frac{\sqrt[۳]{x}(\sqrt[۳]{x^۲}+۱)}{\sqrt[۳]{x}(\sqrt[۳]{x}+۱)}=\lim_{x\to ۰}\frac{\sqrt[۳]{x^۲}+۱)}{\sqrt[۳]{x+۱}}=\frac{۱}{۱}=۱$$

۷۲) هریک از حدهای زیر را محاسبه کنید:

الف) $\lim\limits_{x\to ۰}\frac{xSin۳x}{۱-Cos۲x}$ ب) $\lim\limits_{x\to ۰}\frac{[x]+|x|}{x+۱}$ ج) $\lim\limits_{x\to ۱^-}\frac{X^۲-۴X+۳}{X^۳-۳X+۲}$

حل الف :

$$\lim_{x\to ۰}\frac{xSin۳x}{۱-Cos۲x}=\lim_{x\to ۰}\frac{xSin۳x}{۲Sin^۲x}=\lim_{x\to ۰}(\frac{۱}{۲}\times\frac{x}{Sinx}\times\frac{Sin۳x}{Sinx})=$$

$$\lim_{x\to ۰}(\frac{۱}{۲}\times\frac{x}{\sin x}\times\frac{\frac{Sin۳x}{x}}{\frac{Sinx}{x}})=\frac{۱}{۲}\times۱\times۳=\frac{۳}{۲}$$

حل ب :

$$\lim_{x\to ۰}\frac{[x]+|x|}{x+۱}\Rightarrow\begin{cases}\xrightarrow{x>۰}\lim\limits_{x\to ۰^+}\frac{۰+x}{x+۱}=\frac{۰}{۰+۱}=۰\\ \xrightarrow{x<۰}\lim\limits_{x\to ۰^-}\frac{-۱-x}{X+۱}=\frac{-۱-۰}{۰+۱}=-۱\end{cases}$$

حد چپ و راست با هم برابر نیست بنابراین حد ندارد .

حل ج :

$$\lim_{x\to ۱^-}\frac{x^۲-۴x+۳}{x^۳-۳x+۲}=\lim_{x\to ۱^-}\frac{(x-۱)(x-۳)}{(x-۱)^۲(x+۲)}=\frac{-۲}{۰^-}=+\infty$$

۷۳) الف) حد روبرو را پیدا کنید :

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{۲}}([Sinx]+[(Cosx])$$

ب) با استفاده از قضیه فشردگی حاصل $\lim\limits_{x\to ۰}x^۲Sin\frac{۱}{x}$ را بدست آورید.

حل الف)

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{۲}^{+}} f(x)=[۱^{-}]+[۰^{-}]=۰-۱=-۱\\ \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{۲}^{-}} f(x)=[۱^{-}]+[۰^{+}]=۰-۰=۰\end{array}\right\}\rightarrow$$ پس این حد وجود ندارد

حل ب)

$$-۱\le Sin\frac{۱}{x}\le ۱\rightarrow -x^{۲}\le x^{۲}Sin\frac{۱}{x}\le x^{۲}$$

$$\lim_{x\to ۰} x^{۲}=\lim_{x\to ۰}-x^{۲}=۰\Rightarrow \lim_{x\to ۰} x^{۲}Sin\frac{۱}{x}=۰$$ طبق فشردگی

۷۴) اگر تابع $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin x}{\sqrt{۱-\cos ۲x}} & x<۰\\ a & x=۰\\ [x]+b & x>۰\end{cases}$ در $x=۰$ پیوسته باشد مقادیر b,a را مشخص کنید.

حل:

$$\lim_{x\to ۰^{+}} f(x)=b=f(۰)=a=\lim_{x\to ۰^{-}} f(x)=\lim_{x\to ۰^{-}}\frac{\sin x}{\sqrt{۲}\,|\sin x|}=\frac{-۱}{\sqrt{۲}}$$

۷۵) مقادیر b,a را طوری بیابید که تابع f با ضابطه $f(x)=\begin{cases}[x]+۲a-b & x<۱\\ ۲ & x=۱\\ x+b\dfrac{x^{۲}-۲x+۱}{۲(x-۱)} & x>۱\end{cases}$ در نقطه $x_۰=۱$ پیوسته باشد.

حل: باید $f(۱)=\lim\limits_{x\to ۱} f(x)$

$f(۱)=۲$

$$\lim_{x\to ۱^-} f(x) = \lfloor ۱^- \rfloor + ۲a - b = ۲a - b$$

$$\lim_{x\to ۱^+} f(x) = \lim_{x\to ۱^+} \left(x + b\frac{|x-۱|}{x-۱} \right) = ۱ + b$$

$$۱ + b = ۲ \Rightarrow b = ۱$$

$$۲a - b = ۲ \Rightarrow a = \frac{۳}{۲}$$

۷۶) مقدار a را چنان بیابید که تابع f با ضابطه ی $f(x) = a\lfloor x \rfloor + \lfloor x+۱ \rfloor$ در نقطه ی $x = -۱$ حد داشته باشد.

حل :

$$\lim_{x\to (-۱)^-} f(x) = \lim_{x\to (-۱)^-} a\lfloor x \rfloor + \lfloor x+۱ \rfloor = -۲a - ۱$$

$$\lim_{x\to (-۱)^+} f(x) = \lim_{x\to (-۱)^+} a\lfloor x \rfloor + \lfloor x+۱ \rfloor = -a$$

$$\Rightarrow \; -a = -۲a - ۱ \quad \Rightarrow \quad a = -۱$$

۷۷) تابع f با ضابطه ی $f(x) = \begin{cases} a[۴x] - b & x < ۱ \\ ۱ & x = ۱ \\ a\sin\frac{\pi}{۲}x + b & x > ۱ \end{cases}$ **مفروض است ضرایب b,a را چنان بیابید که تابع f در نقطه $x = ۱$ پیوسته باشد .**

حل :

$$\lim_{x\to ۱^-} f(x) = \lim_{x\to ۱^+} f(x) = f(۱)$$

$$a[۴ \times ۱^-] - b = a(\sin\frac{\pi}{۲} \times ۱) + b = ۱$$

$$۳a - b = a + b = ۱$$

$$\begin{cases} ۳a - b = ۱ \\ a + b = ۱ \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a = \frac{۱}{۲} \quad , \quad b = \frac{۱}{۲} \end{cases}$$

۷۸) در تابع $f(x) = \begin{cases} ax^2 + bx + 1 & |x| < 2 \\ \sqrt{x^2 - 2x + 1} & |x| \geq 2 \end{cases}$، a, b را چنان بیابید که تابع روی R پیوسته گردد .

حل: برای وجود پیوستگی روی R باید تابع در $x = 2$ ، $x = -2$ پیوسته گردد لذا:

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = f(2) = \lim_{x\to 2^+} f(x)$$

$$\lim_{x\to 2^-} ax^2 + bx + 1 = \sqrt{2^2 - 2(2) + 1} = \lim_{x\to 2^+} \sqrt{x^2 - 2x + 1} \quad \to 4a + 2b + 1 = 1 = 1$$

$$\lim_{x\to -2^-} f(x) = f(-2) = \lim_{x\to -2^+} f(x)$$

$$\lim_{x\to -2^-} \sqrt{x^2 - 2x + 1} = \sqrt{(-2)^2 - 2(-2) + 1} = \lim_{x\to -2^+} ax^2 + bx + 1$$

$$\to \quad 3 = 3 = 4a - 2b + 1$$

$$\begin{cases} 4a + 2b = 0 \\ 4a - 2b = 2 \end{cases} \quad \to a = \frac{1}{4} \quad , b = -\frac{1}{2}$$

۷۹) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x + \tan 2x + x^2}{x - x^2}$ را تعیین کنید

حل :

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x + \tan 2x + x^2}{x - x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2 + 2x + x^2}{x - x^2} = 3$$

۸۰) حاصل حدهای زیر را بدست آورید.

الف)
$$\lim_{x\to 1} \frac{x - \sqrt{3x-2}}{x^2 - 1} = \lim_{x\to 1} \frac{(x - \sqrt{3x-2})(x + \sqrt{3x-2})}{(x-1)(x+1)(x + \sqrt{3x-2})} = \lim_{x\to 1} \frac{x^2 - 3x + 2}{(x-1)(x+1)(x + \sqrt{3x-2})}$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)(x-2)}{(x-1)(x+1)(x + \sqrt{3x-2})} = \frac{-1}{4}$$

ب)
$$\lim_{x\to 0^-} \frac{\sin 2x}{\sqrt{1 - \cos 2x}} = \lim_{x\to 0^-} \frac{\sin 2x}{\sqrt{2\sin^2 x}} = \lim_{x\to 0^-} \frac{\sin 2x}{\sqrt{2}|\sin x|} = \lim_{x\to 0^-} \frac{2\sin x \cos x}{-\sqrt{2}\sin x}$$

ج)
$$\lim_{x\to 3^+} \frac{[x] - 3}{x^2 - 9} = 0$$

د)
$$\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{\sin(x-1)} = \lim_{x\to 1} \frac{(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 1)}{(\sqrt{x} + 1)\sin(x-1)} = \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)}{(\sqrt{x} + 1)\sin(x-1)} = \frac{1}{2}$$

۸۱) تابع $f(x) = \begin{cases} ax^2 + bx + 1, |x| < 2 \\ \sqrt{x^2 - 2x + 1}, |x| \geq 2 \end{cases}$ داده شده است. مقادیر a و b را طوری بدست آورید که تابع روی R پیوسته باشد.

$$\lim_{x \to 2^-} f(x) = f(2) = \lim_{x \to 2^+} f(x) \Rightarrow 4a + 2b + 1 = 1$$

$$\lim_{x \to (-2)^-} f(x) = f(-2) = \lim_{x \to (-2)^+} f(x) \Rightarrow 4a - 2b + 1 = 3$$

$$\rightarrow \begin{cases} a = \dfrac{1}{4} \\ b = -\dfrac{1}{2} \end{cases}$$