انتگرالها[۴]

وقتی به ایدهٔ شهودی میزان تغییر معنی دقیق می‌دادیم به مفهوم مشتق تابع رسیدیم، و دو فصل اخیر به **حساب دیفرانسیل**، یعنی بررسی مشتقات و کاربردآنها، اختصاص‌داشتند. مفهوم اساسی دیگر حساب دیفرانسیل و انتگرال ***انتگرال*** یک تابع است که در تلاش برای معنی دقیق دادن به ایدهٔ مساحت یک منحنی با یک یا چند لبهٔ خمیده به وجود می‌آید. مطالعهٔ انتگرالها و کاربرد آنها، که اینک بدان می‌پردازیم، **حساب انتگرال** نام دارد. نتیجهٔ کلیدی این فصل **قضیهٔ اساسی حساب دیفرانسیل و انتگرال** است (ر.ک. بخش ۵.۴)، که رابطهٔ عمیق حساب دیفرانسیل را با حساب انتگرال نشان می‌دهد. در واقع، معلوم می‌شود که ***انتگرال*** تابع f را می‌توان از دو مقدار تابع دیگر F که f **مشتق** آن است به دست آورد. در بخشهای ۶.۴ و ۷.۴ مسائل فیزیکی مستلزم حرکت در امتداد خطی مستقیم را با استفاده از انتگرالها حل خواهیم کرد.

۱.۴ نماد سیگما

مطالعهٔ انتگرالگیری با معرفی نماد فشرده‌ای برای مجموعها خیلی ساده می‌شود. فرض کنیم f تابعی باشد که قلمروش شامل اعداد صحیح مثبت است. در این صورت،

$$\sum_{i=1}^{n} f(i) \qquad (1)$$

اختصاری است برای

$$f(1) + f(2) + \cdots + f(n). \qquad (2)$$

عملی که ما را از f به مجموع (۱) یا (۲) می‌رساند عمل **جمعبندی** نام دارد، وعلامت $\sum$ (سیگمای بزرگ یونانی) ***علامت جمعبندی*** نامیده می‌شود. اعداد 1 و n به ترتیب حدود ***پایینی*** و ***بالایی*** جمعبندی نام دارند. دراینجا "حد" معنی محاوره‌ای "مرز" را دارد

تا معنی تکنیکی که تا آن حد فرا رفته است . سه نقطه در (۲) یعنی " و غیره تا "، اما اگر $n = 1, 2, 3$ ، صرفا " داریم

$$\sum_{i=1}^{1} f(i) = f(1), \qquad \sum_{i=1}^{2} f(i) = f(1) + f(2), \qquad \sum_{i=1}^{3} f(i) = f(1) + f(2) + f(3).$$

علامت i آمده در (۱) *اندیس جمعبندی* نام دارد ،و یک " اندیس ظاهری" می‌باشد، بدین معنی که هر علامت دیگر به همین خوبی می‌باشد . لذا ،

$$\sum_{i=1}^{n} f(i) = \sum_{j=1}^{n} f(j) = \sum_{k=1}^{n} f(k) = \sum_{p=1}^{n} f(p),$$

و غیره .

مثال ۱ . $\sum_{i=1}^{5} \frac{1}{i}$ را حساب کنید .

حل. با بسط مجموع ، یعنی نوشتن آن به‌طور کامل، خواهیم داشت

$$\sum_{i=1}^{5} \frac{1}{i} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} = \frac{137}{60}.$$

گاهی یک مجموع با " جملهٔ صفرم " شروع می‌شود . مثلا " ،

$$\sum_{i=0}^{n} f(i)$$

اختصاری است برای

$$f(0) + f(1) + f(2) + \cdots + f(n)$$

(در اینجا فرض است که قلمرو f علاوه‌براعداد صحیح مثبت شامل 0 است) . به‌همین‌نحو، اگر m از n کمتر باشد ،

$$\sum_{i=m}^{n} f(i) \tag{۳}$$

یعنی

$$f(m) + f(m + 1) + \cdots + f(n),$$

که در آن تعداد کل جملات مساوی است با $n - m + 1$. اگر $m = n$ ، مجموع (۳) به‌تنها جملهٔ $f(m)$ تحویل می‌شود ، و اگر $m > n$ تعریف نشده است .

مثال ۲ . $\sum_{i=0}^{5} 2^i$ را حساب کنید .

حل. با بسط دادن مجموع خواهیم داشت

$$\sum_{i=0}^{5} 2^i = 2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5 = 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 = 63.$$

مثال ۳. $\sum_{n=3}^{6} n!$ را حساب کنید.

حل. مثل صفحهٔ ۲۲۵، علامت $n!$ (n فاکتوریل) عبارت است از حاصل ضرب $n(n-1)\cdots 2 \cdot 1$ یعنی n عدد صحیح مثبت اولیه. بنابراین،

$$\sum_{n=3}^{6} n! = 3! + 4! + 5! + 6! = 6 + 24 + 120 + 720 = 870.$$

فرض کنیم

$$\sum_{i=m}^{n} g(i) \qquad (۳')$$

مجموع دیگری به شکل (۳)، شامل تابع دیگر g، باشد. به آسانی معلوم می‌شود که

$$\sum_{i=m}^{n} [af(i) + bg(i)] = a \sum_{i=m}^{n} f(i) + b \sum_{i=m}^{n} g(i), \qquad (۴)$$

که در آن a و b ثابتهای دلخواهی هستند. اثبات مشروح (۴) را به عنوان تمرین می‌گذاریم (مجموعها را بسط، ضربها را انجام، و جملات را تجدید آرایش دهید).

مثال ۴. اگر $S = \sum_{i=1}^{7} 3^i$ و $T = \sum_{i=1}^{7} (6 - 3^{i+1})$، $S + \frac{1}{3} T$ را حساب کنید.

حل. به کمک فرمول (۴) که از راست به چپ خوانده می‌شود، خواهیم داشت

$$S + \frac{1}{3} T = \sum_{i=1}^{7} \left[3^i + \frac{1}{3}(6 - 3^{i+1})\right] = \sum_{i=1}^{7} [3^i + (2 - 3^i)] = \sum_{i=1}^{7} 2 = 14.$$

آخرین مرحله از این نتیجه می‌شود که هرگاه c ثابت باشد، آنگاه

$$\sum_{i=1}^{n} c = \underbrace{c + c + \cdots + c}_{\text{جمله } n} = nc.$$

قضیهٔ دوجمله‌ای. آخرین مثال ما نشان می‌دهد که استفاده از نماد سیگما چقدر کار را ساده می‌کند.

مثال ۵. قضیهٔ مشهوری از جبر به‌نام *قضیهٔ دوجمله‌ای* می‌گوید هرگاه n عددصحیح‌مثبتی باشد، آنگاه توان n م $a + b$ از بسط زیر برخوردار است:

$$(a+b)^n = a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \cdots + \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + b^n$$

(۵)

$$= a^n + na^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{2}a^{n-2}b^2 + \cdots + nab^{n-1} + b^n.$$

در اینجا اعداد $\binom{n}{k}$، به نام *ضرایب دوجمله‌ای*، با

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \qquad (k = 1, \ldots, n-1) \tag{۶}$$

تعریف می‌شوند. با استفاده از نماد سیگما می‌توان (۵) را به صورت بسیار فشردهٔ

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k}b^k \tag{۵'}$$

نوشت با این فرض که

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1.$$

این نظیر است به استفاده‌ازفرمول (۶) به ازای $k = 0, 1, \ldots, n$ پس از تعریف $0! = 1$. قضیهٔ دوجمله‌ای را می‌توان به کمک روشی به نام *استقرای ریاضی* ثابت کرد. جزئیات در مثال ۳ ضمیمه داده شده است (ر.ک. صفحهٔ ۱۵۸۰ض).

برای محاسبهٔ ضرایب دوجمله‌ای، می‌بینیم که

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}, \qquad \binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n,$$

و

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)(n-k)(n-k-1)\cdots 2\cdot 1}{k!(n-k)(n-k-1)\cdots 2\cdot 1}$$
$$= \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}.$$

لذا، مثلاً،

$$\binom{8}{3} = \binom{8}{5} = \frac{8\cdot 7\cdot 6}{3\cdot 2\cdot 1} = 56,$$
$$\binom{100}{98} = \binom{100}{2} = \frac{100\cdot 99}{2\cdot 1} = 50\cdot 99 = 4950.$$

مسائل

مجموع داده شده را حساب کنید .

۱. $\sum_{i=3}^{7} i^2$

۲. $\sum_{j=1}^{6} 2^{-j}$

۳. $\sum_{k=0}^{5} (-1)^k 3^k$

۴. $\sum_{m=0}^{8} (m^2-1)$

۵. $\sum_{n=2}^{5} n^{n-1}$

۶. $\sum_{i=0}^{10} (2i-1)$

۷. $\sum_{j=0}^{6} \frac{j-1}{j+2}$

۸. $\sum_{k=2}^{7} \frac{k+1}{k-1}$

۹. $\sum_{m=0}^{5} \sin \frac{m\pi}{3}$

۱۰. $\sum_{n=1}^{9} \cos \frac{n\pi}{4}$

۱۱. نشان دهید که

$$\sum_{i=m}^{n} [f(i+1)-f(i)] = f(n+1)-f(m).$$

هر مجموع شبیه این، که اغلب جملاتش یکدیگر را حذف می‌کنند، **توی هم‌رو** نام دارد .

با استفاده از مسئلهٔ قبل، مجموع داده شده را حساب کنید .

۱۲. $\sum_{i=0}^{9} (2^{i+1}-2^i)$

۱۳. $\sum_{j=2}^{15} \left(\frac{1}{j}-\frac{1}{j+1}\right)$

۱۴. $\sum_{k=1}^{35} (\sqrt{k+1}-\sqrt{k})$

مجموع داده شده را با نماد سیگما بنویسید .

۱۵. $2+5+8+\cdots+32$ $\quad \sum_{i=1}^{11}(3i-1)$

۱۶. $5-9+13-17+\cdots+45$

۱۷. $3+2+\frac{5}{3}+\frac{6}{4}+\frac{7}{5}+\frac{8}{6}+\frac{9}{7}+\frac{10}{8}$

۱۸. $\frac{1}{3}-\frac{3}{5}+\frac{5}{7}-\cdots-\frac{51}{53}$

آیا فرمول داده شده درست است یا نادرست؟

۱۹. $\sum_{n=3}^{7} n = \sum_{m=4}^{8} (m-1)$

۲۰. $\sum_{i=1}^{50} 1 = 49$

۲۱. $\sum_{k=1}^{n} (1+2k) = 1 + 2\sum_{k=1}^{n} k$

۲۲. $\sum_{j=1}^{11} (-1)^{j-1} = 1$

ضریب دوجمله‌ای داده شده را حساب کنید.

۲۳. $\binom{12}{6}$

۲۴. $\binom{14}{5}$

۲۵. $\binom{19}{4}$

۲۶. $\binom{20}{11}$

۲۷. $\binom{31}{29}$

۲۸. $\binom{101}{3}$

عبارات زیر را با استفاده از قضیهٔ دوجمله‌ای بسط دهید.

۲۹. $(1+\sqrt{2})^5$

۳۰. $(a+b)^6$

۳۱. $(a-b)^7$

۳۲. $(1+x)^8 - (1-x)^8$

نشان دهید که

۳۳. $\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \cdots + \binom{n}{n} = 2^n$

۳۴. $\binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \cdots + (-1)^n\binom{n}{n} = 0$

۳۵. قاعدهٔ *لایب‌نیتز*

$$\frac{d^n}{dx^n}[f(x)g(x)] = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(n-k)}(x) g^{(k)}(x)$$

برای مشتق n م حاصل ضرب دو تابع را با استفاده از قضیهٔ دوجمله‌ای ثابت کنید

با استفاده از قاعدهٔ لایب‌نیتز کمیات زیر را حساب کنید.

۳۶. مشتق هشتم $x^3 \cos x$

۳۷. مشتق دهم $x^4 \sin x$

۳۸. اعداد $a_0, a_1, \ldots, a_n$ و $b_0, b_1, \ldots, b_n$ داده شده‌اند. نشان دهید که

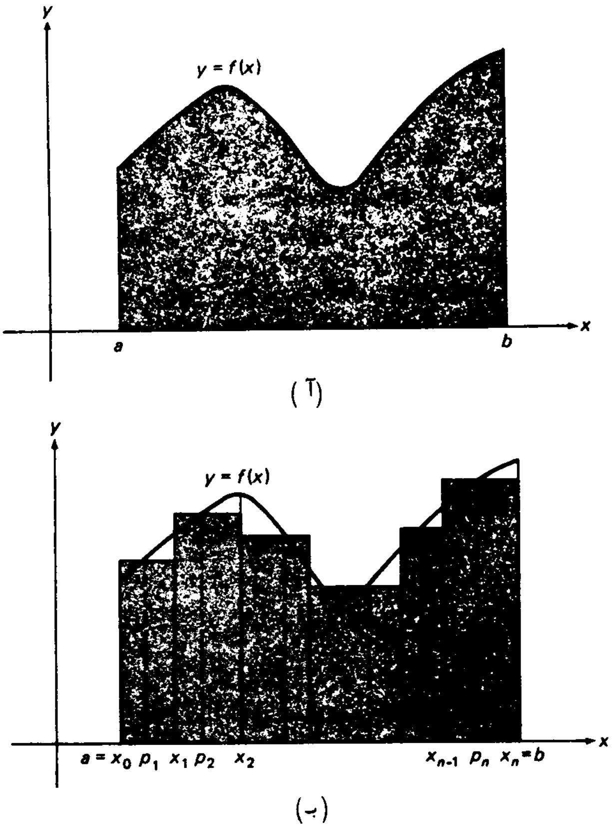
$$\sum_{i=1}^{n} (a_i - a_{i-1})b_{i-1} = (a_n b_n - a_0 b_0) - \sum_{i=1}^{n} a_i(b_i - b_{i-1}).$$

این نتیجه به فرمول جمعبندی جزء به جزء معروف است.

۲۰۴ مساحت تحت یک منحنی و انتگرال معین

نوع حدی که به مفهوم *انتگرال* معین منجر می‌شود گهگاه در مسائل مربوط به جمعبندی تعداد بسیار زیادی از جملات کوچک ظاهر می‌شود. نمونهٔ تمام این گونه مسائل یافتن مساحت تحت یک منحنی است که اینک بدان می‌پردازیم.

فرض کنیم تابع f بر بازهٔ بستهٔ کراندار $[a, b]$ پیوسته و نامنفی باشد. منظور از **مساحت تحت‌منحنی** $y = f(x)$ از $x = a$ تا $x = b$ یعنی مساحت A ناحیهٔ مسطح R محدود به خطوط قائم $x = a$ و $x = b$، محور x، و منحنی $y = f(x)$ مثل شکل ۱ (آ). ناحیهٔ R دست کم یک طرف مستقیم دارد (درصورت مثبت بودن f، سه طرف)، ولی بالای آن خمیده است. لذا، در حین محاسبهٔ مساحت A باید ابتدا **منظور** ما از A روشن شود. این همان فلسفهٔ یافتن، پس از **تعریف کردن**، مماس بر یک منحنی کلی را دارد (ر.ک. صفحهٔ ۱۸۵)، و مثل مسئلهٔ مماس که به مفهوم مشتق منجر شد، مسئلهٔ مساحت به مفهوم انتگرال ختم می‌شود.



شکل ۱

با دیدی از تعریف مساحت A ، بازهٔ $[a, b]$ را به وسیلهٔ **نقاط تقسیم**

$$a = x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n = b \qquad (۱)$$

صادق در نامساویهای

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$$

به تعداد زیادی زیر بازهٔ کوچکتر تقسیم می‌کنیم . در اینجا ، برای یکنواخت بودن نماد ، نقاط تقسیم a و b بازهٔ اصلی $[a, b]$ را نقاط تقسیم گرفته و آنها را باعلایم x_0 و x_n نشان می‌دهیم . نقاط (۱) ، که می‌گوییم یک *افراز* بازهٔ $[a, b]$ را تشکیل می‌دهند ، $[a, b]$ را درست به n زیر بازهٔ

$$[x_0, x_1], [x_1, x_2], \ldots, [x_{n-1}, x_n]$$

تقسیم می‌کنند . فرض کنیم

$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

طول زیربازهٔ i م $[x_{i-1}, x_i]$ بوده ، و μ (موی یونانی کوچک) ماکزیمم طول تمام زیر بازه‌ها باشد ؛ درنتیجه ،

$$\mu = \max \{x_1 - x_0, x_2 - x_1, \ldots, x_n - x_{n-1}\} = \max \{\Delta x_1, \Delta x_2, \ldots, \Delta x_n\}.$$

عدد μ *اندازهٔ* مش (یا نرم) افراز (۱) نام دارد ؛ این عدد " تناسب " افراز را می‌سنجد به این معنی که هرقدر اندازهٔ مش μ کوچکتر باشد ، تعداد نقاط تقسیم بیشتر است و این نقاط به هم نزدیکتر می‌باشند (ر.ک. مسئلهٔ ۲۵) . لذا ، کوچکی μ بزرگی n را تضمین می‌کند ، ولی عکس آن درست نیست . مثلا" ، نقاط

$$\frac{1}{2^{n-1}}, \ldots, \frac{1}{8}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}$$

بازهٔ یکهٔ $[0, 1]$ را به n زیربازه تقسیم می‌کند ، ولی اندازهٔ مش μ ، صرف‌نظر از بزرگی n ، همواره مساوی $\frac{1}{2}$ است یعنی طول بزرگترین زیربازهٔ $[\frac{1}{2}, 1]$.

حال خطوط قائم $x = x_0, x = x_1, x = x_2, \ldots, x = x_{n-1}, x = x_n$ را رسم می‌کنیم . این خطوط ناحیهٔ R را به n نوار باریک مثل شکل ۱ (ب) تقسیم می کنند . تابع f پیوسته است ؛ و درنتیجه ، اگر Δx_i به‌قدر کافی کوچک باشد ، مقدارش بر زیر بازهٔ $[x_{i-1}, x_i]$ فقط کمی تغییرمی‌کند . لذا ، اگر فرض کنیم f بر $[x_{i-1}, x_i]$ مقدار ثابت $f(p_i)$ داشته باشد که p_i یک نقطهٔ **دلخواه** $[x_{i-1}, x_i]$ است ، تقریب خوبی به دست خواهدآمد . دلخواه بودن p_i به شما اجازهٔ مانور می‌دهد ، زیرا گویی بعضی از p_i ها ازدیگران بهترند ، ولی تفاوت بین p_i های‌مختلف بزودی " در حد از بین می‌رود " ،زیرا ما μ را به‌صفرنزدیک خواهیم کردا تعویض $f(x)$ با $f(p_i)$ بر هر زیربازهٔ $[x_{i-1}, x_i]$ معادل تعویض نوارهابابالاهای

خمیده به‌وسیلهٔ مستطیلهای سایه‌دار شکل است . مجموع مساحات این مستطیلها عبارت است از

$$\sum_{i=1}^{n} f(p_i)(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} f(p_i)\,\Delta x_i, \tag{۲}$$

که در آن از نماد سیگمای معرفی شده در بخش ۱.۴ استفاده میکنیم . معقول است که (۲) را تقریب مناسبی از مساحت A ی ناحیهٔ R بگیریم ، که این تقریب وقتی عرض هر مستطیل کوچک شود ، یعنی عدد μ که مساوی ماکزیمم عرضهای مستطیلهاست کوچک شود ، بهتر خواهد شد . این نکات انگیزهٔ **تعریف** A به صورت حد

$$A = \lim_{\mu \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(p_i)(x_i - x_{i-1}) = \lim_{\mu \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(p_i)\,\Delta x_i \tag{۳}$$

خواهد بود .

تعریف انتگرال $\int_a^b f(x)\,dx$. این نکات طبعا " ما را به تعریف زیر میرساند . فرض کنیم f بر بازهٔ بستهٔ $[a, b]$ کراندار باشد . افراز دلخواهی بر $[a, b]$ درنظر میگیریم ؛ یعنی ، مجموعهٔ $a = x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n = b$ از نقاط که در نامساویهای $a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$ صدق میکنند . در هر زیربازهٔ $[x_{i-1}, x_i]$ به طول $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ نقطهٔ دلخواه p_i را اختیار کرده و مجموع

$$S = \sum_{i=1}^{n} f(p_i)\,\Delta x_i \tag{۴}$$

را تشکیل میدهیم . فرض کنیم وقتی اندازهٔ مش $\mu = \max\{\Delta x_1, \Delta x_2, \ldots, \Delta x_n\}$ به صفر نزدیک شود ، مجموع S ، *صرف نظر از انتخاب نقاط تقسیم* x_i *و نقاط " میانی "* p_i ، به حدی متناهی مانند I نزدیک گردد . (در واقع ، μ فقط از راست به صفر نزدیک میشود زیرا μ ذاتا " مثبت است .) در این صورت ، حد I را *انتگرال معین* ، یا فقط *انتگرال* ، f از a تا b نامند و به صورت زیر نوشته میشود :

$$\int_a^b f(x)\,dx,$$

وگوییم تابع f بر $[a, b]$ ، یا روی $[a, b]$ ، *انتگرالپذیر* است . مجموع (۴) به افتخار ریاضیدان برجستهٔ آلمانی ، جی.اف. برنارد ریمان[1] (۱۸۶۶ — ۱۸۲۶) ، به *مجموع ریمان*

1. G. F. Bernhard Riemann

معروف است. انتگرال معین اغلب *انتگرال ریمان* نام دارد تا از انواع دیگر انتگرالهاکه‌در ریاضیات عالی با آنها مواجه می‌شویم متمایز باشد.

مساحت تحت منحنی به عنوان انتگرال. فرمول (۳) برای مساحت تحت منحنی $y = f(x)$ از $x = a$ تا $x = b$ را می‌توان برحسب انتگرال به صورت فشرده‌تر

$$A = \int_a^b f(x)\, dx \qquad (۵)$$

نوشت. با آنکه تعریف انتگرال از مسئلهٔ مساحت ناشی شده بود، در این فصل و فصول آینده معلوم خواهد شد که انتگرال کاربردهای گسترده در مسائل مختلفی دارد که هیچ ارتباطی با مساحت ندارند.

انتگرال $\int_a^b f(x)\, dx$ یک **عدد** است، و عملی که ما را از f به این عدد می‌رساند *انتگرالگیری* نام دارد. علامت $\int$، که قرنها قبل توسط لایب‌نیتز معرفی شده است، *علامت انتگرال* نام دارد؛ از نظر تاریخی، همان‌حرف S برای مجموع است مبین آنکه‌انتگرالگیری دست کم در حد، با جمعبندی ارتباط دارد. اعداد a و b را به ترتیب **حدود پایینی و بالایی** می‌نامند. در اینجا، مثل حدود جمعبندی، واژهٔ "حد" معنی محاوره‌ای "مرز" را دارد تا معنی تکنیکی معمولی آن. بازهٔ $[a, b]$، که a و b نقاط انتهایی آنند. *بازهٔ انتگرالگیری* نام دارد. تابع f را *انتگرالده* انتگرال $\int_a^b f(x)\, dx$ می‌نامند. شناسهٔ f، در این حالت x، *متغیر انتگرالگیری* نام دارد، و یک "متغیر ظاهری" است بدین معنی که هر علامت دیگر به خوبی آن است. مثلاً"،

$$\int_a^b f(x)\, dx = \int_a^b f(s)\, ds = \int_a^b f(t)\, dt = \int_a^b f(z)\, dz,$$

و غیره. وضع دقیقاً" همانند اندیس ظاهری جمعبندی می‌باشد (ر.ک. صفحهٔ ۳۶۲).

عبارت $\int_a^b f(x)\, dx$ برای‌انتگرال‌تابع f از a تا b شامل‌دیفرانسیل dx متغیرانتگرالگیری است. دیفرانسیل dx با نمو Δx_i در مجموع ریمان $\sum_{i=1}^{n} f(p_i)\Delta x_i$ "متناسب" است، که انتگرال حد آن است وقتی اندازهٔ مش μ به صفر نزدیک شود. در واقع، وقتی $\mu \to 0$، علامت جمعبندی $\sum$ و نمو Δx_i با علامت انتگرال $\int$ و دیفرانسیل dx تعویض می‌شوند، و حدود جمعبندی با حدود انتگرالگیری عوض خواهند شد. با آنکه این خیلی الهام بخش است، می‌توانیم متغیر انتگرالگیری و دیفرانسیل آن را حذف کرده فقط‌بنویسیم $\int_a^b f$، و ما گهگاه این‌کاررا خواهیم کرد. بالاخره، انتگرالگیری عملی است که ما را از یک تابع به عددی می‌رساند که آن را انتگرال روی یک بازه می‌نامیم؛ و لذا، کافی است فقط تابع و

نقاط انتهایی بازه را تصریح کنیم . با اینحال ، معمولاً " از نماد کامل $\int_a^b f(x)\,dx$ (درحالتی که x متغیر انتگرالگیری است) استفاده می‌کنیم . مزیت این نماد بعدها روشن خواهد شد (ر.ک. صفحه‌ٔ ۵۹۲) .

تبصره . مجموع‌ریمان $S = \sum_{i=1}^{n} f(p_i)\,\Delta x_i$ و اندازه‌ٔ مش $\mu = \max\{\Delta x_1, \Delta x_2, \ldots, \Delta x_n\}$ آمده در تعریف انتگرال $I = \int_a^b f(x)\,dx$ به افراز بازه‌ٔ انتگرالگیری $[a, b]$ بستگی دارد . این را می‌توان با نوشتن $S = S(X)$ و $\mu = \mu(X)$ تصرح کرد ، که در آنها X مجموعه‌ٔ نقاط تقسیم $a = x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n = b$ می‌باشد . به یاد داشته باشید که S به نقاط "میانی " $p_1, p_2, \ldots, p_n$ ، یکی در هر زیربازه‌ٔ $[a, x_1], [x_1, x_2], \ldots, [x_{n-1}, b]$ ، نیز بستگی دارد . لذا ،اینکه‌می‌گوییم وقتی $\mu \to 0$ ، S به حد I نزدیک می‌شود یعنی تفاضل $S(X) - I$ به ازای هر X که $\mu(X)$ به قدر کافی کوچک باشد ، ***صرف نظر از انتخاب نقاط p_i مربوط به X*** ، بدلخواه نزدیک صفر خواهد بود . یا ، به زبان ε, δ ، یعنی به ازای‌هر $\varepsilon > 0$ می‌توان $\delta > 0$ ای یافت به‌طوری که هر وقت $0 < \mu(X) < \delta$ ، به ازای هر p_i مربوط به X ،

$$|S(X) - I| = \left|S(X) - \int_a^b f(x)\,dx\right| < \varepsilon$$

انتگرالپذیری توابع پیوسته . در تعریف انتگرال $\int_a^b f(x)\,dx$ چیزی راجع به پیوستگی f گفته نشد ، و یک تابع ناپیوسته ممکن است انتگرالپذیر باشد یا نباشد (ر.ک. مسائل ۲۹و ۳۱) . از آن سو ، ***هر تابع پیوسته انتگرالپذیر است .*** بخصوص، این تقریبهایی را که در تعریف مساحت تحت نمودار یک تابع پیوسته به کار رفتند توجیه کرده ، و وجود مساحت‌را تضمین می‌نماید .

قضیه‌ٔ ۱ (پیوستگی انتگرالپذیری را ایجاب می‌کند) . ***هرگاه تابع f بر بازه‌ٔ $[a, b]$ پیوسته باشد ، آنگاه f بر $[a, b]$ انتگرالپذیر است .***

قضیه‌ٔ ۱ سند دیگری است بر اهمیت پیوستگی در حساب دیفرانسیل و انتگرال. برهان قضیه مستلزم مفهومی است (پیوستگی یکنواخت) که از حوصله‌ٔ این کتاب خارج است . خواننده‌ٔ علاقه‌مند را به کتب حساب‌دیفرانسیل و انتگرال پیشرفته ارجاع می‌دهیم.

حال، با استفاده‌ٔ مستقیم از تعریف انتگرال به عنوان حد یک مجموع ریمان ، چند انتگرال ساده را محاسبه می‌کنیم .

مثال ۱. انتگرال $\int_a^b 1\,dx$ ، که معمولاً " به صورت $\int_a^b dx$ نشان داده می‌شود، را حساب کنید.

حل. در اینجا از تابع ثابت $f(x) \equiv 1$ انتگرال می‌گیریم. بنابراین،

$$\int_a^b dx = \lim_{\mu \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(p_i)\Delta x_i = \lim_{\mu \to 0} \sum_{i=1}^{n} \Delta x_i,$$

زیرا به ازای هر p_i ، $f(p_i) = 1$. با بسط مجموع به دست می‌آوریم

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} \Delta x_i &= \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) \\ &= (x_1 - x_0) + (x_2 - x_1) + \cdots + (x_{n-1} - x_{n-2}) + (x_n - x_{n-1}) \\ &= -x_0 + (x_1 - x_1) + (x_2 - x_2) + \cdots + (x_{n-1} - x_{n-1}) + x_n.\end{aligned}$$

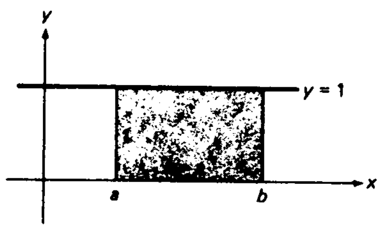
چون تمام جملات مجموع سمت راست جز اول و آخر 0 اند، مجموع " توی هم رفته" و به صورت سادهٔ زیر درمی‌آید:

$$\sum_{i=1}^{n} \Delta x_i = x_n - x_0 = b - a.$$

این را می‌شد پیش‌بینی کرد، زیرا مجموع طولهای زیر بازه‌های $[x_{i-1}, x_i]$ باید مساوی طول بازهٔ $[a, b]$ باشد. لذا، $\int_a^b dx$ حد ثابت $b - a$ است وقتی $\mu \to 0$ ؛ درنتیجه،

$$\int_a^b dx = b - a. \qquad (۶)$$

به‌طور هندسی، انتگرال (۶) مساحت تحت خط $y = 1$ از $x = a$ تا $x = b$ است؛ یعنی، مساحت مستطیل سایه‌دار شکل ۲ به طول $b - a$ و عرض 1 . البته، مساحت این مستطیل،



شکل ۲

یا معادلاً " طول بازهٔ $[a, b]$ ، مساوی $b - a$ است که با (۶) داده می‌شود.

در محاسبهٔ انتگرال مثال ۱ وجود نیز ثابت‌شد. وجود انتگرال از قضیهٔ ۱ و پیوستگی

انتگرالده $f(x) \equiv 1$ نیز نتیجه‌می‌شود. در دومثال‌زیر، ابتدا از پیوستگی انتگرالده استفاده کرده وجود انتگرال را نتیجه می‌گیریم، و سپس با استفاده از وجود انتگرال و دلخواه‌بودن نقاط p_i در مجموع (۴)، انتگرال را حساب می‌کنیم.

مثال ۲. انتگرال $\int_a^b x\,dx$ را حساب کنید.

حل. بنابرقضیهٔ ۱، انتگرالده $f(x) = x$ پیوسته و درنتیجه انتگرالپذیر است. لذا،

$$\int_a^b x\,dx = \lim_{\mu\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(p_i)\,\Delta x_i = \lim_{\mu\to 0}\sum_{i=1}^{n} p_i(x_i - x_{i-1}),$$

که در آن حد موجود بوده و به ازای هر انتخاب نقاط p_i در زیر بازه‌های $[x_{i-1}, x_i]$، $i = 1, \ldots, n$، یکسان است. فرض‌کنیم p_i نقطهٔ میانی $[x_{i-1}, x_i]$ باشد؛ درنتیجه، $p_i = \frac{1}{2}(x_{i-1} + x_i)$. در این صورت،

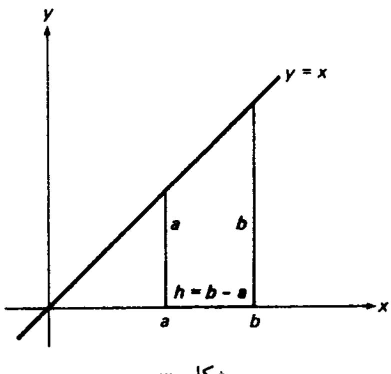
$$\int_a^b x\,dx = \lim_{\mu\to 0}\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(x_i + x_{i-1})(x_i - x_{i-1}) = \frac{1}{2}\lim_{\mu\to 0}\sum_{i=1}^{n}(x_i^2 - x_{i-1}^2)$$

$$= \frac{1}{2}\lim_{\mu\to 0}(x_n^2 - x_0^2) = \frac{1}{2}\lim_{\mu\to 0}(b^2 - a^2),$$

زیرا انتخاب ما از p_iها به مجموع توی هم رو دیگری منجر می‌شود؛ و لذا،

$$\int_a^b x\,dx = \frac{1}{2}(b^2 - a^2). \tag{۷}$$

به‌طورهندسی، انتگرال (۷) مساحت‌تحت‌خط $y = x$ از $x = a$ تا $x = b$ است؛ یعنی مساحت ذوزنقهٔ سایه‌دار شکل ۳. چون مساحت یک ذوزنقه با اضلاع موازی به طولهای a و b و به



شکل ۳

فاصلهٔ h از هم مساوی $\frac{1}{2}(a+b)h$ است ، مساحت ذوزنقه درشکل مساوی است با

$$\frac{1}{2}(b+a)(b-a)=\frac{1}{2}(b^2-a^2),$$

که با فرمول (۷) سازگار است .

مثال ۳. انتگرال $\int_a^b x^2\,dx$ را حساب کنید .

حل. مجددا" انتگرالده پیوسته و درنتیجه انتگرالپذیر است . لذا ،

$$\int_a^b x^2\,dx=\lim_{\mu\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(p_i)\,\Delta x_i=\lim_{\mu\to 0}\sum_{i=1}^{n} p_i^2(x_i-x_{i-1}),$$

که درآن حد موجود و بهازای هرانتخاب نقاط p_i درزیربازههای $[x_{i-1}, x_i]$ ، $i=1,\dots,n$ ، یکسان است . برای تسهیل در محاسبات ، فرض می‌کنیم $a\geq 0$ (می‌توان نشان داد که جواب به این فرض بستگی ندارد) . در این صورت ، به ازای هــر i ، $0\leq x_{i-1}<x_i$ ؛ و لذا ،

$$x_{i-1}^2<\frac{1}{3}(x_{i-1}^2+x_{i-1}x_i+x_i^2)<x_i^2,$$

درنتیجه ، نقطهٔ

$$p_i=\sqrt{\frac{1}{3}(x_{i-1}^2+x_{i-1}x_i+x_i^2)}$$

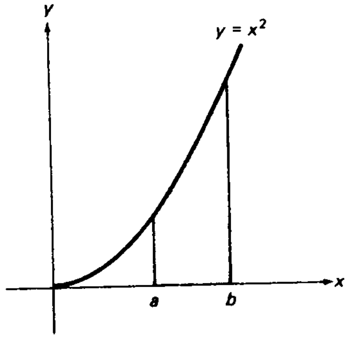
به زیربازهٔ $[x_{i-1}, x_i]$ تعلق دارد . این انتخاب p_i " از قبل طرح شده بود " ، زیرا با آن محاسبهٔ انتگرال به مجموع توی هم رو دیگر منجر می‌شود . به تفصیل و به کمک اتحاد جبری $(u^2+uv+v^2)(u-v)=u^3-v^3$ داریم

$$\int_a^b x^2\,dx=\lim_{\mu\to 0}\frac{1}{3}\sum_{i=1}^{n}(x_i^2+x_ix_{i-1}+x_{i-1}^2)(x_i-x_{i-1})$$
$$=\frac{1}{3}\lim_{\mu\to 0}\sum_{i=1}^{n}(x_i^3-x_{i-1}^3)=\frac{1}{3}\lim_{\mu\to 0}(x_n^3-x_0^3)=\frac{1}{3}\lim_{\mu\to 0}(b^3-a^3),$$

پس نتیجه می‌شود که

$$\int_a^b x^2\,dx=\frac{1}{3}(b^3-a^3). \qquad (۸)$$

این بار انتگرال مساحت ناحیه‌ای است از نوعی که در هندسه مقدماتی با آن آشنا نشده‌ایم ؛ یعنی ، ناحیهٔ سایه‌دار شکل ۴ که به خطوط قائم $x=a$ و $x=b$ ، محور x و سهمی $y=x^2$



شکل ۴

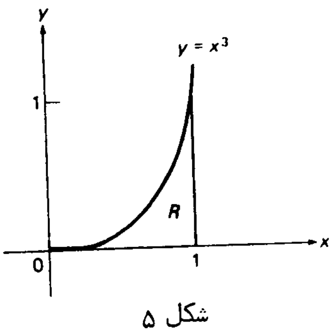
محدود شده است.

در بخش ۵۰۴ روشی کلی برای محاسبهٔ انتگرالهای معین به دست می‌آوریم که درآن از محاسبهٔ صریح مجموعهای ریمان و حدود آنها کاملا" پرهیز می‌شود. در این صورت، دیگر نیازی به استفاده از ترفندهای خاص از نوع به‌کار رفته در دو مثال قبل نخواهیم داشت. این جای خوشوقتی است، زیرا در غیر این صورت، حتی در محاسبهٔ انتگرالهای نسبتا" ساده نیز عاجز خواهیم ماند! در واقع، معلوم می‌شود که فرمولهای (۶) و (۸) همه حالات خاصی از فرمول کلی

$$\int_a^b x^n\,dx = \frac{1}{n+1}(b^{n+1} - a^{n+1}) \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots) \tag{۹}$$

می‌باشند که در صفحهٔ ۴۱۱ ثابت خواهد شد. فعلا" فرمول (۹) را دانسته گرفته و آن را آزادانه به کار می‌بریم.

مثال ۴. مساحت A ناحیهٔ R محدود به‌منحنی $y = x^3$، محور x، و خط $x = 1$ را بیابید (ر.ک. شکل ۵).



شکل ۵

حل. چون

$$A = \int_0^1 x^3\,dx,$$

به کمک فرمول (۹) به ازای $n = 3$ معلوم می‌شود که

$$A = \frac{1}{4}(1^4 - 0^4) = \frac{1}{4}.$$

قواعد انتگرالگیری. حال به اثبات چند قاعدهٔ مهم که بر انتگرالها حاکمند می‌پردازیم.
(یک) هرگاه f بر $[a, b]$ انتگرالپذیر بوده و c ثابت باشد، آنگاه cf نیز بر $[a, b]$ انتگرال پذیر است، و

$$\int_a^b cf(x)\,dx = c\int_a^b f(x)\,dx. \tag{۱۰}$$

در واقع، هرگاه $S = \sum_{i=1}^{n} f(p_i)\,\Delta x_i$ یک مجموع ریمان برای f باشد، آنگاه

$$cS = c\sum_{i=1}^{n} f(p_i)\,\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} cf(p_i)\,\Delta x_i$$

یک مجموع ریمان برای cf می‌باشد. اما

$$\lim_{\mu\to 0} cS = c\lim_{\mu\to 0} S$$

(بنابر تشابه برای مجموعهای ریمان نتیجهٔ ۲، صفحهٔ ۱۳۱)؛ و درنتیجه،

$$\lim_{\mu\to 0}\sum_{i=1}^{n} cf(p_i)\,\Delta x_i = c\lim_{\mu\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(p_i)\,\Delta x_i,$$

که با (۱۰) معادل می‌باشد. لذا، در یک انتگرال معین، هر ثابت ضربدر انتگرالده را می‌توان خارج کرده و جلو علامت انتگرال قرار داد.
(دو) هرگاه f و g هر دو بر $[a, b]$ انتگرالپذیر باشند، آنگاه مجموع $f + g$ نیز بر $[a, b]$ انتگرالپذیر است، و

$$\int_a^b [f(x) + g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx. \tag{۱۱}$$

برای اثبات این امر، ملاحظه می‌کنیم که هرگاه $S_h = \sum_{i=1}^{n} h(p_i)\,\Delta x_i$ یک مجموع ریمان برای $h = f + g$ باشد، آنگاه $S_f = \sum_{i=1}^{n} f(p_i)\,\Delta x_i$ و $S_g = \sum_{i=1}^{n} g(p_i)\,\Delta x_i$ مجموعهای ریمانی برای

f و g (مبتنی بر نقاط یکسان p_i و x_i) می‌باشند . اما

$$S_h = \sum_{i=1}^{n} h(p_i)\,\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} [f(p_i) + g(p_i)]\,\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} f(p_i)\,\Delta x_i + \sum_{i=1}^{n} g(p_i)\,\Delta x_i,$$

و لذا ، بنابر تشابه برای مجموعهای ریمان قضیهٔ ۴ ، صفحهٔ ۱۳۰،

$$\lim_{\mu\to 0} S_h = \lim_{\mu\to 0} (S_f + S_g) = \lim_{\mu\to 0} S_f + \lim_{\mu\to 0} S_g,$$

که با (۱۱) معادل‌می‌باشد . لذا ، انتگرال مجموع دو تابع مجموع انتگرالهای تک تک‌توابع می‌باشد .

(سه) هرگاه $f_1, f_2, \ldots, f_n$ بر $[a, b]$ انتگرالپذیر بوده و $c_1, c_2, \ldots, c_n$ ثابت باشند ، آنگاه " ترکیب خطی " $c_1 f_1 + c_2 f_2 + \cdots + c_n f_n$ نیز بر $[a, b]$ انتگرالپذیر بوده و

$$\int_a^b (c_1 f_1 + c_2 f_2 + \cdots + c_n f_n) = c_1 \int_a^b f_1 + c_2 \int_a^b f_2 + \cdots + c_n \int_a^b f_n \qquad (۱۲)$$

(در اینجا از نماد اختصاری مطرح شده در صفحهٔ ۳۷۰ استفاده می‌کنیم) . اثبات (۱۲) ناشی از کاربرد مکرر فرمولهای (۱۰) و (۱۱) است . لذا ، انتگرال یک ترکیب خطی از توابع ترکیبی خطی از انتگرالهای تک‌تک توابع با همان ضرایب می‌باشد .

(چهار) هرگاه f بر $[a, b]$ انتگرالپذیر بوده و $f(x) \ge 0$ ، آنگاه

$$\int_a^b f(x)\,dx \ge 0.$$

در واقع ، مجموع ریمان $S = \sum_{i=1}^{n} f(p_i)\,\Delta x_i$ همواره نامنفی است ، زیرا به ازای هر انتخاب از نقاط p_i ، $f(p_i) \ge 0$. بنابراین ،

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\mu\to 0} S \ge 0,$$

چرا که اگر $\lim_{\mu\to 0} S < 0$ ، می‌توان افرازی از $[a, b]$ و نقاطی چون p_i یافت که یک مجموع ریمان منفی به دست دهند که امری ناممکن است . لذا ، انتگرال یک تابع نامنفی خود نامنفی می‌باشد .

(پنج) هرگاه f و g بر $[a, b]$ انتگرالپذیر بوده و $f(x) \ge g(x)$ ، آنگاه

$$\int_a^b f(x)\,dx \ge \int_a^b g(x)\,dx. \qquad (۱۳)$$

برای مشاهدهٔ این امر ، توجه می‌کنیم که $f(x) - g(x) \ge 0$ ؛ و درنتیجه ، طبق قواعد (سه)

و (چهار)،

$$\int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b g(x)\,dx = \int_a^b [f(x) - g(x)]\,dx \geq 0,$$

که با (۱۳) معادل می‌باشد.

(شش) هرگاه f بر $[a, b]$ انتگرالپذیر بوده و $c \leq f(x) \leq C$ ، که c و C ثابت هستند، آنگاه

$$c(b-a) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq C(b-a). \tag{۱۴}$$

در واقع، هر ثابت انتگرالپذیر است؛ و درنتیجه، بنابر قاعدهٔ (پنج)،

$$\int_a^b c\,dx \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b C\,dx,$$

که با (۱۴) معادل است، زیرا

$$\int_a^b c\,dx = c\int_a^b dx = c(b-a), \qquad \int_a^b C\,dx = C\int_a^b dx = C(b-a).$$

از حالا به بعد، از تمام این مقادیر آزادانه استفاده خواهیم کرد.

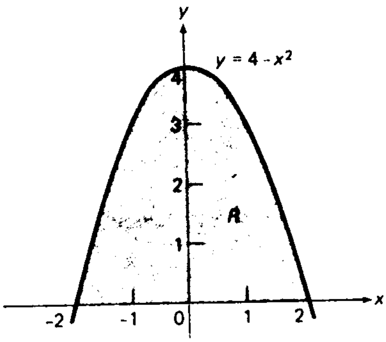
مثال ۵. انتگرال $\int_2^4 \left(\frac{3}{8}x^2 + 5x - 6\right)dx$ را حساب کنید.

حل. به کمک قاعدهٔ (سه) و فرمولهای (۶) تا (۸)، داریم

$$\begin{aligned}\int_2^4 \left(\frac{3}{8}x^2 + 5x - 6\right)dx &= \frac{3}{8}\int_2^4 x^2\,dx + 5\int_2^4 x\,dx - 6\int_2^4 dx\\ &= \frac{3}{8}\left(\frac{1}{3}\right)(4^3 - 2^3) + 5\left(\frac{1}{2}\right)(4^2 - 2^2) - 6(4-2)\\ &= \frac{1}{8}(56) + \frac{5}{2}(12) - 6(2) = 25.\end{aligned}$$

مثال ۶. مساحت بین منحنی $y = 4 - x^2$ و محور x را بیابید.

حل. مساحت A ناحیهٔ سایه‌دار R در شکل ۶ را جستجو می‌کنیم که مساحت تحت منحنی $y = 4 - x^2$ (سهمی) از $x = -2$ تا $x = 2$، یعنی قطعهای x منحنی، می‌باشد.



شکل ۶

بنابراین،

$$A = \int_{-2}^{2} (4 - x^2)\, dx = 4 \int_{-2}^{2} dx - \int_{-2}^{2} x^2\, dx$$
$$= 4[2 - (-2)] - \frac{1}{3}[2^3 - (-2)^3]$$
$$= 16 - \frac{16}{3} = \frac{32}{3}.$$

مسائل

۱. چرا تابع $\sin x$ بر هر بازهٔ بستهٔ $[a, b]$ انتگرالپذیر است؟

۲. چرا تابع $\cot x$ بر هر بازهٔ بستهٔ $[a, b]$ که شامل نقاط $x = 0, \pm\pi, \pm 2\pi, \ldots$ نیست انتگرالپذیر است؟

۳. مساحت A تحت خط $y = (b/a)x$ از $x = 0$ تا $x = a$ را یافته، و نتیجه را تعبیرهندسی کنید.

انتگرالهای زیر را به کمک فرمولهای (۹) و (۱۲) حساب کنید.

۴. $\int_{1}^{2} 2x^3\, dx$

۵. $\int_{-1}^{0} \frac{1}{2}x^4\, dx$

۶. $\int_{0}^{1} 8x^7\, dx$

۷. $\int_{2}^{3} |x^2 - 4x|\, dx$

۸. $\int_{-3}^{0} |x^2 - 4x|\, dx$

۹. $\int_{0}^{\sqrt{2}} (t^2 + \frac{3}{4}t - \frac{2}{3})\, dt$

۱۰. $\int_{-2}^{1} (t^3 - t^2 + t - 1)\, dt$

۱۱. $\int_{-1}^{1} (3u^5 - 5u^3)\, du$

۱۲. $\int_0^1 (2u^{99} - u^{49} + \pi)\, du$

۱۳. $\int_0^{\sqrt{3}} (\frac{1}{9}v - \frac{1}{27}v^3)\, dv$

۱۴. $\int_{1/2}^1 (\frac{1}{4} - \frac{1}{3}v + \frac{1}{7}v^2 - \frac{1}{5}v^3)\, dv$

۱۵. $\int_4^5 (\sqrt{x} + 1)(\sqrt{x} - 1)\, dx$

۱۶. $\int_{-4}^6 (x-1)(x^2+x+1)\, dx$

۱۷. $\int_2^8 \frac{x^3 - 1}{x - 1}\, dx$

۱۸. $\int_{-1}^2 \frac{x^3 + 8}{x + 2}\, dx$

مساحت A ناحیهٔ R زیر را بیابید .

۱۹. تحت منحنی $y = x^2 - 1$ از $x = 1.2$ تا $x = 1.8$

۲۰. تحت منحنی $y = x^2 + x + 1$ از $x = -1$ تا $x = 1$

۲۱. بین منحنی $y = 2 + x - x^2$ و محور x

۲۲. بین منحنی $y = 2x - x^2$ و محور x

۲۳. تحت منحنی $y = 2x^3 - 2x$ از $x = -1$ تا $x = 0$

۲۴. بین منحنی $y = x^4 - 4x^3 + 4x^2$ و محور x

در هر حالت ناحیهٔ R را رسم نمایید .

۲۵. فرض کنید بازهٔ $[a, b]$ به وسیلهٔ افراز $a = x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n = b$ به اندازهٔ مش μ به n زیربازهٔ $[a, x_1], [x_1, x_2], \ldots, [x_{n-1}, b]$ تقسیم شده باشد . کوچکترین مقدار ممکن n به ازای اندازهٔ مش معلوم μ چیست؟ نشان دهید که وقتی $\mu \to 0$ ، این کوچکترین مقدار به بی‌نهایت نزدیک می‌شود .

۲۶. بازهٔ $[0, 10]$ با افرازی به اندازهٔ مش $\sqrt{2}$ به n زیربازه تقسیم شده است . کوچکترین مقدار ممکن n چقدر است؟

۲۷. بازهٔ $[0, 10]$ با افراز $0 = x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{99}, x_{100} = 10$ به 100 زیربازه تقسیم شده است . کوچکترین مقدار ممکن اندازهٔ مش μ چقدر است؟ بزرگترین مقدار ممکن μ چقدر است؟

۲۸. نشان دهید هرگاه انتگرال به صورت تعریف شده در صفحهٔ ۳۷۰ موجود باشد ،آنگاه منحصر به فرد است ، بدین معنی که فقط یک مقدار دارد .

۲۹. تابع

$$f(x) = \begin{cases} 0 \text{ ، } x \neq 0 & \text{اگر} \\ 1 \text{ ، } x = 0 & \text{اگر} \end{cases}$$

در $x = 0$ ناپیوسته بوده ؛ و درنتیجه ، بر هیچ بازه‌ای چون $[a, b]$ شامل نقطهٔ $x = 0$

پیوسته نمی‌باشد . نشان دهید با اینحال f بر $[a, b]$ انتگرالپذیر با انتگرالی‌مساوی 0 می‌باشد .

۳۰. بدون آنکه قادر به محاسبهٔ انتگرال باشیم ، از کجا بدانیم که

$$0 \le \int_0^1 x^{10}\sqrt{1+x^2}\,dx \le \sqrt{2}$$

۳۱. فرض کنید

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{اگر } x \text{ گویا باشد ،} \\ 0 & \text{اگر } x \text{ گنگ باشد ،} \end{cases}$$

نشان دهید f بر هر بازهٔ $[a, b]$ انتگرال‌ناپذیر است .

۳۲. تابعی مثال بزنید که بر بازهٔ $[a, b]$ کراندار بوده ولی انتگرالپذیر نباشد .

۳۳. نشان دهید هرگاه f بر $[a, b]$ انتگرالپذیر باشد ، آنگاه f باید بر $[a, b]$ کراندار باشد .

۳۴. فرض کنید

$$f(x) = \begin{cases} 1/x & \text{اگر } x \neq 0 \\ 0 & \text{اگر } x = 0 \end{cases}$$

آیا f بر $[-1, 1]$ انتگرالپذیر است ؟

۳۵. نشان دهید هرگاه f بر $[a, b]$ پیوسته باشد ، آنگاه

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \le \int_a^b |f(x)|\,dx.$$

این مشابه **نامساوی مثلثی** مجموعها برای انتگرالها می‌باشد .

۴.۳ نکات دیگر در باب مساحت ؛ قضیهٔ مقدار میانگین برای انتگرالها

تا اینجا در نوشتن انتگرال

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

فرض کرده‌ایم $a < b$. اکنون حالت $a \ge b$ را نیز پذیرفته ، **طبق تعریف** ، قرار می‌دهیم

$$\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx. \qquad (1)$$

فرض کنیم در (1) $a = b$. در این صورت ،

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx,$$

که ما را به تعریف

$$\int_a^a f(x)\,dx = 0 \qquad (۲)$$

می‌رساند. این تعریف معنی‌دارد، زیرا "مساحت یک ناحیه به عرض صفر" مساوی صفر می‌باشد.

مثال ۱. انتگرال $\int_2^1 (x^2 - x)\,dx$ را حساب کنید.

حل. به کمک (۱) داریم

$$\int_2^1 (x^2 - x)\,dx = -\int_1^2 (x^2 - x)\,dx = \int_1^2 (x - x^2)\,dx = \int_1^2 x\,dx - \int_1^2 x^2\,dx$$
$$= \frac{1}{2}(2^2 - 1^2) - \frac{1}{3}(2^3 - 1^3) = \frac{3}{2} - \frac{7}{3} = -\frac{5}{6}.$$

انتگرالگیری بر بازه‌های مجاور. حال ببینیم وقتی بازهٔ انتگرالگیری " تجزیه می‌شود " چه رخ می‌دهد.

قضیهٔ ۲ (جمعپذیری انتگرال بر بازه‌های مجاور). *هرگاه f بر $[a, b]$ پیوسته بوده و c یک نقطهٔ درونی $[a, b]$ باشد، آنگاه*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx \qquad (a < c < b). \qquad (۳)$$

برهان. همانند تعریف انتگرال، بازهٔ $[a, b]$ را با معرفی نقاط تقسیم به‌تعداد زیادی زیر بازهٔ کوچک تقسیم می‌کنیم، ولی این بار تأکید می‌کنیم که یکی از نقاط تقسیم نقطهٔ ثابت c باشد. به عبارت دیگر، نقاط تقسیم x $(i = 0, 1, \ldots, n)$ را طوری اختیار می‌کنیم که

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{m-1} < x_m = c < x_{m+1} < \cdots < x_{n-1} < x_n = b,$$

که در آن البته زیرنویس m به تعداد نقاط x_i سمت چپ c بستگی دارد. در این صورت، افراز حاصل از نقاط $x_0, x_1, \ldots, x_n$ برای $[a, b]$ خود افرازی از $[a, c]$ متشکل از نقاط $x_0, x_1, \ldots, x_m$ و نیز افرازی‌از $[c, b]$ متشکل‌ازنقاط $x_m, x_{m+1}, \ldots, x_n$ به‌دست‌می‌دهد. بنابراین، مجموع ریمان

$$S = \sum_{i=1}^{n} f(p_i)\,\Delta x_i,$$

به کار رفته در تعریف انتگرال f از a تا b، به مجموع

$$S = S' + S''$$

تجزیه می‌شود، که در آن

$$S' = \sum_{i=1}^{m} f(p_i)\,\Delta x_i, \qquad S'' = \sum_{i=m+1}^{n} f(p_i)\,\Delta x_i$$

(Δx_i و p_i همان معانی‌داشته در صفحهٔ ۳۶۸ را دارند) S' و S'' را همان مجموعهای ریمانی می‌بینید که در تعریف انتگرال f از a تا c و انتگرال f از c تا b به کار رفته‌اند. فرض کنید μ ، μ' ، و μ'' به ترتیب اندازه‌های مش افرازهای $[a, b]$ ، $[a, c]$ ، و $[c, b]$ باشند؛ یعنی،

$$\mu = \max\{\Delta x_1, \ldots, \Delta x_n\}, \qquad \mu' = \max\{\Delta x_1, \ldots, \Delta x_m\},$$
$$\mu'' = \max\{\Delta x_{m+1}, \ldots, \Delta x_n\}.$$

در این صورت، واضح است که $\mu \to 0$ ایجاب می‌کند که $\mu' \to 0$ و $\mu'' \to 0$؛ درنتیجه،

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\mu \to 0} S = \lim_{\mu \to 0} (S' + S'') = \lim_{\mu \to 0} S' + \lim_{\mu \to 0} S''$$
$$= \lim_{\mu' \to 0} S' + \lim_{\mu'' \to 0} S'' = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx,$$

که در آن وجود هر سه انتگرال از فرض پیوسته‌بودن f بر $[a, b]$ ، و لذا بر $[a, c]$ و $[c, b]$ ، نتیجه می‌شود.

همانطور که اینک نشان می‌دهیم، نقاط a ، b ، و c در فرمول (۳) لازم نیست در شرط $a < c < b$ صدق کنند؛ و در واقع، می‌توانند **دلخواه** باشند.

نتیجه. *هرگاه f بر بازه‌ای شامل نقاط a ، b ، و c پیوسته باشد، آنگاه*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx \quad (\text{دلخواه } a, b, c) \tag{۴}$$

برهان. اگر دو نقطه از سه نقطهٔ a ، b ، و c یکی باشند، فرمول (۴) فوراً از (۱) و (۲) نتیجه می‌شود. به‌علاوه، اگر $a < c < b$ ، فرمول (۴) به (۳) تحویل می‌یابد. حالات دیگر را می‌توان با استفاده از (۱) همراه با (۳) سامان داد. مثلاً، هرگاه $c < b < a$ ، آنگاه، بنابر (۳)، با c, b, a به جای a, c, b ،

$$\int_c^a f(x)\,dx = \int_c^b f(x)\,dx + \int_b^a f(x)\,dx.$$

از اینرو، با دو بار به کار بردن (۱)،

$$-\int_a^c f(x)\,dx = \int_c^b f(x)\,dx - \int_a^b f(x)\,dx,$$

که ایجاب می‌کند که

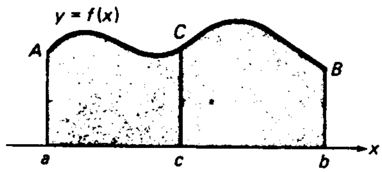
$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$$

سایر حالات $a < b < c,\ b < a < c,\ b < c < a,\ c < a < b$ به همین نحو ثابت می‌شوند

لذا، اعتبار خاصیت جمعی بازه‌های (۴) به ترتیب a ، b ، و c بستگی ندارد. این امر شاهدی است بر تناسب تعریف (۱) که در برهان نتیجه نقشی کلیدی خواهد داشت.

قضیهٔ ۲ در حالت نامنفی بودن f بر $[a, b]$ تعبیر هندسی ساده‌ای دارد. در این صورت، $\int_a^b f(x)\,dx$ مساحت تحت منحنی $y = f(x)$ از $x = a$ تا $x = b$ است، حال آنکه $\int_a^c f(x)\,dx$ مساحت تحت منحنی از $x = a$ تا $x = c$ و $\int_c^b f(x)\,dx$ مساحت تحت منحنی از $x = c$ تا $x = b$ می‌باشد. اینها مساحت نواحی $abBA$ ، $acCA$ ، و $cbBC$ در شکل ۷ بوده، و معادلهٔ (۳) می‌گوید که

$$(\text{مساحت } cbBC) + (\text{مساحت } acCA) = \text{مساحت } abBA$$



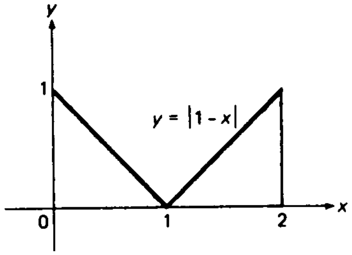
شکل ۷

مطلبی که از نظر هندسی واضح است، زیرا نواحی $acCA$ و $cbBC$ نقاط مشترکی غیر از پاره‌خط cC ، یعنی مرز مشترکشان، ندارند. شکل در حالتی رسم شده است که f بر $[a, b]$ مثبت است، ولی به آسانی معلوم می‌شود که این جمعی بودن سطحهای جدا از هم حتی وقتی f در یک یا چند نقطه از $[a, b]$ صفر است نیز برقرار می‌باشد.

مثال ۲. انتگرال $\int_0^2 |1 - x|\,dx$ را حساب کنید.

حل. محاسبهٔ انتگرال معادل یافتن مساحت تحت منحنی $y = |1 - x|$ از $x = 0$ تا $x = 2$

است . از شکل ۸ واضح است که این مساحت مساوی 1 است ، زیرا هر مثلث سایه‌دار یک



شکل ۸

مثلث قائم‌الزاویهٔ متساوی‌الساقین به‌طول ساقهای 1 و مساحت $\frac{1}{2}$ می‌باشد . به‌صورت‌دیگر، انتگرال را می‌توان به کمک قضیهٔ ۲ حساب کرد :

$$\int_0^2 |1-x|\,dx = \int_0^1 |1-x|\,dx + \int_1^2 |1-x|\,dx$$
$$= \int_0^1 (1-x)\,dx + \int_1^2 (x-1)\,dx$$

(تجزیهٔ بازهٔ $[0, 2]$ به‌این صورت ناشی‌از تغییر علامت $x - 1$ در $x = 1$ است) . بنابراین، همانطور که قبلاً به طور هندسی نشان داده‌ایم ،

$$\int_0^2 |1-x|\,dx = \int_0^1 dx - \int_0^1 x\,dx + \int_1^2 x\,dx - \int_1^2 dx$$
$$= 1 - \frac{1}{2}(1^2 - 0^2) + \frac{1}{2}(2^2 - 1^2) - 1 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{3}{2} - 1 = 1$$

لازم است در انتگرالهای شامل قدرمطلق احتیاط نمایید .

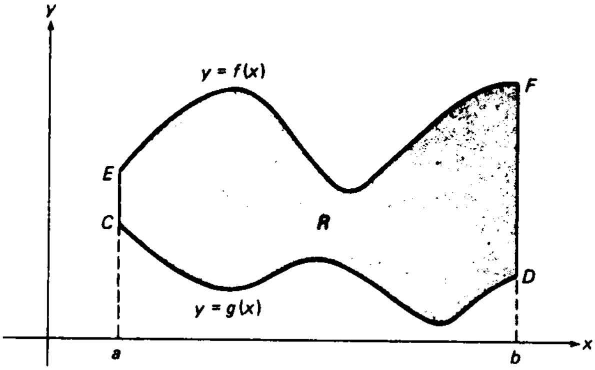
مساحت بین دو منحنی . ما قبلاً شایستگی استفاده از انتگرال $\int_a^b f(x)\,dx$ به عنوان‌تعریف مساحت تحت منحنی $y = f(x)$ از $x = a$ تا $x = b$ ، یعنی مساحت ناحیهٔ مسطح محدودبه خطوط قائم $x = a$ و $x = b$ ، محور x ، و منحنی $y = f(x)$ که $f(x) \geq 0$ را نشان داده‌ایم . حال مسئلهٔ کلیتر یافتن **مساحت بین دو منحنی** $y = f(x)$ و $y = g(x)$ از $x = a$ تا $x = b$ را درنظر می‌گیریم‌که در آنها توابع f و g هر دو پیوسته‌بوده و $f(x) \geq g(x)$. این مساحت ناحیهٔ مسطح R در شکل ۹ (آ) است که به خطوط قائم $x = a$ و $x = b$ و منحنیهای $y = f(x)$ و $y = g(x)$ محدود شده است و منحنی $y = f(x)$ مرز بالا و منحنی $y = g(x)$ مرز پایین‌آن

می‌باشد (برای سادگی فرض کرده‌ایم $f(x) > g(x) > 0$).

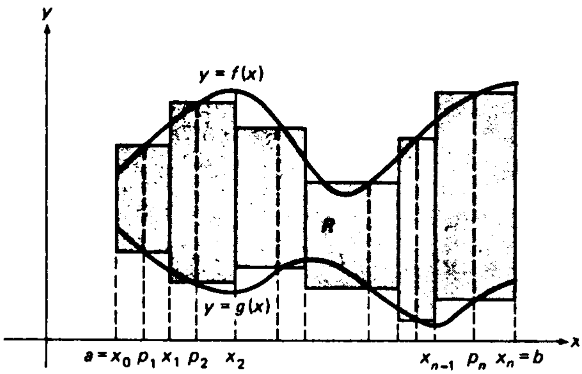
ناحیهٔ R معمولاً " دو سمت خمیده دارد(CD و EF در شکل) ، و این نواحی در هندسهٔ مقدماتی مطرح نمی‌شوند . لذا ، در محاسبهٔ مساحت A ی ناحیهٔ R باید مجدداً " به تعریف مناسبی از A بپردازیم . برای این کار ، به موازات ساختن صفحات ۳۶۷ تا ۳۶۹ پیش رفته ، A را با مجموعی به شکل

$$\sum_{i=1}^{n} [f(p_i) - g(p_i)] \Delta x_i, \tag{۵}$$

مبتنی بر افرازی از بازهٔ $[a, b]$ به n زیربازهٔ $[x_0, x_1]$ ، $[x_1, x_2], \ldots, [x_{n-1}, x_n]$ به طولهای $\Delta x_1, \Delta x_2, \ldots, \Delta x_n$ که p_i نقطهٔ دلخواهی در $[x_{i-1}, x_i]$ است تقریب می‌کنیم . این تقریب متناظر است با تعویض نوارها با بالا و پایین خمیده در شکل ۹(ب) به وسیلهٔ مستطیلهای سایه‌دار نموده شده. در این صورت ، A را حد مجموع (۵) **تعریف می‌کنیم**



(آ)



(ب)

شکل ۹

وقتی اندازهٔ مش $\mu = \max\{\Delta x_1, \Delta x_2, \ldots, \Delta x_n\}$ به صفر نزدیک شود :

$$A = \lim_{\mu \to 0} \sum_{i=1}^{n} [f(p_i) - g(p_i)]\, \Delta x_i.$$

همانطور که اینک می‌دانیم ، حد مورد نظر انتگرال

$$A = \int_a^b [f(x) - g(x)]\, dx \tag{۶}$$

است که وجودش از پیوستگی تابع $f - g$ نتیجه می‌شود . این فرمول مطلوب برای مساحت A بین دو منحنی $y = f(x)$ و $y = g(x)$ است . نامنفی بودن A ، که معنی هندسی‌اش آن را لازم دارد ، نتیجه‌ای است از نامساوی $f(x) - g(x) \geq 0$ و قاعدهٔ (چهار) ، صفحهٔ ۳۷۷ . شهودا " واضح است که $A > 0$ مگر آنکه منحنیهای $y = f(x)$ و $y = g(x)$ یکی باشند، و این مطلب نتیجهٔ این امر است که انتگرال یک تابع نامنفی پیوسته مثبت است مگر آنکه تابع متحد صفر باشد (ر.ک. مثال ۸) . اگر $g(x) \equiv 0$ ، همانطور که انتظار می‌رود، رابطهٔ (۶) به فرمول

$$A = \int_a^b f(x)\, dx$$

برای مساحت تحت منحنی $y = f(x)$ تحویل می‌شود .

به صورت دیگر ، فرمول (۶) را می‌توان با استدلال زیر به دست آورد . بی‌آنکه به کلیت خللی وارد آید می‌توان فرض‌کرد که f و g هر دو نامنفی‌اند ، زیرا در غیر این‌صورت می‌توان با انتقال منحنیهای $y = f(x)$ و $y = g(x)$ به بالا ،که در اثر آن تابع $f - g$ یا مساحت A بین منحنیها تغییر نمی‌کند ، به این وضع درآورد . در این صورت، مانند شکل ۹ (آ) ،

$$A = \text{مساحت } R = (\text{مساحت } abFE) - (\text{مساحت } abDC)$$

زیرا نواحی $abFE$ و $abDC$ نقطهٔ مشترکی جز مرز مشترک خود CD ندارند . اما

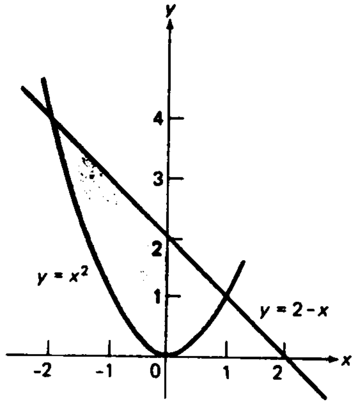
$$\text{مساحت } abFE = \int_a^b f(x)\, dx, \qquad \text{مساحت } abDC = \int_a^b g(x)\, dx,$$

$$A = \int_a^b f(x)\, dx - \int_a^b g(x)\, dx = \int_a^b [f(x) - g(x)]\, dx.$$

مثال ۳. مساحت A بین خط $y = 2 - x$ و سهمی $y = x^2$ را بیابید .

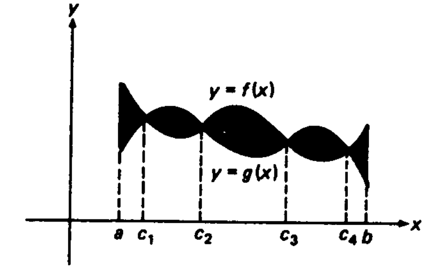
حل. برای یافتن مختصات x نقاط اشتراک خط و سهمی، معادلهٔ درجهٔ دوم $2 - x = x^2$ را حل کرده دو ریشهٔ $x = -2$ و $x = 1$ را به دست می‌آوریم. بر بازهٔ $[-2, 1]$ خط منحنی بالایی و سهمی منحنی پایینی است (ر.ک. شکل ۱۰). بنابراین، طبق (۶)،

$$A = \int_{-2}^{1} (2 - x - x^2)\,dx = 2\int_{-2}^{1} dx - \int_{-2}^{1} x\,dx - \int_{-2}^{1} x^2\,dx$$
$$= 2[1 - (-2)] - \frac{1}{2}[1^2 - (-2)^2] - \frac{1}{3}[1^3 - (-2)^3]$$
$$= 2(3) - \frac{1}{2}(-3) - \frac{1}{3}(9) = \frac{9}{2}.$$



شکل ۱۰

فرض کنیم $y = f(x)$ و $y = g(x)$ دو منحنی به هم بافتهٔ شکل ۱۱ باشند. در این صورت، $y = f(x)$ منحنی بالایی و $y = g(x)$ منحنی پایینی بر بازه‌های $[a, c_1]$، $[c_2, c_3]$، و $[c_4, b]$ است، ولی نقش دو منحنی بر بازه‌های $[c_1, c_2]$ و $[c_3, c_4]$ عوض شده، $y = f(x)$



شکل ۱۱

منحنی پایینی و $y = g(x)$ منحنی بالایی می‌شود. لذا، سهم بازه‌های $[a, c_1]$، $[c_2, c_3]$،

و $[c_4, b]$ در انتگرال (۶) مثبت است‌ولی سهم $[c_1, c_2]$ و $[c_3, c_4]$ منفی می‌باشد. همانطور که در شکل علایم نشان می‌دهند، به کمک قضیهٔ ۲،

$$\int_a^b [f(x) - g(x)]\, dx = \sum_{n=1}^{5} I_n,$$

که در آن

$$I_n = \int_{c_{n-1}}^{c_n} [f(x) - g(x)]\, dx \quad (c_0 = a, c_5 = b),$$

و I_1، I_3، و I_5 مثبت ولی I_2 و I_4 منفی می‌باشند. لذا، (۶) مساحت بین دو منحنی مورد بحث را نمی‌دهد بلکه مجموع مساحات سه ناحیه با علامت به علاوه منهای مجموع مساحات دو ناحیه با علامت منها را می‌دهد.

تعریف مناسب برای مساحت A بین دو منحنی بافته شدهٔ $y = f(x)$ و $y = g(x)$ مساوی است با

$$A = \int_a^b |f(x) - g(x)|\, dx, \qquad (۶')$$

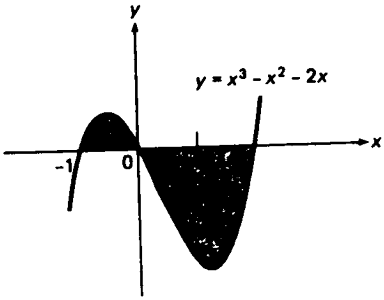
شامل قدر مطلق تفاضل $f(x) - g(x)$. با این تعریف، مساحت بین دو منحنی شکل ۱۱ مجموع مساحات تمام پنج ناحیهٔ سایه‌دار بی‌توجه به علامت می‌باشد. توجه کنید که اگر $f(x) \geq g(x)$، فرمول (۶') به فرمول (۶) قبلی تحویل می‌گردد.

فرض‌کنیم $f(x)$ بتواند هر دو مقدار مثبت و منفی را بگیرد. با اختیار $g(x) \equiv 0$ در (۶') معلوم می‌شود که $\int_a^b |f(x)|\, dx$ مساحت A ی بین منحنی $y = f(x)$ و محور x است. به آسانی معلوم می‌شود که $\int_a^b f(x)\, dx = A_+ - A_-$، که در آن A_+ قسمت واقع از A دربالای محور x و A_- قسمت واقع از A در زیر محور x می‌باشد.

مثال ۴. مساحت A ی بین منحنی $y = x^3 - x^2 - 2x$ و محور x را بیابید. این مجموع مساحات دو ناحیهٔ سایه‌دار شکل ۱۲ می‌باشد.

حل. با حل معادلهٔ مکعبی $x^3 - x^2 - 2x = x(x + 1)(x - 2) = 0$، معلوم می‌شود که منحنی $y = x^3 - x^2 - 2x$ دارای سه قطع x است، $x = -1$، $x = 0$، و $x = 2$. به علاوه، همانطور که شکل نشان می‌دهد، منحنی بالای محور x بین $x = -1$ و $x = 0$ و زیر محور x بین $x = 0$ و $x = 2$ قرار دارد. بنابراین،

$$A=\int_{-1}^{2}|x^3-x^2-2x|\,dx=\int_{-1}^{0}(x^3-x^2-2x)\,dx-\int_{0}^{2}(x^3-x^2-2x)\,dx$$
$$=\int_{-1}^{0}x^3\,dx-\int_{-1}^{0}x^2\,dx-2\int_{-1}^{0}x\,dx-\int_{0}^{2}x^3\,dx+\int_{0}^{2}x^2\,dx+2\int_{0}^{2}x\,dx$$
$$=\frac{1}{4}[0^4-(-1)^4]-\frac{1}{3}[0^3-(-1)^3]-2\left(\frac{1}{2}\right)[0^2-(-1)^2]$$
$$-\frac{1}{4}(2^4-0^4)+\frac{1}{3}(2^3-0^3)+2\left(\frac{1}{2}\right)(2^2-0^2)$$
$$=-\frac{1}{4}-\frac{1}{3}+1-4+\frac{8}{3}+4=\frac{7}{3}+\frac{3}{4}=\frac{37}{12}.$$



شکل ۱۲

مقدار میانگین یک تابع . فرض کنیم f تابع انتگرالپذیری بر بازهٔ $[a, b]$ باشد . عدد

$$\frac{1}{b-a}\int_{a}^{b}f(x)\,dx$$

مقدار میانگین (یا متوسط) f بر $[a, b]$ یا روی $[a, b]$ نام دارد . هرگاه ، علاوه‌براین، f بر $[a, b]$ پیوسته باشد ، آنگاه ، همانطور که لحظه‌ای بعد نشان می‌دهیم(ر.ک. قضیهٔ ۳۰)، همواره دست کم یک‌نقطه مانند c در $[a, b]$ هست به‌طوری که $f(c)$ مساوی مقدار میانگین f بر $[a, b]$ می‌باشد .

مثال ۵ . انتگرال تابع $f(x) = x^2 + 1$ بـر بازهٔ $[-2, 1]$ مساوی است با

$$\int_{-2}^{1}(x^2+1)\,dx=\int_{-2}^{1}x^2\,dx+\int_{-2}^{1}dx$$
$$=\frac{1}{3}[1^3-(-2)^3]+[1-(-2)]=3+3=6.$$

از اینرو ، مقدار میانگین f بر $[-2, 1]$ مساوی است با

$$\frac{1}{1-(-2)}\int_{-2}^{1}(x^2+1)\,dx = \frac{1}{3}(6) = 2.$$

توجه‌کنید که f این مقدار را در دونقطهٔ 1 و 1– که هر دو دربازهٔ $[-2, 1]$ اند می‌گیرد.

مثال ۶ . مقدار میانگین تابع $f(x) = 1 - x^3$ بر بازهٔ $[0, 4]$ مساوی است با

$$\frac{1}{4-0}\int_0^4 (1-x^3)\,dx = \frac{1}{4}\int_0^4 dx - \frac{1}{4}\int_0^4 x^3\,dx$$
$$= \frac{1}{4}(4-0) - \frac{1}{4}\left(\frac{1}{4}\right)(4^4 - 0^4) = 1 - 16 = -15,$$

و f این مقدار را در نقطهٔ $\sqrt[3]{16} \approx 2.52$ که متعلق به $[0, 4]$ است می‌گیرد .

قضیهٔ ۳ (قضیهٔ مقدار میانگین برای انتگرالها) . *اگر f بر $[a, b]$ پیوسته باشد ، نقطه‌ای مانند c در $[a, b]$ هست به طوری که*

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx = f(c),$$

یا معادلا "

$$\int_a^b f(x)\,dx = (b-a)f(c). \qquad (۷)$$

برهان . بنا بر قضیهٔ مقدار اکستریم (ر.ک. صفحهٔ ۱۵۹) ، f بر $[a, b]$ دارای مینیمم m و ماکزیمم M است که در نقاط p و q بازهٔ $[a, b]$ گرفته می‌شوند . چون $m \le f(x) \le M$ ، به کمک قاعدهٔ (شش) ، صفحهٔ ۳۷۸، داریم

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)\,dx \le M(b-a),$$

یا معادلا "

$$m \le \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \le M.$$

لذا ، مقدار میانگین f بر $[a, b]$ ، که با h نموده می‌شود ، متعلق بـه بـازهٔ $[m, M]$ می‌باشد . هرگاه $h = m$ یا $h = M$ ، آنگاه $h = f(p)$ یا $h = f(q)$ ، و قضیه به ازای $c = p$

یا $c = q$ ثابت می‌شود . در غیر این صورت ، $m < h < M$ ، و از قضیهٔ مقدار میانی (ر.ک صفحهٔ ۱۵۴) معلوم می‌شود که نقطه‌ای مانند c بین p و q ، و لذا مسلماً " در $[a, b]$ ، وجود دارد که $h = f(c)$.

قضیه ۳ تعبیر هندسی ساده‌ای دارد . فرض کنیم f بر $[a, b]$ پیوسته و نامنفی باشد . در این صورت ، فرمول (۷) می‌گوید که مستطیلی به طول $b - a$ و به ارتفاعی مساوی مقدار f در نقطهٔ c در $[a, b]$ وجوددارد که مساحتش مساحت تحت منحنی $y = f(x)$ از $x = a$ تا $x = b$ است . به صورت دیگر ، با نوشتن (۷) به شکل معادل

$$\int_a^b [f(x) - f(c)]\, dx = 0, \qquad (7')$$

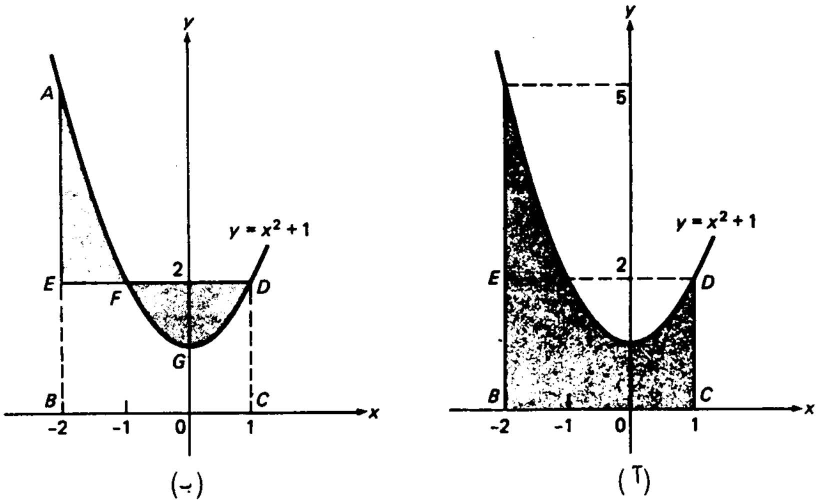
می‌بینیم که خطی افقی مانند $y = f(c)$ وجوددارد ، که c نقطه‌ای در $[a, b]$ است ، به‌طوری که مساحت تحت منحنی $y = f(x)$ و بالای خط ، از $x = a$ تا $x = b$ ، درست مساوی مساحت زیر خط و بالای منحنی است (در اینجا الزاماً " باید f را نامنفی گرفت) .

مثال ۷. قضیهٔ ۳ را بااعمال برتابع $y = f(x) = x^2 + 1$ روی بازهٔ $[-2, 1]$ تعبیر هندسی کنید .

حل. همانطورکه در مثال ۵ نشان دادیم ، مقدار میانگین f بر $[-2, 1]$ مساوی 2 است . بنابراین ، مساحت تحت سهمی $y = x^2 + 1$ از $x = -2$ تا $x = 1$ ، یعنی مساحت ناحیهٔ سایه‌دار شکل ۱۳ (آ) ، مساوی مساحت مستطیل $BCDE$ به طول 3 و ارتفاع 2 است (هر دو مساحت مساوی 6 می‌باشند) ، و ارتفاع مستطیل مساوی مقدار f در دو نقطهٔ 1 و -1 بازهٔ $[-2, 1]$ می‌باشد . به صورت دیگر ، مساحت ناحیهٔ سایه‌دار AEF شکل ۱۳ (ب) زیر سهمی $y = x^2 + 1$ و بالای خط $y = 2$ مساوی مساحت ناحیهٔ سایه‌دار FGD زیر خط و بالای سهمی است . در واقع ، هر دو مساحت مساوی است با $\frac{4}{3}$ (تحقیق کنید) .

مثال ۸. به کمک قضیهٔ ۳ نشان دهید هرگاه f بر $[a, b]$ پیوسته و نامنفی بوده‌و دست کم به ازای یک نقطه مانند c در $[a, b]$ ، $f(c) \neq 0$ ، آنگاه

$$\int_a^b f(x)\, dx > 0. \qquad (8)$$



شکل ۱۳

حل. واضح است که $f(c) > 0$ ، زیرا f بر $[a, b]$ نامنفی است. هرگاه $a < c < b$، آنگاه، بنابر قاعدهٔ (دو)، صفحهٔ ۱۲۴، زیربازه‌ای مانند $[c - \delta, c + \delta]$ از بازهٔ $[a, b]$ وجود دارد که f بر آن مثبت است، زیرا f در c دارای مقدار مثبت می‌باشد. همچنین، طبق قضیهٔ ۲،

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^{c-\delta} f(x)\,dx + \int_{c-\delta}^{c+\delta} f(x)\,dx + \int_{c+\delta}^{b} f(x)\,dx,$$

که در آن انتگرالهای اول و سوم آمده در مجموع نامنفی‌اند (چرا؟). اما، بنابر قضیهٔ ۳، انتگرال دوم مجموع به ازای p ای در $[c - \delta, c + \delta]$ مساوی $2\delta f(p)$ است؛ و درنتیجه، چون $f(p) > 0$ ، مثبت می‌باشد. لذا، نامساوی (۸) برقرار می‌باشد. برهان اساساً" مانند حالت $c = a$ یا $c = b$ است (این بار $[a, b]$ را فقط به دو زیربازه تقسیم کنید). شرح جزئیات را به عنوان تمرین می‌گذاریم.

بخصوص، از مثال ۸ معلوم می‌شود که هرگاه f بر $[a, b]$ پیوسته و نامنفی بوده و

$$\int_a^b f(x)\,dx = 0,$$

آنگاه f بر $[a, b]$ متحد صفر می‌باشد.

تبصره. اگر همانطور که در قضیهٔ ۳ و فرمول (۷) تلویحاً" فرض شده است، به‌جای $a < b$

داشته باشیم $b<a$ ، و نیز f بر $[b,a]$ پیوسته باشد ، به‌جای (۷) داریم

$$\int_b^a f(x)\,dx=(a-b)f(c),$$

که در آن c نقطه‌ای در $[b,a]$ می‌باشد . با ضرب طرفین این فرمول در $1-$ به فرمول (۷) باز می‌گردیم . لذا ، همواره می‌توان قضیهٔ مقدار میانگین برای انتگرالها را به شکل (۷)به کار برد ، که در آن c نقطه‌ای در بازه با نقاط انتهایی a و b است . در واقع ، معلوم می‌شود (ر.ک. مسئلهٔ ۳۹) که ، مثل قضیهٔ مقدار میانگین برای مشتقات ، همیشه می‌توان c را نقطه‌ای بین a و b گرفت .

مسائل

۱. بنابر فرمول (۹) ، صفحهٔ ۳۷۵ ،

$$\int_a^b x^n\,dx=\frac{1}{n+1}(b^{n+1}-a^{n+1})\qquad (n=1,2,\ldots),$$

که در آن تلویحا " فرض شده است که $a<b$. نشان دهید که فرمول به ازای $a>b$ برقرار می‌ماند .

انتگرالهای زیر را حساب کنید .

۲. $\int_{11}^{7} x\,dx$

۳. $\int_1^{-1}(x^2-x)\,dx$

۴. $\int_{-2}^{2}|x+1|\,dx$

۵. $\int_{-1}^{3}|x^2-2x|\,dx$

۶. $\int_0^1 t^{10}\,dt+\int_1^0 t^{10}\,dt$

۷. $\int_0^1 u^{10}\,du-\int_1^0 u^{10}\,du$

۸. $\int_0^1 v^2\,dv+\int_1^3(v^2-1)\,dv+\int_3^2(v^2+1)\,dv$

فرض کنید

$$f(x)=\begin{cases}2-x\text{ ، } x<1 & \text{اگر}\\ x^3\text{ ، } x\ge 1 & \text{اگر}\end{cases}$$

انتگرالهای زیر را محاسبه نمایید .

۹. $\int_{-2}^{3} f(x)\,dx$

۱۰. $\int_2^{-1} f(x)\,dx$

۱۱. $\int_0^2 f(x+1)\,dx$

۱۲. $\int_1^2 [f(x)-f(x-1)]\,dx$

مساحت A ی ناحیهٔ R بین منحنیهای زیر را بیابید.

۱۳. $y = x^2 - 1$ و $y = 1 - x^2$

۱۴. $y = x^2 - 4$ و $y = 2x - x^2$

۱۵. $y = x^2$ و $y = x^5$

۱۶. $y = x + 1$ و $y = |x| + |x - 1|$

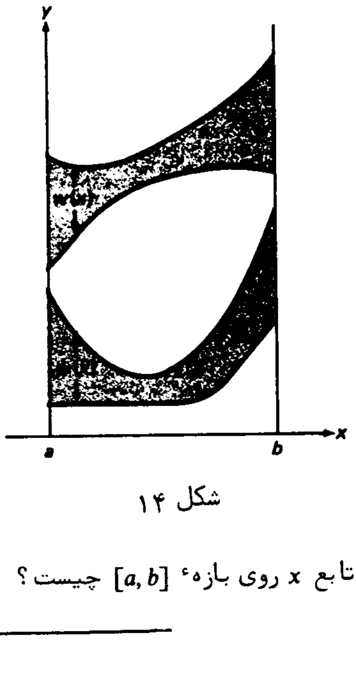
۱۷. $y = |x|$ و $y = 2 - x^2$

۱۸. $y = |2x - 1|$ و $y = 4 - x^2$

در هر حالت ناحیهٔ R را رسم نمایید.

۱۹. مساحت A ی بین منحنی $y = x^3 - x^2 - 2x$ (ر.ک. شکل ۱۲) و خط $y = 4x$ را بیابید.

۲۰. فرض کنید R ناحیهٔ محدود به خطوط قائم $x = a$ و $x = b$، منحنی بالایی $y = f(x)$ و منحنی پایینی $y = g(x) \leq f(x)$ باشد. گوییم R به عرض $w(x) = f(x) - g(x)$ است که در آن تابع $w(x)$ بر $[a, b]$ تعریف شده است. *اصل کاوالیری*[1] برای مساحت را ثابت کنید که می‌گوید دوناحیه از این نوع به‌عرض یکسان $w(x)$، مانند دو ناحیهٔ سایه‌دار شکل ۱۴، بی‌توجه به‌انتخاب منحنیهای بالایی و پایینی، دارای مساحت A می‌باشند.



شکل ۱۴

۲۱. تعبیر هندسی متوسط تابع x روی بازهٔ $[a, b]$ چیست؟

1. *Cavalieri*

۲۲. نشان دهید که متوسط تابع x^2 روی بازهٔ $[a, b]$ مساوی است با $\frac{1}{3}(a^2 + ab + b^2)$.

به ازای تابع f و نقاط a و b داده شده، مقدار میانگین f بر $[a, b]$ را بیابید.

۲۳. $f(x) = 1 - x - x^2, a = 0, b = 4$

۲۴. $f(x) = x^3 - 2x + 1, a = -2, b = 3$

۲۵. $f(x) = |1 - x|, a = -1, b = 2$

۲۶. $f(x) = x^4 + 5x^2 - 10, a = -3, b = -1$

نقطهٔ c صادق در فرمول مقدار میانگین (۷) را درصورتی بیابید که

۲۷. $f(x) = x, a = 1, b = 7$

۲۸. $f(x) = 2x + 3, a = -1, b = 3$

۲۹. $f(x) = x^2, a = 2, b = 0$

۳۰. $f(x) = 3x^2 + 1, a = 4, b = 1$

۳۱. $f(x) = |x^2 - 1|, a = -2, b = 2$

۳۲. $a = -1, b = 2$ $f(x) = \begin{cases} 2x^2 & \text{اگر } x < 0 \\ x & \text{اگر } x \geq 0 \end{cases}$

۳۳. فرض کنید f و g بر $[a, b]$ پیوسته بوده، و $f(x) \geq g(x)$ با دست کم یک نقطهٔ c در $[a, b]$ که $f(c) \neq g(c)$. نشان دهید که

$$\int_a^b f(x)\,dx > \int_a^b g(x)\,dx.$$

۳۴. تحقیق کنید که

$$\frac{1}{6} < \int_0^2 \frac{1}{10 + x}\,dx < \frac{1}{5}.$$

بدون سعی در محاسبهٔ انتگرالها، معین کنید کدام انتگرال بزرگتر است.

۳۵. $\int_0^1 x\,dx$ یا $\int_0^1 x^2\,dx$

۳۶. $\int_1^2 x\,dx$ یا $\int_1^2 x^2\,dx$

۳۷. $\int_0^{\pi/2} \sin x\,dx$ یا $\int_0^{\pi/2} x\,dx$

۳۸. $\int_0^{\pi/2} \sin^2 x\,dx$ یا $\int_0^{\pi/2} \sin^{10} x\,dx$

۳۹. نشان دهید که نقطهٔ c قضیهٔ ۳ را همیشه می‌توان یک نقطهٔ درونی بازهٔ $[a, b]$

گرفت .

۴۰ . فرض کنید f بر $[1,4]$ پیوسته بوده و $f(3) \neq 0$. چه عدد بزرگتر است ،

$$I_1 = \int_1^4 f(x)\,dx + \int_4^2 f(x)\,dx + \int_2^3 f(x)\,dx + \int_3^1 f(x)\,dx$$

یا

$$I_2 = \int_{\sqrt{5}}^{\pi} f^2(x)\,dx?$$

۴.۴ پاد مشتقات و انتگرال نامعین

مفاهیم مطرح شده در این بخش نقشی کلیدی در بررسی بیشتر حساب انتگرال خواهند داشت . بزودی به کمک آنها قضیهٔ اساسی حساب دیفرانسیل و انتگرال (قضیهٔ ۶ ، صفحهٔ ۴۰۹) را ثابت می‌کنیم ، که با آن می‌توان انتگرالهای معین را بدون توسل به محاسبهٔ صریح مجموعهای ریمان حساب کرد .

تعریف پادمشتق . فرض کنیم تابع $f(x)$ بر بازهٔ I تعریف شده باشد ، و $F(x)$ تابع دیگری باشد که بر I تعریف شده و مشتقش مساوی $f(x)$ باشد ؛ درنتیجه ، به ازای هر x در I ،

$$\frac{dF(x)}{dx} = F'(x) = f(x)$$

در این صورت ، گوییم $F(x)$ یک **پاد مشتق** $f(x)$ بر بازهٔ I است . در اینجا از حرف x برای متغیر مستقل استفاده می‌کنیم ، ولی هر حرف دیگر به همین خوبی می‌باشد .

مثال ۱ . تابع $\frac{1}{2}x^2$ یک پاد مشتق x بر $(-\infty, \infty)$ است ، زیرا به ازای هر x ،

$$\frac{d}{dx}\frac{1}{2}x^2 = \frac{1}{2}(2x) = x$$

مثال ۲ . تابع $\frac{2}{3}t^{3/2}$ یک پاد مشتق $t^{1/2}$ بر $(0, \infty)$ است ، زیرا به ازای هر t مثبت ،

$$\frac{d}{dt}\frac{2}{3}t^{3/2} = \frac{2}{3}\left(\frac{3}{2}t^{1/2}\right) = t^{1/2}$$

مثال ۳ . تابع $\tan u$ یک پاد مشتق $\sec^2 u$ برهربازه‌ای است که شامل نقاط $u = \pm\frac{1}{2}\pi, \pm\frac{3}{2}\pi, \ldots$ نیست . در واقع ، جز در این نقاط که هر دوی $\tan u$ و $\sec u$ تعریف نشده‌اند ،

$$\frac{d}{du}\tan u = \sec^2 u$$

پاد مشتق کلی. هرگاه $F(x)$ پاد مشتق $f(x)$ بر بازهٔ I باشد، آنگاه $G(x) = F(x) + C$ ـیز چنین است، که در آن C ثابت دلخواهی می‌باشد، زیرا

$$\frac{dG(x)}{dx} = \frac{d}{dx}[F(x) + C] = \frac{dF(x)}{dx} + \frac{dC}{dx} = F'(x) = f(x).$$

همانطور که اینک نشان می‌دهیم، $G(x)$ پاد مشتق کلی $f(x)$ بر I است. بدین معنی‌که‌هر پاد مشتق $f(x)$ بر I به شکل $G(x)$ است.

قضیهٔ ۴ (شکل پاد مشتق کلی). فرض‌کنیم $F(x)$ پاد مشتقی از $f(x)$ بر بازهٔ I باشد. در این صورت، هر پاد مشتق دیگر $f(x)$ بر I به شکل $F(x) + C$ است، که درآن C ثابت می‌باشد.

برهان. فرض‌کنیم $G(x)$ پاد مشتق دیگری از $f(x)$ بر I بوده، و $H(x) = G(x) - F(x)$. در این صورت، به ازای هر x در I ،

$$H'(x) = G'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) = 0\ ;$$

یعنی، $H'(x)$ در هر نقطه از I مساوی صفر است. از قضیهٔ ۳، صفحهٔ ۲۶۱، معلوم می‌شود که $H(x)$ در هر نقطه از I مقدار ثابتی مثلاً C دارد. بنابراین،

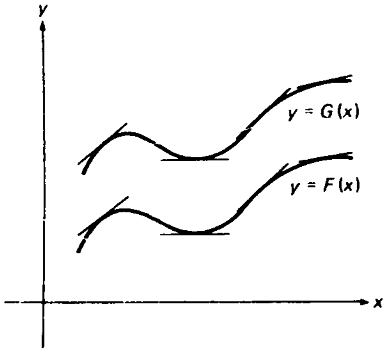
$$H(x) = G(x) - F(x) \equiv C,$$

یا معادلاً $G(x) \equiv F(x) + C$.

لذا، دو تابع که بر بازه‌ای مشتق یکسان داشته باشد فقط می‌توانند در یک ثابت فرق داشته باشند. به طور هندسی، این یعنی هرگاه دو منحنی روی یک بازه درهر جفت‌نقطه با طول یکسان شیب یکسانی داشته باشند، آنگاه هر منحنی را می‌توان از دیگری با انتقال قائم مناسبی به دست آورد، و این امر در شکل ۱۵ با دو منحنی $y = F(x)$ و $y = G(x)$ نموده شده است.

مثال ۴. از

$$\frac{d}{dx}(4 - \cos x) = \sin x, \qquad \frac{d}{dx}\left(2\sin^2\frac{x}{2}\right) = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} = \sin x$$



شکل ۱۵

نتیجه می‌شود که

$$4 - \cos x \equiv 2\sin^2\frac{x}{2} + C$$

و با اختیار $x = 0$ معلوم می‌شود که $C = 3$. این اتحاد مثلثاتی را به عنوان تمرین ثابت کنید .

تعریف انتگرال نامعین. هم‌اکنون نشان دادیم که هرگاه $F(x)$ یک پاد مشتق $f(x)$ بر I باشد ، آنگاه پاد مشتق کلی $f(x)$ بر I با $F(x) + C$ داده می‌شود ، که در آن C ثابت دلخواهی است . عبارت $F(x) + C$ ***انتگرال نامعین*** $f(x)$ نام دارد و با $\int f(x)\,dx$ نموده می‌شود . لذا ، طبق تعریف ،

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C, \qquad (۱)$$

درنتیجه ، انتگرال نامعین فقط با تقریب یک " ثابت جمعی " دلخواه تعریف شده است . در اینجا نماد همان نماد انتگرال معین است ، **جز آنکه حدود انتگرالگیری وجود ندارند**. عدم وجود حدود انتگرالگیری به ما می‌گوید که انتگرال نامعین $\int f(x)\,dx$ ، به خلاف انتگرال معین $\int_a^b f(x)\,dx$ که عدد است ، ***تابعی*** (به‌علاوهٔ یک ثابت دلخواه) می‌باشد . مثل قبل ، تابع $f(x)$ ***انتگرالده*** ، شناسه‌اش (در این حالت x) ***متغیر انتگرالگیری*** ، وعملی که ما را از $f(x)$ به عبارت (۱) می‌رساند ***انتگرالگیری*** (نامعین) نام دارد . ثابت C در (۱) ***ثابت انتگرالگیری*** نامیده می‌شود .

در نوشتن (۱) تلویحا " فرض شده است که فرمول به ازای هر x در بازهٔ زمینهٔ I که بر آن f و F تعریف شده‌اند یک اتحاد است ؛ با اینحال ، I معمولا " نامشخص رها می‌شود .

با مشتقگیری از (۱) به دست می‌آوریم

$$\frac{d}{dx}\int f(x)\,dx = \frac{d}{dx}[F(x)+C] = F'(x),$$

درنتیجه ،

$$\frac{d}{dx}\int f(x)\,dx = f(x). \tag{۲}$$

چون این یک پاد مشتق است ، انتگرال نامعین باید همان شناسهٔ انتگرالده را داشته‌باشد. مثلاً ،

$$\int x\,dx = \frac{1}{2}x^2 + C, \qquad \int t\,dt = \frac{1}{2}t^2 + C,$$

و در این حالت

$$\int x\,dx \neq \int t\,dt.$$

در اینجا ، به‌خلاف انتگرال معین ، متغیر انتگرالگیری یک متغیر ظاهری نیست .

چون هر تابع مشتقپذیر $f(x)$ پاد مشتقی از مشتق خود $f'(x)$ است ، داریم

$$\int f'(x)\,dx = f(x) + C. \tag{۳}$$

این فرمول را می‌توان برای به دست آوردن یک فرمول انتگرالگیری از هر فرمول مشتقگیری به کار برد . مثلاً ، هرگاه r یک عدد گویا و مخالف -1 باشد ، آنگاه

$$\frac{d}{dx}\frac{x^{r+1}}{r+1} = \frac{(r+1)x^r}{r+1} = x^r,$$

و کاربرد (۳) نتیجه می‌دهد که

$$\int x^r\,dx = \frac{x^{r+1}}{r+1} + C \qquad (r \neq -1). \tag{۴}$$

اگر $r = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, 0, -\frac{1}{2}$ به نوبت اختیار شوند ، به دست می‌آوریم

$$\int x\,dx = \frac{1}{2}x^2 + C,$$

$$\int x^{1/2}\,dx = \frac{2}{3}x^{3/2} + C,$$

$$\int x^{1/3}\,dx = \frac{3}{4}x^{4/3} + C,$$

$$\int dx = x + C,$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} + C.$$

دو فرمول اول در مثالهای ۱و۲ پیش‌بینی شده بودند . در آخرین فرمول ، از رسم معمول استفاده کرده

$$\int \frac{dx}{f(x)} \text{ را به صورت } \int \frac{1}{f(x)}\,dx$$

می‌نویسیم .

به همین نحو ،فرمولهای مشتق توابع مثلثاتی (ر.ک. صفحهٔ ۲۱۱) ما را به فرمولهای انتگرالگیری زیر می‌رسانند :

$$\int \cos x\,dx = \sin x + C,$$

$$\int \sin x\,dx = -\cos x + C,$$

$$\int \sec^2 x\,dx = \tan x + C,$$

$$\int \csc^2 x\,dx = -\cot x + C,$$

$$\int \sec x \tan x\,dx = \sec x + C,$$

$$\int \csc x \cot x\,dx = -\csc x + C.$$

قواعد برای انتگرالگیری نامعین . حال چند قاعده به دست می‌آوریم که انتگرالهای نامعین تحت تبعیت آنها می‌باشند .

(یک) هرگاه f انتگرال نامعین (پاد مشتق) داشته و c ثابت دلخواهی باشد ، آنگاه

$$\int cf(x)\,dx = c\int f(x)\,dx. \qquad (۵)$$

در واقع ، عبارت سمت راست پاد مشتقی از $cf(x)$ است ، زیرا به کمک فرمول (۲)

$$\frac{d}{dx}\left(c\int f(x)\,dx\right) = c\frac{d}{dx}\int f(x)\,dx = cf(x),$$

به‌علاوه ، $\int f(x)\,dx$ فقط با تقریب یک ثابت جمعی دلخواه تعریف شده است ؛ودرنتیجه ،

همین امر در مورد $c\int f(x)\,dx$ صادق است . لذا ، در یک انتگرال نامعین ، هر ثابت ضربدر انتگرالده را می‌توان ، درست مثل انتگرال معین ، خارج کرده جلو علامت انتگرال قرار داد .

(دو) هرگاه f و g بر بازهٔ یکسانی انتگرال نامعین (پاد مشتق) داشته باشند ، آنگاه

$$\int [f(x) + g(x)]\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx. \tag{۶}$$

برای اثبات این امر ،ملاحظه می‌کنیم که مجموع انتگرالهای سمت راست یک پاد مشتق $f + g$ است ، زیرا

$$\frac{d}{dx}\left(\int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx\right) = \frac{d}{dx}\int f(x)\,dx + \frac{d}{dx}\int g(x)\,dx = f(x) + g(x).$$

به‌علاوه ، هر انتگرال $\int f(x)\,dx$ و $\int g(x)\,dx$ فقط با تقریب یک ثابت جمعی دلخواه تعریف شده است ؛ و درنتیجه ، همین امر برای مجموع آنها نیز درست است . لذا ،انتگرال‌نامعین مجموع دو تابع مجموع انتگرالهای نامعین تک تک توابع می‌باشد . این مشابه قاعدهٔ انتگرالهای نامعین (دو) ، صفحهٔ ۳۷۶ ، می‌باشد .

(سه) هرگاه $f_1, f_2, \ldots, f_n$ بربازهٔ‌واحدی‌انتگرال‌نامعین داشته و $c_1, c_2, \ldots, c_n$ ثابتهای دلخواهی باشند ، آنگاه ، درست مثل انتگرالهای معین (ر.ک. صفحهٔ ۳۷۷) ،

$$\begin{aligned}&\int [c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) + \cdots + c_n f_n(x)]\,dx\\ &\quad = c_1\int f_1(x)\,dx + c_2\int f_2(x)\,dx + \cdots + c_n\int f_n(x)\,dx,\end{aligned} \tag{۷}$$

فرمول ۷باکاربرد مکررفرمولهای (۵) و (۶) ثابت‌می‌شود .لذا ، انتگرال نامعین هرترکیب‌خطی از توابع ترکیبی خطی ، با همان ضرایب ، از انتگرالهای نامعین تک‌تک توابع می‌باشد .

(چهار) هرگاه f دارای پاد مشتق F باشد ، درنتیجه $\int f(x)\,dx = F(x) + C$ ، آنگاه به به ازای ثابتهای دلخواه $a \neq 0$ و b ،

$$\int f(ax+b)\,dx = \frac{F(ax+b)}{a} + C \tag{۸}$$

در واقع ، چون $F'(x) = f(x)$ ، به کمک قاعدهٔ زنجیره‌ای داریم

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\frac{F(ax+b)}{a} &= \frac{1}{a}\frac{d}{dx}F(ax+b) = \frac{1}{a}F'(ax+b)\frac{d}{dx}(ax+b)\\ &= \frac{a}{a}F'(ax+b) = f(ax+b),\end{aligned}$$

لذا ، $(1/a)F(ax+b)$ یک پادمشتق $f(ax+b)$ است ، که (۸) را ثابت خواهد کرد .

حال در وضعی هستیم که چند انتگرال نامعین را حساب کنیم . همین‌طورکه‌حساب انتگرال را پی‌می‌گیریم ،تکنیکهای دیگر انتگرالگیری وارد کار خواهند شد . بخصوص، قاعدهٔ (چهار) حالت خاص مهمی است از یک روش کلی به نام ***انتگرالگیری با جانشانی*** (ر.ک . بخش ۱۰۷) .

مثال ۵ . $\int\left(5x^4-6x^2+\frac{2}{x^2}\right)dx$ را حساب کنید .

حل . بنابر قاعدهٔ (سه) ، پس‌از آنکه فرمول (۴) سه بار (به ازای $r=4, 2, -2$) به‌کار رفت ، داریم

$$\begin{aligned}\int\left(5x^4-6x^2+\frac{2}{x^2}\right)dx &= 5\int x^4\,dx-6\int x^2\,dx+2\int x^{-2}\,dx\\ &= 5\left(\frac{x^5}{5}\right)-6\left(\frac{x^3}{3}\right)+2\left(\frac{x^{-1}}{-1}\right)+C\\ &= x^5-2x^3-\frac{2}{x}+C.\end{aligned}$$

توجه کنید که ثابتهای دلخواه انتگرالگیری ناشی از سه انتگرال جداگانه باهم تلفیق‌وثابت انتگرالگیری C را به وجود آورده‌اند .

مثال ۶ . انتگرال نامعین چندجمله‌ای دلخواه

$$P(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n,$$

که در آن $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ ثابت اند ، را محاسبه کنید .

حل . فرض‌کنیم $a_n \neq 0$ ؛ درنتیجه ، $P(x)$ از درجهٔ n است .بنابر قاعدهٔ (سه)وکاربرد مکرر فرمول (۴) ، داریم

$$\begin{aligned}\int P(x)\,dx &= a_0\int dx+a_1\int x\,dx+a_2\int x^2\,dx+\cdots+a_n\int x^n\,dx\\ &= a_0x+\frac{a_1}{2}x^2+\frac{a_2}{3}x^3+\cdots+\frac{a_n}{n+1}x^{n+1}+C,\end{aligned}$$

که چندجمله‌ای دیگری است ، در واقع یک چندجمله‌ای از درجهٔ $n+1$ است ، زیرا ضریب x^{n+1} ناصفر می‌باشد . باید توجه داشت که مشتقگیری از این چندجمله‌ای جدید فوراً ما را به چندجمله‌ای اصلی $P(x)$ برمی‌گرداند ، و نشان می‌دهد که محاسبات درست انجام شده است .

مثال ۷. $\int \cos 2x\,dx$ را حساب کنید .

حل. بنابر قاعدهٔ (چهار) به ازای $a=2$ ، $b=0$ ، $f(x)=\cos x$ ، و $F(x)=\sin x$ ،

$$\int \cos 2x\,dx = \frac{\sin 2x}{2} + C.$$

مثال ۸. $\int \cos^2 x\,dx$ را حساب کنید .

حل. چون

$$1+\cos 2x = 1+\cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 x,$$

به کمک مثال ۷ داریم

$$\int \cos^2 x\,dx = \frac{1}{2}\int (1+\cos 2x)\,dx$$
$$= \frac{1}{2}\int dx + \frac{1}{2}\int \cos 2x\,dx = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin 2x + C.$$

می‌توان C را نصف مجموع ثابتهای دلخواه انتگرالگیری ناشی از انتگرالهای $\int dx$ و $\int \cos 2x\,dx$ گرفت ، یا در آخر محاسبات یک ثابت دلخواه وارد کرد .

مثال ۹. $\int (1-u)(1+u+u^2)\,du$ را حساب کنید .

حل. در اینجا متغیر انتگرالگیری به جای x ، u است . با انجام ضرب در انتگرالده در می‌یابیم که ، بنابر قاعدهٔ (سه) و فرمول (۴) یا تشخیص اینکه $u - \frac{1}{4}u^4$ یک پادمشتق $1-u^3$ است ،

$$\int (1-u)(1+u+u^2)\,du = \int (1-u^3)\,du = u - \frac{1}{4}u^4 + C,$$

وجود پادمشتقهای توابع پیوسته. ما از قبل می‌دانیم که هر تابع پیوسته انتگرال معین دارد (ر.ک. قضیهٔ ۱، صفحهٔ ۳۷۱). حال نشان می‌دهیم که هر تابع پیوسته پاد مشتق، و در نتیجه، انتگرال نامعین دارد.

قضیهٔ ۵ (پیوستگی وجود پادمشتق را ایجاب می‌کند). فرض کنیم f بر بازهٔ I پیوسته بوده، و

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt, \tag{۹}$$

که در آن a نقطهٔ ثابتی از I و x نقطهٔ متغیری از I باشد. در این صورت، F یک پاد مشتق f بر I است؛ یعنی، به ازای هر x در I، $F'(x) = f(x)$.

برهان. پیش از شروع به اثبات، متذکر می‌شویم که انتگرال معین (۹)، که وجودش را پیوستگی f تضمین می‌کند، تابعی است از حد بالایی انتگرالگیری متغیر x. در واقع، وجود x در حد بالایی ما را به استفاده از حرف دیگر (در اینجا t) برای متغیر انتگرالگیری مجبور می‌سازد.

حال فرض کنیم x و $x + \Delta x$ هر دو متعلق به بازهٔ I باشند. بنابرنتیجهٔ صفحهٔ ۳۸۳،

$$F(x + \Delta x) = \int_a^{x+\Delta x} f(t)\,dt = \int_a^x f(t)\,dt + \int_x^{x+\Delta x} f(t)\,dt,$$

یا معادلاً

$$F(x + \Delta x) - F(x) = \int_x^{x+\Delta x} f(t)\,dt.$$

اگر قضیهٔ مقدار میانگین برای انتگرالها را در مورد انتگرال سمت راست که از نقطهٔ ثابت a مستقل است اعمال کنیم، به دست می‌آوریم

$$F(x + \Delta x) - F(x) = (x + \Delta x - x)f(c) = f(c)\,\Delta x,$$

که در آن بسته به اینکه Δx مثبت یا منفی باشد، $x \le c \le x + \Delta x$ یا $x + \Delta x \le c \le x$. نقطهٔ c وابسته به Δx است، و بخصوص وقتی $\Delta x \to 0$، $c \to x$. بنابراین، طبق پیوستگی f، وقتی $\Delta x \to 0$، $f(c) \to f(x)$. لذا، مشتق F در هر نقطهٔ x از I مساوی است

بسا ۱

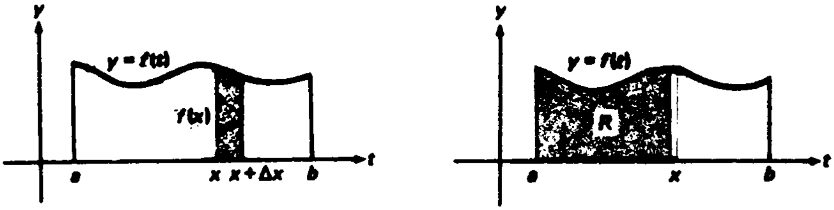
$$F'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{F(x + \Delta x) - F(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(c)\,\Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} f(c) = f(x),$$

درنتیجه، F یک پادمشتق f بر I می‌باشد.

مشتقگیری از یک انتگرال با حد بالایی متغیر. البته، تابع F بر I پیوسته است، زیرا بر I مشتقپذیر می‌باشد. قضیهٔ ۵ را می‌توان به‌طور فشرده چنین نوشت:

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt = f(x),$$

و این تعبیر هندسی ساده‌ای دارد. فرض کنیم $I = [a, b]$ و $f(t) \geq 0$. همانطور که شکل ۱۶ (آ) نشان می‌دهد، $F(x)$ مساحت ناحیهٔ سایه‌دار R تحت منحنی $y = f(t)$ از $t = a$ تا $t = x$ است، و قضیه می‌گوید که وقتی x افزایش یابد، $F(x)$ به میزانی مساوی‌ارتفاع $f(x)$ ناحیهٔ R در گوشه راست بالایی آن افزایش خواهد یافت. این معنی دارد، زیرا افزایش x به $x + \Delta x$ سبب افزایش مساحت R به اندازهٔ $\Delta F(x) = F(x + \Delta x) - F(x)$ می‌شود، که مساحت نوار تقریبا" مستطیلی باریک‌تحت منحنی $y = f(t)$ از $t = x$ تا $t = x + \Delta x$ است، و مساحت این نوار که در شکل ۱۶ (ب) نموده شده تقریبا" مساوی $f(x)\Delta x$ است با خطایی نسبی که وقتی $\Delta x \to 0$ به صفر می‌رود.



مساحت سایه‌دار مساوی است با $F(x) = \int_a^x f(t)dt$

(آ)

مساحت سایه‌دار دقیقا" مساوی $F(x + \Delta x) - F(x)$ و تقریبا" مساوی $f(x)\Delta x$ است.

(ب)

شکل ۱۶

---

۱. اگر x نقطهٔ انتهایی چپ یا راست I باشد، در عوض فرض می‌کنیم $\Delta x \to 0^+$ یا $\Delta x \to 0^-$ و $F'(x)$ را مشتق راست یا چپ تعبیر می‌کنیم. در این صورت، لازم نیست f خارج I تعریف شده باشد. اگر بازهٔ I باز باشد، این بحث مطرح نخواهد بود.

از قضیهٔ ۵ فورا" نتیجه می‌شود که هرگاه f بر بازهٔ I پیوسته باشد، آنگاه f بر I انتگرال نامعین دارد. درواقع، چون تابع (۹) یک پادمشتق f بر I است، انتگرال نامعین f مساوی است با

$$\int f(x)\,dx = \int^{x} f(t)\,dt + C,$$

که در آن C یک ثابت دلخواه است.

مثال ۱۰. اگر $r = -1$، نمی‌توان فرمول انتگرالگیری اساسی

$$\int x^r\,dx = \frac{x^{r+1}}{r+1} + C$$

را به‌کار برد. درواقع، $r = -1$ مخرج سمت راست را صفر می‌کند. از آن سو، تابع $1/x$ بر هر بازه‌ای که شامل نقطهٔ $x = 0$ نباشد پیوسته است؛ ولذا، طبق قضیهٔ ۵، برهر چنین بازه پادمشتق دارد. به عبارت دیگر، انتگرال نامعین

$$\int \frac{dx}{x}$$

موجود است، اگر چه هنوز نام این تابع را نمی‌دانیم. در بخش ۱۰.۶ این تابع را، که **لگاریتم طبیعی x** بوده و با $\ln x$ نموده می‌شود، بررسی خواهیم کرد.

مسائل

پادمشتق کلی تابع داده شده را بیابید.

۱. $x^2 + x + 2$ ✓

۲. $x(x-1)(x-2)$ ✓

۳. $x^{49} - 5x^{24} + 20x^9 - 10$ ✓

۴. $\frac{2}{3}x^{3/2} + \frac{3}{2}x^{2/3}$ ✓

۵. $x^{-3/4} - x^{-4/3}$ ✓

۶. $(1 + x + x^2)/x^4$ ✓

۷. $2\sin x - 3\cos x$ ✓

۸. $5\sec^2 x + 4\csc^2 x$ ✓

۹. $(1-t)(1+t)(1+t^2)$ ✓

۱۰. $(3+2u)(9-6u+4u^2)$ ✓

۱۱. $(2-3v)(4+6v+9v^2)$ ✓

۱۲. $\frac{1}{4}w^4 - \frac{1}{2}w^2 + 8\sec w \tan w$ ✓

۱۳. نشان دهید. هرگاه $F(x)$ پادمشتقی از $f(x)$ باشد، آنگاه $-F(-x)$ پادمشتقی از $f(-x)$ است.

۱۴. با استفاده از مشتقگیری، نشان دهید $\sin^2 x = C - \frac{1}{2}\cos 2x$، که در آن C ثابت است،

و سپس C را پیدا کنید .

۱۵ . در باب تابع $f(x)$ که مشتق n مش $f^{(n)}(x)$ متحد صفر است چه می‌توان گفت ؟

انتگرالهای زیر را حساب کنید .

۱۶ . $\int (x+5)(x-6)\,dx$

۱۷ . $\int (x^4 - 3x^2 + 2x - 4)\,dx$

۱۸ . $\int x(1+x)(1-x)\,dx$

۱۹ . $\int \left(x^3 - x + \frac{1}{x^2} - \sin 3x\right) dx$

۲۰ . $\int t^2(5-t)^4\,dt$

۲۱ . $\int (1-u)(1-2u)(1-3u)\,du$

۲۲ . $\int \frac{v+1}{\sqrt{v}}\,dv$

۲۳ . $\int \sin^2 x\,dx$

۲۴ . $\int \tan^2 x\,dx$

۲۵ . $\int \cot^2 x\,dx$

۲۶ . $\int \sin x \cos x\,dx$

۲۷ . $\int \frac{\sin x}{\cos^2 x}\,dx$

۲۸ . $\int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^2 x}$

۲۹ . $\int \frac{\sin 2x}{\sin x}\,dx$

۳۰ . $\int \frac{\cos x}{\sin^2 x}\,dx$

۳۱ . $\int \frac{\cos 3u}{\cos u}\,du$

۳۲ . $\int \frac{\sin 3v}{\sin v}\,dv$

۳۳ . $\int \frac{w^4 - 1}{w - 1}\,dw$

۳۴ . $\int \frac{z^4 - 16}{z + 2}\,dz$

۳۵ . $\int \frac{1 - \sin^3 x}{1 - \sin x}\,dx$

۳۶ . $\int \frac{1 + \cos^3 x}{1 + \cos x}\,dx$

۳۷ . $\frac{d}{dx}\int_a^b f(x)\,dx$

۳۸ . $\frac{d}{da}\int_a^b f(x)\,dx$

۳۹. $\frac{d}{db}\int_a^b f(x)\,dx$

۴۰. $\frac{d}{dx}\int_0^x t^{50}(1-t)^{50}\,dt$

۴۱. $\frac{d}{dt}\int_1^t (1+\sin x)^{25}\,dx$

۴۲. $\frac{d}{dt}\int_0^1 (2+\tan t)^{99}\,dt$

۴۳. نشان دهید که قضیهٔ ۵ را می‌توان بدون استفاده از قضیهٔ مقدار میانگین برای انتگرالها ثابت‌کرد. سپس نشان‌دهید که می‌توان قضیهٔ مقدار میانگین برای‌انتگرالها را از قضیهٔ مقدار میانگین برای مشتقات نتیجه گرفت (قضیهٔ۲، صفحهٔ ۲۵۸).

۵.۴ قضیهٔ اساسی حساب دیفرانسیل و انتگرال

قضیهٔ اساسی زیر ارتباط نزدیک بین حساب دیفرانسیل و حساب انتگرال را آشکار خواهد ساخت. در عین حال، ابزار توانایی برای محاسبهٔ انتگرالهای معین به ما می‌دهد.

قضیهٔ ۶ (قضیهٔ اساسی حساب دیفرانسیل و انتگرال). هرگاه f بر $[a, b]$ پیوسته باشد، آنگاه

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a), \tag{1}$$

که در آن F یک پادمشتق f بر $[a, b]$ است.

برهان. بنابرقضیهٔ ۵، صفحهٔ ۴۰۵،

$$F_0(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$

یک پادمشتق f بر $[a, b]$ است. در اینجا به F زیرنویس صفر داده‌ایم تا بر یک پاد مشتق خاص f، به جای پادمشتق دلخواه f، تأکید کرده باشیم. فرض کنیم F پادمشتق دیگری از f بر $[a, b]$ باشد. بنابر قضیهٔ ۴، صفحهٔ ۳۹۸،

$$F_0(x) = F(x) + C, \tag{2}$$

که در آن C ثابت می‌باشد. برای تعیین C، ملاحظه می‌کنیم

$$F(a) + C = F_0(a) = \int_a^a f(t)\,dt = 0,$$

که $C = -F(a)$ را ایجاب می‌کند. با گذاردن این مقدار C در (۲)، به دست می‌آوریم

$$F_0(x) = F(x) - F(a).$$

بالاخره، با فرض $x=b$ و تغییر متغیر ظاهری انتگرالگیری از t به x خواهیم داشت

$$F_0(b)=\int_a^b f(x)\,dx = F(b)-F(a),$$

و برهان تمام خواهد بود.

در بعضی از کتب، قضایای ۵ و ۶ در یک قضیهٔ دوقسمتی تلفیق شده و قضیهٔ اساسی حساب دیفرانسیل و انتگرال نام یافته است. همچنین، برهانی از قضیهٔ۶ وجود دارد که، به جای قضیهٔ ۵، بر قضیهٔ مقدار میانگین برای مشتقات، استوار است (ر.ک. مسئلهٔ ۴۱).

این امر که طرف راست فرمول (۱) به انتخاب پادمشتق f بستگی ندارد را می‌توان به‌آسانی با محاسبهٔ مستقیم تحقیق کرد: فرض کنیم G پادمشتق دیگری از f بر $[a, b]$ باشد. در این صورت، $G = F + C$ ،که در آن C ثابت است؛ و لذا،

$$G(b)-G(a)=[F(b)+C]-[F(a)+C]=F(b)-F(a),$$

یعنی، C در تشکیل تفاضل بین مقادیر پادمشتق در a و b حذف می‌شود. همچنین، باید توجه داشت‌که فرمول (۱)به ازای $b<a$ برقرار می‌ماند مشروط‌براینکه f بر $[a, b]$ پیوسته باشد، زیرا در این صورت داریم

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx = -[F(a)-F(b)] = F(b)-F(a).$$

در اینجا نمادگذاری دیگری مفید است. به‌ازای تابع $F(x)$ تعریف‌شده به‌ازای $x=a$ و $x=b$ ،

$$F(x)\Big|_a^b \quad \text{یا} \quad \Big[F(x)\Big]_a^b$$

تفاضل $F(b)-F(a)$ را نشان می‌دهد. بااین‌نماد می‌توان (۱)رافشرده‌تربه‌صورت‌زیرنوشت:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \Big[F(x)\Big]_a^b. \tag{۱'}$$

به‌علاوه، چون

$$\Big[F(x)\Big]_a^b = \Big[F(x)+C\Big]_a^b = \Big[\int f(x)\,dx\Big]_a^b,$$

می‌توان (۱') را به صورت زیر نوشت:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \Big[\int f(x)\,dx\Big]_a^b.$$

این صورت اخیر قضیهٔ اساسی حساب دیفرانسیل و انتگرال رابطهٔ بین انتگرالهای معین‌و نامعین f را خیلی صریح نشان می‌دهد.

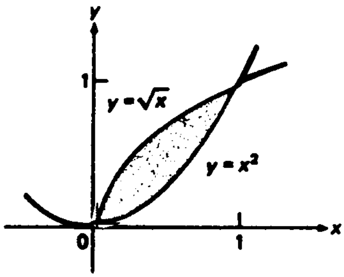
از فرمول (′۱) و فرمول (۴)، صفحه‌ٔ ۴۰۰، معلوم می‌شود که اگر r عدد گویایی مخالف $1-$ باشد،

$$\int_a^b x^r\,dx = \left[\frac{x^{r+1}}{r+1}\right]_a^b = \frac{b^{r+1}-a^{r+1}}{r+1}$$

اگر r را عدد صحیح مثبتی‌چون n بگیریم، فوراً" فرمول (۹)، صفحه‌ٔ ۳۷۵، به‌دست‌می‌آید که مدتی است آزادانه به کار برده می‌شود. اگر r منفی باشد، بازه‌ٔ $[a, b]$ (یا $[b, a]$ اگر $b < a$) نباید شامل نقطه‌ٔ $x = 0$ باشد، زیرا در غیر این صورت x^r بر $[a, b]$ پیوسته نبوده و قضیه‌ٔ ۶ به کار نخواهد رفت.

مثال ۱. مساحت بین منحنیهای $y = \sqrt{x}$ و $y = x^2$ را بیابید.

حل. ما در پی مساحت A ناحیه‌ٔ سایه‌دار شکل ۱۷ هستیم. برای یافتن مختصات x نقاط



شکل ۱۷

تقاطع منحنیها، معادله‌ٔ $\sqrt{x} = x^2$ را حل کرده دو ریشه‌ٔ $x = 0$ و $x = 1$ را به دست می‌آوریم. بنابراین،

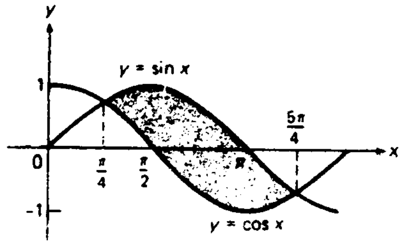
$$A = \int_0^1 (\sqrt{x} - x^2)\,dx,$$

زیرا $y = \sqrt{x}$ منحنی بالایی و $y = x^2$ منحنی پایینی بر بازه‌ٔ $[0, 1]$ می‌باشد. انتگرال‌را با استفاده از قضیه‌ٔ ۶ حساب می‌کنیم، خواهیم داشت

$$A = \left[\frac{2}{3}x^{3/2} - \frac{1}{3}x^3\right]_0^1 = \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}.$$

مثال ۲. مساحت‌بین‌منحنیهای $y = \sin x$ و $y = \cos x$ رااز $x = \pi/4$ تا $x = 5\pi/4$ بیابید.

حل. این بار مساحت A ی ناحیهٔ سایه‌دار شکل۱۸ را می‌خواهیم. چون $y = \sin x$ منحنی



شکل ۱۸

بالایی و $y = \cos x$ منحنی پایینی بر بازهٔ $[\pi/4, 5\pi/4]$ است، نتیجه می‌شود که

$$A = \int_{\pi/4}^{5\pi/4} (\sin x - \cos x)\,dx = \Big[-\cos x - \sin x\Big]_{\pi/4}^{5\pi/4}$$

$$= -\cos\frac{5\pi}{4} - \sin\frac{5\pi}{4} + \cos\frac{\pi}{4} + \sin\frac{\pi}{4} = \frac{4}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}.$$

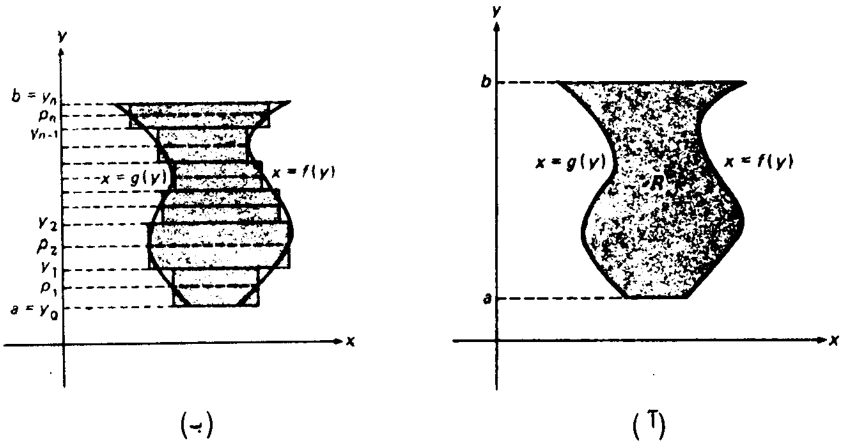
نکات دیگر راجع به مساحت بین دو منحنی. در مشخص کردن منحنیها اغلب شایسته‌است عرض y را متغیر مستقل و طول x را متغیر وابسته بگیریم؛ این عکس کاری است که تا بحال شده است. فرض‌کنیم $f(y)$ و $g(y)$ دوتابع پیوسته بر بازهٔ $a \le y \le b$ بوده، و $f(y) \ge g(y)$ در این صورت، خطوط افقی $y = a$ و $y = b$ و منحنیهای $x = f(y)$ و $x = g(y)$ مرز R را مثل شکل ۱۹ (آ) می‌سازند. با همان استدلال بخش ۳.۴. منتها در مورد نوارهای افقی به جای قائم، درمی‌یابیم که مساحت A ی ناحیهٔ R از فرمول زیر به دست می‌آید:

$$A = \int_a^b [f(y) - g(y)]\,dy. \tag{۳}$$

به‌طور مشروح، A را با مجموعی به شکل

$$\sum_{i=1}^{n} [f(p_i) - g(p_i)]\,\Delta y_i \tag{۴}$$

تقریب می‌کنیم که مبتنی بر افراز بازهٔ $[a, b]$ به n زیر بازهٔ $[y_{i-1}, y_i],\ i = 1, 2, \ldots, n$ است بـا $y_0 = a,\ y_n = b$ که $[y_{i-1}, y_i]$ به‌طول $\Delta y_i = y_i - y_{i-1}$ بوده و p_i نقطهٔ دلخواهی در $[y_{i-1}, y_i]$ می‌باشد. این تقریب نظیر تعویض نوارها به اضلاع خمیدهٔ شکل ۱۹ (ب) با مستطیلهای سایه‌دار است. در این صورت، A را حد مجموع (۴) می‌گیریم وقتی‌اندازهٔ مش



شکل ۱۹

$\mu = \max\{\Delta y_1, \Delta y_2, \ldots, \Delta y_n\}$ به صفر نزدیک شود :

$$A = \lim_{\mu \to 0} \sum_{i=1}^{n} [f(p_i) - g(p_i)]\, \Delta y_i = \int_a^b [f(y) - g(y)]\, dy.$$

البته ، فرمول (۳) با فرمول

$$A = \int_a^b [f(x) - g(x)]\, dx \tag{۳'}$$

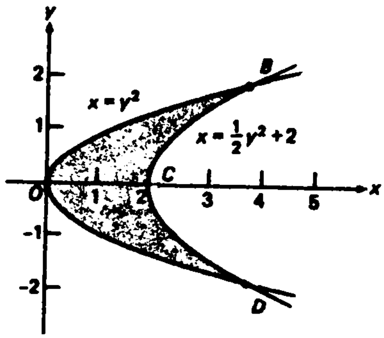
برای مساحت ناحیهٔ محدود به خطوط قائم $x = a$ و $x = b$ و منحنیهای $y = f(x)$ و $y = g(x)$ کـه $f(x) \geq g(x)$ کاملا" مشابه‌است ،و برای به دست آوردن یکی از آنهاازدیگری فقط کافی است x را با y یا y را با x عوض نماییم .

مثال ۳ . مساحت بین منحنیهای $x = y^2$ و $x = \frac{1}{2}y^2 + 2$ را بیابید .

حل . ما در پی مساحت A ی ناحیهٔ سایه‌دار در شکل ۲۰ هستیم که به منحنیهای‌داده‌شده که سهمیهای متقارنی نسبت به محور x هستند محدود است . مختصات y نقاط اشتراک سهمیها عبارتنداز ریشه‌های $y = 2$ و $y = -2$ معادلهٔ $y^2 = \frac{1}{2}y^2 + 2$. بنابراین ، طبق فرمول (۳) ،

$$A = \int_{-2}^{2} \left(\frac{1}{2}y^2 + 2 - y^2\right) dy = \int_{-2}^{2} \left(2 - \frac{1}{2}y^2\right) dy = \left[2y - \frac{1}{6}y^3\right]_{-2}^{2}$$

$$= 2(2) - \frac{1}{6}(2)^3 - 2(-2) + \frac{1}{6}(-2)^3 = \frac{16}{3}.$$



شکل ۲۰

چون ناحیهٔ سایه‌دار OBD نسبت‌به‌محور x متقارن است ، دو زیر ناحیهٔ OBC و ODC مساحت یکسان خواهند داشت . لذا ، محاسبات را می‌توان از ابتدا با نوشتن

$$A = 2\int_0^2 \left(2 - \frac{1}{2}y^2\right)dy = 2\left[2y - \frac{1}{6}y^3\right]_0^2$$
$$= 2\left[2(2) - \frac{1}{6}(2)^3\right] = \frac{16}{3} \qquad (۵)$$

ساده نمود .

اگر x را متغیر مستقل و y را متغیر وابسته بگیریم ، محاسبات پیچیده می‌شوند . حال باید بین چهار تابع ، یعنی $y = \pm\sqrt{x}$ که از حل $x = y^2$ نسبت به y به دست می‌آید و $y = \pm\sqrt{2x-4}$ که‌ازحل $x = \frac{1}{2}y^2 + 2$ نسبت به y حاصل می‌شود فرق‌بگذاریم .مجددا ، می‌توان با محاسبهٔ مساحت OBC و مضاعف کردن جواب زحمت کار را کم کرد .ولی‌مشکل جدیدی پیش می‌آید ، زیرا با آنکه $y = \sqrt{x}$ منحنی بالایی بر تمام بازهٔ $0 \le x \le 4$ است ، محورِ x منحنی پایینی بر زیربازهٔ $0 \le x \le 2$ و $y = \sqrt{2x-4}$ منحنی پایینی بر زیربازهٔ $2 \le x \le 4$ می‌باشد . با احتساب همهٔ اینها ، داریم

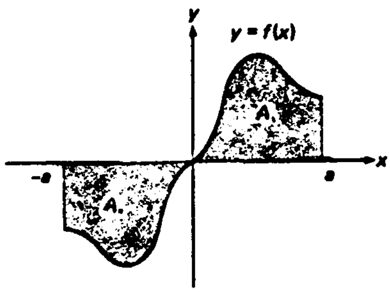
$$A = 2\int_0^2 \sqrt{x}\,dx + 2\int_2^4 (\sqrt{x} - \sqrt{2x-4})\,dx$$
$$= 2\left[\frac{2}{3}x^{3/2}\right]_0^2 + 2\left[\frac{2}{3}x^{3/2} - \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}(2x-4)^{3/2}\right]_2^4$$
$$= \frac{4}{3}(2)^{3/2} + \frac{4}{3}(4)^{3/2} - \frac{2}{3}(4)^{3/2} - \frac{4}{3}(2)^{3/2} = \frac{2}{3}(4)^{3/2} = \frac{2}{3}(8) = \frac{16}{3}.$$

عامل $\frac{1}{2}$ جلو $(2x-4)^{3/2}$ از کاربرد فرمول (۸) ، صفحهٔ ۴۰۲ ، ناشی شده است . طبیعی

است که همان جواب‌قبل برای A به‌دست‌می‌آید ،ولی این درمقایسهٔ (۵) مسلما "محاسباتی طولانی و دوری می‌باشدا

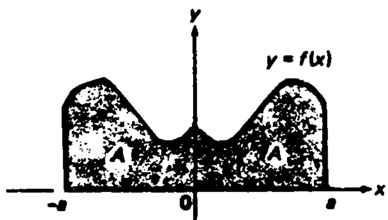
مسائل

۱. با استفاده از قضیهٔ اساسی حساب دیفرانسیل و انتگرال و مسئلهٔ ۱۳ ، صفحهٔ۴۰۷، نشان دهید که اگر f زوج باشد ، $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_0^a f(x)\,dx$ ، کـه معنی‌هندسی‌آن در شکل ۲۱ (آ) نموده شده است . همچنین، نشان دهید که اگر f فـرد باشـد ، $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0$ ،که معنی‌هندسی‌آن در شکل ۲۱ (ب) نموده‌شده‌است .فرض‌کنید f بر $[-a, a]$ پیوسته باشد .



$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = A_+ - A_- = 0$, since $A_+ = A_-$.

(ب)



$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = A + A = 2A = 2\int_0^a f(x)\,dx$.

(آ)

شکل ۲۱

۲. $[F(x) + G(x)]_a^b$ و $[F(x)G(x)]_a^b$ را برحسب $[F(x)]_a^b$ و $[G(x)]_a^b$ بیان نمایید .

انتگرالهای زیر را حساب کنید .

۳. $\int_0^2 (x^3 - 2x^2 + 3x - 4)\,dx$

۴. $\int_{-1}^1 (x^9 + 5x^8 + 10x^7)\,dx$

۵. $\int_2^1 \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3} + \frac{1}{x^4}\right)dx$

۶. $\int_1^9 (1 + \sqrt{s})\,ds$

۷. $\int_1^2 \left(3s^3 - \frac{5}{s^4}\right)ds$

۸. $\int_0^3 \frac{dt}{(2t+1)^2}$

۹. $\int_4^{16} \frac{1-t}{\sqrt{t}}\,dt$

۱۰. $\int_{-1}^{1} \frac{du}{(2-u)^3}$

۱۱. $\int_{1}^{27} u^{-2/3}\, du$

۱۲. $\int_{-8}^{1} (1+v^{2/3})\, dv$

۱۳. $\int_{1}^{4} (v^{3/2}-v^{1/2})\, dv$

۱۴. $\int_{0}^{\pi} (2+3\sin x)\, dx$

۱۵. $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} (2\cos x-1)\, dx$

۱۶. $\int_{0}^{\pi/2} \sin^2 x\, dx$

۱۷. $\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 x\, dx$

۱۸. $\int_{0}^{2\pi} \sin x \cos x\, dx$

۱۹. $\int_{0}^{\pi/3} \frac{dt}{\cos^2 t}$

۲۰. $\int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{du}{\sin^2 u}$

۲۱. $\int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{dv}{\sin^2 v \cos^2 v}$

۲۲. $\int_{-\pi}^{\pi} \sin^5 x\, dx$

۲۳. $\int_{-1}^{1} \sin^4 x \tan x\, dx$

۲۴. $\int_{\pi/4}^{3\pi/4} \frac{\cot x}{\sin x}\, dx$

۲۵. $\int_{0}^{\pi/4} \frac{\tan x}{\cos x}\, dx$

مساحت A ی ناحیهٔ R بین منحنیهای زیر را بیابید.

۲۶. $y=\sqrt{x}$ و $y=\sqrt[3]{x}$

۲۷. $y=x^3$ و $y=\sqrt[4]{x}\ \ (x\geq 0)$

۲۸. $y=x^{2/3}$ و $y=x^{3/2}$

۲۹. $x=3y+2$ و $x=2y^2$

۳۰. $x=-y^2$ و $x=4-2y^2$

۳۱. $x=4-y^2$ و $x=y^2+2y$

در هر حالت ناحیهٔ R را رسم کرده، و مسئله را به دو طریق حل کنید یکی با انتگرالگیری نسبت به x و دیگری باانتگرالگیری نسبت به y. (در مسائل ۲۹ تا ۳۱ انتگرالگیری‌نسبت به y مشکلی ندارد، ولی انتگرالگیری نسبت به x پیچیده است.)

۳۲. از برخورد منحنیهای $y=\sin x$ و $y=\sin 2x$ بر بازهٔ $[0, 2\pi]$ چهار ناحیه پدید می‌آیند. منحنیها را رسم کرده و مساحت A ی هر ناحیه را مشخص نمایید.

۳۳. از برخورد منحنیهای $y=\cos x$ و $y=\cos 2x$ بر بازهٔ $[0, 2\pi]$ سه ناحیه پدید می‌آیند. منحنیها را رسم کرده و مساحت A ی هر ناحیه را مشخص نمایید.

مقدار میانگین تابع داده شده را بیابید .

۳۴ . $f(x) = \sqrt{x}$ بر $[0, 4]$

۳۵ . $f(x) = 1/x^2$ بر $[-3, -1]$

۳۶ . $f(x) = \sin x$ بر $[0, \pi]$

۳۷ . $f(x) = \cos x$ بر $[0, 2\pi]$

۳۸ . $f(x) = \sin^2 x$ بر $[0, 2\pi]$

۳۹ . $f(x) = \sec^2 x$ بر $[-\pi/4, \pi/4]$

۴۰ . $f(x) = \sec x \tan x$ بر $[0, \pi/3]$

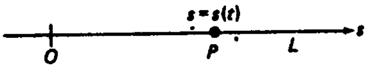
۴۱ . فرض کنید F پادمشتق f بر $[a, b]$ بوده ، و $a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$ در این صورت ،

$$\sum_{i=1}^{n} [F(x_i) - F(x_{i-1})] = F(b) - F(a), \qquad (\text{یک})$$

زیرا مجموع سمت چپ توی هم رواست . با استفاده از فرمول (یک) و قضیهٔ مقدار میانگین برای مشتقات (قضیهٔ ۲ ،صفحهٔ ۲۵۸) ، قضیهٔ اساسی حساب دیفرانسیل و انتگرال را مستقیما " ثابت کنید .

۶.۴ انتگرالگیری از تابع سرعت؛ معادلات دیفرانسیل

فرض کنیم $s = s(t)$ موضع ذرهٔ P در لحظهٔ t باشد که در امتداد خط مستقیم L حرکت می‌کند (ر.ک. شکل ۲۲) ، که مثل همیشه فرض می‌کنیم L دارای مبداء O ، جهت مثبت ،



شکل ۲۲

و واحد طول است . در این صورت ، سرعت (لحظه‌ای) $v = v(t)$ ذره در لحظهٔ t با مشتق زیر داده می‌شود :

$$v(t) = \frac{ds(t)}{dt} \qquad (1)$$

لذا ، تابع سرعت ذره با **مشتقگیری** از تابع موضع آن به دست می‌آید.به‌عکس، همانطور که مثالهای زیر نشان می‌دهند ، تابع موضع ذره را می‌توان با ***انتگرالگیری*** از تابع سرعت آن به دست آورد .

مثال ۱ . سرعت یک ذرهٔ متحرک در لحظهٔ t در امتداد خطی مستقیم مساوی است با

$$v = v(t) = 3t^2 - 2t + 4.$$

فاصلهٔ بین مواضع ذره در لحظات $t = 2$ و $t = 5$ را بیابید . سرعت متوسط ذره بین این دو لحظه چقدر است ؟

حل . با انتگرالگیری از طرفین معادلهٔ (۱) روی بازهٔ $[2, 5]$ ، معلوم می‌شود که

$$\int_2^5 v(t)\,dt = \int_2^5 \frac{ds(t)}{dt}\,dt = \Big[s(t)\Big]_2^5 = s(5) - s(2),$$

که در آن قضیهٔ اساسی حساب دیفرانسیل و انتگرال در مرحلهٔ دوم به کار رفته است . بنابراین ، $s(5) - s(2)$ ، یعنی فاصلهٔ بین مواضع ذره در لحظات $t = 2$ و $t = 5$ ، مساوی است با

$$\int_2^5 v(t)\,dt = \int_2^5 (3t^2 - 2t + 4)\,dt = \Big[t^3 - t^2 + 4t\Big]_2^5$$
$$= (125 - 25 + 20) - (8 - 4 + 8) = 120 - 12 = 108.$$

سرعت متوسط ذره بین این دو لحظه مساوی است با

$$\frac{s(5) - s(2)}{5 - 2} = \frac{108}{3} = 36.$$

مثال ۲ . تابع موضع $s = s(t)$ یک ذره با همان تابع سرعت مثال ۱ را درصورتی بیابید که $s(0) = 6$ ؛ یعنی ، اگر مختص موضع ذره در لحظهٔ $t = 0$ مساوی 6 باشد .

حل . از (۱) معلوم می‌شود که $s(t)$ پادمشتق $v(t)$ است ؛ و لذا ،

$$s(t) = \int v(t)\,dt = \int (3t^2 - 2t + 4)\,dt.$$

با محاسبهٔ انتگرال خواهیم داشت

$$s(t) = t^3 - t^2 + 4t + C, \qquad (۲)$$

که در آن برای تعیین ثابت انتگرالگیری C به اطلاعات بیشتر نیاز داریم . این اطلاعات با شرط $s(0) = 6$ داده‌شده‌است . در واقع ،با فرض $t = 0$ در (۲) نتیجه‌می‌شودکه $s(0) = C$ ؛ درنتیجه ، $C = 6$. با این C ، تابع موضع (۲) ذره به صورت زیر درمی‌آید :

$$s(t) = t^3 - t^2 + 4t + 6.$$

به‌طورکلی ، همواره می‌توان ثابت C را طوری اختیار کرد که در هر شرط $s(t_0) = s_0$ صدق نماید . با نوشتن (۱) به شکل

$$\frac{ds}{dt} = v(t), \tag{۳}$$

می‌توان مسئلهٔ تعیین تابع موضع با تابع سرعت معلوم را مسئلهٔ یافتن تابع $s = s(t)$ ی گرفت که در معادلهٔ (۳) و *شرط اولیهٔ*

$$s(t_0) = s_0 \tag{۳'}$$

صدق کند . استفاده از واژهٔ " اولیه " ناشی از این است که t_0 معمولا " ، ولی نه همیشه ، زمانی است که حرکت در آن شروع می‌شود .

معادلات دیفرانسیل مرتبهٔ اول . معادلهٔ (۳) **یک معادلهٔ** *دیفرانسیل مرتبهٔ اول* است (صفحهٔ ۲۲۷ را به یاد آورید) . این معادله از نوع ساده‌ای است که در آن طرف راست تابعی از متغیر مستقل است ولی از متغیر وابسته نیست . برای حل معادلهٔ (۳) ، یعنی یافتن تابعی چون $s = s(t)$ که‌آن را به اتحاد بدل کند ، از طرفین آن انتگرال می‌گیریم از این نتیجه می‌شود که

$$s = \int \frac{ds}{dt}\, dt = \int v(t)\, dt = V(t) + C, \tag{۴}$$

که در آن $V(t)$ پادمشتق $v(t)$ و C یک ثابت انتگرالگیری دلخواه است . ما (۴) را **جواب عمومی** معادلهٔ دیفرانسیل (۳) می‌نامیم ، زیرا هر جواب به ازای انتخابی از C به صورت (۴) است؛ این ناشی از آن است که $V(t) + C$ پادمشتق کلی $v(t)$ می‌باشد . همچنین ، جواب عمومی را به شکل

$$s = \int v(t)\, dt + C$$

می‌نویسیم با این فرض که در اینجا $\int v(t)\,dt$ یک پادمشتق *ثابت* $v(t)$ است . ما این قرارداد را در مسائلی که مستلزم معادلات دیفرانسیل‌اند رعایت خواهیم کرد . جوابهای معادلهٔ دیفرانسیل (۳) راکه‌به‌ازای مقادیر مختلف C به دست می‌آیند ***جوابهای خصوصی*** می‌نامند. C نوعا " طوری اختیار می‌شود که s در شرط اولیه‌ای چون ('۳) صدق کند .

همین اصطلاحات و روش حل ، بی‌توجه به معنی ملموس علمی متغیرهای مستقل و وابسته یا در غیاب هر چنین معانی ، به کار می‌روند . لذا ، معادلهٔ دیفرانسیل

$$y' = \frac{dy}{dx} = f(x), \tag{۵}$$

شامل تابع مجهول $y = y(x)$ و تابع معلوم $f(x)$ را درنظر می‌گیریم . برای حل (۵) تحت شرط

$$y(x_0) = y_0$$

(که هنوز هم *شرط اولیه* نام دارد) ، دقیقا " به همان روش عمل می‌کنیم . با مشتقگیری از (۵) به دست می‌آوریم

$$y = \int \frac{dy}{dx}\, dx = \int f(x)\, dx + C = F(x) + C, \tag{۶}$$

که در آن $F(x) = \int f(x)\, dx$ یک پاد مشتق‌ثابت $f(x)$ بوده‌و C یک ثابت انتگرالگیری دلخواه می‌باشد . این جواب عمومی (۵) است ، و جوابی **خصوصی** می‌خواهیم که در ('۵) صدق نماید . به آسانی معلوم می‌شود که این جواب با انتخاب $C = y_0 - F(x_0)$ به‌دست‌می‌آید.

مثال ۳ . جواب خصوصی معادلهٔ دیفرانسیل

$$y' = \frac{dy}{dx} = x, \tag{۷}$$

صادق در شرط اولیهٔ

$$y(1) = 2 \tag{۷'}$$

را پیدا کنید .

حل . ابتدا با انتگرالگیری جواب **عمومی** (۷) را می‌یابیم :

$$y = \int \frac{dy}{dx}\, dx = \int x\, dx + C = \frac{1}{2}x^2 + C.$$

حال برای تعیین ثابت انتگرالگیری C شرط ('۷) را اعمال کرده ، در جواب عمومی $y = \frac{1}{2}x^2 + C$ قرار می‌دهیم $x = 1,\ y = 2$ از این نتیجه می‌شود که

$$2 = \frac{1}{2} + C,$$

درنتیجه ، $C = \frac{3}{2}$ با انتخاب این مقدار C در جواب عمومی ، جواب خصوصی مطلوب (۷) به دست می‌آید :

$$y = \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2}.$$

صدق کردن این جواب در (۷) و ('۷) را می‌توان با محاسبه‌ای مستقیم به آسانی تحقیق

کرد .

معادلات دیفرانسیل مرتبهٔ دوم . ساده‌ترین معادلهٔ دیفرانسیل مرتبهٔ دوم عبارت‌است‌از

$$y'' = \frac{d^2y}{dx^2} = f(x). \tag{۸}$$

با انتگرالگیری از (۸) به دست می‌آوریم

$$y' = \frac{dy}{dx} = \int \frac{d^2y}{dx^2}\,dx = \int f(x)\,dx + C_1 = F(x) + C_1, \tag{۹}$$

که در آن $F(x) = \int f(x)\,dx$ پادمشتق ثابتی از $f(x)$ بوده و C_1 ثابت انتگرالگیری دلخواهی است . ملاحظه می‌کنید که (۹) یک معادلهٔ دیفرانسیل مرتبهٔ *اول* است و در واقع به شکل (۵) می‌باشد . با انتگرالگیری از (۹) به دست می‌آوریم

$$y = \int \frac{dy}{dx}\,dx = \int [F(x) + C_1]\,dx + C_2 = \int F(x)\,dx + C_1x + C_2,$$

که در آن C_2 ثابت انتگرالگیری دیگری می‌باشد . لذا ، جواب **عمومی** معادلهٔ دیفرانسیل (۸) شامل دو ثابت‌دلخواه‌است ،و این ویژگی مشخص جواب عمومی یک‌معادلهٔ دیفرانسیل **مرتبهٔ دوم** است . از اینرو ، برای جداکردن یک جواب **خصوصی** (۸) باید دو شرط اولیه اعمال کنیم ، زیرا با این کار دو معادلهٔ جبری به دست می‌آیند که می‌توان آنها را نسبت به ثابتهای C_1 و C_2 حل کرد .

مثال ۴ . جواب خصوصی معادلهٔ دیفرانسیل

$$y'' = \frac{d^2y}{dx^2} = x \tag{۱۰}$$

صادق در شرایط اولیهٔ

$$y(1) = \frac{1}{2}, \qquad y'(1) = -\frac{1}{2} \tag{۱۰'}$$

را بیابید .

حل . توجه کنید که یک شرط اولیه مستلزم تابع $y = y(x)$ است ، حال آنکه دیگری مستلزم مشتقش y' می‌باشد . با دوبار انتگرالگیری از (۱۰) نسبت به x ، ابتدا به‌دست می‌آوریم

$$y' = \frac{dy}{dx} = \int x\,dx + C_1 = \frac{1}{2}x^2 + C_1, \tag{۱۱}$$

و سپس به دست می‌آوریم

$$y = \int \frac{1}{2} x^2\,dx + \int C_1\,dx + C_2 = \frac{1}{6} x^3 + C_1 x + C_2. \qquad (۱۲)$$

و با اعمال شرایط اولیهٔ (۱۰′) ، یعنی فرض $x = 1,\ y' = -\frac{1}{2}$ در (۱۱) و $x = 1,\ y = \frac{1}{2}$ در (۱۲) ، درمی‌یابیم که

$$\frac{1}{2} + C_1 = -\frac{1}{2},$$

$$\frac{1}{6} + C_1 + C_2 = \frac{1}{2}.$$

سپس، با حل نسبت به C_1 و C_2 خواهیم داشت

$$C_1 = -1, \qquad C_2 = \frac{4}{3}.$$

بالاخره، باگذاردن این C_1 و C_2 در (۱۲) ، جواب خصوصی مطلوب (۱۰) صادق در شرایط اولیهٔ (۱۰′) به دست می‌آید :

$$y = \frac{1}{6} x^3 - x + \frac{4}{3}$$

(این را با محاسبهٔ مستقیم امتحان کنید) .

مسئلهٔ یافتن جواب یک معادلهٔ دیفرانسیل صادق در شرایط اولیهٔ مشخصی مثل مثالهای ۲ تا ۴ را یک ***مسئلهٔ مقدار اولیه*** می‌نامند .

مثال ۵. جواب خصوصی معادلهٔ دیفرانسیل (۱۰) صادق در شرایط

$$y(0) = 1, \qquad y(1) = 2, \qquad (۱۰'')$$

به جای شرایط اولیهٔ (۱۰′) را بیابید .

حل. توجه کنید که به جای گذاردن یک شرط بر تابع y و شرطی دیگر بر مشتقش y' در همان نقطه، دو شرط در دو نقطهٔ مختلف بر y می‌گذاریم . درنتیجه، شرایط (۱۰″) ***شرایط مرزی*** نام دارند، و ما اکنون به جای مسئلهٔ مقدار اولیه یک ***مسئلهٔ مقدار مرزی*** را حل می‌کنیم . برای اعمال شرایط مرزی (۱۰″) ، ابتدا در جواب عمومی (۱۲) قرار می‌دهیم $x = 0,\ y = 1$ و سپس قرار می‌دهیم $x = 1,\ y = 2$. با این کار دو معادله به دست

می‌آیند که ثابتهای انتگرالگیری C_1 و C_2 در آن صدق می‌کنند:

$$C_2 = 1,$$

$$\frac{1}{6} + C_1 + C_2 = 2.$$

با حل نسبت به C_1 و C_2 معلوم می‌شود که

$$C_1 = \frac{5}{6}, \qquad C_2 = 1,$$

و، با گذاردن این C_1 و C_2 در (۱۲)، جواب خصوصی مطلوب (۱۰) صادق درشرایط مرزی ("۱۰) به دست می‌آید:

$$y = \frac{1}{6}x^3 + \frac{5}{6}x + 1.$$

مسائل

۱. فرض کنید $s = s(t)$ تابع موضع و $v = v(t)$ تابع سرعت یک ذرهٔ متحرک در امتداد خطی مستقیم باشد. در این صورت، سرعت متوسط روی بازهٔ $[a, b]$ مساوی است با

$$v_{av} = \frac{1}{b-a}\int_a^b v(t)\,dt$$

اگر از تعریف متوسط در صفحهٔ ۳۹۰ استفاده شود، و

$$v_{av} = \frac{s(b) - s(a)}{b-a}$$

اگر از تعریف قبلی در صفحهٔ ۱۷۱ استفاده کنیم. نشان دهید که این دو تعریف معادلند.

با شروع در لحظهٔ $t = 0$، یک ذره در امتداد خطی مستقیم با سرعت

$$v(t) = 20\left(1 - \frac{1}{\sqrt{t+1}}\right)\text{cm/sec}$$

در حرکت است.

۲. ذره در 15 sec اول چه مسافتی می‌پیماید، و سرعت متوسط آن روی این بازه چقدر است؟

۳. ذره در 2 min اول چه مسافتی می‌پیماید، و سرعت متوسط آن روی این بازه چقدر است؟

۴. فرض کنید $v_{av}(T)$ سرعت متوسط ذره روی بازهٔ $[0, T]$ باشد. چرا تقریب $v_{av}(T) \approx v(T)$

به ازای T بزرگ مناسب است؟ $v_{av}(T)$ را با $v(T)$ به ازای $T = 15\ \text{min}$ مقایسه کنید.

اتومبیلی از حال سکون شروع به حرکت کرده و ظرف t ثانیه به

$$v(t) = 75\left(1 - \frac{100}{(t+10)^2}\right)\text{mph}$$

می‌رسد.

۵. اتومبیل در 30 sec اول چه مسافتی می‌پیماید، و سرعت متوسط آن در این بازه چقدر است؟

۶. اتومبیل در 90 sec اول چه مسافتی می‌پیماید، و سرعت متوسط آن در این بازه چقدر است؟

۷. فرض کنید $v_{av}(T)$ سرعت متوسط اتومبیل در بازهٔ $[0, T]$ باشد. چرا تقریب $v_{av}(T) \approx v(T)$ به ازای T بزرگ مناسب است؟ $v_{av}(T)$ را با $v(T)$ به ازای $T = 10\ \text{min}$ مقایسه کنید.

۸. نشان دهید که جواب خصوصی معادلهٔ دیفرانسیل $y' = f(x)$ صادق در شرط اولیهٔ $y(x_0) = y_0$ را می‌توان به شکل زیر نوشت:

$$y = \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt + y_0.$$

جواب خصوصی معادلهٔ دیفرانسیل مرتبهٔ اول داده شده که در شرط اولیهٔ ذکر شده صدق کند را بیابید.

۹. $y' = 2x,\ y(2) = 1$

۱۰. $x^2y' = 1,\ y(1) = 2$

۱۱. $y' = x(x-1),\ y(3) = \frac{1}{2}$

۱۲. $y' = \sqrt{x},\ y(0) = 3$

۱۳. $y' = 3x^2 + \cos x,\ y(\pi) = 2$

۱۴. $y' = 2\cos^2 x + \sin 2x,\ y(0) = -2$

جواب خصوصی معادلهٔ دیفرانسیل مرتبهٔ دوم داده شده که در شرایط اولیه یا شرایط مرزی ذکر شده صدق کند را بیابید.

۱۵. $y'' = x(x+1),\ y(1) = 0,\ y'(1) = 1$

۱۶. $(x+1)^3y'' = 1,\ y(0) = 1,\ y'(0) = -1$

۱۷. $\sqrt{x}\,y'' = 1,\ y(4) = 2,\ y'(4) = 0$

۱۸. $y'' = \sin x,\ y(0) = -1,\ y'(0) = 3$

۱۹. $x^3y'' = 3,\ y(2) = -1,\ y(3) = 1$

۲۰. $y'' = x^2 + x + 1,\ y(-1) = 0,\ y(1) = 3$

۲۱. جواب خصوصی معادلهٔ دیفرانسیل

$$y' + \frac{y}{x} = \frac{\sin x}{x}$$

صادق در شرط اولیهٔ $y(\pi/2) = 0$ را بیابید .

۷.۴ مکانیک نیوتنی؛ انرژی جنبشی و کار

حال به کمک انتگرالگیری از ایده‌های فیزیکی سیر اسحق نیوتن استفاده کرده و حرکت در امتداد یک خط مستقیم (حرکت مستقیم‌الخط) را به تفصیل بررسی می‌کنیم . مانند بخش پیش، فرض کنیم $s = s(t)$ موضع یک ذرهٔ متحرک به جرم m در لحظه t در امتداد خط L باشد . همانطور که می‌دانیم ، سرعت $v = v(t)$ و شتاب $a = a(t)$ ذره‌بامشتقات زیر داده شده‌اند :

$$v = \frac{ds}{dt}, \qquad a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2}.$$

فرض کنیم نیروی F دراستداد L برذره وارد شود . در این صورت ، **قانون دوم حرکت نیوتن**، که در صفحهٔ ۲۲۶ به صورت مقدماتی مطرح شد ، به ما می‌گوید که

$$m\frac{d^2s}{dt^2} = F \tag{۱}$$

(جرم ضربدر شتاب مساوی نیروی اعمال شده است) . لذا ، با معلوم بودن F ، موضع ذره به عنوان تابعی از زمان را می‌توان با حل معادلهٔ دیفرانسیل مرتبهٔ دوم (۱) تحت شرایط اولیهٔ مناسبی تعیین کرد . مثالهای زیر طرز انجام این کار را نشان می‌دهند .

مثال ۱ . حرکت آزاد یک ذره ، یعنی حرکت در غیاب نیروی خارجی ، را بیابید .

حل . در این حالت نیرویی وجود ندارد؛ درنتیجه ، در (۱) $F \equiv 0$. بنابراین ، پس از حذف جرم که نقشی در اینجا ندارد ،

$$a = \frac{d^2s}{dt^2} = 0.$$

اگر از این معادلهٔ دیفرانسیل دوبار انتگرال بگیریم ، ابتدا داریم

$$v = \int \frac{dv}{dt}\,dt = \int a\,dt = \int 0\,dt = C_1, \tag{۲}$$

و سپس خواهیم داشت

$$s = \int \frac{ds}{dt}\,dt = \int v\,dt = \int C_1\,dt + C_2 = C_1t + C_2. \tag{۲'}$$

برای تعیین ثابتهای انتگرالگیری C_1 و C_2 ، شرایط اولیهٔ

$$s(0) = s_0, \qquad v(0) = v_0$$

را اعمال می‌کنیم که در آنها s_0 و v_0 موضع و سرعت ذره در لحظهٔ اولیه است که برای راحتی $t = 0$ گرفته می‌شود . با گذاردن $t = 0, v = v_0$ در (۲) و $s = s_0$ ، $t = 0$ در (۲)، معلوم می‌شود که $C_1 = v_0, C_2 = s_0$. از اینرو، (۲) و (′۲) به صورت

$$v = v_0$$

و

$$s = v_0 t + s_0$$

درمی‌آیند ، که در آن می‌بینید که اگر $v_0 = 0$ ، s مقدار ثابت s_0 را خواهد داشت . لذا ، اگر نیروی خارجی وارد نشود ، یک جسم درحالت سکون $(v_0 = 0)$ ساکن می‌ماند ،و یک‌جسم متحرک $(v_0 \neq 0)$ با سرعت ثابت به حرکت ادامه می‌دهد . این صورت یک بعدی **قانون اول حرکت نیوتن** است که در مسئلهٔ ۳۱، صفحهٔ ۱۱۹۵ ،بیشتر مورد بحث قرار می‌گیرد .

مثال ۲ . سنگی به جرم m از یک برج بلند یا به‌داخل یک‌چاه‌عمیق‌خشک‌افتاده‌است .حرکت سنگ را پیدا کنید .

حل. سنگ را یک ذره گرفته و از اندازه‌اش صرف‌نظر می‌کنیم . فرض‌کنیم $s = s(t)$ موضع سنگ باشد که در امتداد یک محور قائم سنجیده می‌شود که جهت مثبتش به پایین بوده و مبداٴ O در موضع اولیهٔ سنگ است (ر.ک. شکل ۲۳) . همانطور که در فیزیک دیده‌ایم ، نیروی وارد بر سنگ وزن آن است که مساوی است با

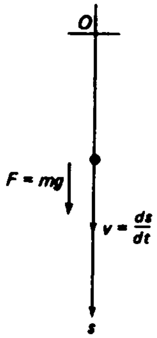
$$F = mg,$$

که در آن g شتاب جاذبه (تقریبا " $32\ \mathrm{ft/sec^2}$ یا $9.8\ \mathrm{m/sec^2}$) بوده[1] ، و از مقاومت هوا صرف‌نظر می‌شود . با این F ، قانون دوم نیوتن (۱) به صورت زیر درمی‌آید :

$$m\frac{d^2s}{dt^2} = mg,$$

---

۱ . *لذا ، برای به‌دست‌آوردن جرم یک جسم از وزن آن ، باید وزن بر* g *تقسیم شود .واحد انگلیسی جرم پوند ، که نیروست ، نیست بلکه* **اسلاگ** *است و آن جرم جسمی است که وقتی نیروی 1 پوند بر آن وارد می‌شود شتاب* $1\ \mathrm{ft/sec^2}$ *می‌یابد . بنابراین ،وزن 1 پوند جرمی حدود* $\frac{1}{32}$ *اسلاگ داشته ، و جرم 1 اسلاگ وزنی حدود 32 پوند خواهد داشت .*



شکل ۲۳

یا ، پس از تقسیم بر m ،

$$a = \frac{d^2s}{dt^2} = g, \tag{۳}$$

معادلهٔ دیفرانسیل (۳) می‌گوید که شتاب a دارای مقدار ثابت g است . اگر از (۳) دوبار انتگرال بگیریم ، ابتدا به دست می‌آوریم

$$v = \int \frac{dv}{dt}\, dt = \int a\, dt = \int g\, dt + C_1 = gt + C_1, \tag{۴}$$

و سپس

$$s = \int \frac{ds}{dt}\, dt = \int v\, dt = \int (gt + C_1)\, dt + C_2 = \frac{1}{2} gt^2 + C_1 t + C_2. \tag{۴'}$$

این بار شرایط اولیه عبارتند از

$$s(0) = 0, \qquad v(0) = 0,$$

زیرا سنگ از مبداء افتاده است (یعنی ، با سرعت اولیهٔ صفر رها شده است) . با قرار دادن $t = 0, v = 0$ در (۴) و $t = 0, s = 0$ در (۴') ،فورا" معلوم می‌شود که $C_1 = C_2 = 0$ بنابراین ،

$$v = gt \tag{۵}$$

و

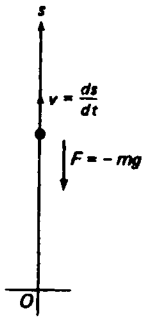
$$s = \frac{1}{2} gt^2, \tag{۵'}$$

دست کم تا وقتی سنگ به زمین یا ته چاه بخورد . هرگاه s به فوت و t به ثانیه باشد، آنگاه همانطور که در مثال ۶ ، صفحهٔ ۶۹ ، پیش‌بینی شد ، $s \approx 16t^2$.

مثال ۳. حرکت سنگی را بیابید که با سرعت اولیهٔ v_0 به طور قائم به بالا پرتاب شده است.

حل. در اینجا طبیعی‌تر است که موضع s سنگ را در امتداد محور قائمی بسنجیم که جهت مثبتش به *بالا* باشد (و مبداء در موضع اولیهٔ سنگ باشد)، زیرا در این صورت، مثل مثال قبل، s مجدداً نامنفی‌است. این جهت مثبت موجب‌تغییر g به $-g$ در (۴) و (۴′) می‌شود، زیرا نیروی ثقل روبه پایین می‌باشد (ر.ک. شکل ۲۴). حال شرایط اولیه به صورت زیر درمی‌آیند:

$$s(0) = 0, \qquad v(0) = v_0.$$



شکل ۲۴

با قراردادن $t = 0, v = v_0$ در (۴) و $t = 0, s = 0$ در (۴′)، معلوم می‌شود که $C_1 = v_0$ و $C_2 = 0$. لذا، (۴) و (۴′) در این حالت پس از تعویض g به $-g$ به صورت

$$v = v_0 - gt \tag{۶}$$

و

$$s = v_0 t - \frac{1}{2} g t^2 \tag{۶′}$$

تحویل می‌شوند.

تعریف انرژی جنبشی و کار. حال نشان می‌دهیم که چگونه مفاهیم انرژی جنبشی و کار در مکانیک نیوتنی ظاهر می‌شوند. فرض‌کنیم ذره‌ای به جرم m که در خطی مستقیم حرکت‌می‌کند تحت اثر نیروی (خالص) $F = F(s)$ که تابع پیوسته‌ای از موضع s آن است قرار گیرد

در این صورت، طبق قانون دوم نیوتن،

$$ma = m\frac{dv}{dt} = F(s),$$

یا، اگر سرعت v را تابعی از s به جای t بگیریم (در اینجا فرض است که v علامت ثابت دارد؛ درنتیجه، ذره فقط در یک جهت حرکت می‌کند)، بنابرقاعدهٔ زنجیره‌ای،

$$m\frac{dv}{ds}\frac{ds}{dt} = mv\frac{dv}{ds} = F(s), \tag{۷}$$

فرض کنیم

$$v_0 = v(s_0), \qquad v_1 = v(s_1)$$

سرعت ذره در دو موضع مختلف s_0 و s_1 باشد. در این صورت، با انتگرالگیری از (۷) نسبت به s از s_0 تا s_1، به دست می‌آوریم

$$\int_{s_0}^{s_1} mv\frac{dv}{ds}\,ds = \int_{s_0}^{s_1} \frac{d}{ds}\left(\frac{1}{2}mv^2\right)ds = \int_{s_0}^{s_1} F(s)\,ds,$$

و لذا،

$$\left[\frac{1}{2}mv^2\right]_{s_0}^{s_1} = \frac{1}{2}mv_1^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 = \int_{s_0}^{s_1} F(s)\,ds. \tag{۸}$$

به عبارت دیگر، بر اثر نیرو، کمیت

$$K = \frac{1}{2}mv^2,$$

که *انرژی جنبشی* ذرهٔ متحرک نام دارد، به اندازهٔ

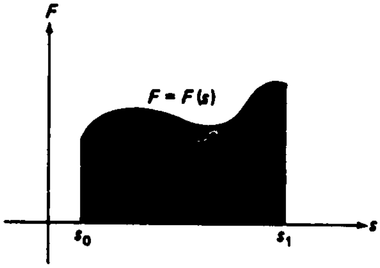
$$W = \int_{s_0}^{s_1} F(s)\,ds \tag{۹}$$

تغییر می‌کند. کمیت (۹) *کار* انجام شده توسط نیرو بر ذره در حرکت از موضع $s = s_0$ تا موضع $s = s_1$ است. واضح است که W چیزی جز مساحت تحت منحنی $F = F(s)$ از $s = s_0$ تا $s = s_1$ نیست (ر.ک. شکل ۲۵).

مثال ۴. در غیاب نیرو داریم $F \equiv 0$ و کار (۹) مساوی صفر می‌باشد. در این صورت، (۸) به

$$\frac{1}{2}mv_1^2 = \frac{1}{2}mv_0^2 \tag{۱۰}$$

تحویل می‌شود؛ درنتیجه، انرژی جنبشی تغییر نمی‌کند یا، به زبان فیزیک، **حفظ می‌شود**.
این اصلا" تعجب‌آور نیست، زیرا قبلا" از مثال ۱ می‌دانیم که اگر $F \equiv 0$، $v_1 = v_0$.



شکل ۲۵

مثال ۵. اگر $F(s)$ دارای مقدار ثابت F باشد، فرمول (۹) به صورت زیر درمی‌آید:

$$W = \int_{s_0}^{s_1} F(s)\,ds = F\int_{s_0}^{s_1} ds = F\cdot(s_1 - s_0). \tag{11}$$

لذا، کار در این حالت مساوی حاصلضرب نیروی F در "تغییر مکان" $s_1 - s_0$ است. گاهی فرض می‌شود که کار انجام شده توسط یک نیروی ثابت مساوی حاصلضرب نیرو در تغییر مکان است. در این صورت، **تعریف** طبیعی کار انجام شده توسط نیروی متغیر $F(s)$ مساوی انتگرال (۹) می‌شود. لازم نیست برای این دلیل بیاوریم، که اساسا" همان دلیل آمده در بخش ۲.۴ برای تعریف مساحت تحت یک منحنی است.

مثال ۶. اگر $F = mg,\ s_0 = 0,\ v_0 = 0$، مثل مثال ۲، مسئلهٔ سنگ افتان را داریم. در این صورت، از (۱۱) نتیجه می‌شود که $W = mgs_1$ و (۸)، پس از حذف 1 دوبار، به صورت زیر تحویل می‌شود:

$$\frac{1}{2}mv^2 = mgs.$$

با حل این معادله نسبت به v، به دست می‌آوریم

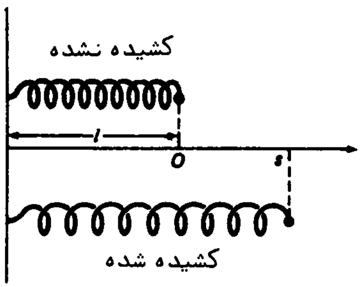
$$v = \sqrt{2gs}. \tag{12}$$

همین نتیجه را می‌توان با حذف t از فرمولهای (۵) و ('۵) به دست آورد، ولی در اینجا از مفاهیم کار و انرژی جنبشی برای یافتن رابطهٔ بین سرعت سنگ و موضعش، بدون یافتن

یکی برحسب زمان، استفاده شده است. مثلا"، با صرف‌نظر کردن از مقاومت هواوانتخاب $g = 32\ \text{ft/sec}^2$ ، از (۱۲) نتیجـه می‌شودکه‌سرعت‌سنگی‌که $400\ \text{ft}$ سقوط‌کرده مساوی‌است با

$$v = \sqrt{2(32)(400)} = 160\ \text{ft/sec}.$$

قانون هوک[1] . فرض‌کنیم یک فنر " طبیعی " (**یعنی**، کشیده نشده) به طول l ازیک‌طرف بسته شده باشد . در این صورت ، طبق **قانون هوک**، برای افزایش طول فنر از l بـه $l + s$ باید نیروی $F = ks$ را بر انتهای آزاد آن اعمال کرد . در اینجا k ثابت مثبتی است که سفتی یا *ثابت فنر* نام دارد . قانون هوک به ازای s های منفی، نظیر انقباض بـه جـای انبساط فنر، نیز کار می‌کند . با اینحال، دقت قانون هوک به ازای $|s|$ های خیلی‌بزرگ از بین می رود. فرض‌کنیم P انتهای آزاد فنر بوده، و مبداء O و جهت مثبت محور s را طبق شکل ۲۶ اختیار می‌کنیم ؛ درنتیجه، اگر فنر کشیده نشده باشد، P در O می‌باشد .این یک



شکل ۲۶

انتخاب منطقی است، زیرا انبساط طولی s را مساوی مختص P می‌سازد . در این صورت، نیروی " خارجی " $F = ks$ لازم است تا P را در نقطهٔ s نگهدارد، و بنابر (۹) ، کـار انجام شده توسط این نیرو بر P در حرکت از $s = s_0$ تا $s = s_1$ مساوی است با

$$W = \int_{s_0}^{s_1} F\,ds = \int_{s_0}^{s_1} ks\,ds = \frac{1}{2}k(s_1^2 - s_0^2) \qquad (۱۳)$$

(P را یک ذره تصور کنید) . در عین حال، کاربرد نیروی خارجی F یک *نیروی‌بازگردان الاستیک* مساوی و مخالف $-F = -ks$ در فنر ایجاد می‌کند ،و کار این نیرو بر P چیزی جز

---

1. *Hooke*

قرینهٔ (۱۳) نیست .

مثال ۷. فرض کنیم برای کشیدن یک فنر به اندازهٔ **6 in** بیش از طول طبیعی‌اش **2 ft** نیرویی برابر **10 lb** لازم باشد . کار W انجام شده در کشیدن فنر از طول **3 ft** به طول **4 ft** را در صورتی بیابید که قانون هوک برای انبساطهای طولی در این حد معتبر باشد .

حل. چون نیروی **10 lb** به اندازه **0.5 ft** به طول طبیعی فنر می‌افزاید ، داریم $0.5k = 10$ ؛ و لذا ، $k = 20$ lb/ft . انبساط طولی وقتی طول فنر **3 ft** باشد $3 - 2 = 1$ ft و وقتی طولش **4 ft** باشد $4 - 2 = 2$ ft می‌باشد ؛ درنتیجه ، $s_0 = 1, s_1 = 2$. پس از (۱۳) نتیجه می‌شود که

$$W = \frac{1}{2}k(s_1^2 - s_0^2) = \frac{1}{2}(20)(2^2 - 1^2) = \text{30 فوت – پوند}$$

ثقل و سرعت فرار. در مثال زیر از مفاهیم کار و انرژی جنبشی برای حل مسئلهٔ مهم پرواز فضایی استفاده می‌کنیم .

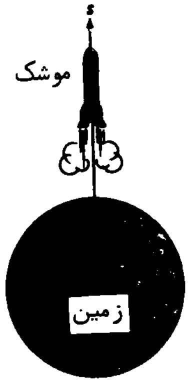
مثال ۸. با چه سرعت v_0 باید موشکی به‌طور قائم به بالا پرتاب شود تا کاملا" از جاذبهٔ ثقلی زمین فرار نماید ؟

حل. بنابر *قانون ثقلی نیوتن* ، نیرویی که موشک را به زمین جذب می‌کند از *قانون عکس مجذور*

$$F = F(s) = -\frac{GMm}{s^2} \qquad (۱۴)$$

به دست می‌آید ، که در آن G یک ثابت مثبت به نام ***ثابت ثقلی عمومی*** بوده ، M جرم زمین m جرم موشک ، و s فاصلهٔ بین موشک (به عنوان یک ذره) و مرکز زمین است . انتخاب محور s که مبداء O آن مرکز زمین است در شکل ۲۷ نموده شده است . البته ، " به‌طور قائم به بالا " می‌تواند به معنی دورشدن از زمین در امتداد هر خط دیگر ماربر مرکز زمین نیز باشد . علامت منها در (۱۴) مبین آن است که نیروی ثقل *جاذب* بوده و موشک را به‌زمین باز می‌خواند .

کار انجام شده توسط نیروی زمین بر موشک پس از آنکه موشک سطح زمین را ترک‌کرده



شکل ۲۷

و مسافتی را می‌پیماید با انتگرال زیر داده می‌شود :

$$W = \int_{s_0}^{s_1} F(s)\,ds = -\int_{s_0}^{s_1} \frac{GMm}{s^2}\,ds = \left[\frac{GMm}{s}\right]_{s_0}^{s_1} = \frac{GMm}{s_1} - \frac{GMm}{s_0},$$

که در آن s_0 مساوی R ، یعنی شعاع زمین ، بوده و s_1 عدد بسیار بزرگی می‌باشد . بنابراین، پس از حذف عدد کوچک قابل چشم‌پوشی GMm/s_1 ،

$$W = -\frac{GMm}{R}. \tag{۱۵}$$

کار W مساوی تغییر

$$\frac{1}{2}mv_1^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 \tag{۱۶}$$

در انرژی جنبشی موشک است در پیمودن از سطح زمین تا نقطهٔ دور (v_0 سرعت اولیـه و v_1 سرعت نـهایی موشک می‌باشد) . چون طالب کوچکترین مقداری از v_0 هستیم که‌به‌موشک اجازهٔ فرار از ثقل زمین را بدهد ، v_1 را مساوی صفر می‌گیریم ؛ درنتیجه ، موشک وقتی به نقطهٔ دور می‌رسد انرژی اولیهٔ خود راکاملا "مصرف‌کرده‌است" . با متحد گرفتن (۱۵) و (۱۶) به ازای $v_1 = 0$ ، به دست می‌آوریم

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{GMm}{R}.$$

لذا ، v_0 از فرمول زیر به دست می‌آید :

$$v_0 = \sqrt{\frac{2GM}{R}}, \tag{۱۷}$$

که مستقل از جرم موشک است .

برای محاسبهٔ (۱۷) ، ملاحظه می‌کنیم که ، بنابر (۱۴) ، نیروی وارد بر موشک در سطح زمین مساوی $-GMm/R^2$ است و برحسب ثابت g ، یعنی شتاب ثقل که در مسائل مربوط به ثقل در یا مجاور سطح زمین نقش دارد ، مساوی $-mg$ می‌باشد . بنابراین؛ $-GMm/R^2 = -mg$، یا ، معادلاً ،

$$\frac{GM}{R} = gR. \tag{۱۸}$$

به کمک این فرمول می‌توان v_0 را بدون اطلاع از جرم زمین یا موشک حساب کرد . در واقع ، با گذاردن (۱۸) در (۱۷) ، به دست می‌آوریم

$$v_0 = \sqrt{2gR}. \tag{۱۹}$$

چون با تقریب مناسب $R = 3960$ miles و $g = 32$ ft/sec^2 بالاخره خواهیم داشت

$$v_0 = \sqrt{\frac{2(32)(3960)}{5280}} \approx 6.9 \text{ mi/sec}$$

(1 mi = 5280 ft) . کمیت v_0 را معمولا " سرعت *فرار* برای زمین می‌نامند ، اگرچه دقیقتر آن است که بگوییم این تندی فرار از سطح زمین است[1] . موشکی که با تندی کمتر از v_0 به بالا پرتاب شود مآلا " باید به زمین برگردد مگر آنکه جسم سماوی دیگری آن را جذب نماید .

مسائل

۱. حرکت ذره‌ای به جرم m را درصورتی بیابید که نیروی ثابت F بر آن اثر کرده و ذره در ابتدا در نقطهٔ $s = 0$ در حال سکون باشد .

۲. ذره‌ای به جرم m تحت اثر نیروی ثابت F حرکت می‌کند . فرض کنید موضع ذره در لحظهٔ $t = t_0$ مساوی $s = s_0$ باشد . ذره در لحظهٔ $t = t_0$ چه سرعت v_0 ی باید داشته باشد تا درلحظهٔ $t = t_1$ به نقطهٔ $s = s_1$ برسد ؟

۳. حرکت ذره‌ای به جرم m را بیابید که تحت اثر نیروی $F = kt$ است که با زمان سپری شده از لحظهٔ شروع متناسب بوده و ذره با سرعت اولیهٔ v_0 از نقطهٔ $s = 0$ شروع به

---

۱. *این عدم دقت در تمایز بین سرعت و تندی (قدرمطلق سرعت) در مطالعهٔ حرکت در امتداد خط ، که دو کمیت حداکثر در علامت فرق دارند ، کلیت دارد . در حرکت در ابعاد دو و سه این تمایز باید بدقت مراعات گردد (ر.ک. فصلهای ۱۱ و ۱۲) .*

حرکت کرده باشد .

۴ . کدام انرژی جنبشی بیشتری دارد ، یک گلولهٔ 1 اونسی که با سرعت 500 mph حرکت می‌کند یا یک کامیون 10 تنی که سرعتش 1 mph است ؟ اگر سرعت گلوله 600 mph باشد ، جواب چیست ؟

۵ . دو ذره از حال سکون شروع به حرکت کرده و یکی دوبرابر دیگری سرعت دارد . اگر کار انجام شده بر هر دو یکی باشد ، در باب جرمهای آنها چه می‌شود گفت ؟

۶ . کدام کار بیشتری علیه ثقل انجام می‌دهند ، زنی که یک وزنهٔ 2.5 پوندی را مدت 1 دقیقه با دست نگهداشته یا مردی که از پله‌ها بالا می‌رود ؟

۷ . بر ذره‌ای به جرم m که ابتدا در حال سکون است نیروی $F = 5 \cos 2t$ وارد می‌شود . ماکزیمم انرژی جنبشی ذره چیست ؟

۸ . فرض کنید نیروی 15 lb یک فنر را به اندازهٔ 2 in بیشتر از طول طبیعی‌اش که 8 in است بکشاند . با فرض برقراری قانون هوک ، چقدر کار لازم است تا طول طبیعی فنر دوبرابر شود ؟ در انبساط طول از 10 in تا طول 14 in چقدر ؟ در انقباض آن از طول طبیعی تا طول 6 in چقدر ؟

۹ . سنگی باسرعت اولیهٔ v_0 به طور قائم به بالا پرتاب می‌شود . ارتفاع ماکزیمم h آن چقدر است ؟ اگر v_0 دوبرابر شود ، h چقدر خواهد شد ؟ v_0 را درصورتی بیابید که $h = 100$ ft .

۱۰ . فرض کنید سنگی که به طور قائم به بالا پرتاب شده 8 sec بعد به زمین باز می‌گردد . سرعت اولیهٔ سنگ چقدر است ؟ سرعت نهایی آن چقدر است ؟ ارتفاع ماکزیمم سنگ چقدر است ؟ نشان دهید که ارتفاع سنگ در لحظهٔ $8 - t$ مساوی ارتفاع در لحظهٔ t $(0 \le t \le 8)$ است . نشان دهید که سرعت سنگ درلحظهٔ $8 - t$ قرینهٔ سرعتش در لحظهٔ t می‌باشد .

۱۱ . جسم A از یک پنجره به ارتفاع 260 ft به بیرون پرتاب شده است ، و درست 1 sec بعد جسم B از یک پنجره به ارتفاع 200 ft به بیرون پرتاب می‌شود . آیا A به B می‌رسد ، و اگر چنین است کی ؟

۱۲ . یک ذره با نیرویی متناسب با فاصله به دو نقطهٔ ثابت A و B جذب می‌شود . در حرکت ذره از A تا B در امتداد AB چقدر کار انجام می‌شود ؟ فرض‌کنید ثابت تناسب k برای هر دوی A و B یکی باشد .

۱۳ . موشکی از سطح زمین به طور قائم به بالا پرتاب شده و به ارتفاع ماکزیمم h می‌رسد . نشان دهید که سرعت اولیهٔ موشک مساوی است با

$$v_0 = \sqrt{\frac{2gRh}{R+h}}, \qquad \text{(یک)}$$

که در آن g شتاب ثقل و R شعاع زمین می‌باشد . چگونه می‌توان سرعت فـرار برای زمین را از این فرمول نتیجه گرفت ؟

۱۴ . موشکی از سطح زمین به‌طور قائم به بالا پرتاب شده و به ارتفاع ماکزیممی مساوی شعاع زمین می‌رسد . سرعت اولیهٔ موشک چقدر است ؟

۱۵ . اگر یک موشک باسرعت 1 mi/sec یا سرعت 2 mi/sec به‌طور قائم به بالا پرتاب شود ، به چه ارتفاعی خواهد رسید ؟

۱۶ . فرض کنید ماه به شعاع تقریبی $\frac{3}{11}$ شعاع زمین و به جرم تقریبی $\frac{1}{81}$ جرم زمین باشد . سرعت فرار برای ماه را تخمین بزنید .

۱۷ . فرض کنید یک فضانورد در لباس فضایی خود بتواند روی زمین 2.5 ft بپرد . روی ماه چقدر می‌تواند بپرد ؟ از داده‌های مسئلهٔ قبل استفاده کنید .

۱۸ . جرم خورشید تقریبا " 2×10^{30} kg و شعاعش تقریبا " 7×10^5 km است . به فرض‌آنکه ثابت ثقلی عمومی G تقریبا " 6.67×10^{-20} km^3/kg sec^2 باشد ، سرعت فـرار برای خورشید را تخمین بزنید .

۱۹ . سرعت فرار برای یک **کوتولهٔ سفید** را تخمین بزنید ، این یک نوع ستاره است که در آن جرمی حدود جرم خورشید به حجمی تقریبا " مساوی حجم زمین متراکم‌شده است (شعاع زمین تقریبا " 6400 km است .)

۲۰ . سرعت فرار برای **ستارهٔ نوترون** را تخمین بزنید ، این یک نوع ستاره است که درآن جرمی حدود جرم خورشید به کره‌ای به شعاع 10 km متراکم شده است .

۲۱ . فرض کنید جرم M به صورت کره‌ای درآمده که شعاع R آن مثل یک ستارهٔ " در حال مرگ " منقبض می‌شود . به‌ازای‌مقداری از R ، به‌نام **شعاع ثقلی** که با R_0 نموده‌می‌شود ، سرعت فرار از جرم منقبض‌شده دقیقا " مساوی‌سرعت نور است : $c \approx 300{,}000$ km/sec بر طبق این مدل ساده شدهٔ رفتار نور در یک میدان ثقلی قوی ، وقتی $R = R_0$ ، نور دیگر نمی‌تواند از کره خارج شود ، که در این صورت یک **سیاهچاله** نامرئی خواهیم داشت . نشان دهید که

$$R_0 = \frac{2GM}{c^2} \qquad \text{(دو)}$$

تذکار . چون ذرات نور یا فوتونها جرم ندارند ، مدل سرعت فرار در اینجا به‌کار نمی‌رود . اما مسئله را می‌توان به کمک **نظریهٔ عمومی نسبیت** اینشتن به دقت حل کرد ، که با کمال

تعجب وجود سیاهچاله‌ها را نیز پیش‌بینی کرده و به همان مقدار R_0 رسیده است.
شعاع ثقلی اجرام زیر را بیابید.

۲۲. خورشید ۲۳. زمین ۲۴. ماه

(جرم زمین تقریباً 6×10^{24} kg است.)

۲۵. بنابر یک مدل ستاره‌شناسی پذیرفته شده، جهان در 15 تا 20 بیلیون سال قبل در انفجاری به نام "صدای بزرگ" به‌وجود آمده است. از آن زمان جهان‌طوری منبسط شده است که سرعت v یک کهکشان در فاصلهٔ R تا کهکشان ما (راه شیری) از قانون هوبل[1] $v = HR$ به دست می‌آید، که در آن H ثابت هوبل است که تقریباً مساوی 15 km/sec بر میلیون سال نوری است. (یک سال نوری فاصله‌ای است که نور در یک سال طی می‌کند، که حدوداً 9.5×10^{12} km است.) معلوم نیست این انبساط جهان تا ابد ادامه خواهد یافت یا نه. اگر جهان به‌اندازهٔ کافی ماده داشته باشد، نیروهای ثقلی وارد از این مواد بر خودش مآلاً انبساط را پایان داده، سپس دورهٔ انقباض خواهیم داشت که به یک برخورد ثقلی کامل به نام "انهدام بزرگ" ختم می‌شود، که با آن جهانی که می‌شناسیم منهدم خواهد شد. نشان دهید که اگر چگالی (جرم بر واحد حجم) ماده در جهان درحال حاضر از چگالی بحرانی[2]

$$\rho_c = \frac{3H^2}{8\pi G}$$

تجاوز نکند، جهان تا ابد به انبساط خود ادامه می‌دهد. ρ_c را تخمین بزنید.

۲۶. سرعت گریز یک گلولهٔ $\frac{1}{4}$ اونسی که از یک تفنگ بدون پس‌زن شلیک شده 1200 mph است. لولهٔ تفنگ به طول 2 ft است. وقتی گلوله در لوله است، نیروی وارد بر آن به فرض ثابت بودن چقدر است؟ گلوله چه مدت در لوله می‌ماند؟

۲۷. منظور از *اندازهٔ حرکت* یک ذره یعنی حاصلضرب $p = mv$ جرم m آن در سرعتش $v = v(t)$. فرض کنید بر ذره نیروی $F = F(t)$ وارد می‌شود که تابع پیوسته‌ای از زمان t است. فرض کنید Δp تغییر اندازهٔ حرکت ذره در بازهٔ زمانی $[t_0, t_1]$ باشد. در این صورت،

$$\Delta p = mv\Big|_{t_0}^{t_1} = mv_1 - mv_0,$$

که در آن $v_0 = v(t_0)$ و $v_1 = v(t_1)$. نشان دهید که

1. *Hubble*

۲. حرف یونانی کوچک رو می‌باشد.

$$\Delta p = \int_{t_0}^{t_1} F(t)\,dt,$$

که در آن انتگرال سمت راست ضربهٔ نیرو در طول بازهٔ $[t_0, t_1]$ نام دارد .

۲۸ . یک پرتاب کننده در بیس‌بال یک توپ سریع را با سرعت 90-mph به سوی یک توپ زن پرتاب می‌کند و وی با یک ضربهٔ پایین آن را به سوی پرتاب کننده برمی‌گرداند که خوشبختانه به‌موقع آن را با شیرجه می‌گیردا فرض‌کنید توپ چوبدستی را باتندی 102 mph ترک کند . اگر زمان تماس بین چوبدستی و توپ 0.01 sec باشد ، نیروی متوسط وارد بر چوبدستی چقدر است ؟ (یک توپ بیس‌بال معمولا "5 oz است .)
راهنمایی . ابتدا تغییراندازهٔ حرکت توپ در اثر برخورد با چوبدستی را بیابید .

۲۹ . فرض‌کنید بر ذره‌ای به جرم m و سرعت $v = v(t)$ نیروی وابسته به زمان $F = F(t)$ ، مثل مسئلهٔ ۲۷ ، وارد شده‌باشد . در این صورت ، انرژی جنبشی ذره دربازهٔ‌زمانی $[t_0, t]$ به اندازهٔ

$$\frac{1}{2} mv^2\Big|_{t_0}^{t} = \frac{1}{2} mv^2 - \frac{1}{2} mv_0^2$$

تغییر می‌کند ، که در آن $v_0 = v(t_0)$. با تعدیل جزئی زبان در صفحهٔ ۴۲۹ ، این تغییرانرژی‌جنبشی **کار**انجام شده‌توسط نیروبرذره‌دربازهٔ $[t_0, t]$ نام داردو با $W = W(t)$ نموده می‌شود . به‌علاوه ، مشتق W نسبت به زمان **توان** نام دارد و با $P = P(t)$ نموده می‌شود . نشان دهید که

$$W = \int_{t_0}^{t} F(u)v(u)\,du, \qquad P = \frac{dW}{dt} = Fv. \qquad (\text{سه})$$

۳۰ . مردی می‌خواهد دوستش را که در طبقهٔ چهارم سکونت دارد ملاقات نماید . وزن او 165 lb بوده و در 1 min به اندازهٔ 50 ft بالا می‌رود . توان متوسطی که مرد در بالا رفتن صرف‌کرده به اسب بخار پیدا نمایید . این توان به وات چقدر است ؟
(746 وات = 550 ft-lb/sec = 1 اسب‌بخار .)

اصطلاحات و مباحث کلیدی

جمعبندی ، حدود جمعبندی ، اندیس جمعبندی
قضیهٔ دوجمله‌ای ، ضرایب دوجمله‌ای
افرازهای یک بازه ، اندازهٔ مش یک بازه
تعریف انتگرال و انتگرالپذیری ، مجموعهای ریمان
مساحت تحت یک منحنی به عنوان انتگرال معین

انتگرالگیری، حدود انتگرالگیری، متغیر انتگرالگیری
انتگرالپذیری توابع پیوسته
انتگرالگیری بر بازه‌های مجاور، مساحت بین دو منحنی
قضیهٔ مقدار میانگین برای انتگرالها
پادمشتقها، شکل پادمشتق کلی
انتگرال نامعین
وجود پادمشتقهای توابع پیوسته
مشتقگیری از انتگرال با حد بالایی متغیر
قضیهٔ اساسی حساب دیفرانسیل و انتگرال
تابع موضع به عنوان انتگرال تابع سرعت
معادلات دیفرانسیل $y' = f(x)$ و $y'' = f(x)$
جوابهای عمومی و جوابهای خصوصی
شرایط اولیه و شرایط مرزی
مسائل مقدار اولیه و مقدار مرزی
حرکت مستقیم‌الخط و قانون دوم نیوتن
انرژی جنبشی و کار، قانون هوک
ثقل و سرعت فرار

مسائل تکمیلی

عبارات زیر را حساب کنید.

۱. $\sum_{n=2}^{6} |1-3n|$

۲. $\sum_{n=3}^{8} (n^2-2n)$

۳. $\sum_{n=0}^{4} \frac{1-n^2}{1+n^2}$

۴. $\sum_{n=1}^{7} \tan\frac{(2n-1)\pi}{4}$

مجموع داده شده را با کمترین زحمت حساب کنید.

۵. $\sum_{n=10}^{99} \frac{1}{n(n+1)}$

۶. $\sum_{n=1}^{49} (3n^2+3n+1)$

راهنمایی. توجه کنید که

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}, \quad 3n^2+3n+1 = (n+1)^3 - n^3$$

۷. دو تابع

$$F(x)=\begin{cases}x^2 & \text{اگر } x>0\ ،\\ x^2+1 & \text{اگر } x<0\ ،\end{cases}\qquad G(x)=\begin{cases}x^2+1 & \text{اگر } x>0\ ،\\ x^2 & \text{اگر } x<0\ ،\end{cases}$$

دارای مشتق یکسان $2x$ اند، ولی تفاوت آنها ثابت نیست. چرا این قضیه ۴، صفحه ۳۹۸، را نقض نمی‌کند؟

۸. با استفاده از مشتقگیری، نشان دهید که بر هر بازه‌ای غیرشامل نقاط $x=\pm\frac{1}{2}\pi, \pm\frac{3}{2}\pi, \ldots$ داریم $\tan^2 x = \sec^2 x + C$. سپس ثابت C را بیابید.

انتگرالهای زیر را حساب کنید.

۹. $\int\left(3x^2-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}\right)dx$

۱۰. $\int\frac{(x+2)^2}{x^4}\,dx$

۱۱. $\int\cos(\pi x+\sqrt{2})\,dx$

۱۲. $\int(1+\sec^2 3t)\,dt$

۱۳. $\int\frac{\cos 2u}{\cos^2 u\sin^2 u}\,du$

۱۴. $\int\frac{(\sqrt{v}+1)^3}{\sqrt{v}}\,dv$

۱۵. $\int_1^2\left(x-\frac{4}{x}\right)^2 dx$

۱۶. $\int_{-1}^1(1-\sqrt[3]{x})^3\,dx$

۱۷. $\int_{-\pi/4}^{\pi/4}\tan x\,dx$

۱۸. $\int_{-\pi/4}^{\pi/4}\tan^2 t\,dt$

۱۹. $\int_{\pi/4}^{3\pi/4}\cot^2 u\,du$

۲۰. $\int_{-1}^1\cos^2 v\tan v\,dv$

۲۱. به ازای عدد صحیح $n\geq 0$، نشان دهید که

$$\frac{n+1}{2}\int_{-1}^1 x^n\,dx=\begin{cases}1 & \text{اگر } n \text{ زوج باشد ،}\\ 0 & \text{اگر } n \text{ فرد باشد ،}\end{cases}$$

مقدار میانگین تابع زیر را بیابید.

۲۲. $f(x)=(1-x)^3$ بر $[-2,2]$

۲۳. $f(x)=(x+1)^{2/3}$ بر $[-1,7]$

۲۴. $f(x)=2\cos x-3\sin x$ بر $[0,\pi/2]$

۲۵. $f(x)=(\cos x-x)^2$ بر $[-\pi,\pi]$

۲۶. از فرمول

$$\int_0^1(x^2-x+1)\,dx=\frac{5}{6}$$

نتیجه بگیرید که معادلهٔ درجهٔ دوم $6x^2 - 6x + 1$ ریشه‌ای بین 0 و 1 دارد .این را مستقیماً " تحقیق کنید .

راهنمایی . از قضیهٔ مقدار میانگین برای انتگرالها استفاده کنید .

۲۷ . قضیهٔ *مقدار میانگین تعمیم یافته برای انتگرالها* را ثابت کنید : فرض کنید f و g بر $[a, b]$ پیوسته‌بوده ،و g بر $[a, b]$ تغییر علامت‌ندهد . در این صورت ، نقطه‌ای مانند c در $[a, b]$ هست به‌طوری که

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = f(c)\int_a^b g(x)\,dx. \qquad \text{(یک)}$$

(اگر $g(x) \equiv 1$ ، این قضیه به قضیهٔ مقدار میانگین معمولی برای انتگرالها تحویل می‌شود .)

نقطهٔ c صادق در فرمول (یک) را درصورتی بیابید که

۲۸ . $f(x) = x^2, g(x) = x, a = 0, b = 2$

۲۹ . $f(x) = x, g(x) = x^2 - 1, a = -1, b = 0$

۳۰ . $f(x) = \cos x, g(x) = \sin x, a = \pi, b = 3\pi/2$

۳۱ . $f(x) = \sin x, g(x) = \cos x, a = 0, b = \pi/2$

مساحت A ی ناحیهٔ R را بیابید .

۳۲ . بین منحنیهای $y = |x|$ و $y = \sqrt{2}\cos(\pi x/4)$

۳۳ . بین منحنیهای $y = 1/x^2$ و $y = \frac{15}{8}x - \frac{7}{8}x^2$

۳۴ . محدود به محور x ، سهمی $x = y^2 + 1$ ، و مماس بر سهمی در نقطهٔ $(2, 1)$

۳۵ . داخل حلقهٔ منحنی $y^2 = x(x-1)^2$

در هر حالت ناحیهٔ R را رسم کنید .

۳۶ . نشان دهید که به ازای هر عدد گویای مثبت r ،

$$\int_0^1 x^r\,dx + \int_0^1 x^{1/r}\,dx = 1$$

این رابطه را تعبیر هندسی کنید .

۳۷ . اگر $0 < a < 1$ ، $\int_0^1 f(x)\,dx$ را بیابید که در آن

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{اگر } 0 \le x \le a ، \\ a\dfrac{1-x}{1-a} & \text{اگر } a < x \le 1 ، \end{cases}$$

۳۸ . نشان دهید هرگاه f'' بر $[a, b]$ پیوسته باشد ، آنگاه

$$\int_a^b xf''(x)\,dx = bf'(b) - af'(a) + f(a) - f(b).$$

جواب خصوصی معادلهٔ دیفرانسیل مرتبهٔ اول صادق در شرط اولیهٔ داده‌شده را بیابید .

۳۹ . $y' = x^5 - x^3, y(0) = 4$

۴۰ . $y' = \tan^2 x, y(\pi/4) = 0$

۴۱ . $y'\cos^2 x = \sin x, y(0) = 7$

۴۲ . $y' \sin^2 x = \cos x, y(\pi/2) = -1$

جواب خصوصی معادلهٔ دیفرانسیل مرتبهٔ دوم صادق در شرایط اولیه یا شرایط مرزی داده شده را بیابید .

۴۳ . $y'' = \sqrt{x}, y(1) = 2, y'(1) = 1$

۴۴ . $y'' = \sin^2 x, y(0) = -1, y'(0) = 1$

۴۵ . $y'' = 7x^{1/3}, y(-1) = -2, y(1) = 0$

۴۶ . $y'' = \cos^2 x, y(0) = 1, y(\pi) = 1$

۴۷ . هزینهٔ حاشیه‌ای یک شرکت در تولید کالایی $MC(q) = 3q^2 - 90q + 1200$ دلار در سطح تولید q است . تابع هزینهٔ کل $C(q)$ را درصورتی بیابید که سرانــه $7200 باشـد . هزینهٔ (جدا از سرانهٔ) تولید دومین دوجین از کالا را به صورت انتگرال بیـان کرده، و آن را حساب کنید . هزینهٔ متوسط بر واحد (همراه‌باسرانهٔ) تولید سه دوجین اول را بیابید .

۴۸ . اتومبیلی زمان ترمز 90 mph سرعـت دارد . اگر نیروی مقاومت ترمز در برابر حرکت نصف وزن اتومبیل باشد ، چند ثانیه تا توقف کامل طول خواهد کشید ؟ اتومبیل چه مسافتی را پس از ترمز طی می‌کند ؟ فرض کنید $g = 32$ ft/sec^2 .

۴۹ . اتومبیلی به وزن 2700 lb از حال سکون شتاب یکنواخت گرفته و ظرف 15 ثانیه به تندی 75 mph می‌رسد .توان لحظه‌ای موتور اتومبیل را به‌عنوان تابعی‌اززمان‌بیابید توان متوسط موتور روی بازهٔ شتاب چقدر است ؟

۵۰ . ذره‌ای از نقطهٔ ثابت O با نیرویی متناسب با عکس مجذور فاصله دفع می‌شود .فرض کنید نیروی وارد بر ذره وقتی در فاصلهٔ 1cm از O است مساوی 100 دین باشد .چقدر باید کار انجام داد تاذره‌راازفاصلهٔ‌دور به‌نقطهٔ 0.001 cm از O آورد ؟ (نیروی 1 دین به جرم 1 گرم شتاب 1 cm/sec^2 می‌دهد ، و 1 dyne-cm را یک ارگ می‌نامند .)

۵۱ . کارگری یک آچار را به داخل محوطهٔ عبور آسانسور انداخته و درست 3 sec بعدصدای برخورد آن را با ته‌محوطه می‌شنود . عمق محوطه چقدر است ؟ (g را مساوی 32 ft/sec^2 و سرعت صوت در هوای گرم را 1156 ft/sec بگیرید .)

۵۲ . در چه فاصله از ماه جاذبهٔ ثقلی زمین مساوی جاذبهٔ ماه است ؟ (جرم زمین‌حدودا " 81 برابر جرم ماه است ، و فاصلهٔ بین زمین و ماه حدودا " 240,000 mi می‌باشد .)

۵۳ . قانون دوم حرکت نیوتن $m(dv/dt) = F$ برحسب اندازهٔ حرکت $p = mv$ یک ذره به جرم m و سرعت v به شکل $d(mv)/dt = dp/dt = F$ درآمده ، و حتی اگر m ثابت نباشد ، که تا بحال فرض شده است ، برقرار می‌ماند . فرض کنید یک قطره باران کروی از درون جوی سقوط می‌کند که از بخار آب اشباع شده است . در اثر تراکم ، جرم قطره به میزانی متناسب با مساحت سطح و با ثابت تناسب k افزایش می‌یابد . نشان دهید که سقوط قطرهٔ باران با شتاب ثابت $a = \frac{1}{4}g \approx 8\ \text{ft/sec}^2$ صورت می‌گیرد البته با این فرض که اندازهٔ اولیهٔ قابل چشم‌پوشی بوده و سرعت اولیهٔ آن صفر باشد .

۵۴ . بنابر **نظریهٔ خصوصی نسبیت** اینشتن[1] ، قانون حرکت نیوتن $d(mv)/dt = F$ را باید با

$$\frac{d}{dt}\frac{mv}{\sqrt{1-(v/c)^2}} = F \qquad \text{(دو)}$$

تعویض کرد ، که در آن c سرعت نور است $(\approx 300{,}000\ \text{km/sec})$. اگر v در مقایسه با c کوچک باشد (که در تمام مسائل عادی مهندسی مکانیک چنین است) قانون نیوتن تقریبی عالی به قانون اینشتن می‌باشد . اما اگر v کسر محسوسی از c باشد (که در ذرات زیر اتمی با انرژی بسیار زیاد چنین است) ، قانون حرکت اینشتن (دو) به " اثرات نسبی " منجر می‌شود که قانون نیوتن آنها را پیش‌بینی نکرده است . مثلا "، نشان دهید که ، بر طبق قانون اینشتن ، یک ذره به جرم ناصفر تحت اثر نیروی ثابت F هرقدر اثر نیرو طول بکشد نمی‌تواند به سرعت نور برسد . قانون نیوتن در این باب چه می‌گوید ؟

راهنمایی . اگر ذره از حال سکون شروع به حرکت کند ، انتگرالگیری از (دو) نتیجه می‌دهد که $v/\sqrt{1-(v/c)^2} = Ft/m$.

مسائل ۵۵ تا ۶۴ به انتگرالگیری از توابعی می‌پردازند که فقط بر بخشهایی از بازه‌های انتگرالگیری خود پیوسته‌اند . به‌طور مشخص ، گوییم تابع f بر بازهٔ $[a, b]$ **قطعه‌قطعه پیوسته** است اگر افرازی مانند $a = c_0, c_1, c_2, \ldots, c_{n-1}, c_n = b$ $(c_0 < c_1 < c_2 < \cdots < c_{n-1} < c_n)$ از $[a, b]$ وجود داشته باشد به‌طوری که (۱) f در $c_1, c_2, \ldots, c_{n-1}$ ناپیوسته باشد ، (۲) f بر بازه‌های **باز** $(c_0, c_1), (c_1, c_2), \ldots, (c_{n-1}, c_n)$ پیوسته باشد ، و (۳) حدود یکطرفهٔ

$$f(c_0^+), f(c_1^-), f(c_1^+), \ldots, f(c_{n-1}^-), f(c_{n-1}^+), f(c_n^-)$$

همه موجود و متناهی باشند ، که در آن برای اختصار می‌نویسیم

$$f(c_i^+) = \lim_{x \to c_i^+} f(x), \qquad f(c_i^-) = \lim_{x \to c_i^-} f(x).$$

---

1. Einstein

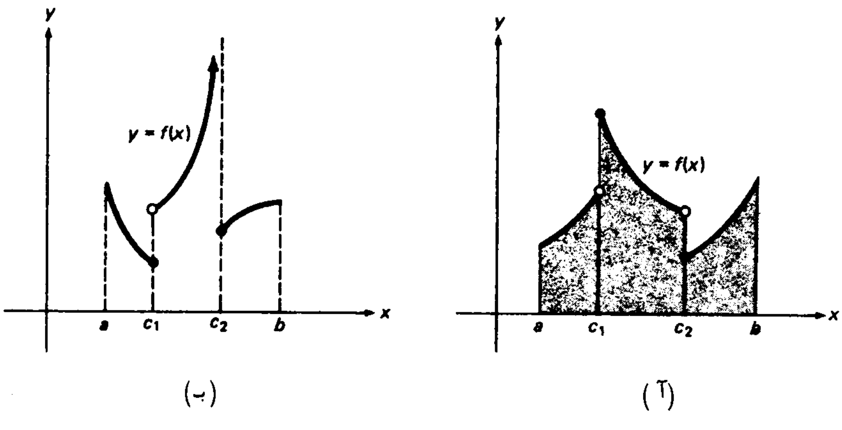
مقادیر f در نقاط c_i می‌توانند دلخواه (یا حتی تعریف نشده) باشند . توجه کنید هرگاه $n = 1$ و $f(c_0^+) = f(a), f(c_1^-) = f(b)$ ، آنگاه f بر $[a, b]$ پیوسته است؛ درنتیجه ،رده‌ٔ توابع قطعه‌قطعه پیوسته‌شامل‌تمام‌توابع پیوسته‌است .همچنین، توجه کنید که ناپیوستگیهای f در نقاط $c_1, c_2, \ldots, c_{n-1}$ (اگر $n = 1$ ، این‌گونه‌نقاط‌وجود ندارند) باید ناپیوستگیهای جهشی به صورت تعریف شده درصفحهٔ ۱۵۳باشند . با یک استدلال تکنیکی که آن راحذف‌کرده‌ایم می‌توان نشان‌داد هرگاه f بر $[a, b]$ قطعه‌قطعه‌پیوسته باشد ، آنگاه f بر $[a, b]$ انتگرالپذیر است با انتگرال

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^{c_1} f_1(x)\,dx + \int_{c_1}^{c_2} f_2(x)\,dx + \cdots + \int_{c_{n-1}}^{b} f_n(x)\,dx, \qquad (\text{سه})$$

که در آن f_i تابع **پیوسته** بر $[c_{i-1}, c_i]$ است که با f بر (c_{i-1}, c_i) یکی است؛ یعنی ،

$$f_i(x) = \begin{cases} f(c_{i-1}^+) & \text{اگر } x = c_{i-1} \text{ ،} \\ f(x) & \text{اگر } c_{i-1} < x < c_i \text{ ،} \\ f(c_i^-) & \text{اگر } x = c_i \text{ ،} \end{cases}$$

این برحسب تعبیر مساحتی انتگرال کاملا" موجه است . مثلا" ، تابع f رسم شده در شکل ۲۸ (آ) بر $[a, b]$ قطعه قطعه پیوسته‌است باناپیوستگیهایی در c_1 و c_2 ، و انتگرالآن مجموع مساحات سه ناحیهٔ سایه‌دار است . یک مثال مهم از توابع قطعه قطعه پیوسته‌تابع بزرگترین عدد صحیح $[\![x]\!]$ است ، که بر هر بازهٔ $[a, b]$ قطعه قطعه پیوسته است . از آن سو ، تابع f رسم شده در شکل۲۸ (ب) قطعه قطعه پیوسته نیست ، زیرا $f(c_2^-) = \lim_{x \to c_2^-} f(x) = \infty$ ؛



شکل ۲۸

و در واقع ، f بر $[a, b]$ بی‌کران و لذا انتگرالناپذیراست (ر.ک. مسئلهٔ ۳۳ ،صفحهٔ۳۸۱) .

با استفاده از فرمول (سه) ، انتگرال داده شده را حساب کنید (در هر حالت ، انتگرالده قطعه قطعه پیوسته است) .

۵۵. $\int_{-1}^{2} [\![x]\!]\, dx$

۵۶. $\int_{-2}^{1} [\![x]\!]\, dx$

۵۷. $\int_{\sqrt{2}}^{\pi} [\![x]\!]\, dx$

۵۸. $\int_{0}^{2} [\![2x+1]\!]\, dx$

۵۹. $\int_{0}^{5} f(x)\, dx$ ، که در آن

$$f(x) = \begin{cases} 2-x & \text{اگر } 0 \le x \le 2 \\ -1 & \text{اگر } 2 < x < 3 \\ 10 & \text{اگر } x = 3 \\ x^2 & \text{اگر } 3 < x \le 5 \end{cases}$$

۶۰. $\int_{0}^{2\pi} f(x)\, dx$ ، که در آن

$$f(x) = \begin{cases} \sin x & \text{اگر } 0 \le x < \pi/2 \\ \cos x & \text{اگر } \pi/2 \le x < \pi \\ \sin x & \text{اگر } \pi \le x < 3\pi/2 \\ \cos x & \text{اگر } 3\pi/2 \le x \le 2\pi \end{cases}$$

۶۱. $\int_{-2}^{8} f(x)\, dx$ ، که در آن

$$f(x) = \begin{cases} 6 & \text{اگر } -2 < x < 1 \\ -4 & \text{اگر } 1 < x < 3 \\ 5 & \text{اگر } 3 < x < 8 \end{cases}$$

۶۲. فرض کنید

$$f(x) = \begin{cases} a_1 & \text{اگر } 0 \le x < 1 \\ a_2 & \text{اگر } 1 \le x < 2 \\ \cdots & \\ a_n & \text{اگر } n-1 \le x \le n \end{cases}$$

نشان دهید که مقدار میانگین یا متوسط تابع f بر بازهٔ $[0, n]$ مساوی است با $(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)/n$ یعنی میانگین یا متوسط حسابی n عدد $a_1, a_2, \ldots, a_n$.

۶۳. مقدار میانگین $[\![x]\!]$ را بر بازهٔ $[0, n]$ بیابید ، که در آن n عدد صحیح مثبتی است .

۶۴. مقدار میانگین $[\![x]\!]$ را بر بازهٔ $[-a, a]$ به ازای $a > 0$ دلخواه بیابید .