

به نام خدا

پاسخ تشریحی

مرحله اول نوزدهمین دوره المپیاد کامپیوتر سال

۱۳۸۷

(۱) گزینه‌ی (ه) درست است.

ابتدا تعداد خانه‌های سیاه هر وجه را حساب می‌کنیم. در هر وجه  $\left[\frac{7 \times 7}{2}\right]$  خانه‌ی سیاه وجود دارد که چون ۶ وجه وجود دارد در مجموع ۱۴۴ مکعب داریم. ولی مکعب‌هایی که روی ضلع مکعب اصلی هستند را دوباره شمرده‌ایم که تعداد آنها در هر ضلع ۳ تا است و چون ۱۲ ضلع داریم مجموعاً ۳۶ تا است. در نتیجه جواب مسئله برابر است با:  $144 - 36 = 108$

(۲) گزینه‌ی (ج) درست است.

فرض کنید که عدد یک به رنگ آبی باشد. در اینصورت کوچکترین عدد آبی بجز یک را در نظر بگیرید. از این عدد تا ۲۰ تمامی اعداد باید آبی باشند (چون جمع هر کدام با یک عدد بعدی را می‌سازد). در نتیجه بقیه اعداد نیز باید به رنگ قرمز باشند.

اگر عدد دیگر آبی نداشته باشیم: یک حالت.

اگر کوچکترین عدد آبی بزرگتر یا مساوی با ۴ باشد: حداقل دو عدد قرمز داریم که می‌توانند با مجموع خود اعداد بزرگتر قرمز بسازند و در نتیجه همان حالت اول خواهد بود.

اگر کوچکترین عدد آبی برابر با ۲ یا ۳ باشد: هر کدام از این حالات، یک حالت درست هستند.

در مجموع سه حالت درست داریم، ولی چون فرض کرده بودیم عدد یک آبی است جواب مسئله دو برابر آن یعنی ۶ است.

(۳) گزینه‌ی (الف) درست است.

چون هر دو عدد  $x$  و  $\bar{x}$  ارقام یکسانی دارند (بجز تعداد صفرها)، پس مجموع ارقام و در نتیجه باقیمانده‌ی یکسانی به پیمانه‌ی ۹ دارند. پس تفریق آنها بر ۹ بخشپذیر است. در نتیجه تنها رقمی که می‌تواند عدد نهایی را بر ۹ بخشپذیر کند ۵ است:  $31 + 5 = 36$

(۴) گزینه‌ی (ه) درست است.

عدد ۷ را از مجموعه حذف کنید. به ازای هر زیرمجموعه از مجموعه‌ی جدید دو حالت داریم:

- مجموع اعداد زوج باشد. در اینصورت اضافه کردن ۷ مجموع آن را فرد می‌کند.

- مجموع اعداد فرد باشد. در اینصورت اضافه کردن ۷ آن را زوج می‌کند.

در نتیجه در هر حالت یک زیرمجموعه با مجموع زوج داریم. پس جواب مسئله ۱۲۸ است.

(۵) گزینه‌ی (ج) درست است.

چون در ابتدا پرچم در دست نفر اول است و در انتهای مرحله اول به دست نفر سوم می‌رسد پس باقیمانده‌ی  $k$  بر ۲۰ و در نتیجه باقیمانده‌ی آن بر ۵ برابر ۲ است.

(۶) گزینه‌ی (ج) درست است.

از ۶ مثلث داخلی تنها می‌توان یکی از آنها را برداشت، چون در یک راس مشترک هستند.

دو حالت را بررسی می‌کنیم:

- دو مثلث از گوشه‌ها انتخاب شود: در اینصورت پس از انتخاب این دو، مثلث سوم بصورت یکتا از بین ۶ مثلث داخلی انتخاب می‌شود. در نتیجه تعداد حالات نهایی ۳ تا است.
- سه مثلث از گوشه‌ها انتخاب شود: یک حالت بصورت یکتا تعیین می‌شود.

با توجه به حالت‌بندی فوق مجموعاً ۴ حالت داریم.

(۷) گزینه‌ی (د) درست است.

همانند سوال قبلی براساس انتخاب تعداد مثلث‌های گوشه‌ای حالت‌بندی می‌کنیم:

- صفر مثلث از گوشه انتخاب شود: در این صورت باید سه مثلث از ۶ مثلث داخلی انتخاب شود که به دو حالت ممکن است.
- یک مثلث از گوشه انتخاب شود: ابتدا به سه حالت می‌توان مثلث گوشه‌ای را انتخاب کرد. سپس ۵ مثلث داخلی باقی خواهند ماند که باید دو عضو غیرمجاور انتخاب شود. اینکار به ۶ طریق ممکن است. پس مجموعاً ۱۸ حالت بدست آمد.
- دو مثلث از گوشه انتخاب شود: ابتدا به سه حالت می‌توان دو مثلث گوشه‌ای را انتخاب کرد. سپس چهار حالت برای انتخاب مثلث داخلی داریم. پس در مجموع ۱۲ حالت بدست می‌آید.
- سه مثلث از گوشه انتخاب شود: این کار به یک حالت ممکن است.

پس در کل ۳۳ حالت وجود دارد که باقیمانده‌ی آن بر ۵ برابر ۳ است.

(۸) گزینه‌ی (د) درست است.

حرکت اسب در این ۸ خانه همانند یک دور کامل است. پس در هر مرحله باید سرباز را در خانه‌ای قرار دهیم که تا اسب ۴ خانه فاصله داشته باشد. در نتیجه مجموعاً  $4 \times 1387$  حرکت انجام می‌شود که باقیمانده‌اش بر ۵ برابر ۳ است.

(۹) گزینه‌ی (الف) درست است.

مجموع مثلث‌های حاصل تشکیل یک دوزنقه می‌دهند که نقطه‌ی بالایی آن مشخص است. در نتیجه هرچه نقطه‌ی متصل به آن بالاتر باشد مساحت دوزنقه بیشتر خواهد شد. در نتیجه باید قطعه چوب با کمترین طول را آنجا قرار دهیم. پس جواب ۲ است.

(۱۰) گزینه‌ی (د) درست است.

باتوجه به اینکه این ضلع عمودی یا افقی انتخاب شده باشد حالت‌بندی می‌کنیم:

- افقی: در اینصورت تنها همان مسیری که شامل آن ضلع باشد حذف می‌شود. پس قیمت همگی آنها ۸ است.
- عمودی: مجموعه‌ی قیمت حالاتی که از ضلع سمت چپ انتخاب شود با سمت راست برابر است. قیمت حالات حذف ضلع سمت چپ به ترتیب برابر است با ۱ تا ۸.

پس در نهایت قیمت جداول اعداد ۱ تا ۸ شدند که باقیمانده‌اش بر ۵ برابر ۳ است.

(۱۱) گزینه‌ی (ب) درست است.

فرض کنید در هر بار برخورد پرتو با آینه، بجای اینکه پرتو بازتاب شود، شکل را حول آینه‌ای که پرتو با آن برخورد کرده بچرخانیم. در نتیجه پرتو در همان جهت حرکت می‌کند ولی شکل حول مرکز خود ۳۰ درجه چرخیده است. در نتیجه در کل ۳۶۰ را به ۱۲ قطاع تقسیم کرده‌ایم که با ۶ خط تشکیل شده‌اند. پس هر پرتویی حداکثر ۶ بار با آینه‌ها برخورد می‌کند. برای ارائه مثال نیز هر پرتویی که با این ۶ خط برخورد کند این ویژگی را داراست.

(۱۲) گزینه‌ی (ه) درست است.

در صورتی که به ترتیب به بالا، راست، پایین و چپ حرکت کنیم، وجه پایین آن به ۵ تغییر می‌کند. در نتیجه با این روند می‌توان هر عددی را در وجه پایین قرار داد.

حال روندی را ارائه می‌کنیم تا عددی که در ابتدا در پایین مکعب قرار دارد زمانی که به گوشه‌ی بالا راست رسیدیم به بالای آن منتقل شود: اگر به ترتیب ۲ بار راست، ۳ بار بالا، یکبار راست و یکبار بالا برویم در نهایت این اتفاق می‌افتد. باتوجه به توضیحات بالا تمامی اعداد می‌توانند در بالای مکعب قرار گیرند.

(۱۳) گزینه‌ی (ب) درست است.

هر فردی از اعضای  $M$  دوبار (به ازای پدر و مادر خود) در فرزندان حساب می‌شود (بجز اولین آدمیزاد) ولی چهاربار (به ازای پدر و مادر پدر و پدرو مادر مادر خود) در نوه‌ها محاسبه می‌شود (بجز اولین آدمیزاد و فرزندانش). در نتیجه نسبت گفته شده بسیار نزدیک به ۲ خواهد بود.

(۱۴) گزینه‌ی (د) درست است.

مجموع اعدادی که آنها دارند باید بر ۴ بخشپذیر باشد:  $x + 3x = 4x$

چون باقیمانده‌ی مجموع اعداد بر ۴ برابر ۲ است باید عددی حذف شود که باقیمانده‌اش بر ۴ برابر ۲ باشد و تنها عدد با این ویژگی ۱۴ است.

(۱۵) گزینه‌ی (ه) درست است.

در صورتی که هیچ خانه‌ای سیاه نباشد تعداد روش‌های رسیدن به خانه‌ی آخر از رابطه‌ی بازگشتی زیر تبعیت می‌کند:

$$f_n = f_{n-1} + f_{n-2} \quad f_1 = f_2 = 1$$

برای اثبات این ادعا کفایت حرکت نهایی را در نظر بگیریم. حرکت نهایی پرش به طول یک یا دو است که هر کدام از جملات بالا را می‌سازد. از طرفی وقتی یک خانه‌ی سیاه وجود داشته باشد در آن حرکت دو خانه پرید. پس جواب مسئله را می‌توان به حاصلضرب قسمت‌هایی که خانه‌ی سیاه ندارند تجزیه کرد. در نتیجه جواب مسئله برابر است با  $f_5 \times f_3 \times f_6 \times f_3$  که برابر با ۱۶۰ است.

۱۶) گزینه‌ی (د) درست است.

بهترین قیمت حتما یکی از اعدادی است که مورد نظر خریداران هستند. چون در غیر اینصورت با افزایش یک‌واحد به آن، تعداد متقاضیان تغییری نمی‌کند ولی سود هر ماشین افزایش می‌یابد.

پس کفایت تنها به ازای همین اعداد نتیجه را بررسی کنیم. سود هر کدام به ترتیب برابر ۲۲، ۳۶، ۴۵، ۴۸، ۵۰، ۴۸، ۴۲، ۳۲، ۱۸ و ۱۰- است. در نتیجه بهترین قیمت ۱۸ است.

۱۷) گزینه‌ی (الف) درست است.

برای یافتن تعداد رشته‌های خوب از ابتدای رشته شروع می‌کنیم:

حرف اول ۳ حالت دارد و پس از آن در جایگاه‌هایی که توالی یکسان وجود دارد ۱ حالت برای پر کردن آن خانه داریم و در غیر اینصورت ۲ حالت (متممیز با قبلی) داریم. از طرفی باید سه جایگاه را که در آنها توالی یکسان خواهیم داشت را انتخاب کنیم. بجز جایگاه اول بقیه می‌توانند انتخاب شوند. پس جواب نهایی برابر است با:  $2^8 \times 3 \times 21 = 2^6 \times 3 \times \binom{9}{3}$

۱۸) گزینه‌ی (ه) درست است.

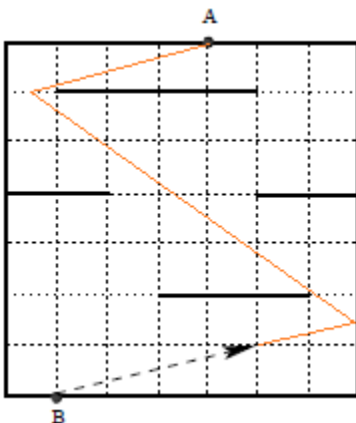
در صورتی که از عمل سه‌برابر استفاده نکنیم در نهایت دو عدد خواهیم داشت که توانی از ۲ هستند. پس تنها اعدادی را می‌توانیم بسازیم که در بسط مبنای ۲ خود حداکثر دو رقم یک داشته باشند. پس  $n_{40} = 0$

باتوجه به اینکه عدد ۳۰ در بسط مبنای ۲ خود ۴ رقم یک دارد پس حداقل یک‌بار باید از عملیات سه‌برابر استفاده کند.

مثال: ابتدا اعداد ۸ و ۲ را می‌سازیم و آنها را با هم جمع می‌کنیم. حال عدد ۱۰ را با عملیات سه‌برابر به ۳۰ تبدیل می‌کنیم.

۱۹) گزینه‌ی (الف) درست است.

به کمک دو آینه همانند شکل می‌توان پرتو را به نقطه‌ی  $A$  رساند. همچنین از روی مسیر اولیه‌ی پرتو واضح است که نمی‌توان با یک آینه این کار را انجام داد (چون ناحیه‌ی قابل دید از نقطه‌ی  $A$  با مسیر پرتو اشتراکی ندارند).



۲۰) گزینه‌ی (د) درست است.

باتوجه به شرایطی که مسئله توضیح داده است می‌توان تیم‌ها را به ترتیب قدرت مرتب کرد بطوری که هر تیمی رتبه‌اش بهتر باشد از تمامی تیم‌های با رتبه‌ی بالاترش قوی‌تر باشد و در بازی با آن برنده شود.

تیم نایب‌فهرمان از تمامی ۸ تیمی که از آنها (مستقیماً یا با واسطه‌ی تیم دیگری) برده قوی‌تر است. پس رتبه‌ی این تیم حداکثر نهم است. از طرفی اگر تیم‌های نهم تا شانزدهم را بصورتی بچینیم که تا فینال با هم مسابقه دهند، مثالی را ارائه کرده‌ایم که تیم نایب‌فهرمان نهم بوده است. پس جواب مسئله نهم است.

۲۱) گزینه‌ی (د) درست است.

در صورتی که از شهر  $A$  شروع به حرکت کنیم، در هر مرحله در جهت مثبت یا منفی باید اختلاف ساعت را محاسبه کنیم و قدر مطلق عدد نهایی اختلاف شهر  $E$  با شهر  $A$  خواهد بود.

باتوجه به این نکات در بین گزینه‌ها تنها عدد ۷ قابل ساخت نیست:

$$-5 - 4 + 3 + 7 = 1$$

$$-5 + 4 - 3 + 7 = 3$$

$$+5 - 4 - 3 + 7 = 5$$

$$-5 + 4 + 3 + 7 = 9$$

۲۲) گزینه‌ی (ج) درست است.

دو مقدار  $X$  و  $Y$  به ترتیب برابرند با  $-۴۹$  و  $۶۰$ . حال بین این دو عدد، اعداد ۱ تا ۱۰ قابل ساخت نیستند، ولی بقیه‌ی اعداد را می‌توان بدست آورد.

۲۳) گزینه‌ی (ب) درست است.

اگر همسایه‌های هر حرف را بشماریم، حروف  $A, D, E, H, I$  سه همسایه و حروف  $B, C, F, G$  دو همسایه دارند. در نتیجه چهار حرفی که تنها دو همسایه دارند در گوشه‌های جدول هستند و همسایه‌های آنها نمی‌توانند خانه‌ی وسط جدول باشند.

با دقت در این موضوع حروف  $A, E, H, I$  حذف می‌شوند. پس حرف  $D$  در وسط جدول وجود دارد.

۲۴) گزینه‌ی (ج) درست است.

در صورتی که  $a = 5$  باشد، در هر جمع عدد یکان صفر یا پنج خواهد بود و رقم دهگان دیگر حاصلضرب عددی بین صفر تا چهار. در نتیجه هیچ‌گاه حاصل جمع بزرگتر از ۹ نخواهد شد و نیازی به ده بر یک نداریم.

(۲۵) گزینه‌ی (ه) درست است.

تنها شرطی که در این دنباله‌ی به طول ۶ داریم این است که تعداد حرکات شماره‌ی یک و دو باهم برابر باشند.

در نتیجه تعداد حالات ممکن در صورتی که تعداد حرکات شماره‌ی یک بین صفر تا سه باشد به ترتیب برابر است با:

$$\binom{6}{6}, \binom{6}{2,2,2}, \binom{6}{1,1,4}, \binom{6}{3}$$

که جمع این اعداد برابر می‌شود با ۱۴۱.

(۲۶) پاسخ در میان گزینه‌ها نیست.

باتوجه به اینکه مجموعاً ۱۰۲۴ نقطه داریم و هر خط روی حداقل ۶۲ نقطه قرار می‌گیرد حداکثر ۱۶ خط می‌توان رسم کرد. به عنوان مثال نیز می‌توان خطوط را پشت سرهم قرار داد تا شرایط را برقرار کنند.

(۲۷) گزینه‌ی (الف) درست است.

عدد ۲۱۲۱ بر ۷ بخشپذیر است و شرایط مسئله را نیز دارد. در نتیجه  $A \leq 2121$ . پس  $A$  ۴رقمی است.

(۲۸) گزینه‌ی (ج) درست است.

اولین نکته‌ای که باید به آن دقت کنیم این است که ترتیب انجام عملیات در حالت نهایی تفاوتی ایجاد نمی‌کند (چرا؟). با این فرض از میله‌ی شماره‌ی یک شروع می‌کنیم تا اینکه دیگر نتوانیم حرکتی روی آن انجام دهیم.

بدین ترتیب پس از تعدادی مرحله در میله‌ی دوم  $\frac{1387-1}{2} = 693$  مهره خواهیم داشت. همین کار را با میله‌ی بعدی انجام می‌دهیم. تعداد مهره‌های میله‌ها همانند زیر خواهند شد:

$$693 \rightarrow 346 \rightarrow 172 \rightarrow 85 \rightarrow 42 \rightarrow 20 \rightarrow 9 \rightarrow 4 \rightarrow 1$$

در نتیجه آخرین میله‌ی حاوی مهره، شماره‌ی دهم است.

(۲۹) گزینه‌ی (ب) درست است.

می‌دانیم در گام آخر باید به سمت راست حرکت کنیم (در غیر اینصورت عدد نهایی منفی خواهد شد). در نتیجه قورباغه باید  $3^5 = 243$  واحد در جهت مثبت ببرد. قبل از این حرکت اعداد برابر با ۶۶ تا ۷۰ هستند. به همین ترتیب قورباغه در مرحله قبل از آن نیز ۸۱ واحد در جهت مثبت حرکت کرده بود، در نتیجه در گام قبلی اعداد برابر با ۱۵- تا ۱۱- بوده. به همین ترتیب باید ۲۷ واحد در جهت منفی حرکت می‌کرده که نتیجه‌اش اعدادی بین ۱۲ تا ۱۶ خواهند بود.

این اعداد را باید بتوانیم به کمک ۱، ۳ و ۹ بسازیم که واضح است تنها می‌توان عدد ۱۳ را ساخت که همان عدد ۳۱۰ در ابتدا است.

(۳۰) گزینه‌ی (ب) درست است.

برای جابجایی هر عدد دو انتخاب داریم (هر پدری دو فرزند دارد). اگر با فرزندی که کوچکتر است جابجا کنیم همچنان توازن برقرار نخواهد شد (چون فرزند کوچکتر از فرزند بزرگتر، کوچکتر است!). در نتیجه همواره باید با فرزند بزرگتر جابجایی صورت بگیرد.

در نتیجه باید در گام اول با ۱۶، سپس با ۱۵ و در نهایت با ۶ جابجا کنیم. پس سه حرکت لازم و کافی است.