

المیادہای جهانی فیزیک



مرکز ملی منابع برای دانشمندان و فراگیران پیشرفته
Educational Resources for Gifted and
Advanced Learners

مسئله‌ها و پاسخ‌های تشریحی

ترجمه روح‌الله خلیلی بروجنی

۱۳۷۲ - ۱۳۸۴
1993-2007



انتشارات فاطمی

المپیاد جهانی فیزیک یک رویداد بزرگ علمی، فرهنگی و اجتماعی است، و همه‌ساله میان دانش‌آموزان برجسته دوره متوسطه سراسر جهان و با میزبانی یکی از کشورهای برگزار می‌شود. سؤالات مربوط به هر سال را کمیته علمی المپیاد که متشکل از استادان برجسته فیزیک کشور میزبان است، طرح می‌کند و به تصویب نهایی کمیته بین‌المللی المپیاد فیزیک می‌رساند. کتاب المپیادهای جهانی فیزیک، مجموعه‌ای شامل مسئله‌ها و پاسخ‌های تشریحی پانزده دوره المپیاد فیزیک از سال ۱۳۷۲ تا ۱۳۸۶ است. مخاطبان کتاب، داوطلبان شرکت در مراحل مختلف المپیادهای داخلی و جهانی فیزیک‌اند. همچنین، مطالعه این کتاب برای دبیران و دانشجویان فیزیک که مشتاق به کسب دیدی فراتر و عمیق‌تر در مفاهیم علم فیزیک از طریق حل مسئله‌های چالش‌برانگیز هستند، مفید است.



بخشی است در مؤسسه فرهنگی فاطمی برای
تأمین منابع آموزشی مفید برای **نخبگان و استعدادهای برتر**

المپیادهای جهانی فیزیک

مسئله‌ها و پاسخ‌های تشریحی

ترجمه روح‌الله خلیلی بروجنی

۱۳۷۲-۱۳۸۶
1993-2007





ویراست اول این کتاب
در سومین جشنواره
کتاب‌های آموزشی
رشد مورد تقدیر
قرار گرفته است.

التمیادهای جهانی فیزیک
مسئله‌ها و پاسخ‌های تشریحی
(۱۳۷۲-۱۳۸۶/۱۹۹۳-۲۰۰۷)
ویرایش دوم

مترجم: روح‌الله خلیلی بروجنی
ویراستاران: منیژه رهبر، ناصر مقبلی
ناشر: انتشارات فاطمی

ویرایش دوم: چاپ دوم، ۱۳۹۰
ویرایش اول: چاپ دوم، ۱۳۸۴
شابک ۴-۳۱۸-۹۶۴-۹۷۸
ISBN 978-964-318-470-4

تیراژ: ۱۰۰۰ نسخه
قیمت: ۶۵۰۰ تومان

آماده‌سازی پیش از چاپ: واحد تولید انتشارات فاطمی

- مدیر تولید: فرید مصلحی
- طراح جلد: زهرا قورچیان
- حروفچینی و صفحه‌بندی (TeX-پارک): اعظم توکلی
- نمونه‌خوان: آیدین اسدی
- رسام و صفحه‌آرا: فاطمه تقفی
- نظارت بر چاپ: علی محمدپور

چاپ و صحافی: شاپرک

کلیه حقوق برای انتشارات فاطمی محفوظ است.



انتشارات فاطمی تهران، میدان دکتر فاطمی، خیابان جویبار، خیابان میرهادی،
شماره ۱۴، کدپستی ۱۴۱۵۸۸۴۷۴۱، تلفن: ۸۸۹۴۵۵۴۵ (۲۰ خط)

www.fatemi.ir • info@fatemi.ir

خلیلی بروجنی، روح‌الله، ۱۳۵۰ - گردآورنده.
التمیادهای جهانی فیزیک (۱۳۸۶-۱۳۷۲) = ۱۹۹۳-۲۰۰۷ / [گردآوری و ترجمه] روح‌الله خلیلی بروجنی؛ ویراستاران
منیژه رهبر، ناصر مقبلی. - تهران: فاطمی، ۱۳۸۷.
شش، ۲۸۶ ص.: مصور.

ISBN 978-964-318-470-4

فهرستبندی بر اساس اطلاعات فیبا.
چاپ دوم: ۱۳۹۰

۱. التمیادها (فیزیک). ۲. فیزیک -- مسائل، تمرین‌ها و غیره. ۳. فیزیک -- مسابقه‌ها. الف. رهبر، منیژه، ۱۳۲۴ -
ویراستار. ب. مقبلی، ناصر، ۱۳۱۷ - ، ویراستار. ج. عنوان.

۲۷۲/۲۳۸

LB۳۰۶۰/۲۴/ع۸م۵

۱۱۸۰۷۴۶

۱۳۸۷

کتابخانه ملی ایران

فهرست

پنج	مقدمه مترجم
۱	بیست و چهارمین المپیاد بین المللی فیزیک آمریکا، ۱۳۷۲/۱۹۹۳
۲۰	بیست و پنجمین المپیاد بین المللی فیزیک چین، ۱۳۷۳/۱۹۹۴
۳۹	بیست و ششمین المپیاد بین المللی فیزیک استرالیا، ۱۳۷۴/۱۹۹۵
۵۶	بیست و هفتمین المپیاد بین المللی فیزیک نروژ، ۱۳۷۵/۱۹۹۶
۷۱	بیست و هشتمین المپیاد بین المللی فیزیک کانادا، ۱۳۷۶/۱۹۹۷
۸۵	بیست و نهمین المپیاد بین المللی فیزیک ایسلند، ۱۳۷۷/۱۹۹۸
۱۱۰	سی امین المپیاد بین المللی فیزیک ایتالیا، ۱۳۷۸/۱۹۹۹
۱۲۵	سی و یکمین المپیاد بین المللی فیزیک انگلستان، ۱۳۷۹/۲۰۰۰
۱۵۰	سی و دومین المپیاد بین المللی فیزیک ترکیه، ۱۳۸۰/۲۰۰۱

۱۶۳	سى وسومين الميپاد بين المللى فيزيك اندونزى، ۲۰۰۲/۱۳۸۱
۱۸۴	سى وچهارمين الميپاد بين المللى فيزيك تايوان، ۲۰۰۳/۱۳۸۲
۲۰۸	سى وپنجمين الميپاد بين المللى فيزيك كره جنوبى، ۲۰۰۴/۱۳۸۳
۲۲۶	سى وششمين الميپاد بين المللى فيزيك اسپانيا، ۲۰۰۵/۱۳۸۴
۲۴۳	سى وهفتمين الميپاد بين المللى فيزيك سنگاپور، ۲۰۰۶/۱۳۸۵
۲۵۹	سى وهشتمين الميپاد بين المللى فيزيك ايران، ۲۰۰۷/۱۳۸۶
۲۷۹	پيوست الف
۲۸۳	پيوست ب
۲۸۴	پيوست پ
۲۸۵	پيوست ت

به نام خدا

مقدمه مترجم

المپیاد بین‌المللی فیزیک، که در سال ۱۹۶۷/۱۳۴۶ پایه‌گذاری شد از یک سنت قدیمی مسابقه‌های ریاضی در اروپای شرقی نشأت گرفته است. پیش از این رویداد بین‌المللی، در بعضی از کشورها مسابقه‌هایی وجود داشت، از جمله مسابقه‌های ریاضی معروف اُتوس^۱، که از سال ۱۸۹۴/۱۲۷۳ زیر نظر انجمن ریاضی و فیزیک مجارستان آغاز شده است، به طوری که اولین المپیاد ریاضی در سال ۱۹۵۹/۱۳۳۸ برگزار شد.

پایه‌گذار اصلی المپیاد فیزیک چسلاو سیسلووسکی^۲، از دانشگاه ورشو است.* وی پس از مشورت‌های زیاد با فیزیک‌دانان کشورهای دیگر، اولین المپیاد بین‌المللی فیزیک^۳ را، در سال ۱۹۶۷/۱۳۴۶، زیر نظر انجمن فیزیک لهستان برگزار کرد. پنج کشور بلغارستان، چک و اسلواکی، مجارستان، لهستان و رومانی در این مسابقه شرکت کردند. سال بعد این مسابقه در مجارستان برگزار شد، که کشورهای آلمان شرقی (سابق)، اتحاد جماهیر شوروی سابق و یوگسلاوی (سابق) به فهرست شرکت‌کنندگان اضافه شدند.

از این تاریخ به تدریج بر تعداد کشورهای شرکت‌کننده اضافه شد^۴، به طوری که در سال ۲۰۰۶/۱۳۸۶ که در شهر اصفهان برگزار شد بیش از ۷۰ کشور با فرستادن تیم و چند کشور دیگر با اعزام ناظر (برای فراهم کردن امکان شرکت در مسابقه‌های آینده) در این المپیاد حضور داشتند. این مسابقه سالانه، میان دانش‌آموزان

1. Eötvös Mathematics Competitions 2. Czeslaw Scislowski

* آقای چسلاو سیسلووسکی در نخستین روز برگزاری المپیاد جهانی فیزیک که در سال ۱۳۸۶ در شهر اصفهان برگزار گردید، به‌علت عارضه قلبی درگذشتند.

3. International Physics Olympiad (IPhO)

۴. ایران در سال ۱۳۶۷ به‌عنوان ناظر و از سال ۱۳۶۸ به‌طور رسمی در المپیاد بین‌المللی فیزیک شرکت کرد و پس از آن در همه المپیادها (بجز المپیاد سال ۱۳۷۲ به‌علت عدم صدور روآید از سوی کشور میزبان) شرکت کرده است.

پیش‌دانشگاهی سراسر جهان (در کشور ما دانش‌آموزان پایه سوم متوسطه) برگزار می‌شود. المپیاد بین‌المللی فیزیک، رویداد فرهنگی و اجتماعی بزرگی است که یک هفته تمام طول می‌کشد. از این یک هفته فقط دو نصف روز به خود امتحان اختصاص دارد^۱؛ ولی همین مسابقه دلیل وجودی این رویداد است. مطابق آیین‌نامه، کشور میزبان مسائله‌های امتحانی المپیاد را طرح می‌کند. در طرح مسائله‌های مسابقه باید نکته‌های زیر مورد توجه قرار گیرد:

• مسائله‌ها باید از یک سو بهترین دانش‌آموزان را به چالش وادارند و از سوی دیگر طوری باشند که هر دانش‌آموز بتواند کاری انجام دهد.

• هر مسائله باید چند مرحله داشته باشد، به طوری که هر دانش‌آموز حداقل بتواند یک مرحله‌اش را حل کند.

• هر مسائله باید طوری طراحی شود که مرتبط با بیش از یک مبحث فیزیکی نباشد (اگر مسائله شامل چند قسمت مستقل از هم باشد، می‌تواند مربوط به مبحث‌های مختلفی باشد).

• مسائله‌ها، تا آنجا که ممکن است باید جالب و در عین حال عمیق باشند، ولی محاسبه ریاضی آن‌ها نباید دشوار و پیچیده باشد.

• امتحان باید تا آنجا که مقدور است از محتوای برنامه درسی رسمی باشد. به عبارت دیگر در سطح مفاهیمی باشد که دانش‌آموزان با آن سروکار داشته‌اند.

• مسائله‌ها باید از لحاظ دشواری درجه‌بندی شوند خواه در یک مسائله و خواه از یک مسائله به مسائله دیگر.

پیش از این، مسائله‌های المپیادهای جهانی فیزیک سال‌های ۱۳۴۶ تا ۱۳۷۱ توسط آقایان دکتر رضا منصوری و دکتر احمد شیرزاد ترجمه و به‌همت همین مؤسسه منتشر شده است. اما کتاب حاضر در برگرفته ترجمه مجموعه مسائله‌های ۱۰ دوره مسابقه‌های نظری و پاسخ تشریحی آن‌هاست که از سال ۱۳۷۲/۱۹۹۳ تا ۲۰۰۷/۱۳۸۶ در کشورهای مختلف جهان برگزار شده است. برای ترجمه این ۹ دوره، از متنی که کشورهای میزبان منتشر کرده‌اند استفاده شده است.

لازم می‌دانم از سرکار خانم دکتر منیره رهبر به جهت ویرایش متن حاضر تشکر کنم که مرا و خوانندگان کتاب را سپاس‌گزار خویش ساختند. از آقای ناصر مقبلی که در تمام مراحل با زحمت و شکیبایی تمام ناظر بر حسن اجرای کار بودند و با راهنمایی‌ها و پیشنهادهای نیکوی خود، موجبات بهتر شدن کتاب را فراهم نمودند، تشکر می‌کنم. همچنین از عوامل تولید که با دقت و کوشش فراوان در مراحل مختلف، سبب آراستگی هرچه بیشتر کتاب شدند، سپاس‌گزاری می‌کنم. در آخر خدای بزرگ را سپاس می‌گزارم که همه نیروها از او و همه سپاس‌ها برای او و به جانب اوست. از او فزونی توفیق بر کارهای نیک را خواستارم. آنه رفیق شفیق.

روح‌الله خلیلی بروجنی

فروردین‌ماه ۱۳۸۷

۱. ابتدا مسابقه عملی (Experimental Competition) به مدت ۵ ساعت و نصف روز دیگر مسابقه نظری (Theoretical Competition) آن نیز به مدت ۵ ساعت برگزار می‌شود.

بیست و چهارمین المپیاد بین‌المللی فیزیک

ویلیامسبورگ، ویرجینیا، آمریکا*

مسابقه نظری - زمان ۵ ساعت

۱۹۹۳/۱۳۷۲

مسئله ۱ الکتروسیستة جوی^۱

از دیدگاه الکتروسیستة ساکن، سطح زمین را می‌توان یک رسانای خوب در نظر گرفت. به طوری که بار کل آن Q و میانگین بار سطحی آن σ است.

الف) در هوای خوب، یک میدان الکتریکی E به طرف پایین و برابر 150 V/m در سطح زمین وجود دارد. اندازه چگالی بار سطحی و کل بار الکتریکی در سطح زمین را به دست آورید.

ب) اندازه میدان الکتریکی روبه پایین، با افزایش ارتفاع از سطح زمین کاهش می‌یابد، به طوری که در ارتفاع 100 متری حدود 100 V/m می‌شود. مقدار میانگین بار الکتریکی خالص در هر مترمکعب جو را بین سطح زمین و ارتفاع 100 متری حساب کنید.

پ) چگالی بار خالصی که در قسمت (ب) حساب کردید، در واقع ناشی از تعداد تقریباً مساوی یون‌های با یک بار مثبت و منفی (n_+ و n_-) در واحد حجم است. در نزدیکی سطح زمین، و شرایط هوای خوب $10^8 \text{ m}^{-3} \times 6 \approx n_- \approx n_+$ است. بر اثر میدان الکتریکی قائم، این یونها

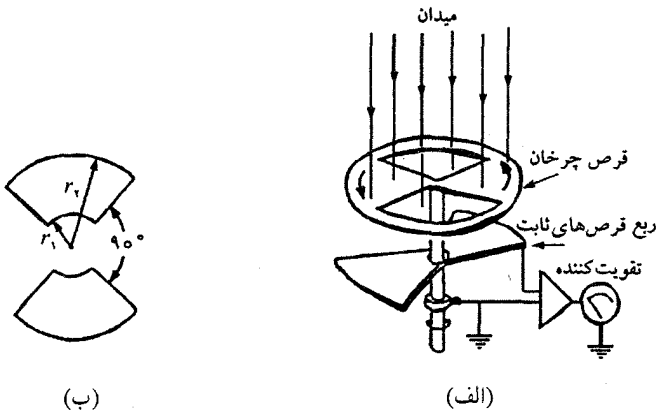
*. Williamsburg, Virginia, U.S.A 1. Atmospheric Electricity

حرکت می‌کنند و سرعت آن‌ها با شدت میدان الکتریکی متناسب است

$$v \approx 1,5 \times 10^{-4} E$$

که در آن v برحسب m/s و E برحسب V/m است. اگر هیچ فرایند دیگری (مثلاً رعد و برق) برای تولید یون‌ها در جو در کار نباشد، چه مدت طول می‌کشد تا بر اثر حرکت آن‌ها، نصف بارهای سطح زمین خنثی شود؟

(ت) یکی از راه‌های اندازه‌گیری میدان الکتریکی جو، و در نتیجه σ ، استفاده از دستگاه شکل ۱-الف است. دو صفحه فلزی به شکل ربع دایره متصل به هم، ولی بدون اتصال به زمین، درست در زیر یک قرص چرخان متصل به زمین قرار دارند (در شکل ۱-الف برای اینکه شکل دستگاه بهتر دیده شود، فاصله بین قرص و ربع دایره‌ها بزرگ‌تر رسم شده است). در هر دور چرخش قرص، دو بار ربع دایره‌های عایق بندی شده کاملاً در معرض میدان الکتریکی قرار می‌گیرند و سپس (در مدت $\frac{1}{4}$ دور بعد) به طور کامل از تأثیر میدان حفاظت می‌شوند. دوره چرخش قرص را T بگیرید و فرض کنید مطابق شکل ۱-ب، T_1 و T_2 به ترتیب شعاع درونی و بیرونی ربع دایره‌های عایق شده باشد.

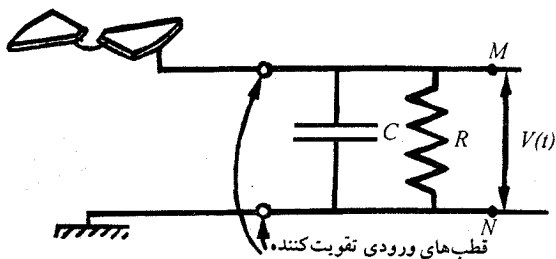


شکل ۱

لحظه‌ای را که میدان روی ربع دایره‌های عایق شده تأثیر ندارد $t_0 = 0$ فرض کنید. عبارتی را به دست آورید که بار کل القاشده روی سطح بالایی ربع دایره‌های عایق بندی شده را برحسب زمان، یعنی $q(t)$ را بین $t = 0$ تا $t = T/2$ به دست دهد و نمودار تغییرات آن را رسم کنید. (در این وضعیت، اثر ناشی از جریان یون‌های جو را نادیده بگیرید.)

(ث) دستگاهی که در قسمت (ت) شرح داده شد مطابق شکل ۲ به یک تقویت کننده متصل شده است

که ورودی آن معادل مداری متشکل از خازن C و مقاومت R است که به‌طور موازی به هم وصل شده‌اند. (ظرفیت دستگاه ربع دایره‌ها در مقابل C را نادیده بگیرید.)



شکل ۲

نمودارهای نحوه تغییر اختلاف پتانسیل میان نقطه‌های M و N را برحسب t در یک دور چرخش قرص، درست از آغاز چرخش با دوره T ، در حالت‌های زیر رسم کنید

حالت اول. $T = T_a \ll CR$

حالت دوم. $T = T_b \gg CR$

(فرض کنید مقادیر C و R ثابت‌اند؛ در حالت‌های اول و دوم تنها T تغییر می‌کند).

به‌ازای بزرگ‌ترین مقدار $V(t)$ در حالت‌های اول و دوم، که آن‌ها را به‌ترتیب با V_a و V_b نشان می‌دهیم، عبارتی را برای نسبت تقریبی V_a/V_b به‌دست آورید.

ج) فرض کنید $E_0 = 150 \text{ V/m}$, $r_1 = 1 \text{ cm}$, $r_2 = 7 \text{ cm}$, $C = 0.1 \mu\text{F}$, $R = 20 \text{ M}\Omega$ و قرص با سرعت 50° دور در ثانیه می‌چرخد.

در این حالت، بیشینه مقدار V در مدت یک دور چرخش، تقریباً چقدر است؟ در حل این مسئله در صورت نیاز از داده‌های زیر استفاده کنید

شعاع متوسط زمین: $R_E = 6.4 \times 10^6 \text{ m}$

بار الکتریکی پایه: $e = 1.6 \times 10^{-19} \text{ C}$

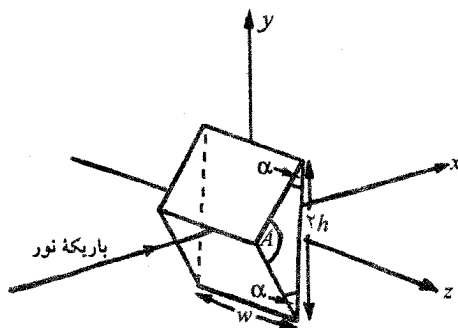
ثابت گازها: $R = 8.31 \text{ Jmol}^{-1}\text{K}^{-1}$

ثابت آووگادرو: $N_A = 6.02 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}$

مسئله ۲ نیروهای لیزری وارد بر یک منشور شفاف

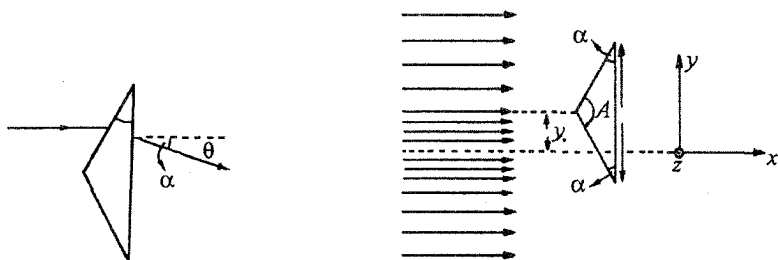
شکست باریکه نوری لیزر قوی در اجسام شفاف کوچک، می‌تواند نیروهای قابل ملاحظه‌ای بر آن‌ها وارد کند. برای بررسی درستی این پدیده، یک منشور شیشه‌ای کوچک مثلث القاعده را که زاویه رأس آن

$A = \pi - 2\alpha$ ، طول قاعده آن $2h$ و طول یال آن w است مطابق شکل ۳ در نظر بگیرید. ضریب شکست منشور n و چگالی جرمی آن ρ است.



شکل ۳

فرض کنید این منشور در مسیر باریکه نور یک لیزر، که در جهت افقی x حرکت می‌کند قرار دارد. (در تمام این مسئله فرض کنید که منشور نمی‌چرخد، یعنی رأس آن همواره در خلاف جهت باریکه نور لیزر قرار دارد، سطوح مثلثی آن موازی با صفحه xy است و همان‌طور که شکل ۳ نشان می‌دهد قاعده آن با صفحه yz موازی است.) ضریب شکست هوای اطراف را $n_0 = 1$ بگیرید. فرض کنید رخ‌های منشور با یک لایه ضد بازتاب اندود شده است، در نتیجه، بازتابی رخ نمی‌دهد. شدت^۱ باریکه نور لیزر در تمام پهنای آن، یعنی در راستای محور z ، یکنواخت است اما با افزایش فاصله y از x به‌طور خطی کاهش می‌یابد، به طوری که به‌ازای $y = 0^\circ$ مقدار آن بیشینه و برابر I_0 و به‌ازای $y = \pm 4h$ برابر صفر است (شکل ۴).



شکل ۵

شکل ۴

الف) در حالتی که نور لیزر به رخ بالایی منشور می‌خورد، معادله‌هایی را بنویسید که با آن‌ها بتوان زاویه θ را برحسب α و n بیان کرد (شکل ۵).

ب) هنگامی که رأس منشور به اندازه $|y_0| \leq 3h$ از محور x دور می‌شود، مؤلفه‌های x و y نیروی کلی^۱ را که نور لیزر بر منشور وارد می‌کند، برحسب I_0 ، θ ، h ، w و y_0 بنویسید.

۱. شدت، توان وارد بر واحد سطح است و برحسب $W \cdot m^{-2}$ بیان می‌شود.

نمودار مقادیر مؤلفه‌های افقی و قائم نیرو را برحسب جابه‌جایی قائم y رسم کنید.

(پ) فرض کنید پهنای باریکه نور لیزر در راستای محور z برابر 1 mm و در راستای محور y برابر $8^\circ \mu\text{m}$ است. ویژگی‌های دیگر منشور عبارتند از $\rho = 2.5 \text{ gcm}^{-3}$ ، $w = 1 \text{ mm}$ ، $n = 1.5$ ، $h = 1^\circ \mu\text{m}$ و $\alpha = 3^\circ$. هنگامی که رأس منشور در فاصله $y = -\frac{h}{4} (= -5 \mu\text{m})$ زیر محور باریکه نور لیزر قرار دارد، توان لیزر (برحسب وات) چقدر باید باشد تا نیروی گرانی وارد بر منشور (در راستای $-y$) را خنثی کند؟

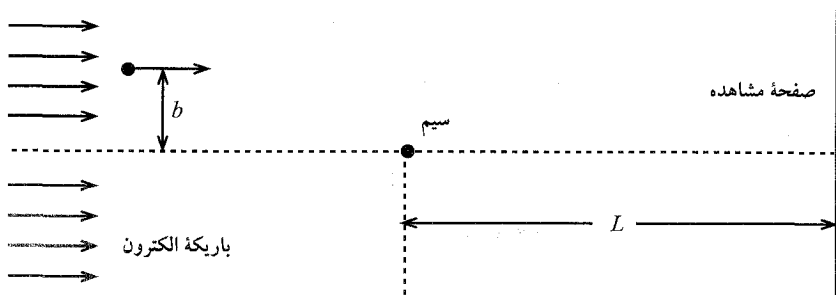
(ت) فرض کنید این آزمایش با همین منشور در نبود گرانی انجام شود و ابعاد باریکه نور لیزر مانند قسمت (پ) ولی $I_0 = 10^8 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2}$ باشد. اگر منشور را به اندازه $y = h/2^\circ$ از خط مرکزی باریکه لیزر دور و سپس آن را رها کنیم، دوره نوسان چقدر می‌شود؟ در حل این مسئله در صورت نیاز از داده‌های زیر استفاده کنید

$$g = 9.8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2} \text{ شتاب گرانی}$$

$$G = 8.85 \times 10^{-12} \text{ N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-2} \text{ شتاب گرانش عمومی}$$

مسئله ۳ باریکه الکترون

ولتاژ شتاب‌دهنده V_0 ، باریکه الکترون‌های پر انرژی موازی و یکنواخت تولید می‌کند. همان‌طور که در شکل ۶ دیده می‌شود، این الکترون‌ها از مقابل یک سیم مسی نازک و دراز دارای بار مثبت می‌گذرند که بر جهت حرکت باریکه الکترون عمود است. نماد b فاصله‌ای را نشان می‌دهد که الکترون‌ها در صورت بردار نبودن سیم از آن می‌گذشتند. همان‌طور که شکل ۶ نشان می‌دهد، الکترون‌ها سپس به یک پرده می‌رسند (صفحه مشاهده) که به فاصله $L (\gg b)$ در پشت سیم قرار دارد. باریکه در ابتدا تا فاصله $\pm b_{\text{max}}$ نسبت به محور سیم امتداد یافته است. در جهت عمود بر صفحه کاغذ، می‌توان هم طول سیم و هم پهنای باریکه الکترون‌ها را نامحدود در نظر گرفت.



شکل ۶

برخی از داده‌های عددی به قرار زیر است. داده‌های دیگر را می‌توانید در انتهای صورت مسئله بیابید.

$$r_0 = 10^{-6} \text{ m} \quad \text{شعاع سیم}$$

$$b_{\text{max}} = 10^{-4} \text{ m} \quad \text{مقدار بیشینه } b$$

$$q_{\text{خطی}} = 4,4 \times 10^{-11} \text{ C} \cdot \text{m}^{-1} \quad \text{بار الکتریکی در واحد طول سیم}$$

$$V_0 = 2 \times 10^4 \text{ V} \quad \text{ولتاژ شتاب‌دهنده}$$

$$L = 0,3 \text{ m} \quad \text{فاصله سیم تا صفحه مشاهده}$$

توجه: در قسمت‌های (ب) تا (ت) تقریب‌های مناسب را که به نتایج تحلیلی و عددی قابل قبول بینجامد در نظر بگیرید.

الف) میدان الکتریکی E ناشی از سیم را محاسبه کنید و نمودار اندازه آن را برحسب فاصله از محور سیم رسم کنید.

ب) با استفاده از فیزیک کلاسیک انحراف زاویه‌ای الکترون را حساب کنید. این محاسبه را به‌ازای مقادیری از پارامتر b انجام دهید که الکترون به سیم برخورد نمی‌کند. فرض کنید θ_f زاویه (کوچک) بین امتدادهای سرعت اولیه الکترون و سرعت آن هنگام رسیدن به صفحه مشاهده است. در این صورت θ_f را حساب کنید.

پ) طرح برخوردها (یعنی، توزیع شدت الکترون‌ها) را روی صفحه مشاهده، مطابق پیش‌بینی فیزیک کلاسیک، محاسبه و رسم کنید.

ت) فیزیک کوانتومی برای توزیع شدت الکترون‌ها (در مقایسه با نتایج فیزیک کلاسیک) تفاوت عمده‌ای را پیش‌بینی می‌کند. طرح پیش‌بینی شده توسط فیزیک کوانتومی را رسم کنید و جزئیات کمی آن را حساب کنید.

در حل این مسئله در صورت نیاز از داده‌های زیر استفاده کنید

$$\epsilon_0 = 8,85 \times 10^{-12} \text{ C}^2 \cdot \text{N}^{-1} \cdot \text{m}^{-2} \quad \text{ضریب گذردهی خلأ}$$

$$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ N} \cdot \text{A}^{-2} \quad \text{تراوایی مغناطیسی خلأ}$$

$$c = 3,00 \times 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} \quad \text{سرعت نور در خلأ (یا هوا)}$$

$$m_e = 9,11 \times 10^{-31} \text{ kg} \quad \text{جرم الکترون}$$

$$m_p = 1,67 \times 10^{-27} \text{ kg} \quad \text{جرم پروتون}$$

$$e = 1,6 \times 10^{-19} \text{ C} \quad \text{بار الکتریکی پایه}$$

$$h = 6,63 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s} \quad \text{ثابت پلانک}$$

$$k = 1,38 \times 10^{-23} \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \quad \text{ثابت بولتزمن}$$

پاسخ تشریحی مسئله‌ها

حل مسئله ۱

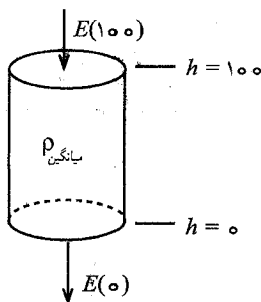
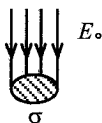
الف) با توجه به قانون گاوس داریم

$$\begin{aligned}\sigma &= \varepsilon_0 E_0 \\ &= -1,85 \times 10^{-12} \times 150 \\ &\approx 1,3 \times 10^{-9} \text{ C/m}^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}Q &= 4\pi R^2 \sigma \\ &= 4\pi \times (6,4 \times 10^6)^2 \times 1,3 \times 10^{-9} \\ &= -6,7 \times 10^5 \text{ C}\end{aligned}$$

ب) استوانه‌ای به ارتفاع 100 متر و سطح مقطع A مطابق شکل ۷ در نظر بگیرید. با توجه به قانون گاوس داریم

$$\begin{aligned}E(0)A - E(100)A &= \frac{q_{\text{محصور}}}{\varepsilon_0} \\ &= \rho_{\text{میانگین}} \times (100 A) / \varepsilon_0\end{aligned}$$



شکل ۷

در نتیجه

$$\begin{aligned} \rho_{\text{میانگین}} &= \frac{\varepsilon_0 [E(0) - E(100)]}{100} \\ &= \frac{8,85 \times 10^{-12} \times 50}{100} \\ &\approx 4,4 \times 10^{-12} \text{ C/m}^2 \end{aligned}$$

پ) اگر تعداد بار الکتریکی بر واحد حجم رسانایی برابر n باشد، و هر بار q با سرعت v حرکت کند، جریان بر واحد سطح (j) از رابطه زیر به دست می‌آید

$$j = nqv$$

در این مسئله، هم بارهای منفی و هم بارهای مثبت ($\pm e$) داریم. روشن است، در حضور یک میدان الکتریکی به طرف پایین، بارهای مثبت به طرف پایین و بارهای منفی به طرف بالا حرکت می‌کنند. در این وضعیت، تنها بارهای مثبت می‌توانند بار سطحی زمین را خنثی کنند. در نتیجه اگر جهت روبه پایین را مثبت فرض کنیم، داریم

$$\begin{aligned} j &= n_+ev \\ &\approx (6 \times 10^8) \times (1,6 \times 10^{-19}) \times (1,5 \times 10^{-4} E) \\ &\approx 1,44 \times 10^{-14} E \end{aligned}$$

از طرفی j برابر است با آهنگ تغییر چگالی سطحی بار σ و از طرف دیگر E برابر $-\sigma/\varepsilon_0$ است. در نتیجه داریم

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma}{dt} &= -1,44 \times 10^{-14} \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \\ &= -\frac{1,44 \times 10^{-14}}{8,85 \times 10^{-12}} \sigma \\ &= -1,63 \times 10^{-3} \sigma \approx -\frac{1}{600} \sigma \end{aligned}$$

این درست مانند معادله واپاشی رادیواکتیو است و پاسخ آن یک تابع نمایی است که در آن σ برحسب t کاهش می‌یابد، یعنی

$$\sigma(t) = \sigma_0 e^{-t/\tau}, \quad \tau \approx 600 \text{ s}$$

با قرار دادن $\sigma(t)$ در معادله بالا داریم

$$t = \tau \ln 2 = 0,693 \times 600 \approx 415 \text{ s} \approx 7 \text{ min}$$

یک روش حل تقریبی ساده‌ترین است که فرض کنیم مقدار j همواره در مقدار اولیه آن، یعنی j_0 ثابت می‌ماند. در این صورت

$$j_0 = 1,44 \times 10^{-14} E_0 = 1,44 \times 10^{-14} \times 150 \\ \approx 2,15 \times 10^{-12} \text{ A/m}^2$$

با توجه به قسمت (الف) داریم

$$|\sigma_0| = 1,3 \times 10^{-9} \text{ C/m}^2$$

در نتیجه

$$|\sigma_0|/2 = j_0 \times t$$

$$t = (0,65 \times 10^{-9}) / (2,15 \times 10^{-12}) \approx 300 \text{ s} = 5 \text{ min}$$

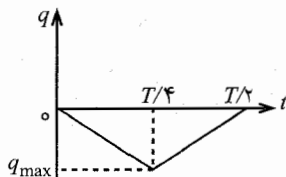
(ت) اگر $t = 0$ زمانی باشد که در آن ربع دایره‌های عایق‌بندی شده کاملاً حفاظت شده‌اند، خواهیم داشت

$$q(t) = -2\pi(r_2^2 - r_1^2)\epsilon_0 E_0 \frac{t}{T} \quad \text{برای } 0 \leq t \leq \frac{T}{4}$$

$$q(t) = -\pi(r_2^2 - r_1^2)\epsilon_0 E_0 \left(1 - \frac{2t}{T}\right) \quad \text{برای } \frac{T}{4} < t \leq \frac{T}{2}$$

تغییرات مشابه در تمام جفت ربع-چرخه‌های بعد رخ می‌دهد. شکل ۸ این تغییرات را برای نیم دوره اول نشان می‌دهد. بیشینه (منفی) بار القایی برابر است با

$$q_{\max} = -\frac{\pi}{4}(r_2^2 - r_1^2)\epsilon_0 E_0$$



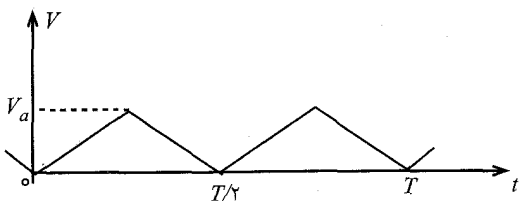
شکل ۸

(ث) این مسئله را می‌توان بدون تحلیل کامل مدار بررسی کرد. تنها کافی است توجه کنیم که آهنگ جریان بار الکتریکی به داخل تقویت‌کننده را می‌توان به آهنگ افزایش بار خازن، یعنی CdV/dt ، و جریانی که از مقاومت می‌گذرد، یعنی V/R ، تقسیم کرد.

حالت اول. اگر $(V/R) \times (T/4) \gg CV$ باشد، یعنی $T = T_a \ll CR$. در مدت $T/4$ باراندکی از مقاومت R می‌گذرد. در نتیجه، $V(t)$ بین $t = 0$ و $t = \frac{T}{4}$ به صورت خطی افزایش می‌یابد و پس از آن بین $t = \frac{T}{4}$ و $t = \frac{T}{2}$ به طور خطی و برابر همان مقدار کاهش می‌یابد. در این صورت

$$V_{\max} = V_a \approx \frac{|q_{\max}|}{C} \quad (1)$$

که مقدار q_{\max} را در قسمت (ت) حساب کردیم. شکل ۹ تغییرات V بر حسب t را نشان می‌دهد.



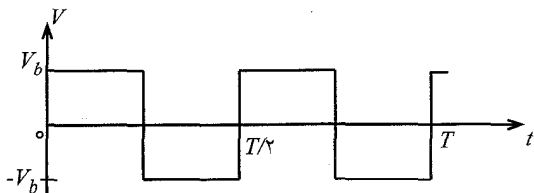
شکل ۹

حالت دوم. اگر $CR \gg T = T_b \ll CR$ باشد، یعنی $CR \ll T_b$ ، بیشتر بار به سرعت از مقاومت R می‌گذرد. جریان ثابت مثبتی تا هنگامی از مقاومت R می‌گذرد که اندازه بار q افزایش یابد و همان مقدار جریان منفی تا موقعی که اندازه بار q کاهش یابد، از مقاومت R می‌گذرد. اندازه این جریان تقریباً برابر $|q_{\max}|/(T_b/4)$ است. در نتیجه ولتاژ دو سر R در هر ربع دوره تقریباً ثابت است و به طور متناوب مطابق شکل ۱۰ مثبت و منفی می‌شود. در این حالت

$$V_{\max} = V_b \approx \frac{4q_{\max}R}{T_b} \quad (2)$$

از رابطه‌های (۱) و (۲) داریم

$$\frac{V_a}{V_b} = \frac{T_b}{4CR}$$



شکل ۱۰

(ج) داریم

$$CR = 10^{-8} \times 2 \times 10^7 = 0.2 \text{ s} \quad \text{و} \quad T = 1/50 = 0.02 \text{ s}$$

در نتیجه $CR = 10 \times T$ ، به طوری که شرط $CR \gg T$ برقرار است. همچنین می‌توانیم از قسمت (ث- حالت اول) استفاده کنیم. داریم

$$A_{\max} = \frac{\pi}{2} (V^2 - 1^2) = 75 \text{ cm}^2 = 7,5 \times 10^{-3} \text{ m}^2$$

$$E_0 = 150 \text{ V/m} \Rightarrow \sigma = \epsilon_0 E_0 \approx 1,33 \times 10^{-9} \text{ C/m}^2$$

در نتیجه

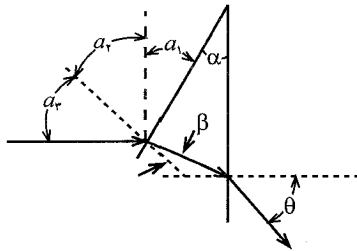
$$q_{\max} = 1,33 \times 10^{-9} \times 7,5 \times 10^{-3} \approx 1,0 \times 10^{-11} \text{ C}$$

بنابراین

$$V_{\max} = \frac{q_{\max}}{C} = \frac{1,0 \times 10^{-11}}{1,0 \times 10^{-8}} = 10^{-3} \text{ V} = 1 \text{ mV}$$

حل مسئله ۲

الف) این یک مسئله ساده در هندسه و قانون اسنل است. با توجه به شکل ۱۱ زاویه تابش برابر $a_3 = \alpha$ است زیرا $a_1 = \alpha$ و $a_1 + a_2 = a_2 + a_3 = 90^\circ$.



شکل ۱۱

با استفاده از قانون اسنل $\sin \alpha = n \sin \beta$ زاویه β را به دست می‌آوریم. زاویه تابش باریکه نور لیزر روی قاعده منشور برابر است با

$$\frac{\pi}{2} - \left[\pi - \alpha - \left(\frac{\pi}{2} - \beta \right) \right] = \alpha - \beta$$

در نتیجه

$$\sin \theta = n \sin(\alpha - \beta)$$

یا

$$\theta = \sin^{-1} \left\{ n \sin \left[\alpha - \sin^{-1} \left(\frac{\sin \alpha}{n} \right) \right] \right\}$$

ب) نیروی وارد بر منشور برابر و در جهت مخالف آهنگ تغییر تکانه نور لیزر است که از آن می‌گذرد. برای بررسی این موضوع، تغییر تکانه نور لیزر فرودی، بر نیمه بالایی منشور را در نظر می‌گیریم. تعداد فوتون‌هایی را که در واحد زمان با تابیدن باریکه نور لیزر موازی محور x ، از نیمه بالایی منشور می‌گذرد τ_u بگیریم. اگر انرژی هر فوتون E باشد، تکانه اولیه آن برابر $\vec{p}_i = \frac{E}{c} \vec{i}$ است ولی فوتون‌ها با زاویه θ نسبت به محور x از منشور خارج می‌شوند، در نتیجه تکانه نهایی آن برابر

$$\vec{p}_f = \frac{E}{c} (\cos \theta \vec{i} - \sin \theta \vec{j})$$

است. بنابراین تغییر تکانه هر فوتون برابر است با

$$\delta \vec{p} = \frac{E}{c} (\cos \theta - 1) \vec{i} - \frac{E}{c} \sin \theta \vec{j}$$

ولی آهنگ تغییر تکانه این فوتون‌ها، برابر است با

$$\vec{F}_u = \tau_u \delta \vec{p} = \frac{\tau_u E}{c} [(\cos \theta - 1) \vec{i} - \sin \theta \vec{j}]$$

کمیت $\tau_u E$ در واقع توانی است که به نیمه بالایی منشور داده می‌شود و نیروی پس‌زنی \vec{F}_u نیز بر اثر شکست باریکه نور لیزر، به نیمه بالایی منشور وارد می‌شود، بنابراین

$$\vec{F}_u = \frac{P_u}{c} [(\cos \theta - 1) \vec{i} + \sin \theta \vec{j}]$$

به همین ترتیب نیروی وارد بر نیمه پایینی منشور برابر است با

$$\vec{F}_l = \frac{P_l}{c} [(\cos \theta - 1) \vec{i} - \sin \theta \vec{j}]$$

در این صورت برآیند نیروهای وارد بر منشور برابر است با

$$\vec{F} = \frac{1}{c} [(P_u + P_l)(\cos \theta - 1)] \vec{i} + \frac{1}{c} [(P_u - P_l) \sin \theta] \vec{j}$$

در قسمت (الف) زاویه θ را برحسب زاویه α به دست آوردیم. با محاسبه شدت‌های متوسط \bar{I}_u و \bar{I}_l و ضرب آن‌ها در تصویر مساحت هر نیمه در جهت عمود بر باریکه نور لیزر یعنی hw ، می‌توانیم P_u و P_l را به دست آوریم. چون توزیع شدت جریان $I(y)$ تابع خطی از y است، باید میانگین آن محاسبه شود. در این مسئله داریم

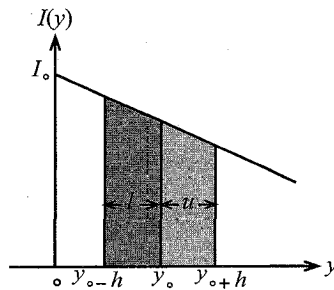
$$I(y) = \begin{cases} I_0 \left(1 - \frac{y}{4h}\right) & 0 < y < +4h \\ I_0 \left(1 + \frac{y}{4h}\right) & -4h < y < 0 \end{cases}$$

حال فرض کنید منشور را به اندازه y نسبت به محور x بالا ببریم ($y > 0$). در اینجا دو حالت متمایز وجود دارد:

حالت اول. وقتی $h \leq y \leq 3h$ است، نیمه بالایی منشور به طور کامل در برابر باریکه نور لیزر قرار دارد. میانگین شدت در این حالت برابر است با شدت در مرکز هر رخ منشور، به طوری که مرکز رخ نیمه بالایی در $y_0 + \frac{h}{2}$ و نیمه پایینی در $y_0 - \frac{h}{2}$ قرار دارد (شکل ۱۲)، بنابراین داریم

$$\bar{I}_u = I_0 \left(1 - \frac{y_0 + h/2}{4h} \right) = I_0 \left(\frac{3}{4} - \frac{y_0}{4h} \right)$$

$$\bar{I}_l = I_0 \left(1 - \frac{y_0 - h/2}{4h} \right) = I_0 \left(\frac{5}{4} - \frac{y_0}{4h} \right)$$



شکل ۱۲ \bar{I}_l و \bar{I}_u وقتی $y \geq h$ است.

و در نتیجه خواهیم داشت

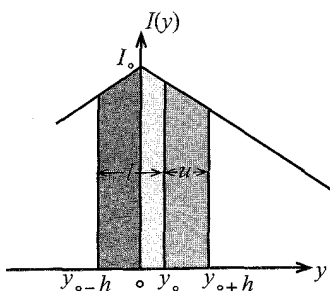
$$\vec{F} = F_x \vec{i} + F_y \vec{j}$$

$$\begin{aligned} F_x &= \frac{1}{c} [(P_u + P_l)(1 - \cos \theta)] \\ &= \frac{2hwI_0}{c} \left(1 - \frac{y_0}{4h} \right) (1 - \cos \theta) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F_y &= \frac{1}{c} [(P_u - P_l) \sin \theta] \\ &= -\frac{hwI_0}{4c} \sin \theta \end{aligned}$$

حالت دوم. وقتی $0 < y_0 < h$ است، تنها قسمتی از نیمه پایینی منشور در برابر باریکه نور لیزر قرار دارد. قسمتی از نیمه پایینی منشور که بین صفر و y_0 است سهم آن در شدت میانگین، به صورت ضریب $\frac{y_0}{h}$ از سطح نیمه پایینی منشور است (شکل ۱۳)، داریم

$$\bar{I}_l = I(y_0/2) = I_0 \left(1 - \frac{y_0}{4h} \right)$$



شکل ۱۳ \bar{I}_l و \bar{I}_u وقتی $0 < y_0 < h$ است.

سهم قسمتی از نیمه پایینی منشور که بین 0 و $h - y_0$ است، در شدت میانگین به صورت ضریب $\left(1 - \frac{y_0}{h}\right)$ در سطح نیمه پایینی منشور است، داریم

$$\bar{I}_{l_1} = I \left(\frac{h - y_0}{2} \right) = I_0 \left(\frac{y}{h} + \frac{y_0}{h} \right)$$

با جمع این دو با یکدیگر داریم

$$\begin{aligned} P_l &= hw \frac{y_0}{h} \bar{I}_{l_1} + hw \left(1 - \frac{y_0}{h}\right) \bar{I}_{l_2} \\ &= hw I_0 \left(\frac{y}{h} + \frac{y_0}{4h} - \frac{y_0^2}{4h^2} \right) \end{aligned}$$

ولی تابع شدت میانگین مربوط به نیمه بالایی منشور، مانند حالت اول است. یعنی داریم

$$P_u = hw I_0 \left(\frac{y}{h} - \frac{y_0}{4h} \right)$$

با جمع P_l و P_u داریم

$$P_u + P_l = hw I_0 \left(\frac{y}{h} - \frac{y_0^2}{4h^2} \right)$$

با کم کردن P_u از P_l داریم

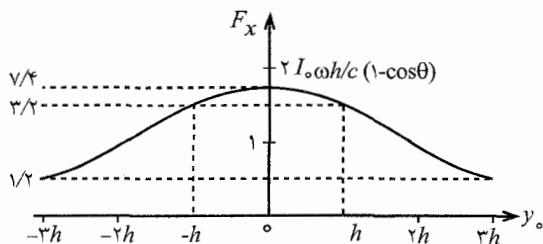
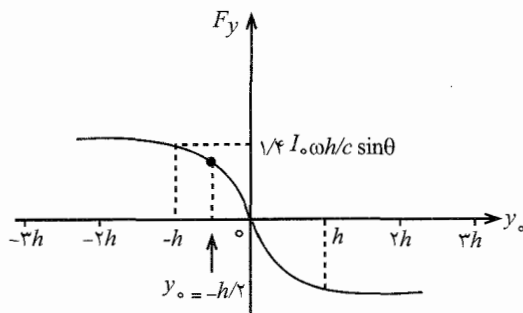
$$P_u - P_l = -hw I_0 \frac{y_0}{2h} \left(1 - \frac{y_0}{2h}\right)$$

در نتیجه مؤلفه‌های نیرو در این حالت برابر است با

$$F_x = \frac{hw I_0}{c} \left(\frac{y}{h} - \frac{y_0^2}{4h^2} \right) (1 - \cos \theta)$$

$$F_y = \frac{-hw I_0}{c} \frac{y_0}{2h} \left(1 - \frac{y_0}{2h}\right) \sin \theta$$

چون توزیع شدت حول محور باریکه نورلیزر متقارن است، پاسخ‌ها برای $y_0 < 0$ و $y_0 > 0$ تصویر آینه‌ای حالت $y_0 > 0$ است. نمودارهای F_x و F_y برحسب y_0 در شکل ۱۴ نشان داده شده است.



شکل ۱۴

پ) معادله و نمودار F_y نشان می‌دهد که اگر $y_0 < 0$ باشد، $F_y > 0$ و مخالف نیروی گرانی است. برای اینکه نیروی گرانی وارد بر منشور خنثی شود، باید $F_y = mg$ باشد. برای به‌دست آوردن جرم منشور با توجه به اینکه حجم آن برابر $h^2 w \tan \alpha$ است، داریم

$$m = \rho V = \rho h^2 w \tan \alpha$$

$$= (2,5 \text{ g/cm}^3) \times (10 \times 10^{-2} \text{ cm})^2 \times (10^{-2} \text{ cm}) \times \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$= 1,44 \times 10^{-7} \text{ g}$$

$$= 1,44 \times 10^{-10} \text{ kg}$$

$$mg = 1,44 \times 10^{-9} \text{ N}$$

برای به‌دست آوردن I_0 داریم

$$\frac{I_0 h w y_0}{c} \left(1 - \frac{y_0}{2h}\right) \sin \theta = mg = 1,44 \times 10^{-9}$$

با قرار دادن مقادیر $\theta = 15/9^\circ$ ، $y_0 = \frac{h}{\gamma}$ ، $h = 10 \times 10^{-6}$ m و $w = 10^{-3}$ m داریم

$$I_0 = \frac{3 \times 10^8 \times 1/42 \times 10^{-9}}{10^{-5} \times 10^{-3} \times 0/274 \times \frac{3}{16}}$$

$$= 8,30 \times 10^8 \text{ W/m}^2$$

ولی توان P برابر است با

$$P = \bar{I} \times (\text{سطح باریکه نور لیزر}) = \frac{I_0}{\gamma} \times (\text{سطح باریکه نور لیزر})$$

$$= \frac{1}{\gamma} \times 8,30 \times 10^8 \times 10^{-3} \times 80 \times 10^{-6} = 33,2 \text{ W}$$

(ت) به ازای جابه‌جایی $\frac{h}{\gamma_0}$ که متناظر با $1 \ll \frac{y_0}{h} = 0,05$ است مؤلفه عمودی نیرو تقریباً برابر است با

$$F_y = -\frac{I_0 w \sin \theta}{2c} y$$

این معادله یک نوسانگر هماهنگ با بسامد زاویه‌ای ω است. داریم

$$\omega = \sqrt{\frac{I_0 w \sin \theta}{2mc}} = \sqrt{\frac{I_0 \sin \theta}{2cph^2 \tan \alpha}}$$

با قرار دادن مقادیر داده شده داریم

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{2 \times 3 \times 10^8 \times 2/5 \times 10^3 \times 10^{-10} \times 1/\sqrt{3}}{10^8 \times 0/274}}$$

$$= 11,2 \times 10^{-3} \text{ s}$$

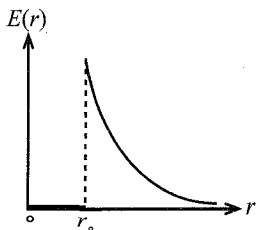
حل مسئله ۳

(الف) با توجه به تقارن، میدان الکتریکی شعاعی و به طرف خارج سیم است و اندازه آن تنها به فاصله از محور سیم، یعنی شعاع r (در دستگاه مختصات استوانه‌ای) بستگی دارد. یک استوانه فرضی حول سیم را در نظر بگیرید؛ بنابر قانون گاوس برای استوانه‌ای به شعاع و طول واحد داریم

$$2\pi r E(r) = \frac{q_{\text{خطی}}}{\epsilon_0} \quad r \geq r_0$$

یا

$$E(r) = \frac{q_{\text{خطی}}}{2\pi r \epsilon_0} = \frac{0,791}{r} \text{ (N/C)} \quad r \geq r_0$$



شکل ۱۵

از طرفی چون مس یک رسانای خوب است، میدان الکتریکی در داخل سیم مسی ($r < r_0$) برابر صفر است. شکل ۱۵ تغییرات میدان الکتریکی را برای $r < r_0$ و $r \geq r_0$ نشان می‌دهد.

ب) بنابر فرض مسئله انحراف زاویه‌ای θ_f کوچک و با نسبت زیر برآورد می‌شود

$$\theta_f \simeq \frac{|\Delta \vec{P}_\perp|}{mv_0}$$

که در آن $|\Delta \vec{P}_\perp|$ تکانهٔ عرضی حاصل از سرعت اولیه و mv_0 تکانهٔ اولیه است. یک برآورد نه چندان دقیق برای θ_f به شرح زیر است:

- نیروی عرضی (هنگامی که قابل ملاحظه باشد) از مرتبهٔ $\frac{eq_{\text{خطی}}}{2\pi\epsilon_0 b}$ است.

- نیروی عرضی (قابل ملاحظه) در مدت زمانی که فاصلهٔ الکترون از مرتبهٔ $2b$ است اثر می‌کند، در نتیجه نیروی عرضی در زمان $\frac{2b}{v_0}$ اثر می‌کند.

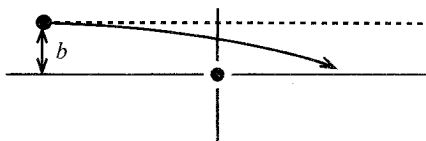
بنابراین تکانهٔ عرضی برابر است با حاصل ضرب نیروی عرضی در مدت تأثیر آن، یعنی داریم

$$|\Delta \vec{P}_\perp| \simeq \frac{eq_{\text{خطی}} 2b}{2\pi\epsilon_0 bv_0} = \frac{eq_{\text{خطی}}}{\pi\epsilon_0 v_0}$$

با استفاده از این رابطه و قانون پایستگی انرژی $\left(\frac{1}{2}mv_0^2 = eV_0\right)$ داریم

$$\theta_f \simeq \frac{eq_{\text{خطی}}}{\pi\epsilon_0 mv_0^2} = \frac{q_{\text{خطی}}}{2\pi\epsilon_0 V_0} = 3,96 \times 10^{-5} \text{ (رادیان)}$$

توجه کنید که انحراف زاویه‌ای خیلی کوچک و مستقل از پارامتر برخورد b است، زیرا نیروی بین بارهای مثبت سیم و باریکهٔ الکترون جاذبه است و همین امر باعث می‌شود مسیر باریکهٔ الکترون مطابق شکل ۱۶ به طرف سیم خم شود.



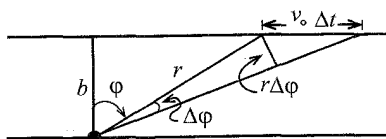
شکل ۱۶

برای برآورد خیلی دقیق θ_f ، می‌توانیم در به‌دست آوردن $|\Delta \vec{P}_\perp|$ از یک انتگرال‌گیری ساده استفاده کنیم. بدین منظور، مسیر واقعی را تقریباً به صورت یک خط مستقیم که به فاصلهٔ b از سیم قرار

دارد، در نظر می‌گیریم (شکل ۱۷).

$$|\vec{F}_\perp| = \frac{eq_{\text{خطی}}}{\sqrt{2}\pi\epsilon_0 r} \cos\varphi$$

$$v_0 \Delta t \cos\varphi = r \Delta\varphi \Rightarrow \Delta t = \frac{r \Delta\varphi}{v_0 \cos\varphi}$$



شکل ۱۷

در نتیجه

$$|\vec{F}_\perp| \Delta t = \frac{eq_{\text{خطی}}}{\sqrt{2}\pi\epsilon_0 r} \cos\varphi \frac{r \Delta\varphi}{v_0 \cos\varphi}$$

$$|\Delta \vec{P}_\perp| = \frac{eq_{\text{خطی}}}{\sqrt{2}\pi\epsilon_0 v_0} \Delta\varphi$$

ولی $\Delta\varphi$ در گستره $-\frac{\pi}{2}$ تا $\frac{\pi}{2}$ تغییر می‌کند، بنابراین داریم

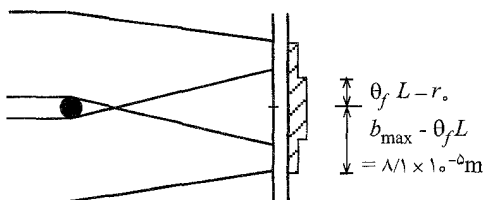
$$|\Delta \vec{P}_\perp| = \frac{eq_{\text{خطی}}}{\sqrt{2}\epsilon_0 v_0}$$

در واقع برآورد دقیق‌تر با برآورد اولیه، تنها با ضریب $\frac{\pi}{4}$ اختلاف دارد. بنابراین برای برآورد دقیق‌تر داریم

$$\theta_f \approx \frac{eq_{\text{خطی}}}{\sqrt{2}\epsilon_0 m v_0^2} = \frac{q_{\text{خطی}}}{\sqrt{2}\epsilon_0 V_0} = 6,21 \times 10^{-5} \text{ (رادیان)}$$

(پ) بیشتر خم شدن مسیر در فاصله‌ای از مرتبه‌ای b از سیم رخ می‌دهد. بنا بر فرض مسئله $L \gg b$ است، در نتیجه به‌طور تقریبی می‌توانیم در حوالی سیم مسیر را دو خط مستقیم متقاطع در نظر بگیریم. با توجه به شکل ۱۸ (که از سطح مقطع نشان داده شده و در آن مقیاس رعایت نشده است)، جابه‌جایی عرضی هر مسیر برابر است با

$$\begin{aligned} \text{جابه‌جایی عرضی} &= \theta_f L = 6,21 \times 10^{-5} \times 0,3 \\ &= 1,86 \times 10^{-5} \text{ m} \approx 19r_0 \gg r_0 \end{aligned}$$



شکل ۱۸

همان‌طور که در شکل ۱۸ دیده می‌شود قسمتی از باریکه الکترون که از دو طرف می‌گذرند یک ناحیه هم‌پوشان دارند. پهنای کامل این ناحیه برابر است با

$$\text{پهنای کامل هم‌پوشانی} = 2 \times (\theta_f L - r_0) \approx 36 r_0 = 36 \times 10^{-6} \text{ m}$$

چگالی برخوردها درون هر ناحیه ثابت است ولی در ناحیه هم‌پوشانی دو برابر است. (ت) طول موج دوبروی نقش (توزیع) موج کوانتومی باریکه الکترون برابر است با

$$\lambda = \frac{h}{mv_0} = \frac{h}{\sqrt{2meV_0}} = 1,68 \times 10^{-12} \text{ m}$$

همان‌طور که در محاسبه بالا دیدیم، طول موج دوبروی خیلی کوچک‌تر از پهنای باریکه الکترون $2b_{\max}$ است به طوری که می‌توان اثرهای «پراش تک شکاف» را نادیده گرفت. به بیان دقیق‌تر، سمت راست سیم، دو موج تخت که با زاویه ثابتی نسبت به یکدیگر (زاویه $2\theta_f$) حرکت می‌کنند هم‌پوشان می‌شوند و تداخل می‌کنند.

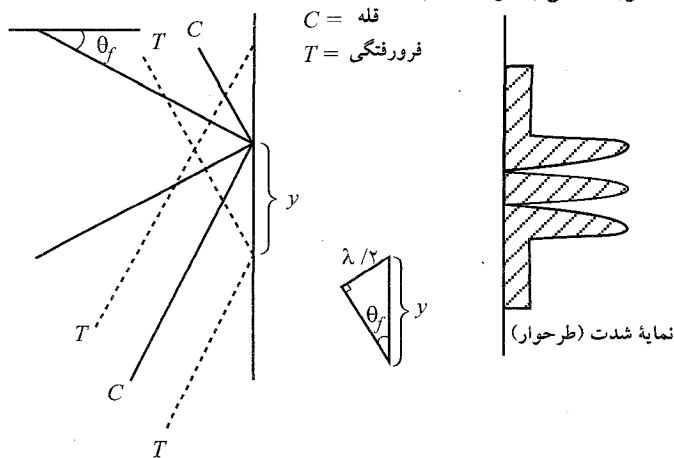
با توجه به شکل ۱۹ داریم

$$y = \frac{\lambda/2}{\sin \theta_f} \approx \frac{\lambda/2}{\theta_f}$$

فاصله بین محل‌های تداخل سازنده مجاور

$$= \frac{\frac{1}{2} \times 1,68 \times 10^{-12}}{6,21 \times 10^{-5}} = 7,00 \times 10^{-8} \text{ m}$$

چون پهنای کامل ناحیه هم‌پوشانی حدود $36 \times 10^{-6} \text{ m}$ است، تقریباً 500 بیشینه تداخلی در اینجا وجود دارد. توجه کنید که فاصله بین بیشینه‌های مجاور به b یا b_{\max} بستگی ندارد (برخلاف وضعیت معمول تداخل با دو شکاف).



شکل ۱۹

بیست و پنجمین المپیاد بین‌المللی فیزیک

پکن-چین*

مسابقه نظری- زمان ۵ ساعت

۱۹۹۴/۱۳۷۳

مسئله ۱ ذره نسبیتی^۱

در نظریه نسبیت خاص رابطه بین انرژی E و تکانه p یک ذره آزاد با جرم سکون m به صورت زیر است

$$E = \sqrt{p^2 c^2 + m^2 c^4} = mc^2$$

اگر چنین ذره‌ای در معرض یک نیروی پایستار قرار بگیرد، انرژی کل ذره که برابر مجموع $\sqrt{p^2 c^2 + m^2 c^4}$ و انرژی پتانسیل است، پایسته می‌ماند.

اگر انرژی ذره خیلی زیاد باشد، می‌توان انرژی سکون آن را نادیده گرفت (این ذره را ذره فرانسیتی^۲ می‌نامند).

الف) حرکت یک بعدی ذره‌ای با انرژی خیلی زیاد را (می‌توان انرژی سکون آن را نادیده گرفت) که تحت تأثیر یک نیروی مرکزی با اندازه f است در نظر بگیرید. فرض کنید در لحظه $t = 0$ ذره در مرکز نیرو و دارای تکانه اولیه p_0 است.

(۱) حرکت ذره را، با رسم جداگانه x بر حسب t و تکانه p بر حسب مختصه فضایی x حداقل

برای یک دوره حرکت، بررسی کنید.

- (ii) مختصات «نقطه‌های بازگشت^۱» را برحسب پارامترهای p و f به دست آورید.
- (iii) جهت پیشرفت حرکت را روی نمودار (p, x) با علامت پیکان مشخص کنید. ممکن است در بازه‌های کوچکی از زمان حرکت ذره فرانسیتی نباشد، از این موارد صرف نظر کنید.
- (ب) مزون ذره‌ای متشکل از دو کوآرک است. جرم سکون M مزون برابر انرژی کل دستگاه دو کوآرکی تقسیم بر c^2 است. یک مدل تک‌بعدی برای مزون در حال سکون در نظر بگیرید. فرض کنید دو کوآرک در امتداد محور x حرکت می‌کنند و یکدیگر را با نیروی ثابت با اندازه f جذب می‌کنند. همین‌طور فرض می‌شود که آن‌ها می‌توانند آزادانه از یکدیگر بگذرند. برای بررسی حرکت پرنرژی کوآرک‌ها می‌توان جرم سکون آن‌ها را نادیده گرفت. در لحظه $t = 0$ هر دو کوآرک در $x = 0$ قرار دارند. حرکت دو کوآرک را با نمودارهای (x, t) و (p, x) به صورت جداگانه نشان دهید. مختصات «نقطه‌های بازگشت» را برحسب M و f تعیین کنید. جهت فرایند را در نمودار (p, x) مشخص کنید، و بیشترین فاصله بین دو کوآرک را تعیین کنید.
- (پ) چارچوب مرجع مورد استفاده در بخش (ب) یعنی چارچوب S نسبت به چارچوب S' (چارچوب آزمایشگاه) در جهت منفی محور x با سرعت ثابت $v = 0.6c$ حرکت می‌کند. مختصات در دو چارچوب مرجع طوری برگزیده شده‌اند که نقطه‌های $x = 0$ در S و $x' = 0$ در S' در لحظه $t = t' = 0$ برهم منطبق‌اند. حرکت دو کوآرک را در یک نمودار (x', t') رسم کنید. مختصات نقطه‌های بازگشت را برحسب M ، f و c مشخص کنید و بیشترین فاصله بین دو کوآرک را در چارچوب آزمایشگاه S' تعیین کنید.
- مختصات ذره‌ها در چارچوب‌های مرجع S و S' با تبدیل‌های لورنتس با یکدیگر مربوط می‌شوند

$$\begin{cases} x' = \gamma(x + \beta ct) \\ t' = \gamma\left(1 + \beta \frac{x}{c}\right) \end{cases}$$

که در آن $\beta = v/c$ ، $\gamma = 1/\sqrt{1 - \beta^2}$ و v سرعت حرکت چارچوب S نسبت به چارچوب S' است.

(ت) برای یک مزون با انرژی سکون $Mc^2 = 140 \text{ MeV}$ و سرعت $0.6c$ نسبت به چارچوب آزمایشگاه S' ، انرژی E' را در چارچوب آزمایشگاه S' تعیین کنید.

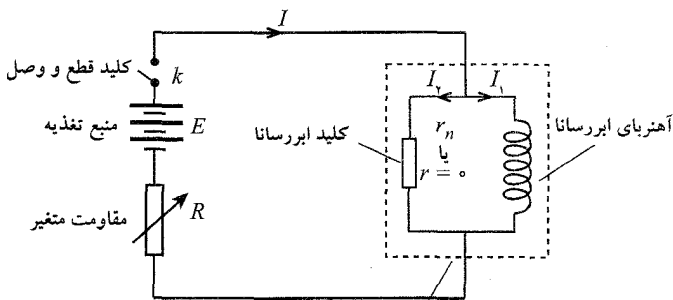
مسئله ۲ آهنربای ابررسانا^۲

آهنرباهای ابررسانا به صورت گسترده در آزمایشگاه‌ها مورد استفاده قرار می‌گیرند. متداول‌ترین آهنربای ابررسانا سیمولوله‌ای است که از سیم ابررسانا ساخته شده است. موضوع جالب توجه در مورد آهنربای ابررسانا تولید میدان‌های مغناطیسی بزرگ بدون هیچ‌گونه اتلاف انرژی ناشی از گرمای ژول است، زیرا

مقاومت الکتریکی سیم ابرسانا هنگامی که آهنربا در هلیوم مایع در دمای $4/2\text{ K}$ غوطه‌ور باشد صفر است. معمولاً آهنربا دارای یک کلید ابرسانا با طراحی مخصوص مطابق شکل ۲۰ است. مقاومت r کلید را می‌توان به صورت، برای حالت ابرسانا یا $r = r_n$ برای حالت معمولی کنترل کرد. هنگامی که مقاومت در حالت ابرساناست، آهنربا در مد پایدار قرار می‌گیرد و جریانی از آهنربا و کلید ابرسانا به‌طور نامحدود عبور می‌کند. این مد پایدار باعث می‌شود که یک میدان مغناطیسی پایا برای مدت زمان طولانی در حالی که منبع خارجی قطع است، برقرار شود.

جزئیات کلید ابرسانا در شکل ۲۰ نیامده است. این کلید معمولاً قطعه کوچکی از یک سیم ابرساناست که یک سیم گرماده به آن پیچیده شده است و به‌صورت مناسبی از حمام هلیوم مایع عایق‌بندی گرمایی شده است. هنگامی که این کلید گرم می‌شود، دمای سیم ابرسانا افزایش می‌یابد و به حالت مقاومت عادی برمی‌گردد. مقدار r_n حدود چند اهم است. در اینجا فرض می‌کنیم که مقاومت آن $5\ \Omega$ است. خودالقایی آهنربای ابرسانا به‌اندازه آن بستگی دارد، فرض کنید مقدار آن برای آهنربای شکل ۲۰ برابر $10\ \text{H}$ باشد. جریان کل I را می‌توان با تنظیم مقاومت R تغییر داد.

می‌خواهیم این مسئله را تنها با رسم نمودارهایی بررسی کنیم!
جهت پیکان‌ها، جهت مثبت جریان‌های I ، I_1 و I_2 است.

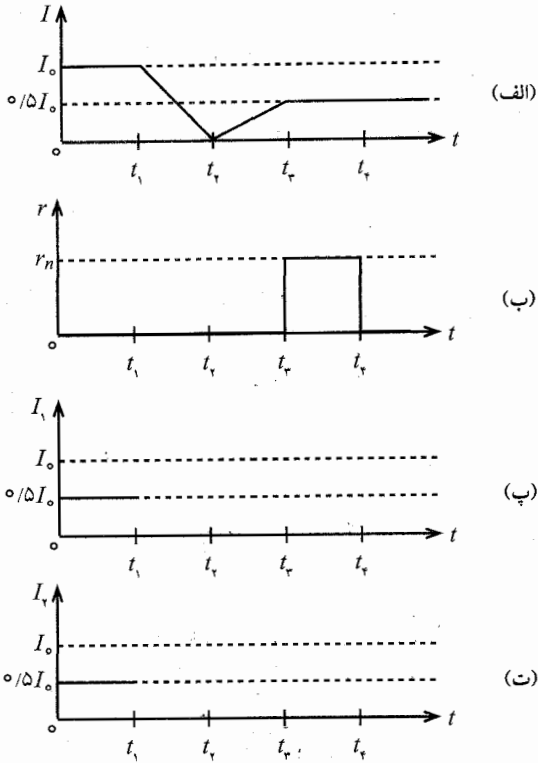


قسمت بسته‌ای که با خط‌چین مشخص شده است
در هلیوم مایع در دمای $4/2\text{K}$ غوطه‌ور است.

شکل ۲۰

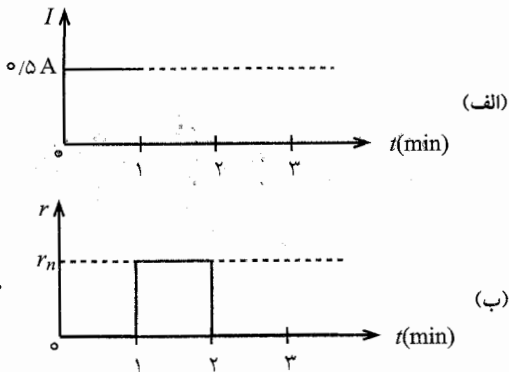
الف) اگر جریان کل I و مقاومت r کلید ابرسانا طوری کنترل شود که برحسب زمان به‌ترتیب مطابق شکل‌های ۲۱-الف و ۲۱-ب تغییر کند، با این فرض که جریان‌های I_1 و I_2 که به‌ترتیب از آهنربا و کلید عبور می‌کنند در آغاز برابر باشند (شکل‌های ۲۱-پ و ۲۱-ت)، چگونگی تغییر جریان‌های I_1 و I_2 را از لحظه t_1 تا t_2 در شکل‌های ۲۱-پ و ۲۱-ت رسم کنید.

ب) فرض کنید در لحظه $t = 0$ که کلید K بسته می‌شود $r = 0$ و $I_1 = 0$ و $R = 7/5\ \Omega$ باشد. همچنین جریان کل I برابر $0/5\ \text{A}$ است. اگر کلید K در حالت بسته باقی بماند، مقاومت r

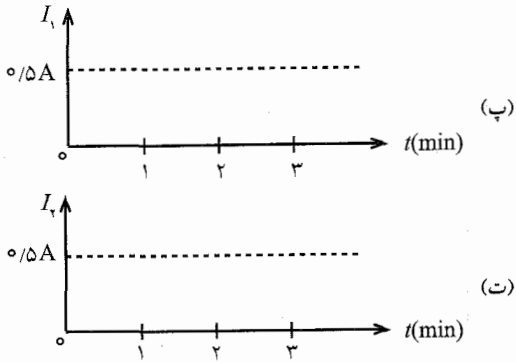


شکل ۲۱

کلید ابرسانا مطابق شکل ۲۲-ب تغییر می‌کند. تغییرات I_1 ، I_2 و I را برحسب زمان به ترتیب در شکل‌های ۲۲-الف، ۲۲-پ و ۲۲-ت رسم کنید.

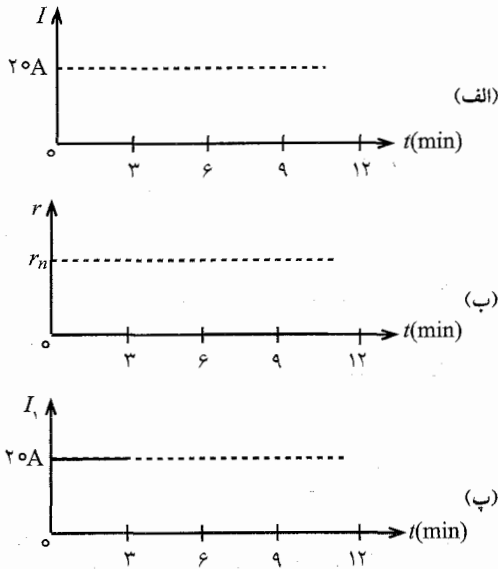


شکل ۲۲

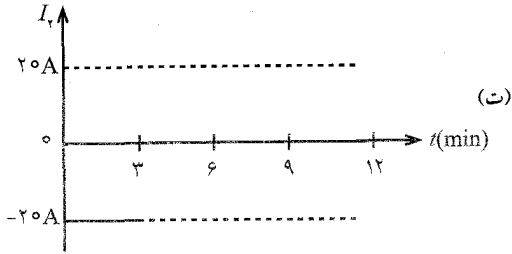


شکل ۲۲ (ادامه)

(پ) فقط جریان‌های کمتر از 0.5 A مجاز به عبور از کلید ابررسانا در حالت عادی هستند، برای جریان‌های بزرگ‌تر کلید می‌سوزد. فرض کنید از لحظه $t = 0$ تا $t = 3\text{ min}$ همان‌طور که در شکل ۲۳ نشان داده شده است، آهنربای ابررسانا در مد پایدار باشد، یعنی $I = 0$ ، (مثلاً 20 A) $I_1 = i_1$ و $I_2 = -i_2$. اگر بخواهیم آزمایش هنگامی که جریان عبوری از آهنربا به صفر می‌رسد متوقف شود، چه باید بکنیم؟ این کار باید در چند مرحله انجام شود؟ تغییرات I ، r ، I_1 و I_2 متناظر با این مراحل را در شکل ۲۳ رسم کنید.

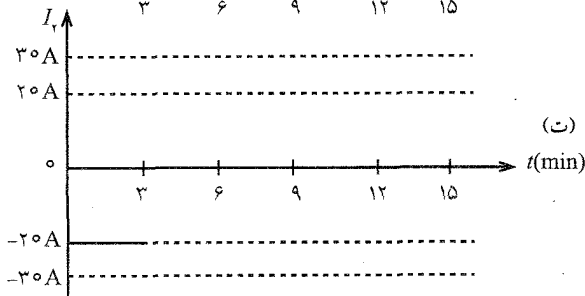
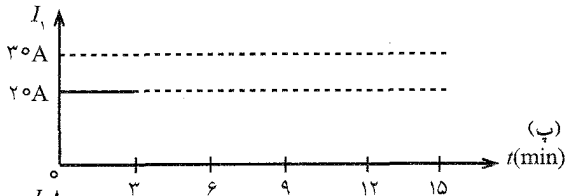
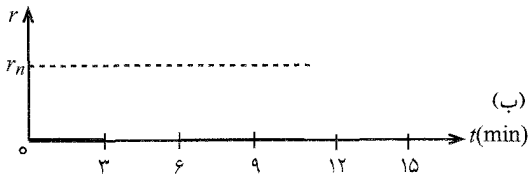
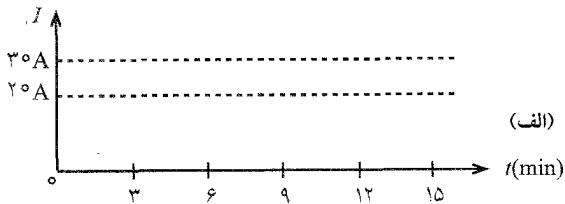


شکل ۲۳



شکل ۲۳ (ادامه)

(ت) فرض کنید آهنربا در مد پایدار باشد و جریان دائم 20 A (از لحظه $t = 0$ تا $t = 3\text{ min}$ ، شکل ۲۴ را ببینید) از آن عبور کند. چگونه می‌توانید آن را به یک مد پایدار با جریان دائم 30 A تبدیل کنید. پاسخ خود را در شکل ۲۴ رسم کنید.



شکل ۲۴

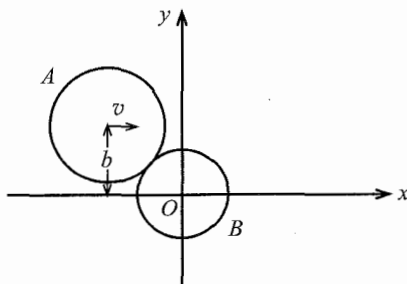
مسئله ۳ برخورد قرص‌های با اصطکاک سطحی^۱

قرص همگن A به جرم m و شعاع R_A روی یک سطح صاف در صفحه $x-y$ و در جهت محور x با سرعت v دارای حرکت انتقالی است (شکل ۲۵ را ببینید). فاصله مرکز قرص از محور x برابر b است.

قرص A با قرص همگن و ساکن B که مرکز آن در مبدأ دستگاه مختصات قرار دارد، برخورد می‌کند. جرم و ضخامت قرص B برابر قرص A است ولی شعاع آن R_B است. فرض می‌کنیم سرعت قرص‌ها در نقطه برخورد، در جهت عمود بر خطی است که مرکزهای دو قرص را به هم متصل می‌کند و برابر سرعت بعد از برخورد است. همچنین فرض می‌کنیم که اندازه نسبی سرعت‌های دو قرص در امتداد خطی است که مرکزهای دو قرص را به هم متصل می‌کند و قبل و بعد از برخورد برابر است.

(الف) برای چنین برخوردی، مؤلفه‌های x و y سرعت‌های دو قرص را بعد از برخورد تعیین کنید، یعنی v'_{Ax} ، v'_{Ay} ، v'_{Bx} و v'_{By} را برحسب m ، R_A ، R_B ، v و b به دست آورید.

(ب) انرژی جنبشی E'_A برای قرص A و E'_B برای قرص B را بعد از برخورد برحسب m ، R_A ، R_B ، v و b به دست آورید.



شکل ۲۵

پاسخ تشریحی مسئله‌ها

حل مسئله ۱

(الف)

(i) اگر مرکز نیرو را مبدأ مختصات x و نقطه با انرژی پتانسیل صفر در نظر بگیریم، انرژی پتانسیل ذره برابر است با

$$U(x) = f|x| \quad (۱)$$

انرژی کل برابر است با

$$W = \sqrt{p^2 c^2 + m_0^2 c^4} + f|x|$$

(ii) با نادیده گرفتن انرژی سکون داریم

$$W = |p|c + f|x| \quad (۲)$$

در این صورت انرژی W در طول حرکت پایسته می‌ماند، بنابراین

$$W = |p|c + f|x| = p_0 c \quad (۳)$$

محور x را در جهت تکانه اولیه ذره در نظر بگیرید،

$$\left. \begin{array}{l} pc + fx = p_0 c \quad \text{هرگاه } x > 0 \text{ و } p > 0 \\ -pc + fx = p_0 c \quad \text{هرگاه } x > 0 \text{ و } p < 0 \\ pc - fx = p_0 c \quad \text{هرگاه } x < 0 \text{ و } p > 0 \\ -pc - fx = p_0 c \quad \text{هرگاه } x < 0 \text{ و } p < 0 \end{array} \right\} \quad (۴)$$

بیشینه فاصله ذره از مبدأ، L ، متناظر با $p = 0$ است. بنابراین

$$L = p_0 c / f$$

(iii) با استفاده از معادله ۳ و قانون دوم نیوتون داریم

$$\frac{dp}{dt} = F = \begin{cases} -f & x > 0 \\ f & x < 0 \end{cases} \quad (۵)$$

برای سرعت ذره داریم

$$\left| \frac{dx}{dt} \right| = \frac{c}{f} \left| \frac{dp}{dt} \right| = c \quad (۶)$$

یعنی، ذره با انرژی بسیار زیاد همواره با سرعت نور حرکت می‌کند، بجز آنکه در ناحیه بسیار نزدیک به نقطه‌های $x = \pm L$ باشد. زمان لازم برای حرکت ذره از مبدأ تا نقطه $x = L$ را

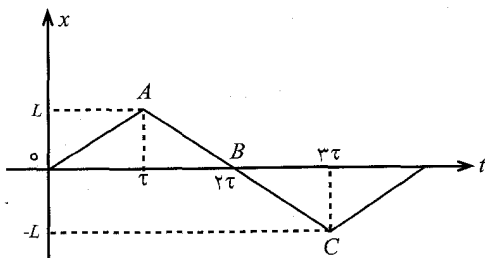
که با τ نشان می‌دهیم برابر است با

$$\tau = L/c = p_0 / f$$

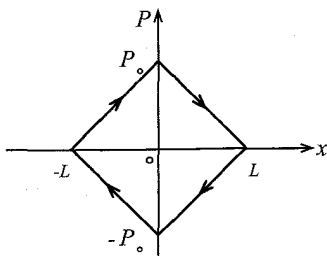
بنابراین ذره بین $x = -L$ و $x = L$ با سرعت c و دوره $f = 4p_0 / f$ حرکت می‌کند. رابطه بین x و t عبارت است از

$$\left. \begin{aligned} x &= ct & 0 \leq t \leq \tau \\ x &= 2L - ct & \tau \leq t \leq 2\tau \\ x &= 2L - ct & 2\tau \leq t \leq 3\tau \\ x &= ct - 4L & 3\tau \leq t \leq 4\tau \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

جواب‌های مورد نظر در شکل‌های ۲۶ و ۲۷ آمده است.



شکل ۲۶



شکل ۲۷

ب) انرژی کل دستگاه دو کوارکی را می‌توان به صورت زیر بیان کرد

$$Mc^2 = |p_1|c + |p_2|c + f|x_1 - x_2| \quad (8)$$

که در آن x_1 و x_2 به ترتیب مختصات مکان و p_1 و p_2 مختصات تکانه کوارک‌های ۱ و ۲ است. برای مزون ساکن، تکانه کل دو کوارک صفر است و دو کوارک به صورت متقارن در خلاف جهت یکدیگر حرکت می‌کنند. داریم

$$p = p_1 + p_2 = 0, \quad p_1 = -p_2, \quad x_1 = -x_2 \quad (9)$$

تکانه کوارک ۱ در $x = 0$ را p_0 در نظر بگیرید، در این صورت داریم

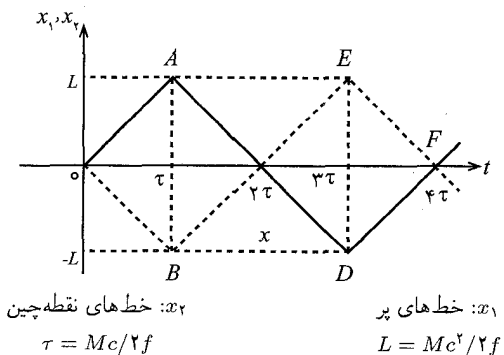
$$Mc^2 = 2p_0 c \quad \text{یا} \quad p_0 = Mc/2 \quad (10)$$

با استفاده از معادله‌های ۸، ۹ و ۱۰، نصف انرژی کل را می‌توان برحسب p_1 و x_1 مربوط به کوارک ۱ نوشت

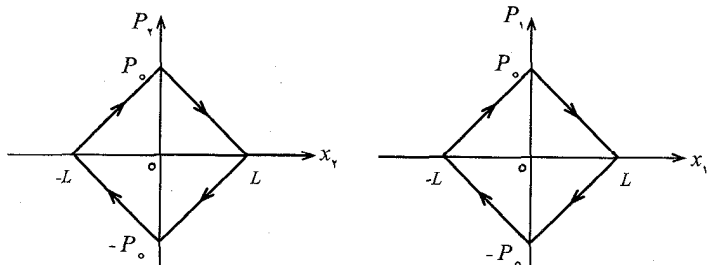
$$p_0 c = |p_1|c + f|x_1| \quad (11)$$

با استفاده از پاسخ قسمت (۱) نمودارهای حرکت (x, t) و (p, x) مربوط به کوارک ۱ در شکل ۲۸ و ۲۹ نشان داده شده است. برای کوارک ۲ نیز وضعیت مشابهی وجود دارد بجز اینکه علامت‌های x و p معکوس می‌شود. نمودارهای (x, t) و (p, x) در شکل ۲۸ و ۲۹ نشان داده شده است. بیشترین فاصله بین دو کوارک همان‌طور که در شکل ۲۸ دیده می‌شود برابر است با

$$d = 2L = 2p_0 c/f = Mc^2/f \quad (12)$$



شکل ۲۸



کوارک ۲ (ب)

کوارک ۱ (الف)

پ) چارچوب مرجع S با سرعت ثابت $v = 0.6c$ نسبت به چارچوب آزمایشگاه S' و در جهت محور x' حرکت می‌کند، به طوری که مبدأ دو چارچوب در ابتدا ($t = t' = 0$) برهم منطبق‌اند. تبدیل لورنتس بین دو چارچوب به صورت زیر است

$$\begin{cases} x' = \gamma(x + \beta ct) \\ t' = \gamma(t + \beta x/c) \end{cases} \quad (13)$$

که در آن

$$\gamma = 1/\sqrt{1 - \beta^2} \quad \text{و} \quad \beta = \frac{v}{c}$$

چون

$$v = 0.6c$$

داریم

$$\gamma = 5/4 \quad \text{و} \quad \beta = 3/5$$

از این رو تبدیل لورنتس خطی است و یک خط راست در نمودار (x, t) به یک خط راست در نمودار (x', t') تبدیل می‌شود. بنابراین فقط کافی است مختصات نقطه‌های بازگشت را در چارچوب S' حساب کنیم.

مختصات نقطه‌های بازگشت برای کوارک ۱، در چارچوب‌های S و S'

چارچوب S		چارچوب S'	
x_1	t_1	$x'_1 = \gamma(x_1 + \beta ct_1)$ $= \frac{5}{4}x_1 + \frac{3}{4}ct_1$	$t'_1 = \gamma(t_1 + \beta x_1/c)$ $= \frac{5}{4}t_1 + \frac{3}{4}x_1/c$
•	•	•	•
L	τ	$\gamma(1 + \beta)L = 2L$	$\gamma(1 + \beta)\tau = 2\tau$
•	2τ	$2\gamma\beta L = \frac{3}{2}L$	$2\gamma\tau = \frac{5}{2}\tau$
$-L$	3τ	$\gamma(3\beta - 1)L = L$	$\gamma(3 - \beta)\tau = 3\tau$
•	4τ	$4\gamma\beta L = 3L$	$4\gamma\tau = 5\tau$

مختصات نقطه‌های بازگشت برای کوارک ۲، در چارچوب‌های S و S'

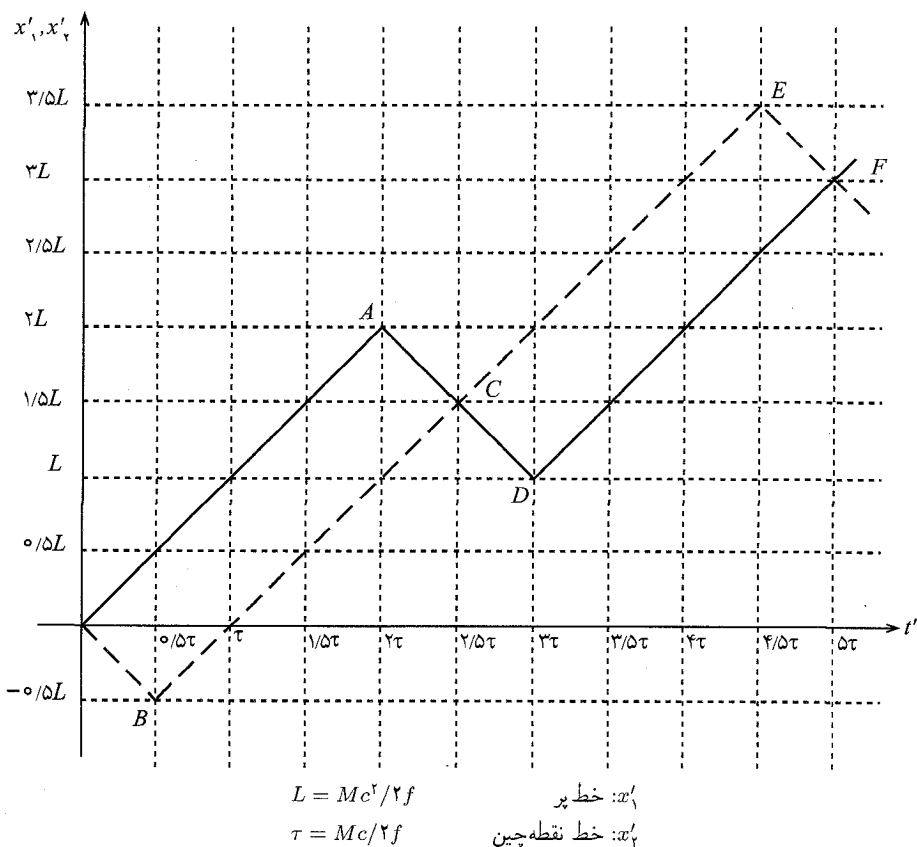
چارچوب S		چارچوب S'	
x_2	t_2	$x'_2 = \gamma(x_2 + \beta ct_2)$ $= \frac{5}{4}x_2 + \frac{3}{4}ct_2$	$t'_2 = \gamma(t_2 + \beta x_2/c)$ $= \frac{5}{4}t_2 + \frac{3}{4}x_2/c$
•	•	•	•
$-L$	τ	$-\gamma(1 - \beta)L = -\frac{1}{2}L$	$\gamma(1 - \beta)\tau = \frac{1}{2}\tau$
•	2τ	$2\gamma\beta L = \frac{3}{2}L$	$2\gamma\tau = \frac{5}{2}\tau$
L	3τ	$\gamma(3\beta + 1)L = \frac{9}{4}L$	$\gamma(3 + \beta)\tau = \frac{9}{4}\tau$
•	4τ	$4\gamma\beta L = 3L$	$4\gamma\tau = 5\tau$

به طوری که $L = p_0 c / f = Mc^2 / 2f$ و $\tau = p_0 / f = Mc / 2f$ است. با توجه به نتایج بالا نمودارهای (x', t') دو کوآرک در شکل ۳۰ نشان داده شده است. معادله‌های خط‌های راست OA و OB به صورت زیر است

$$\begin{cases} x'_1(t') = ct' & 0 \leq t' \leq \gamma(1 + \beta)\tau = 2\tau & (۱۴-الف) \\ x'_2(t') = -ct' & 0 \leq t' \leq \gamma(1 - \beta)\tau = \frac{1}{2}\tau & (۱۴-ب) \end{cases}$$

فاصله بین دو کوآرک وقتی به مقدار بیشینه d' می‌رسد که $t' = \frac{1}{2}\tau$ باشد، در این صورت

$$\begin{aligned} d' &= 2c\gamma(1 - \beta)\tau \\ &= 2\gamma(1 - \beta)L = \frac{Mc^2}{2f} \end{aligned} \quad (۱۵)$$



شکل ۳۰

(ت) برای مزونی که با سرعت $v = 0.6c$ نسبت به چارچوب آزمایشگاه حرکت می‌کند، انرژی اندازه‌گیری شده در چارچوب آزمایشگاه برابر است با

$$E' = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{1}{0.8} \times 140 = 175 \text{ MeV}$$

حل مسئله ۲

الف) برای $t = t_3$ تا $t = t_1$

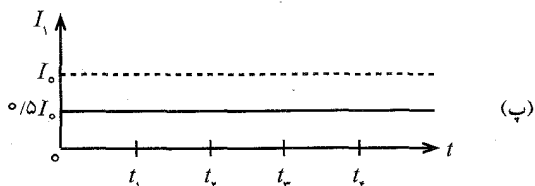
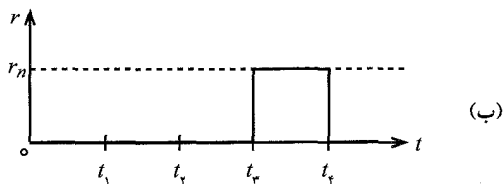
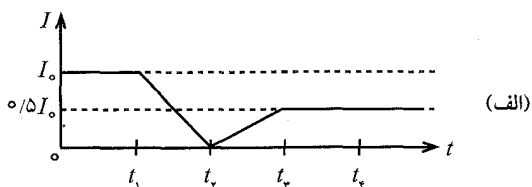
چون $r = 0$ است، ولتاژ دو سر آهنربا برابر است با $V_M = L \frac{dI_1}{dt}$ ، بنابراین

$$I_1 = I_1(t_1) = \frac{1}{4}I_0$$

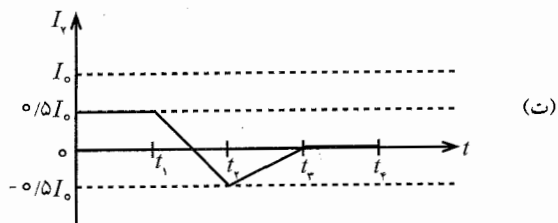
$$I_2 = I - I_1 = I - \frac{1}{4}I_0$$

برای $t = t_4$ تا $t = t_3$

از لحظه $t = t_3$ تا $t = t_4$ ، $I_2 = 0$ و $I = \frac{1}{4}I_0$ است، همچنین $V_M = I_2 r_n = 0$ و I_1 از لحظه $t = t_3$ تا $t = t_4$ تغییر نمی‌کنند. این نتایج در شکل ۳۱ نشان داده شده است.



شکل ۳۱



شکل ۳۱ (ادامه)

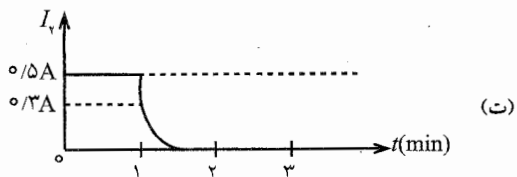
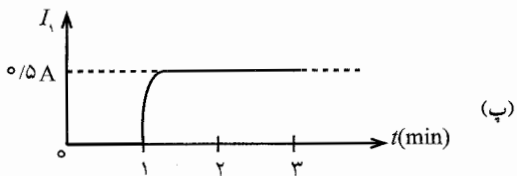
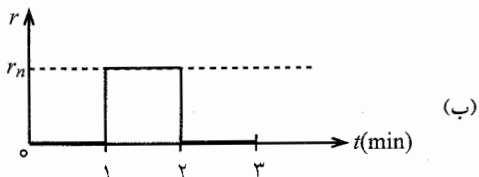
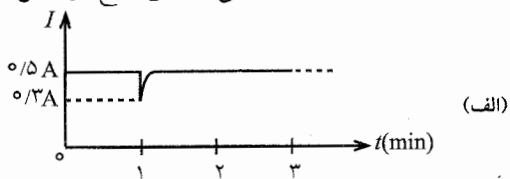
(ب) برای $t = 0$ تا $t = 1 \text{ min}$

$$r = 0, \quad V_M = L \frac{dI_1}{dt} = 0$$

$$I_1 = I_1(0) = 0$$

$$I_2 = I - I_1 = 0.5 \text{ A}$$

در $t = 1 \text{ min}$ ناگهان r از صفر به r_n می‌رسد و به‌طور هم‌زمان از E/R به $E/(R + r_n)$ می‌رسد، زیرا به دلیل خودالقایی هسته آهنربا، I_1 نمی‌تواند ناگهان تغییر کند. برای $E/R = 0.5 \text{ A}$ ، $E/(R + r_n) = 0.3 \text{ A}$ است. این نتایج در شکل ۳۲ نشان داده شده است.



شکل ۳۲

$$t = 2 \text{ min تا } t = 1 \text{ min برای}$$

I_1 و I_2 دارای مقادير ثابت زيروند

$$I = \frac{E}{R} = 0.5 \text{ A}$$

$$I_1 = I = 0.5 \text{ A}$$

$$I_2 = 0$$

ثابت زماني برابر است با

$$\tau = \frac{L(R + r_n)}{Rr_n}$$

به طوري که برای $r_n = 5 \Omega$ و $R = 7.5 \Omega$ ، $L = 10 \text{ H}$

$$\tau = 3 \text{ s}$$

$$t = 3 \text{ min تا } t = 2 \text{ min برای}$$

$r = 0$ و مقادير I_1 و I_2 تغيير نمي کند، يعني

$$I_1 = 0.5 \text{ A}, \quad I_2 = 0$$

(پ) مراحل آن به شرح زير است

مرحله اول. کلید K را ببندید و جريان کل I را تا 2 A ، يعني برابر جريان I_1 افزايش دهيد. چون

کلید ابررسانا در حالت $r = 0$ است، $V_M = L \frac{dI_1}{dt} = 0$ ، I_1 نمي تواند تغيير کند و I_2 تا 2 A افزايش مي يابد. به عبارت ديگر، I_2 از 2 A تا صفر تغيير مي کند.

مرحله دوم. کلید ابررسانا از حالت $r = 0$ به حالت $r = r_n$ برده مي شود.

مرحله سوم. در حالي که $I_2 < 0.5 \text{ A}$ است، I را تا صفر کاهش دهيد، چون $I_2 = V_M / r_n$

$V_M = L dI_1 / dt$ ، $L = 10 \text{ H}$ و $r_n = 5 \Omega$ است، شرط لازم برای اينکه $I_2 < 0.5 \text{ A}$ باقي

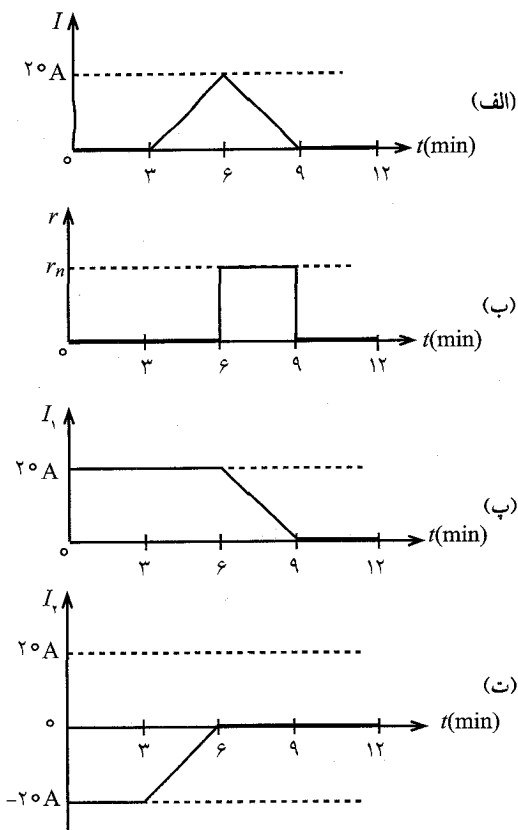
بماند متناظر است با اينکه $\frac{dI_1}{dt} < 0.25 \text{ A/s}$ باشد، يعني کمتر از 15 A در 1 min افت کند.

در شکل ۳۳، $\frac{dI}{dt} \sim 0.1 \text{ A/s}$ و $\frac{dI_1}{dt}$ نیز حدود همين مقدار است، بنابراین شرط مورد نظر

تحقق مي يابد.

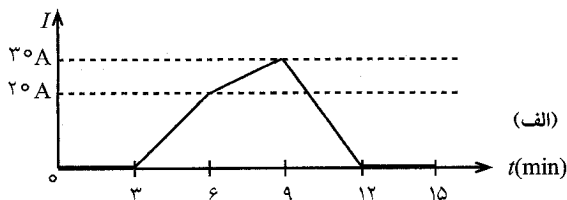
مرحله نهايي. هنگامي که $V_M = 0$ است کلید ابررسانا را به حالت $r = 0$ بريد و کلید K را باز

کنيد. نتايج در شکل ۳۳ نشان داده شده اند.

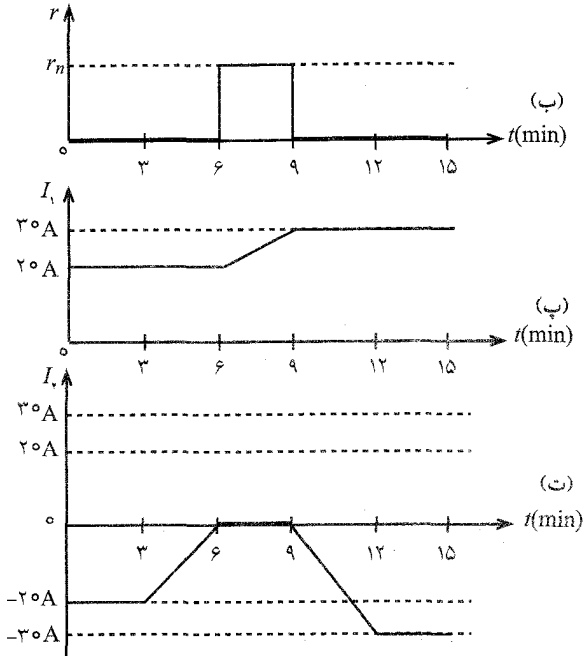


شکل ۳۳

(ت) مراحل اول و دوم مشابه قسمت (پ) است، در نتیجه $I_2 = 0$ است. در مرحله سوم جریان I را با آهنگی که شرط $I_2 < 0.5A$ برقرار باشد از $10A$ به $30A$ می‌رسانیم. در مرحله چهارم جریان I را تا صفر کاهش می‌دهیم، از طرفی چون $V_M = 0$ است مقدار $I_1 = 30A$ تغییر نمی‌کند و $I_2 = I - I_1$ به $30A - 30A = 0$ تغییر می‌کند. به علاوه کلید ابرسانا جریانی را که از آهنربا می‌گذرد قطع می‌کند. در مرحله پنجم کلید K را باز کنید. آهنربا در مد پایدار قرار می‌گیرد. نتایج در شکل ۳۴ نشان داده شده است.



شکل ۳۴

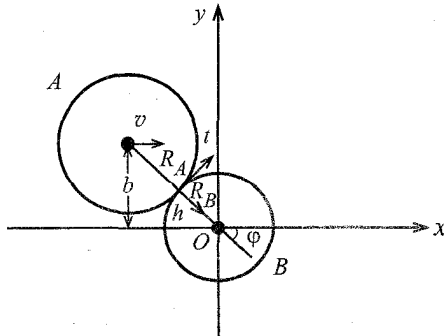


شکل ۳۴ (ادامه)

حل مسئله ۳

الف) وقتی قرص‌های A و B برخورد می‌کنند، n را بردار یک عمود بر سطوح در نقطه برخورد و t را بردار یک مماسی، مطابق شکل ۳۵، در نظر بگیرید. همچنین زاویه بین n و محور x را φ فرض کنید. در این صورت داریم

$$b = (R_A + R_B) \sin \varphi$$



شکل ۳۵

مؤلفه‌های تکانه‌ی A و B در طول n و t قبل از برخورد به صورت زیر است

$$mv_{An} = mv \cos \varphi, \quad mv_{Bn} = 0$$

$$mv_{At} = mv \sin \varphi, \quad mv_{Bt} = 0$$

مؤلفه‌های تکانه‌ی A و B را بعد از برخورد با mv'_{Bn} , mv'_{An} , mv'_{Bt} و mv'_{At} نشان می‌دهیم. همچنین ω_A و ω_B به ترتیب سرعت‌های زاویه‌ای A و B حول محورهایی است که از مرکزهای آن‌ها قبل از برخورد عبور می‌کند، I_A و I_B نیز گشتاورهای لختی مربوط به آن‌هاست. بنابراین

$$I_A = \frac{1}{4} m R_A^2, \quad I_B = \frac{1}{4} m R_B^2$$

با توجه به پایستگی تکانه داریم

$$mv \cos \varphi = mv'_{An} + mv'_{Bn} \quad (1)$$

$$mv \sin \varphi = mv'_{At} + mv'_{Bt} \quad (2)$$

همچنین از پایستگی تکانه‌ی زاویه‌ای حول محورهایی که از مرکزهای A و B می‌گذرد به دست می‌آوریم

$$mvb = mv'_{At}(R_A + R_B) + I_A \omega_A + I_B \omega_B \quad (3)$$

ضربه ناشی از نیروی اصطکاک که در لحظه برخورد بر B وارد می‌شود عامل تغییر تکانه‌ی mv'_{At} در طول t است و هم‌زمان باعث ایجاد تکانه‌ی زاویه‌ای $I_B \omega_B$ می‌شود. رابطه‌ی آن‌ها به صورت زیر است

$$mv'_{Bt} R_b = I_B \omega_B \quad (4)$$

سرعت‌های مماسی که A و B در لحظه برخورد در نقطه تماس به دست می‌آورند برابر است، بنابراین داریم

$$v'_{At} - \omega_A R_A = v'_{Bt} - \omega_B R_B \quad (5)$$

همچنین اندازه‌ی سرعت‌های نسبی A و B در طول جهت عمود قبل و بعد از برخورد برابرند، یعنی داریم

$$v \cos \varphi = v'_{Bn} - v'_{An} \quad (6)$$

از معادله‌های ۱ و ۶ داریم

$$v'_{An} = 0$$

$$v'_{Bn} = v \cos \varphi$$

از معادله‌های ۲ تا ۵ داریم

$$v'_{At} = \frac{\delta}{\rho} v \sin \varphi$$

$$v'_{Bt} = \frac{1}{\rho} v \sin \varphi$$

$$\omega_A = \frac{v \sin \varphi}{r R_A}$$

$$\omega_B = \frac{v \sin \varphi}{r R_B}$$

مؤلفه‌های x و y سرعت قبل و بعد از برخورد به صورت زیر است

$$v'_{Ax} = v'_{An} \cos \varphi + v'_{At} \sin \varphi = \frac{\delta v b^2}{\rho (R_A + R_B)^2} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} v'_{Ay} &= -v'_{An} \sin \varphi + v'_{At} \cos \varphi \\ &= \frac{\delta v b \sqrt{(R_A + R_B)^2 - b^2}}{\rho (R_A + R_B)^2} \end{aligned} \quad (8)$$

$$v_{Bx} = v'_{Bn} \cos \varphi + v'_{Bt} \sin \varphi \left[1 - \frac{\delta b^2}{\rho (R_A + R_B)^2} \right] \quad (9)$$

$$v'_{By} = -v'_{Bn} \sin \varphi + v'_{Bt} \cos \varphi = -\frac{\delta v b \sqrt{(R_A + R_B)^2 - b^2}}{\rho (R_A + R_B)^2} \quad (10)$$

(ب) بعد از برخورد، انرژی جنبشی قرص A برابر است با

$$E'_A = \frac{1}{2} m (v'^2_{Ax} + v'^2_{Ay}) + \frac{1}{2} I_A \omega'^2_A = \frac{3 m v^2 b^2}{4 (R_A + R_B)^2} \quad (11)$$

همچنین انرژی جنبشی قرص B برابر است با

$$\begin{aligned} E'_B &= \frac{1}{2} m (v'^2_{Bx} + v'^2_{By}) + \frac{1}{2} I_B \omega'^2_B \\ &= \frac{1}{2} m v^2 \left[1 - \frac{11 b^2}{4 (R_A + R_B)^2} \right] \end{aligned} \quad (12)$$

بیست و ششمین المپیاد بین‌المللی فیزیک

کانبرا، استرالیا*

مسابقه نظری - زمان ۵ ساعت

۱۹۹۵/۱۳۷۴

مسئله ۱ انتقال به سرخ گرانشی و اندازه‌گیری جرم ستاره‌ای^۱

الف) فوتونی با بسامد ν دارای جرم لختی مؤثر m است که با آن‌ها انرژی‌اش مشخص می‌شود. می‌توان فرض کرد فوتون دارای جرم گرانشی است که برابر جرم لختی m است. بنابراین، فوتونی که از سطح یک ستاره گسیل می‌شود، هنگام فرار از میدان گرانشی ستاره مقداری از انرژی خود را از دست می‌دهد. نشان دهید انتقال بسامد Δf یک فوتون هنگام فرار از سطح یک ستاره به فضای بی‌کران از رابطه زیر به دست می‌آید

$$\frac{\Delta f}{f} \simeq -\frac{GM}{Rc^2}, \quad \Delta\nu \ll \nu$$

که در آن G ثابت گرانش عمومی، R شعاع ستاره، c سرعت نور و M جرم ستاره است. بنابراین با اندازه‌گیری انتقال به سرخ یک خط طیف مشخص مربوط به ستاره می‌توانیم نسبت $\frac{M}{R}$ را به دست آوریم. با دانستن R ، جرم ستاره مشخص می‌شود.

*. Canberra, ACT, Australia

1. Gravitational Red Shift and Measurement of Stellar Mass

(ب) در یک آزمایش برای اندازه‌گیری جرم M و شعاع R ستاره‌ای در کهکشان راه شیری، یک فضاییمای بدون سرنشین به فضا پرتاب شده است. با نزدیک شدن این فضاییمای به هدف خود به‌طور شعاعی، فوتون‌های گسیل شده از یون‌های He^+ در سطح ستاره با برانگیختگی تشدیدی یک باریکه یون‌های He^+ در اتاقک آزمون داخل فضاییمای دیدبانی شدند. جذب تشدیدی تنها هنگامی رخ می‌دهد که به یون‌های He^+ سرعتی به‌طرف ستاره درست برابر با انتقال به سرخ داده شود. سرعت $v = \beta c$ یون‌های He^+ در فضاییمای نسبت به ستاره در حالت جذب تشدیدی، برحسب فاصله d (نزدیک‌ترین) سطح ستاره اندازه‌گیری می‌شود. داده‌های تجربی (در شرایط تشدید) در جدول زیر داده شده است. با استفاده کامل از این داده‌ها جرم M و شعاع R ستاره را به‌صورت نموداری تعیین کنید. در اینجا لازم نیست خط‌های پاسخ خود را برآورد کنید.

داده‌ها برای حالت تشدید

۲,۹۵۵	۳,۰۷۷	۳,۱۹۵	۳,۲۷۹	۳,۳۵۲	$\beta = v/c$ (10^{-5})	پارامتر سرعت
۶,۶۷	۸,۹۹	۱۳,۳۲	۱۹,۹۸	۳۸,۹۰	d ($\times 10^8 \text{m}$)	فاصله از سطح ستاره

(پ) برای تعیین R و M در این آزمایش، معمولاً یک تصحیح بسامد ناشی از پس‌زنی اتم گسیلنده فوتون در نظر گرفته می‌شود. [حرکت گرمایی باعث پهن‌تر شدن خط‌های گسیلی می‌شود بدون اینکه بیشینه‌های توزیع جابه‌جا شوند، در نتیجه می‌توانیم فرض کنیم که همه اثرهای گرمایی را به حساب آورده‌ایم.]

(i) اختلاف انرژی بین دو تراز انرژی یک اتم را E بگیرد، در همه حالت‌ها اتم را در حال سکون فرض کنید. همین‌طور فرض کنید که اتم در حال سکون وامی‌باشد و یک فوتون و اتم پس‌زده تولید می‌کند. رابطه‌ای نسبی برای انرژی hf فوتون گسیل شده برحسب E و جرم سکون اولیه m_0 اتم به‌دست آورید.

(ii) برآوردی عددی برای جابه‌جایی بسامد نسبی $\left(\frac{\Delta f}{f}\right)$ پس‌زنی برای یون‌های He^+ به‌دست آورید.

پاسخی که به‌دست می‌آوردید باید کوچک‌تر از انتقال به سرخ گرانشی در قسمت (ب) باشد.

داده‌های مورد نیاز عبارت‌اند از

$$c = 3.0 \times 10^8 \text{ m/s} \quad \text{سرعت نور}$$

$$m_0 c^2 = 4 \times 938 \text{ (MeV)} \quad \text{انرژی سکون He}$$

$$E_n = -\frac{13.6Z^2}{n^2} \text{ (eV)} \quad \text{انرژی بور}$$

$$G = 6.7 \times 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-2} \quad \text{ثابت گرانش عمومی}$$

مسئله ۲ انتشار صوت^۱

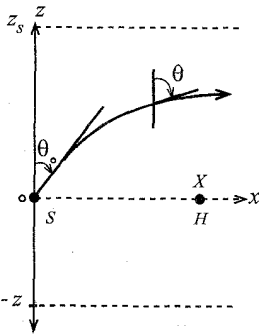
سرعت انتشار صوت در اقیانوس برحسب عمق، دما و شوری آب تغییر می‌کند. شکل ۳۶ تغییرات سرعت c را برحسب عمق z نشان می‌دهد. در این شکل c_0 سرعت انتشار صوت درست در نقطه وسط سطح آب و کف اقیانوس است. برای سهولت فرض کنید در $z = 0$ سرعت کمینه است و سرعت آب در $z = z_s$ و کف اقیانوس در $z = -z_b$ است. در بالاتر از $z = 0$ ، c از رابطه زیر به دست می‌آید

$$c = c_0 + bz$$

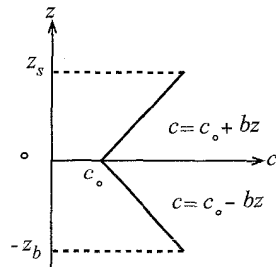
در پایین‌تر از $z = 0$ ، c برابر است با

$$c = c_0 - bz$$

در هر مورد $b = \left| \frac{dc}{dz} \right|$ ، اندازه گرادیان سرعت صوت برحسب عمق است. b ثابت فرض شده است.



شکل ۳۷



شکل ۳۶

شکل ۳۷ قسمتی از صفحه $x-z$ را در اقیانوس نشان می‌دهد، که در آن x جهت افقی است. سرعت صوت در هر نقطه در صفحه $x-z$ به صورت $c(z)$ است که در شکل ۳۶ نشان داده شده است. در نقطه $z = 0$ و $x = 0$ چشمه صوت S قرار دارد. در شکل ۳۷ قسمتی از خروجی چشمه صوت به صورت یک پرتو صوتی که از چشمه با زاویه θ گسیل می‌شود، نشان داده شده است. چون سرعت صوت با z تغییر می‌کند، پرتو صوتی هنگام انتشار در طول مسیر می‌شکند.

الف) نشان دهید مسیر اولیه پرتو صوتی که از چشمه S گسیل می‌شود هنگام انتشار در صفحه $x-z$ می‌ماند و به صورت کمانی از یک دایره به شعاع R است که از رابطه زیر به دست می‌آید

$$R = \frac{c_0}{b \sin \theta}, \quad 0 \leq \theta < \frac{\pi}{4}$$

ب) رابطه‌ای برای کمترین مقدار θ برحسب z_s ، c_0 و b به گونه‌ای به دست آورید که جهت انتشار پرتو صوت رویه بالا باشد بدون اینکه از سطح آب اقیانوس بازتابیده شود.

(پ) شکل ۳۷ گیرنده صوت H را نشان می‌دهد که در مکان $x = X$ و $z = 0$ قرار دارد. مقادیر مختلفی برای θ برحسب b ، X و c_0 به گونه‌ای به دست آورید که پرتو صوتی گسیلیده از چشمه S پس از انتشار به گیرنده H برسد. فرض کنید z_b و z_s به حد کافی بزرگ‌اند به طوری که احتمال بازتاب پرتو صوتی از سطح یا کف اقیانوس وجود ندارد.

(ت) چهار مقدار برای θ که کمترین اندازه را داشته باشند به دست آورید به طوری که پرتو صوتی پس از گسیل از چشمه S و شکست به گیرنده H برسد. فرض کنید

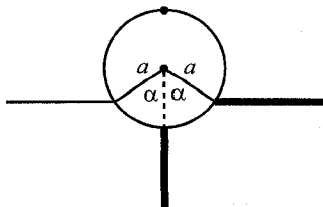
$$X = 10000 \text{ m}, \quad c_0 = 1500 \text{ m/s}, \quad b = 0.702000 \text{ s}^{-1}$$

(ث) رابطه‌ای برای زمان رسیدن پرتو صوتی از S به H را برای کمترین مقادیر θ که در قسمت (پ) تعیین کردید، به دست آورید. مقدار عددی این زمان‌ها را با توجه به شرایط قسمت (ت) به دست آورید. زمان رسیدن پرتو صوتی از S به H را در مسیر مستقیم (در طول $z = 0$) حساب کنید. کدام یک از این دو پرتو زودتر می‌رسند، پرتوی با زاویه انتشار $\theta = \frac{\pi}{4}$ یا پرتوی با زاویه انتشار کمترین مقدار که برای θ در قسمت (ت) به دست آوردید؟ در حل این مسئله در صورت نیاز از رابطه زیر استفاده کنید

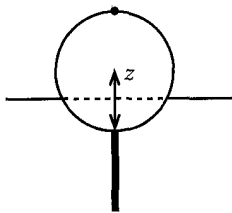
$$\int \frac{dx}{\sin x} = \ln \tan \left(\frac{x}{2} \right)$$

مسئله ۳ حلقه نجات استوانه‌ای^۱

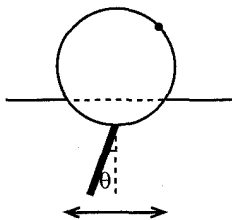
(الف) یک حلقه نجات شامل یک استوانه جامد به شعاع a و طول l است که از مواد سبک وزن و با چگالی یکنواخت d ساخته می‌شود، به طوری که یک میله یکنواخت و ثابت به طور مستقیم و به طرف بالا از وسط کف استوانه در امتداد طول استوانه جلو آمده است. جرم میله برابر جرم استوانه و طول آن برابر قطر استوانه است. همچنین چگالی آن بزرگ‌تر از چگالی آب دریاست. این حلقه نجات روی سطح آب دریا (با چگالی ρ) شناور است. در حالت تعادل رابطه‌ای برای زاویه شناوری α برحسب $\frac{d}{\rho}$ به دست آورید (شکل ۳۸). حجم میله را نادیده بگیرید.



شکل ۳۸



شکل ۳۹



شکل ۴۰

(ب) اگر بر اثر اختلال، حلقه نجات به صورت عمودی به اندازه مقدار مختصر z فشرده شود (شکل ۳۹)، بر اثر نیروی خالص رانشی که به طرف بالا بر آن وارد می‌شود شروع به نوسان حول نقطه شناوری به طرف بالا و پایین می‌کند. بسامد مد عمودی ارتعاش را بر حسب α ، g و a به دست آورید. در اینجا g شتاب ناشی از گرانی زمین است. فرض کنید تأثیر حرکت آب بر دینامیک حلقه نجات به گونه‌ای است که جرم مؤثر حلقه نجات را با ضریب $\frac{1}{3}$ افزایش می‌دهد. می‌توانید فرض کنید α کوچک نیست.

(ب) همین‌طور حلقه نجات حول محور مرکزی که به طور افقی است نوسان می‌کند (شکل ۴۰). بسامد نوسان‌ها را دوباره بر حسب g و a به دست آورید. در این حالت دینامیک و چسبندگی آب را نادیده بگیرید. زاویه نوسان را کوچک فرض کنید.

(ت) حلقه نجات شامل یک شتاب‌سنج حساس است که می‌تواند حرکت‌های نوسانی عمودی و افقی را اندازه بگیرد و همچنین می‌تواند این داده‌ها را با یک رادیو به ساحل رله کند. در آب نسبتاً آرام، دوره نوسان‌های عمودی حدود $1s$ و دوره نوسان‌های افقی حدود $1/5s$ ثبت شده است. با توجه به این داده‌ها، نشان دهید زاویه شناوری حدود 90° درجه است و از آن شعاع حلقه نجات و جرم کل آن را برآورد کنید، با این فرض که طول استوانه برابر شعاع آن است. (در حل این مسئله داریم $\rho \simeq 1000 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ و $g \simeq 9.8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$)

پاسخ تشریحی مسئله‌ها

حل مسئله ۱

(الف) اگر جرم لختی مؤثر فوتونی برابر m باشد، انرژی آن برابر است با

$$mc^2 = hf \quad \text{یا} \quad m = \frac{hf}{c^2}$$

فرض کنید جرم گرانشی برابر جرم لختی باشد، حال فوتونی را در نظر بگیرید که با انرژی hf (یا جرم $m = \frac{hf}{c^2}$) از فاصله r نسبت به مرکز ستاره گسیل شود. بر اثر میدان گرانشی ستاره، انرژی

فوتون با دور شدن از مرکز آن، کاهش می‌یابد. بنابراین اصل پایداری انرژی، تغییر در انرژی فوتون برابر با تغییر در انرژی گرانشی است. در نتیجه داریم

$$hf_i - hf_f = -\frac{GMm_f}{\infty} = -\left[-\frac{GMm_i}{r}\right]$$

$$hf_f = hf_i - \frac{GMm_i}{r}$$

در رابطه‌های بالا از زیرنویس‌های i و f به ترتیب برای مقادیر اولیه و نهایی استفاده شده است. از آنجایی که تغییر در انرژی فوتون کم است ($\Delta f \ll f$)، داریم

$$m_f \simeq m_i = \frac{hf_i}{c^2}$$

در نتیجه

$$hf_f \simeq hf_i - \frac{GM(hf_i/c^2)}{r}$$

$$hf_f \simeq hf_i \left[1 - \frac{GM}{rc^2}\right]$$

$$\frac{f_f}{f_i} = \left(1 - \frac{GM}{rc^2}\right)$$

$$\frac{\Delta f}{f_i} = \frac{f_f - f_i}{f_i} \simeq -\frac{GM}{rc^2}$$

علامت منفی نشان‌دهنده انتقال به سرخ است، یعنی کاهش بسامد f و افزایش طول موج. بنابراین برای فوتونی که از سطح ستاره‌ای به شعاع R گسیل می‌شود، داریم

$$\frac{\Delta f}{f} = \frac{GM}{Rc^2}$$

ب) تغییر انرژی فوتونی که از فاصله r_i به فاصله r_f می‌رود، برابر است با

$$hf_i - hf_f = -\frac{GMm_f}{r_f} + \frac{GMm_i}{r_i}$$

$$\simeq \frac{GMhf_i}{c^2} \left[\frac{1}{r_i} - \frac{1}{r_f}\right]$$

از آنجا که تغییر در انرژی فوتون ناچیز است $\Delta f \ll f$ باشد، داریم $m_f = m_i = \frac{hf_i}{c^2}$ ، بنابراین

$$\frac{f_f}{f_i} = 1 - \frac{GM}{c^2} \left[\frac{1}{r_i} - \frac{1}{r_f}\right]$$

در این آزمایش، شعاع ستاره R و فاصله فضایی‌های بدون سرنشین از سطح ستاره d است، در نتیجه با توجه به معادله بالا داریم

$$\frac{f_f}{f_i} = 1 - \frac{GM}{c^2} \left[\frac{1}{R} - \frac{1}{R+d} \right] \quad (1)$$

بسامد فوتون در جابه‌جایی دوپلر از f_f به f_i دلیل برانگیختگی تشدید یون‌های He^+ در فضایی‌است. بنابراین با به‌کار بردن اصل دوپلر نسبیتی داریم

$$\frac{f'}{f_f} = \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}}$$

که در آن f' بسامدی است که توسط یون‌های He^+ در فضایی دریافت می‌شود و $\beta = \frac{v}{c}$ است. از آنجایی که جهت سرعت یون‌های روی فضایی‌ها به طرف ستاره است، نیروی گرانشی باعث کاهش بسامد f_f که تا f' افزایش یافته بود می‌شود. چون $\beta \ll 1$ است، مستقیماً از اثر دوپلر کلاسیکی استفاده می‌کنیم. داریم

$$\frac{f_f}{f'} = (1 - \beta^2)^{1/2} (1 + \beta^2)^{-1/2} \simeq 1 - \beta$$

بنابراین

$$f' = \frac{f_f}{1 - \beta}$$

یا

$$\frac{f_f}{f'} = 1 - \beta$$

برای جذب تشدید یون باید f_i برابر f' باشد. در این صورت داریم

$$\frac{f_f}{f_i} = 1 - \beta \quad (2)$$

با جایگذاری (۲) در (۱) داریم

$$\beta = \frac{GM}{c^2} \left[\frac{1}{R} - \frac{1}{R+d} \right] \quad (3)$$

با توجه به داده‌های تجربی، به دنبال حل نموداری مؤثر می‌رویم. در این صورت به یک معادله خطی که داده‌های تجربی β و d را به هم مرتبط می‌کند نیاز داریم. با بازنویسی معادله (۳) داریم

$$\beta = \frac{GM}{c^2} \left[\frac{d}{R(R+d)} \right]$$

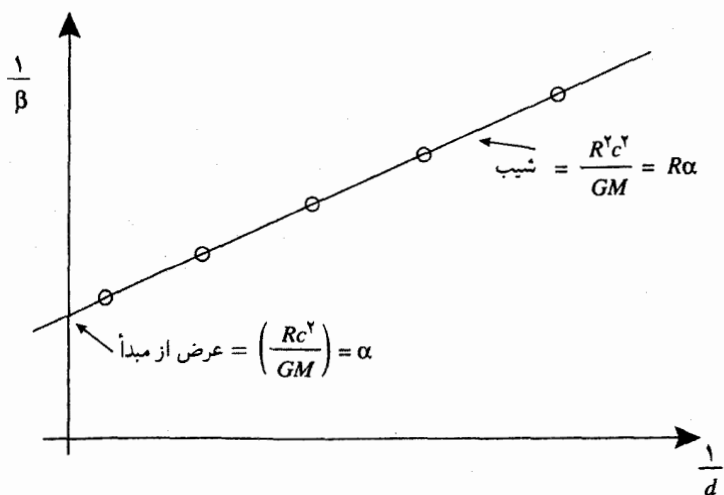
با وارونه کردن آن داریم

$$\frac{1}{\beta} = \left(\frac{Rc^{\gamma}}{GM} \right) \left[\frac{R}{d} + 1 \right]$$

یا

$$\frac{1}{\beta} = \left(\frac{R^{\gamma}c^{\gamma}}{GM} \right) \frac{1}{d} + \frac{Rc^{\gamma}}{GM}$$

در شکل ۴۱ نمودار $\frac{1}{\beta}$ برحسب $\frac{1}{d}$ رسم شده است.



شکل ۴۱

شیب نمودار برابر است با

$$\left(\frac{Rc^{\gamma}}{GM} \right) R = \alpha R \tag{۴}$$

روی محور $\frac{1}{\beta}$ ، عرض از مبدأ برابر است با

$$\left(\frac{Rc^{\gamma}}{GM} \right) = \alpha \tag{۵}$$

و روی محور $\frac{1}{d}$ ، فاصله از مبدأ برابر است با

$$-\frac{1}{R} \tag{۶}$$

M و R را به راحتی می توان از معادله های (۴) و (۵) به دست آورد و عبارت (۶) بدون فایده است. به هر حال، در صورت نیاز برای کنترل نادرستی موارد می توان از آن استفاده کرد.

با توجه به داده‌ها داریم

$$R = ۱,۱۱ \times ۱۰^۸ \text{ m}$$

$$M = ۵,۲ \times ۱۰^۳۰ \text{ kg}$$

از روی نمودار، شیب $\alpha R = ۳,۲ \times ۱۰^{۱۲} \text{ m}$ است و روی محور $\frac{1}{\beta}$ ، عرض از مبدأ برابر است با

$$\alpha = \frac{Rc^2}{GM} = ۰,۲۹ \times ۱۰^۵$$

با تقسیم رابطه‌های (۴) و (۵) داریم

$$R = \frac{۳,۲ \times ۱۰^{۱۲} \text{ m}}{۰,۲۹ \times ۱۰^۵} = ۱,۱۰۴ \times ۱۰^۸ \text{ m}$$

با جایگذاری R در معادله (۵) داریم

$$\begin{aligned} M &= \frac{Rc^2}{G\alpha} = \frac{(۱,۱۰۴ \times ۱۰^۸) \times (۳ \times ۱۰^۸)^2}{(۶,۷ \times ۱۰^{-۱۱}) \times (۰,۲۹ \times ۱۰^۵)} \\ &= ۵,۱۱ \times ۱۰^{-۳۰} \text{ kg} \end{aligned}$$

(پ)

(i) بنابراین اصل پایستگی انرژی داریم

انرژی فوتون گسیلی + انرژی اتم بعد از واپاشی = انرژی اتم قبل از واپاشی

$$m_0 c^2 = m'_0 c^2 + hf$$

تکانه فوتون $p = hf/c$ و انرژی آن برابر hf است. با استفاده از هم‌ارزی جرم و انرژی، $E = mc^2$ ، تغییر انرژی داخل اتم مرتبط با تغییر انرژی جرم در حال سکون است. بنابراین

$$\Delta E = (m_0 - m'_0) c^2 \quad (۷)$$

در چارچوب مرجع آزمایشگاه، انرژی فوتون قبل از گسیل، برابر $E = m_0 c^2$ است. انرژی فوتون بعد از گسیل برابر است با

$$E = \sqrt{p^2 c^2 + (m'_0 c^2)^2} + hf$$

که در آن $p = hf/c$ است. برای به دست آوردن این رابطه، از رابطه نسبیتی $E^2 = p^2 c^2 + m'_0 c^2$ استفاده شده است. بنابراین اصل پایستگی انرژی داریم

$$m_0 c^2 = \sqrt{p^2 c^2 + (m'_0 c^2)^2} + hf$$

یا

$$\begin{aligned}
 (m_0 c^2 - hf)^2 &= (hf)^2 + (m_0' c^2)^2 \\
 (m_0 c^2)^2 - 2hf m_0 c^2 &= (m_0' c^2)^2 \\
 hf(2m_0 c^2) &= (m_0^2 - m_0'^2) c^4 \\
 &= (m_0 - m_0') c^2 (m_0 + m_0') c^2 \\
 &= \Delta E [2m_0 - (m_0 - m_0')] c^2 \\
 &= \Delta E [2m_0 c^2 - \Delta E]
 \end{aligned}$$

در این صورت داریم

$$hf = \Delta E \left[1 - \frac{\Delta E}{2m_0 c^2} \right]$$

(ii) برای فوتون گسیل شده داریم

$$hf = \Delta E \left[1 - \frac{\Delta E}{2m_0 c^2} \right]$$

اگر از اثرهای نسبیتی چشم‌پوشی شود، داریم

$$hf_0 = \Delta E$$

بنابراین جابه‌جایی بسامد نسبیتی $\frac{\Delta f}{f_0}$ از رابطه زیر به دست می‌آید

$$\frac{\Delta f}{f_0} = \frac{\Delta E}{2m_0 c^2}$$

با استفاده از نظریه بور برای یون هلیوم He^+ (برای گذار $n = 2 \rightarrow 1$) داریم

$$\Delta E = 13.6 \times (2)^2 \times \left[\frac{1}{2^2} - \frac{1}{1^2} \right] \simeq 40.8 \text{ eV}$$

علاوه بر این $m_0 c^2 = 3.752 \times 10^6 \text{ eV}$ است. در نتیجه جابه‌جایی بسامد ناشی از پس‌زنی برابر است با

$$\frac{\Delta f}{f_0} = 5.44 \times 10^{-12}$$

همان‌طور که دیده می‌شود این جابه‌جایی بسامد در مقایسه با انتقال به سرخ گرانشی، یعنی $\frac{\Delta f}{f} \simeq 10^{-5}$ ، خیلی کوچک است و می‌توان در آزمایش‌های انتقال به سرخ گرانشی از آن چشم‌پوشی کرد.

حل مسئله ۲

الف) قانون اسنل را می‌توان به صورت زیر بیان کرد

$$\frac{\sin \theta}{\sin \theta_0} = \frac{c}{c_0} \quad (۸)$$

که در آن c سرعت صوت است.

در شکل ۴۲، ds کمان کوچکی از پرتو صوت است که می‌توان آن را قسمتی از کمان دایره‌ای به شعاع R در نظر گرفت. توجه کنید که R می‌تواند هر مقداری بین $-\infty$ تا $+\infty$ اختیار کند. مؤلفه‌ای از پرتو صوت را که در ابتدا به طرف بالای چشمه S گسیل می‌شود در نظر بگیرید.

با توجه به شکل ۴۲ داریم

$$ds = R d\theta \Rightarrow \frac{ds}{d\theta} = R$$

با استفاده از معادله (۸)، برای یک تغییر کوچک در سرعت c ، داریم

$$\cos \theta d\theta = \frac{\sin \theta_0}{c_0} dc \quad (۹)$$

برای پرتوی که به طرف بالا گسیل می‌شود داریم

$$c = c_0 + bz$$

در نتیجه

$$dc = b dz \quad (۱۰)$$

با جایگذاری (۱۰) در (۹) داریم

$$\frac{\sin \theta_0}{c_0} b dz = \cos \theta d\theta$$

بنابراین

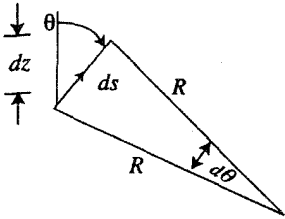
$$dz = \frac{c_0}{b \sin \theta_0} \cos \theta d\theta \quad (۱۱)$$

همچنین با توجه به شکل ۴۲ داریم

$$dz = ds \cos \theta \quad (۱۲)$$

با جایگذاری (۱۲) در (۱۱) داریم

$$\frac{ds}{d\theta} = R = \frac{c_0}{b \sin \theta_0}$$



شکل ۴۲

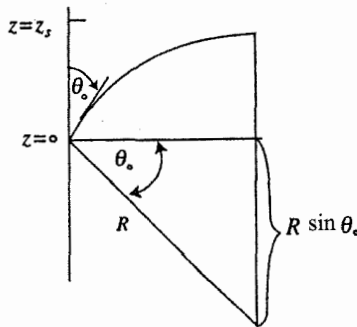
این نتیجه صرفاً برای بخش کوچکی از کمان ds کاربرد دارد. توجه کنید که معادله (۹) را برای همه مقادیر θ می‌توان به‌کار برد.
 (ب) با توجه به شکل ۴۳ داریم

$$z_s = R - R \sin \theta_0 = R(1 - \sin \theta_0)$$

$$= \frac{c_0}{b \sin \theta_0} (1 - \sin \theta_0)$$

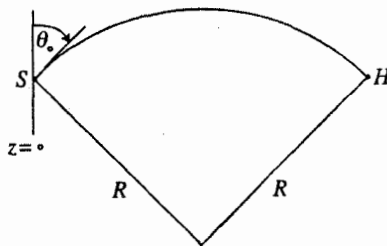
یا

$$\theta_0 = \sin^{-1} \left[\frac{c_0}{bz_s + c_0} \right]$$



شکل ۴۳

(ب) ساده‌ترین مسیر بین S و H کمان دایره‌ای است که از این دو نقطه عبور می‌کند (شکل ۴۴).



شکل ۴۴

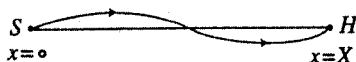
برای این مسیر داریم

$$X = 2R \cos \theta_0 = \frac{2c_0}{b \sin \theta_0} = \frac{2c_0}{b} \cot \theta_0$$

بنابراین

$$\cot \theta_0 = \frac{bX}{2c_0}$$

و اما احتمال دوم، شامل دو کمان دایره مطابق شکل ۴۵ است.



شکل ۴۵

برای این مسیر داریم

$$\frac{X}{2} = 2R \cos \theta_0 = \frac{2c_0}{b} \cot \theta_0$$

یعنی

$$\cot \theta_0 = \frac{bX}{4c_0}$$

در حالت کلی، برای مقدار $\theta_0 = \frac{\pi}{4}$ ، پرتویی که از نقطه S به نقطه H می‌رسد شامل n کمان است، به طوری که داریم

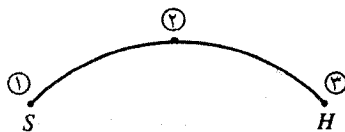
$$\theta_0 = \cot^{-1} \left[\frac{bX}{4nc_0} \right] = \tan^{-1} \left[\frac{4nc_0}{bX} \right]$$

که در آن $n = 1, 2, 3, \dots$ است.

(ت) در جدول زیر به ازای $n = 1$ تا $n = 4$ ، کوچک‌ترین مقادیر زاویه گسیل داده شده است.

n	θ_0 (درجه)
۱	۸۶٫۱۹
۲	۸۸٫۰۹
۳	۸۸٫۷۳
۴	۸۹٫۰۴

(ث) مسیر پرتو وابسته به کوچک‌ترین زاویه گسیل شامل یک کمان است که در شکل ۴۶ نشان داده شده است.



شکل ۴۶

برای به دست آوردن زمانی که طول می‌کشد تا پرتو صوت مسیر شکل ۴۶ را از نقطه S تا H طی کند، داریم

$$\int_1^3 dt = \int_1^3 \frac{ds}{c}$$

ابتدا زمانی که طول می‌کشد تا پرتو از نقطه ۱ به نقطه ۲ برسد را به دست می‌آوریم

$$t_{12} = \int_1^2 \frac{ds}{c} = \int_{\theta_0}^{\pi/2} \frac{R d\theta}{c}$$

با استفاده از رابطه $R = \frac{c}{b \sin \theta}$ داریم

$$\begin{aligned} t_{12} &= \frac{1}{b} \int_{\theta_0}^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sin \theta} \\ &= \frac{1}{b} \left[\ln \tan \left(\frac{\theta}{2} \right) \right]_{\theta_0}^{\pi/2} = -\frac{1}{b} \ln \tan(\theta_0/2) \end{aligned}$$

از آنجایی که $t_{13} = 2t_{12}$ داریم

$$t_{13} = -\frac{2}{b} \ln \tan(\theta_0/2)$$

برای مقادیر داده شده در قسمت (ت) مسئله داریم

$$t_{13} = 6,65466 \text{ s}$$

و اما زمانی که پرتو در امتداد محور x ، مسافت X را طی می‌کند، برابر است با

$$t = \frac{X}{c_0}$$

در این شرایط داریم

$$t_{13} = 6,66666 \text{ s}$$

بنابراین پرتو صوت در امتداد محور x نسبت به حالت $n = 1$ ، کندتر حرکت می‌کند، به عبارت دیگر پرتویی که در مسیر $n = 1$ حرکت می‌کند زودتر می‌رسد.

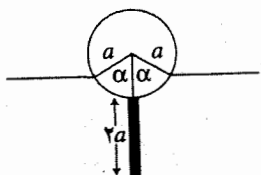
حل مسئله ۳

الف) بنا بر فرض مسئله جرم میله و استوانه با هم برابرند، یعنی $M = \pi a^2 l d$ است. بنابراین جرم کل حلقه نجات برابر $2M = 2\pi a^2 l d$ است. جرم آب جابه‌جا شده به طور قطع کمتر از $\pi a^2 l \rho$ است (وقتی که حلقه نجات در آستانه غرق شدن است). بنابراین اصل ارشمیدس، حداقل انتظار داریم

$$2\pi a^2 l d < \pi a^2 l \rho$$

یا

$$d < \rho/2$$



شکل ۴۷

در حقیقت، در زاویهٔ شناوری که در شکل ۴۷ نشان داده شده است، حجم آب جابه‌جا شده برابر است با

$$V = la^2 \alpha - la^2 \sin \alpha \cos \alpha$$

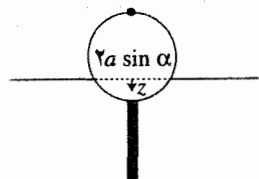
بنابر اصل ارشمیدس، جرم حلقهٔ نجات برابر جرم آب جابه‌جا شده است. بنابراین

$$2\pi a^2 l d = la^2 \rho [\alpha - \sin \alpha \cos \alpha]$$

یعنی α با رابطهٔ زیر تعیین می‌شود

$$\alpha - \cos \alpha \sin \alpha = 2d\pi/\rho \quad (۱۳)$$

(ب) اگر استوانه مطابق شکل ۴۸ به اندازهٔ مقدار کوچک z به‌طور عمودی نسبت به وضع دال فشرده



شکل ۴۸

شود، نیروی بازگردانندهٔ خالص روبه بالا که در خلاف جهت z وارد می‌شود برابر وزن آب جابه‌جا شده یا $gp \cdot 2a \sin \alpha \cdot lz$ است. این رابطه، مشخصهٔ حرکت هماهنگ ساده است، در نتیجه معادلهٔ نیوتونی حرکت حلقهٔ نجات برابر است با (ضریب

$\frac{1}{3}$ بنابر فرض مسئله اضافه شده است)

$$\frac{1}{3} M \ddot{z} = -2\rho glza \sin \alpha$$

یا

$$\ddot{z} + \frac{3\rho g \sin \alpha}{4\pi da} z = 0$$

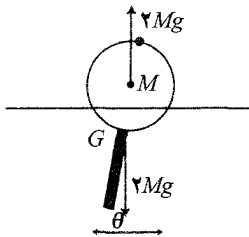
و این معادلهٔ نوسانی سینوسی استاندارد است (مشابه یک آونگ ساده). پاسخ این معادله $z = \sin(\omega_z t)$ است، که در آن بسامد زاویه‌ای ω_z برابر است با

$$\omega_z = \sqrt{\frac{3\rho g \sin \alpha}{4\pi da}} = \sqrt{\frac{3g \sin \alpha}{2a(\alpha - \cos \alpha \sin \alpha)}} \quad (۱۴)$$

برای به‌دست آوردن این رابطه از رابطهٔ (۱۳) استفاده شده است.

(پ) تنها به نیروهای عمودی توجه می‌کنیم و گشتاور را در نظر نمی‌گیریم. با نوسان حلقهٔ نجات تحت زاویهٔ کوچکی، به‌طوری که فشار خالص آب خارج به وزن حلقه کمک کند، حجم آب جابه‌جا شده با حجم آب در تعادل یکسان خواهد بود. از این‌رو مرکز حلقهٔ نجات در همان فاصله از مرکز استوانه باقی می‌ماند. بنابراین نتیجه می‌گیریم کمان حلقهٔ نجات، کمان دایره‌ای است که مرکز آن در وسط استوانه است. به عبارت دیگر مرکز نوسان درست بر مرکز استوانه قرار دارد. در واقع این فرض مسئله است.

همچنين بايد توجه كنيم كه مركز جرم G حلقه در جايي است كه ميله به استوانه گشتاور وارد مي‌كند،



شکل ۴۹

زيرا جرم‌هاي استوانه و ميله مساوي و برابر M است. البته وقتي ميله مطابق شکل ۴۹ به طرف حالت عمودي مایل است، گشتاوري به حلقه وارد مي‌كند. براي به دست آوردن دوره نوسان، در ابتدا بايد گشتاور لختي حول M را تعيين كنيم. گشتاور لختي استوانه حول محور مركزي اش درست همانند گشتاور لختي يك صفحه حول مركزش است. اگر جرم استوانه را M بگيريم، خواهيم داشت

$$I_{\text{استوانه}} = Ma^2/2 \left(= \int_0^a r^2 dm = \int_0^a r^2 (2Mr dr/a) \right)$$

گشتاور لختي ميله حول نقطه مياني اش برابر است با

$$\begin{aligned} I_{\text{ميله}} &= \int_{-a}^a (M dx/2a) x^2 \\ &= [Mx^3/6a]_{-a}^a = Ma^2/3 \end{aligned}$$

در نتيجه با توجه به قضيه محورهاي موازي، گشتاور لختي حلقه نجات (استوانه + ميله) حول نقطه M برابر است با

$$I_M = Ma^2/2 + [Ma^2/3 + M(2a)^2] = 29Ma^2/6$$

(در اينجا از حرکت افقي مركز جرم به دليل كوچكي صرف نظر کرده ايم، آب تنها عاملی است که می تواند این نیرو را اعمال کند!) هنگامي كه حلقه حول نقطه تعادل با زاويه θ نوسان مي‌كند، براي زاويه‌هاي كوچك، گشتاور بازگرداننده برابر $2Mga \sin \theta \simeq 2Mga \theta$ است، كه نشان دهنده يك حرکت هماهنگ ساده است (شبيه حرکت يك آونگ). به علاوه معادله حرکت چرخشي نيوتوني برابر است با

$$I_M \ddot{\theta} \simeq -2Mga \theta$$

يا

$$\ddot{\theta} + \frac{12g}{29a} \theta = 0$$

جواب اين معادله، يك تابع سينوسي است. يعني

$$\theta = k \sin(\omega t)$$

که در آن k ضریب ثابتی است و $\omega\theta$ ، بسامد زاویه‌ای حرکت و برابر است با

$$\omega\theta = \sqrt{12g/29a}$$

(ت) بر اساس اندازه‌گیری‌های شتاب‌سنج‌هایی که روی حلقه نجات تعبیه شده‌اند، داریم

$$\frac{T_\theta}{T_z} \simeq 1,5$$

یا

$$\left(\frac{\omega_z}{\omega_\theta}\right)^2 \simeq \frac{9}{4} \simeq 2,25$$

در نتیجه

$$2,25 = \frac{3g \sin \alpha}{2a(\alpha - \cos \alpha \sin \alpha)} / \frac{12g}{29a}$$

یا

$$\alpha - \sin \alpha \cos \alpha \simeq 1,61 \sin \alpha$$

از آنجایی که $1,61$ تفاوت چندانی با $1,57$ ندارد، یک جواب فیزیکی قابل قبول $\alpha \simeq \pi/2$ است. با جایگذاری $\alpha = \pi/2$ در معادله (۱۴) داریم

$$\omega_z^2 = 3g/\pi a \quad \text{و} \quad 4d/\rho = 1$$

از آنجایی که دوره نوسان‌های عمودی برابر $1s$ است، داریم

$$1 = (2\pi/\omega_z)^2 = 4\pi^2 a/3g$$

در این صورت

$$a = 3 \times 9,8/4\pi^2 = 0,237m$$

همچنین جرم حلقه نجات برابر است با

$$\begin{aligned} 2M &= 2\pi a^2 l d = 2\pi a^2 \cdot a \cdot \rho / 4 \\ &= \pi a^3 \rho / 2 = \pi \times 500 \times (0,237)^3 \\ &\simeq 20,9kg \end{aligned}$$

بیست و هفتمین المپیاد بین‌المللی فیزیک

اسلو-نروژ*

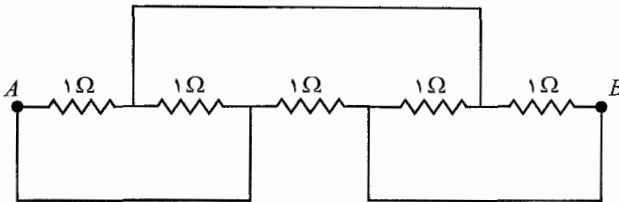
مسابقه نظری- زمان ۵ ساعت

۱۹۹۶/۱۳۷۵

مسئله ۱

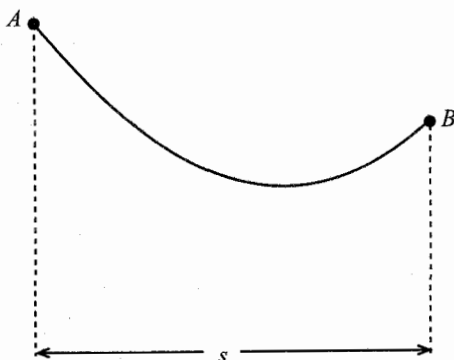
(این مسئله شامل ۵ قسمت مستقل از یکدیگر است.)

الف) پنج مقاومت یک اهمی مطابق شکل ۵۰ به هم وصل شده‌اند. اگر مقاومت سیم‌های رابط ناچیز باشد، مقاومت معادل R را بین دو نقطه A و B به دست آورید.



شکل ۵۰

ب) اسکی بازی از حال سکون در نقطه A روی تپه‌ای شیب‌دار بدون توقف یا چرخش، مطابق شکل ۵۱ به طرف پایین حرکت می‌کند. هنگامی که اسکی باز در نقطه B متوقف شود، جابه‌جایی افقی او



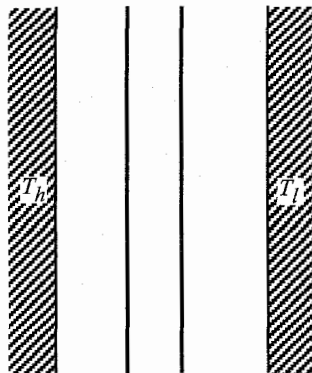
شکل ۵۱

برابر s است. اختلاف ارتفاع بین دو نقطه A و B با فرض وجود اصطکاک چقدر است؟ (سرعت اسکی باز به قدری کم است که می‌توان از فشار اضافی ناشی از انحنای مسیر وارد بر برف صرف نظر کرد. همچنین می‌توان اصطکاک هوا و بستگی آن به سرعت اسکی باز را نادیده گرفت.)
 (پ) یک قطعه فلز که به لحاظ گرمایی عایق بندی شده است، توسط یک گرمکن الکتریکی با توان ثابت P گرم می‌شود. دمای مطلق این قطعه سربی بر حسب زمان به صورت زیر افزایش می‌یابد

$$T(t) = T_0 [1 + a(t - t_0)]^{\frac{1}{4}}$$

در اینجا a ، t_0 و T_0 مقادیر ثابتی هستند. ظرفیت گرمایی $C_p(T)$ این فلز را به دست آورید (دما به گستره دمایی آزمایش بستگی دارد.)

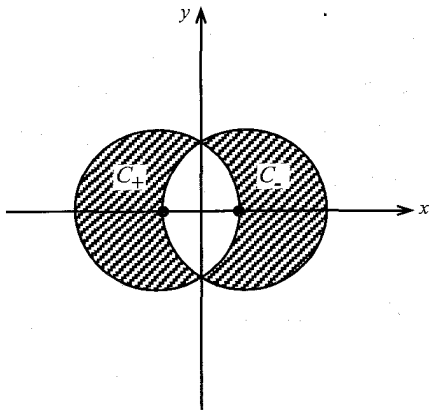
(ت) یک صفحه مسطح سیاه با دمای ثابت زیاد T_h به طور موازی با یک صفحه مسطح سیاه دیگر با دمای ثابت کم T_l قرار دارد (شکل ۵۲). فضای بین صفحه‌ها خلأ است. گرما به طریق تابش



شکل ۵۲

کاهش می‌یابد. یک حفاظ گرمایی شامل دو صفحه نازک سیاه، که به لحاظ گرمایی نسبت به هم عایق‌بندی شده‌اند، به‌طور موازی بین صفحه‌های گرم و سرد قرار گرفته‌اند و بعد از مدتی به یک وضعیت مانا می‌رسند. حفاظ گرمایی با چه ضریبی جریان گرما را در این حالت مانا کاهش می‌دهد؟ از اثرهای لبه‌ای ناشی از اندازه محدود سطح چشم‌پوشی کنید.

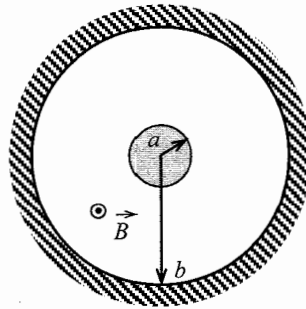
(ث) از دو رسانای مستقیم و طویل غیرمغناطیسی C_+ و C_- که نسبت به یکدیگر عایق‌بندی شده‌اند جریان I به‌ترتیب در جهت مثبت و منفی محور z می‌گذرد. سطح مقطع هر رسانا (قسمت هاشورخورده در شکل) با دایره‌ای به قطر D در صفحه $x-y$ محدود شده است به‌طوری که فاصله بین مرکزهای آن‌ها $D/2$ است. در این صورت مساحت سطح مقطع هر رسانا برابر $D^2 \left(\frac{1}{12}\pi + \frac{1}{8}\sqrt{3} \right)$ است (شکل ۵۳). جریان در سطح مقطع هر رسانا به‌طور یکنواخت توزیع شده است. میدان مغناطیسی $B(x, y)$ را در نقطه‌ای بین فضاهای رساناها حساب کنید.



شکل ۵۳

مسئله ۲

فضای بین دو رسانای استوانه‌ای هم‌محور تهی است. شعاع استوانه داخلی a و شعاع داخلی استوانه بیرونی b است، که در شکل ۵۴ نشان داده شده است. استوانه بیرونی که آند نامیده می‌شود، می‌تواند به پتانسیل مثبت V نسبت به استوانه داخلی، وصل شود. همچنین میدان مغناطیسی همگن \vec{B} موازی با محور استوانه، عمود بر صفحه شکل به‌طرف خارج، وجود دارد. بارهای القایی روی رساناها را نادیده بگیرید. می‌خواهیم دینامیک الکترون‌های به جرم m و بار $-e$ را که روی سطح استوانه داخلی آزادانه حرکت می‌کنند بررسی کنیم. (الف) در ابتدا فرض کنید پتانسیل V وصل است اما $\vec{B} = 0$ است. الکترون آزادی را که سرعت آن روی سطح استوانه داخلی ناچیز است در نظر بگیرید. سرعت v این الکترون را هنگامی که به آند برخورد می‌کند به‌دست آورید. پاسخ را برای دو حالت نانسیتی و نسبیتی به‌دست آورید.



شکل ۵۴

برای قسمت‌های دیگر این مسئله حالت‌های نانسبیتی را در نظر بگیرید.

(ب) حال فرض کنید $V = 0$ و میدان مغناطیسی همگن \vec{B} حضور دارد. الکترونی به‌طور شعاعی و با سرعت اولیه v از سطح استوانه داخلی به طرف آند حرکت می‌کند. برای یک میدان مغناطیسی بزرگ‌تر از میدان حدی B_c ، الکترون به آند نمی‌رسد. مسیر حرکت الکترون را در حضور میدان مغناطیسی B که اندکی از B_c بزرگ‌تر است، رسم کنید. B_c را به دست آورید.

برای قسمت‌های دیگر مسئله هم پتانسیل V و هم میدان مغناطیسی همگن \vec{B} حضور دارند.

(پ) تکانه زاویه‌ای غیر صفر L نسبت به محور استوانه ناشی از میدان مغناطیسی به الکترون داده می‌شود. معادله‌ای برای آهنگ تغییر تکانه زاویه‌ای، $\frac{dL}{dt}$ ، بنویسید و نشان دهید که $L - keBr^2$ در طول حرکت ثابت است، که در آن k یک عدد حقیقی معین و r فاصله از محور استوانه است. مقدار k را به دست آورید.

(ت) الکترونی را در نظر بگیرید که با سرعت ناچیز از سطح استوانه داخلی جدا و به آند نمی‌رسد ولی به فاصله بیشینه برابر r_m از محور استوانه می‌رسد. سرعت الکترون، v ، را در این فاصله بیشینه برحسب r_m به دست آورید.

(ث) می‌خواهیم با استفاده از میدان مغناطیسی جریان منظمی از الکترون را به طرف آند برقرار کنیم. برای B بزرگ‌تر از میدان مغناطیسی حدی B_c ، الکترونی که با سرعت ناچیز از سطح استوانه داخلی جدا می‌شود، به آند نمی‌رسد. B_c را به دست آورید.

(ج) اگر به استوانه داخلی گرما دهیم الکترون‌ها با یک سرعت غیر صفر از سطح استوانه داخلی جدا می‌شوند. v_B مؤلفه سرعت اولیه موازی \vec{B} ، v_r (در جهت شعاع) و v_ϕ (در جهت قطبی یعنی عمود بر جهت شعاعی) مؤلفه‌های عمود بر \vec{B} هستند.

میدان مغناطیسی حدی B_c برای رسیدن الکترون‌ها به آند را در این حالت حساب کنید.

مسئله ۳

- در این مسئله می‌خواهیم برخی از صورت‌های آشکار اندازه‌گیری‌های میان اقیانوسی روی زمین را بررسی کنیم. برای سادگی مسئله فرض‌های زیر را به‌کار ببرید
- زمین و ماه به‌صورت دو سیستم منزوی فرض شوند،
 - فاصله بین ماه و زمین ثابت فرض شود،
 - همه سطح زمین را اقیانوسی از آب فراگرفته است،
 - دینامیک حرکت چرخشی زمین به دور محور خودش را نادیده بگیرید، و
 - هنگام محاسبه نیروی جاذبه گرانشی زمین، همه جرم زمین را در مرکز آن در نظر بگیرید.
- داده‌های دیگر به‌قرار زیر است

$$\text{جرم زمین} : M = 5,98 \times 10^{24} \text{ kg}$$

$$\text{جرم ماه} : M_m = 7,3 \times 10^{22} \text{ kg}$$

$$\text{شعاع زمین} : R = 6,37 \times 10^6 \text{ m}$$

$$\text{فاصله بین مرکز زمین و مرکز ماه} : L = 3,84 \times 10^8 \text{ m}$$

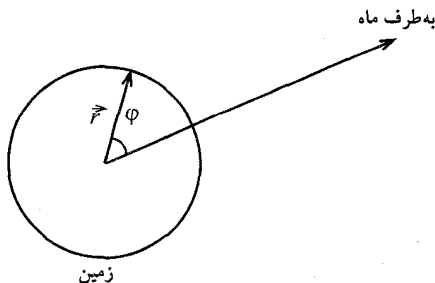
$$\text{ثابت گرانش} : G = 6,67 \times 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}$$

الف) ماه و زمین با سرعت زاویه‌ای حول مرکز جرم مشترک، C ، می‌چرخند. فاصله C از مرکز زمین چقدر است؟ (این فاصله را با l نشان دهید.)

مقدار عددی l را حساب کنید.

حال از چارچوب مرجعی استفاده می‌کنیم که در آن ماه و مرکز زمین با یکدیگر حول C می‌چرخند. در این چارچوب مرجع شکل مایع روی سطح زمین ایستاست.

برای نشان دادن موقعیت جرم نقطه‌ای m روی سطح مایع زمین همان‌طور که در شکل ۵۵ نشان داده شده است از مختصات قطبی r که از مرکز جرم C می‌گذرد و در صفحه P (صفحه کاغذ) و عمود بر محور چرخشی است استفاده می‌کنیم.



شکل ۵۵

ب) یک جرم نقطه‌ای (جرم m) از مایع روی سطح زمین در نظر بگیرید (در صفحه P). در چارچوب مرجع، بر آن نیروی گریز از مرکز و نیروهای گرانشی از طرف ماه و زمین وارد می‌شود. انرژی پتانسیل متناظر با این سه نیرو را بنویسید.

اشاره: هر نیروی $F(r)$ ، که نسبت به چند مبدأ به‌طور شعاعی باشد، برابر است با منفی مشتق انرژی پتانسیل $V(r)$ که دارای تقارن کروی است

$$F(r) = -\frac{dV(r)}{dr}$$

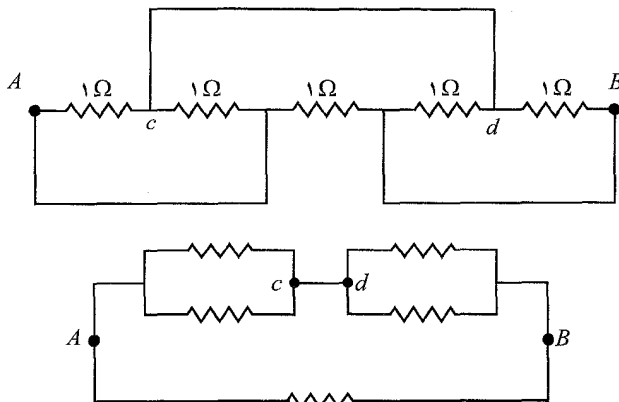
پ) برآمدگی جزرومدی، h ، را به‌طور تقریبی برحسب کمیت‌های M ، M_m و ... به‌دست آورید. اختلاف بین بیشترین و کمترین جزرومد در این مدل برحسب متر چقدر است؟ برای $a \ll 1$ (خیلی کوچک‌تر از یک) می‌توانید از تقریب زیر استفاده کنید

$$\frac{1}{\sqrt{1+a^2-2a\cos\theta}} \approx 1+a\cos\theta + \frac{1}{4}a^2(3\cos^2\theta-1)$$

پاسخ تشریحی مسئله‌ها

حل مسئله ۱

الف) مدار شامل مقاومت‌ها را همان‌گونه که در شکل ۵۶ دیده می‌شود، می‌توان دوباره رسم کرد



مدار معادل رسم شده نشان می‌دهد که مقاومت معادل بین نقطه c و A برابر $0,5 \Omega$ ، و بین نقطه d و نقطه B نیز همان است. در نتیجه مقاومت معادل بین دو نقطه A و B ، که شامل دو مقاومت متوالی $0,5 \Omega$ اهمی و یک مقاومت 1 اهمی که به‌طور موازی به یکدیگر وصل شده‌اند برابر است با

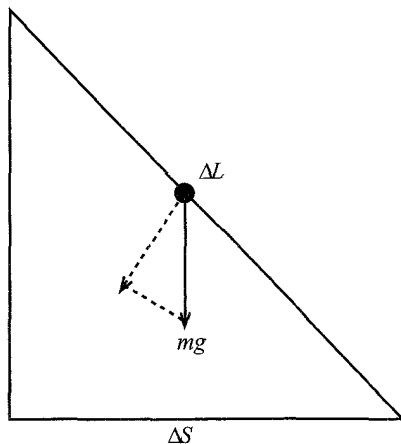
$$R = 0,5 \Omega$$

(ب) برای یک مسافت به حد کافی کوچک Δs می‌توان مسیر را مستقیم در نظر گرفت (شکل ۵۷). اگر جزء طول متناظر با این مسیر را با ΔL نشان دهیم، نیروی اصطکاک برابر است با

$$\mu mg \frac{\Delta s}{\Delta L}$$

کار انجام شده توسط نیروی اصطکاک برابر حاصل ضرب این نیرو در جابه‌جایی است

$$\mu mg \frac{\Delta s}{\Delta L} \cdot \Delta L = \mu mg \Delta s$$



شکل ۵۷

با جمع مقدار بالا در تمام مسیر کار کل انجام شده توسط نیروی اصطکاک برابر خواهد شد با

$$mgs$$

مطابق اصل پایستگی انرژی این کار کل انجام شده باید برابر کاهش انرژی پتانسیل اسکی‌باز باشد، یعنی

$$h = \mu s$$

(پ) افزایش دما را در یک بازه کوچک زمانی dt برابر dT در نظر بگیرد. در طی این بازه زمانی فلز انرژی $P dt$ را به دست می‌آورد. ظرفیت گرمایی برابر است با نسبت انرژی داده شده به افزایش دما

$$C_p = \frac{P dt}{dT} = \frac{P}{dT/dt}$$

نتایج تجربی متناظر است با

$$\frac{dT}{dt} = \frac{T_0}{\tau} a [\lambda + a(t - t_0)]^{-\frac{2}{3}} = T_0 \left(\frac{a}{\tau}\right) \left(\frac{T_0}{T}\right)^3$$

از این رو

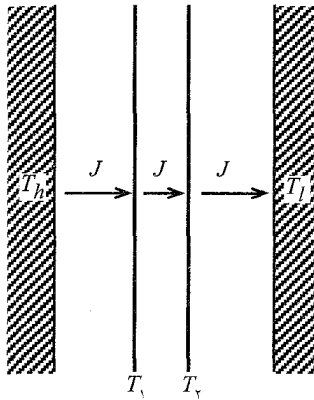
$$C_p = \frac{P}{dT/dt} = \frac{\tau P}{a T_0^3} T^3$$

اشاره: در دماهای کم، اما نه خیلی کم، ظرفیت گرمایی فلزات متناسب با T^3 تغییر می‌کند. (ت) با توجه به شکل ۵۸ در شرایط مانا جریان گرمای خالص از هر قسمت برابر است با

$$J = \sigma (T_h^4 - T_1^4)$$

$$J = \sigma (T_1^4 - T_2^4)$$

$$J = \sigma (T_2^4 - T_l^4)$$



شکل ۵۸

با جمع سه معادله بالا داریم

$$3J = \sigma (T_h^4 - T_l^4) = J.$$

J ، گرمای منتقل شده در غیاب حفاظ گرمایی است. بنابراین داریم

$$\xi = J/J. \quad \text{و} \quad \xi = \frac{1}{3}$$

(ث) میدان مغناطیسی برآیند از برهم‌نهی میدان‌های دو رسانای استوانه‌ای به دست می‌آید، به طوری که اثر جریان‌های ناشی از فصل مشترک دو رسانا یکدیگر را خنثی می‌کنند. هر کدام از رساناها حامل جریان بزرگ‌تر I' هستند، اما کسری از این جریان، یعنی I ، از سطح مقطع واقعی هر کدام از رساناها عبور می‌کند (سطح ماه شکل).

نسبت جریان‌های I و I' برابر نسبت سطح مقطع آن‌هاست

$$\frac{I}{I'} = \frac{\left(\frac{\pi}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{3}}{\lambda}\right) D^2}{\frac{\pi}{4} D^2} = \frac{2\pi + 3\sqrt{3}}{6\pi}$$

هرگاه از یک رسانای استوانه‌ای جریان I' عبور کند، بنا بر قانون آمپر در فاصله r از محور آن مؤلفه قطبی میدان برابر است با

$$B_\varphi = \frac{\mu_0 I' \pi r^2}{2\pi r \frac{\pi}{4} D^2} = \frac{2\mu_0 I' r}{\pi D^2}$$

و مؤلفه‌های دکارتی در مختصات قائم آن برابر است با

$$B_x = -B_\varphi \frac{y}{r} = -\frac{2\mu_0 I' y}{\pi D^2}$$

$$B_y = B_\varphi \frac{x}{r} = \frac{2\mu_0 I' x}{\pi D^2}$$

برای میدان‌های برهم نهاده شده، در محل $x = \frac{D}{4}$ روی محور استوانه‌ها جریان‌ها برابر I هستند. جمع مؤلفه‌های x برابر صفر می‌شود، در صورتی که حاصل مؤلفه‌های y برابر است با

$$\begin{aligned} B_y &= \frac{2\mu_0}{\pi D^2} \left[I' \left(x + \frac{D}{4} \right) - I' \left(x - \frac{D}{4} \right) \right] \\ &= \frac{\mu_0 I'}{\pi D} = \frac{6\mu_0 I}{\left(2\pi + 3\sqrt{3} \right) D} \end{aligned}$$

که مقداری ثابت است و جهت آن در امتداد مثبت محور y است.

حل مسئله ۲

الف) انرژی پتانسیل eV به انرژی جنبشی تبدیل شده است. بنابراین

$$\frac{1}{2} m v^2 = eV \quad (\text{نانبیتی})$$

$$\frac{m c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} - m c^2 = eV \quad (\text{نسیتی})$$

در این صورت

$$v = \begin{cases} \sqrt{2eV/m} & (\text{نانبیتی}) \\ c \sqrt{1 - \left(\frac{m c^2}{m c^2 + eV} \right)^2} & (\text{نسیتی}) \end{cases} \quad (1)$$

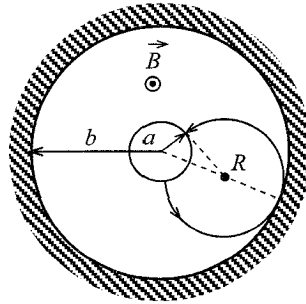
(ب) هرگاه $V = 0$ باشد، الکترون در یک میدان مغناطیسی همگن حرکت می‌کند. نیروی مغناطیسی لورنتس عمود بر سرعت الکترون اثر می‌کند. حرکت الکترون روی یک دایره خواهد بود و سرعت اولیه آن مماس بر این دایره است. با مساوی قرار دادن نیروی جانب مرکز و نیروی لورنتس، شعاع مداری R (شعاع سیکلوترونی) به دست می‌آید.

$$eBv_0 = \frac{mv_0^2}{R}$$

$$B = \frac{mv_0}{eR} \quad (2)$$

با توجه به شکل ۵۹ مشاهده می‌شود که در حالت حدی شعاع مداری R در رابطه زیر صدق می‌کند

$$\sqrt{a^2 + R^2} = b - R$$



شکل ۵۹

با مربع کردن دو طرف این معادله داریم

$$a^2 + R^2 = b^2 - 2bR + R^2$$

یا

$$R = (b^2 - a^2) / 2b$$

با قرار دادن این مقدار در معادله (۲)، میدان حدی برابر است با

$$B_c = \frac{mv_0}{eR} = \frac{2bmv_0}{(b^2 - a^2)e}$$

(پ) هرگاه گشتاوری بر یک جسم اثر کند، تکانه زاویه‌ای جسم نسبت به زمان تغییر می‌کند. بنابراین مؤلفه قطبی F_φ نیروی لورنتس $\vec{F} = (-e)\vec{B} \times \vec{v}$ ، باعث ایجاد گشتاور $F_\varphi r$ می‌شود. تنها مؤلفه شعاعی سرعت الکترون $v_r = \frac{dr}{dt}$ باعث ایجاد مؤلفه قطبی نیروی لورنتس می‌شود. از این رو

$$\frac{dL}{dt} = eBr \frac{dr}{dt}$$

که می‌توان آن را به صورت زیر بازنویسی کرد

$$\frac{d}{dt} \left(L - \frac{eBr^2}{2} \right) = 0$$

در این صورت

$$C = L - \frac{1}{2} eBr^2 \quad (3)$$

که در مدت حرکت ثابت است. بنابراین عدد بدون بعد K در صورت مسئله برابر $\frac{1}{2}$ است. (ت) اکنون ثابت C را در معادله (۳)، روی سطح داخلی استوانه ($r = a$) و در بیشترین فاصله ($r = r_m$) حساب می‌کنیم

$$0 - \frac{1}{2} eBa^2 = mvr_m - \frac{1}{2} eBr_m^2$$

خواهیم داشت

$$v = \frac{eB(r_m^2 - a^2)}{2mr_m} \quad (4)$$

راه حل دیگر: ابتدا پتانسیل الکتریکی $V(r)$ را بر حسب فاصله شعاعی به دست می‌آوریم. در مختصات استوانه‌ای میدان با نسبت عکس r کاهش می‌یابد، به طوری که پتانسیل از رابطه $V(r) = C_1 \ln r + C_2$ به دست می‌آید. با توجه به اینکه $V(a) = 0$ و $V(b) = V$ ، با به دست آوردن دو ثابت C_1 و C_2 داریم

$$V(r) = V \frac{\ln(r/a)}{\ln(b/a)}$$

با تبدیل همه انرژی پتانسیل الکتریکی در $r = r_m$ به انرژی جنبشی، داریم

$$\frac{1}{2} mv^2 = eV \frac{\ln(r_m/a)}{\ln(b/a)}$$

در نتیجه

$$v = \sqrt{\frac{2eV \ln(r_m/a)}{m \ln(b/a)}} \quad (5)$$

همان طور که دیده می‌شود پاسخ‌های (۴) و (۵) متفاوت‌اند. این تنها به این خاطر است که r_m یک پارامتر مستقل نیست، بلکه توسط B و v تعیین می‌شود، بنابراین دو جواب یکتا هستند. (ث) برای میدان مغناطیسی حدی، بیشینه فاصله r_m برابر b است، و سرعت در نقطه بازگشت برابر است با

$$v = \frac{eB(b^2 - a^2)}{2mb}$$

از این رو نیروی لورنتس کاری انجام نمی‌دهد، و انرژی جنبشی $\frac{1}{2}mv^2$ برابر eV است (سؤال الف).
با توجه به دو معادلهٔ اخیر خواهیم داشت

$$\frac{eB(b^2 - a^2)}{2mb} = \sqrt{2eV/m}$$

میدان مغناطیسی حدی برای جریان قطع برابر است با

$$B_c = \frac{2b}{b^2 - a^2} \sqrt{2mV/e}$$

ج) نیروی لورنتس هیچ مؤلفه‌ای موازی میدان مغناطیسی ندارد، و در نتیجه مؤلفهٔ سرعت v_B در هنگام حرکت ثابت است.

جابه‌جایی موازی متناظر با محور استوانه ارتباطی با مسئلهٔ رسیدن به آند ندارد. سرعت قطبی نهایی الکترونی را که به‌سختی به آند می‌رسد با v نشان می‌دهیم. بنابر پایستگی انرژی

$$\frac{1}{2}m(v_B^2 + v_\varphi^2 + v_r^2) + eV = \frac{1}{2}m(v_B^2 + v^2)$$

و از آنجا داریم

$$v = \sqrt{v_r^2 + v_\varphi^2 + 2eV/m} \quad (۶)$$

با محاسبهٔ ثابت C در معادلهٔ (۳) برای هر دو سطح استوانه در حالت حدی خواهیم داشت

$$mv_\varphi a - \frac{1}{2}eB_c a^2 = mva - \frac{1}{2}eB_c b^2$$

با قرار دادن مقدار سرعت v از معادلهٔ (۶)، برای میدان حدی داریم

$$B_c = \frac{2m(vb - v_\varphi a)}{e(b^2 - a^2)} = \frac{2mb}{e(b^2 - a^2)} \left[\sqrt{v_r^2 + v_\varphi^2 + 2eV/m} - v_\varphi a/b \right]$$

حل مسئلهٔ ۳

الف) با قرار دادن مبدأ روی مرکز زمین، مرکز جرم C در محل \vec{l} خواهد بود. فاصلهٔ l از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید

$$Ml = M_m(L - l)$$

خواهیم داشت

$$l = \frac{M_m}{M + M_m} L = 4,63 \times 10^6 \text{ m} \quad (۱)$$

که کمتر از R ، و در نتیجه درون زمین است.

نیروی مرکزگریز باید با نیروی جاذبه گرانشی بین ماه و زمین متعادل شود

$$M\omega^2 l = G \frac{MM_m}{L^2}$$

و از آنجا به دست می‌آوریم

$$\omega = \sqrt{\frac{GM_m}{L^2 l}} = \sqrt{\frac{G(M + M_m)}{L^3}} = 2,67 \times 10^{-6} \text{ s}^{-1} \quad (2)$$

(که با دوره (روز) $\frac{2\pi}{\omega} = 27,2$ متناظر است.) برای حذف l از معادله (۱) استفاده کرده‌ایم. (ب) انرژی پتانسیل جرم نقطه‌ای m شامل سه قسمت است:
۱. انرژی پتانسیل ناشی از چرخش (با چرخش در چارچوب مرجع، صورت مسئله را ببینید)،

$$-\frac{1}{2} m \omega^2 r_1^2$$

که در آن r_1 فاصله از C است. این متناظر است با نیروی مرکزگریز $m\omega^2 r_1^2$ که در جهت بیرون از C است.

۲. جاذبه گرانشی زمین،

$$-G \frac{mM}{r}$$

۳. جاذبه گرانشی ماه،

$$-G \frac{mM_m}{r_m}$$

که در آن r_m فاصله از ماه است.

با در نظر گرفتن مکان m در دستگاه مختصات قطبی r ، در صفحه متعامد به طرف محور چرخش (شکل ۶۰ را ببینید)، خواهیم داشت

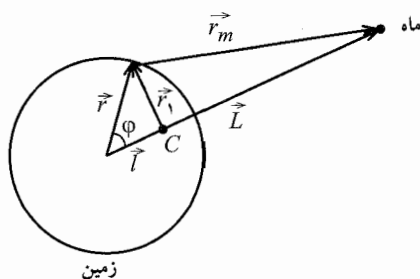
$$r_1^2 = (r - l)^2 = r^2 - 2rl \cos \varphi + l^2$$

با جمع سه قسمت مربوط به انرژی پتانسیل، داریم

$$V(r) = -\frac{1}{2} m \omega^2 (r^2 - 2rl \cos \varphi + l^2) - \frac{GmM}{r} - \frac{GmM_m}{|\vec{L} - \vec{r}|} \quad (3)$$

در اینجا l از معادله (۱) به دست می‌آید

$$\begin{aligned} |\vec{r}_m| &= \sqrt{(\vec{L} - \vec{r})^2} = \sqrt{L^2 - 2\vec{L} \cdot \vec{r} + r^2} \\ &= L \sqrt{1 + (r/L)^2 - 2(r/L) \cos \varphi} \end{aligned}$$



شکل ۶۰

(پ) چون نسبت $\frac{r}{L} = a$ خیلی کوچک است، می‌توانیم از بسط زیر استفاده کنیم

$$\frac{1}{\sqrt{1 + a^2 - 2a \cos \varphi}} \approx 1 + a \cos \varphi + \frac{a^2}{2} (3 \cos^2 \varphi - 1)$$

$$V(r, \varphi)/m = -\frac{1}{2} \omega^2 r^2 - \frac{GM}{r} - \frac{GM_m r^2}{2L^3} (3 \cos^2 \varphi - 1) \quad (4)$$

در اینجا از رابطه زیر استفاده شده است

$$m \omega^2 r l \cos \varphi - GmM_m \frac{r}{L^3} \cos \varphi = 0$$

هرگاه از رابطه (۲) به جای ω^2 در معادله بالا جایگذاری کنیم، به همین نتیجه می‌رسیم. شکل مایع روی سطح زمین به‌گونه‌ای است که یک جرم نقطه‌ای m در هر کجای آن سطح دارای انرژی V است. (این معادل آن است که بگوییم هیچ نیروی خالصی مماس بر سطح وجود ندارد). با قرار دادن

$$r = R + h$$

که در آن h برآمدگی جزرومدی خیلی کوچک‌تر از R است، به‌طور تقریبی خواهیم داشت

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{R+h} = \frac{1}{R} \frac{1}{1+(h/R)} \approx \frac{1}{R} \left(1 - \frac{h}{R}\right) = \frac{1}{R} - \frac{h}{R^2}$$

همچنین

$$r^2 = R^2 + 2Rh + h^2 \approx R^2 + 2Rh$$

با جایگذاری این مقادیر و همچنین مقدار به‌دست آمده از رابطه (۲) در رابطه (۴) خواهیم داشت

$$V(r, \varphi)/m = -\frac{G(M + M_m)R}{L^3} h + \frac{GM}{R^2} h - \frac{GM_m r^2}{2L^3} (3 \cos^2 \varphi - 1) \quad (5)$$

دوباره از یک مقدار ثابت چشم‌پوشی شده است.
اندازه اولین جمله طرف راست معادله (۵) ضریبی است از

$$\frac{(M + M_m)}{M} \left(\frac{R}{L}\right)^3 \approx 10^{-5}$$

که از جمله دوم کوچک‌تر و در نتیجه قابل چشم‌پوشی است. اگر دو جمله آخر را برابر یکدیگر قرار دهیم خواهیم داشت

$$h = \frac{M_m r^2 R^2}{2ML^2} (3 \cos^2 \varphi - 1)$$

بنابراین جرم نقطه‌ای m در هر نقطه روی سطح زمین دارای همان انرژی است. در اینجا با اطمینان می‌توان به جای r^2 ، مقدار تقریبی R^2 را قرار داد. برای برآمدگی جزر و مدی به دست می‌آوریم

$$h = \frac{M_m R^4}{2ML^2} (3 \cos^2 \varphi - 1)$$

که بیشترین مقدار آن برای $\varphi = 0^\circ$ ، برابر $h_{\max} = M_m R^4 / ML^2$ است، در جهت یا خلاف جهت ماه، در صورتی که کمترین مقدار آن برای $\varphi = \pi/2$ یا $\pi/3$ برابر $h_{\min} = -M_m R^4 / 2ML^2$ خواهد بود.

به علاوه اختلاف بین کمترین و بیشترین جزر و مد برابر است با

$$h_{\max} - h_{\min} = \frac{3M_m R^4}{2ML^2} = 0,54 \text{ m}$$

(کمترین و بیشترین مقدار جزر و مد با یک مقدار ثابت که باید افزوده شود تعیین می‌شود، اما اختلاف بین آن‌ها مستقل از این مقدار ثابت است).

بیست و هشتمین المپیاد بین‌المللی فیزیک

سادبری، کانادا*

مسابقه نظری - زمان ۵ ساعت

۱۹۹۷/۱۳۷۶

مسئله ۱

(این مسئله شامل ۵ قسمت مستقل از هم است.)

(الف) یک جرم کوچک به انتهای یک فنر آرمانی بدون جرم آویزان است و با بسامد طبیعی f در راستای قائم نوسان می‌کند. اگر طول فنر را نصف کنیم و جرم را به انتهای آن ببندیم، بسامد جدید نوسان، f' ، چقدر می‌شود؟

(ب) شعاع اتم هیدروژن در حالت پایه (شعاع بور) برابر $a_0 = 0.529 \text{ nm}$ است. شعاع اتم هیدروژن میونی، a' چقدر است؟ در این اتم الکترون توسط یک میون با بار مشابه ولی با جرم 207 برابر الکترون جایگزین شده است. فرض کنید جرم پروتون خیلی بیشتر از جرم میون و الکترون است. (پ) دمای متوسط زمین $T = 287 \text{ K}$ است. اگر فاصله بین زمین و خورشید 1% کاهش می‌یافت، دمای متوسط زمین، T' ، چقدر می‌شد؟

(ت) در یک روز، هوا خشک و چگالی آن $1.25 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$ است. روز بعد رطوبت افزایش یافته و به اندازه 2% جرم هوا، بخار آب به آن افزوده شده است. اگر فشار و دما مانند روز قبل باشد، چگالی هوا، ρ' ، چقدر شده است؟

جرم مولکولی متوسط هوای خشک برابر 28.8 g/mol و جرم مولکولی آب 18 g/mol است. فرض کنید هوا گاز کامل است.

ث) اگر توان خروجی یک چرخ‌بال (هلیکوپتر) برابر P باشد می‌تواند پرواز کند. اگر یک چرخ‌بال دیگر درست مشابه این چرخ‌بال با $\frac{1}{4}$ مقیاس (در همه ابعاد خطی) باشد، توان مکانیکی لازم، P' ، برای پرواز آن چقدر است؟

مسئله ۲ جرم‌های هسته‌ای و پایداری^۱

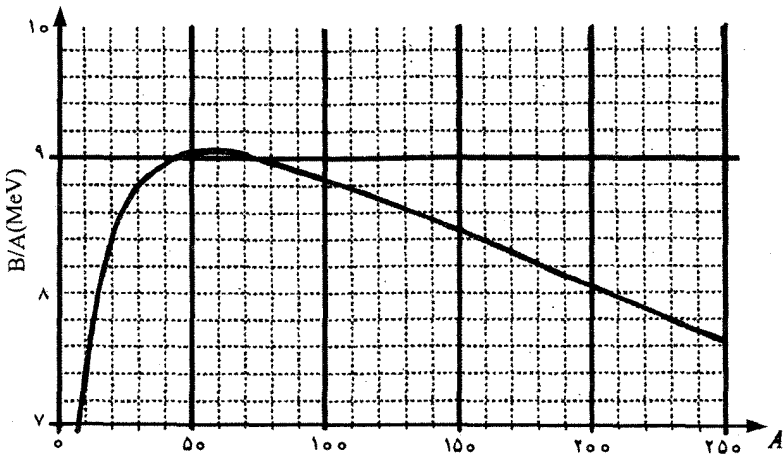
در این مسئله همه انرژی‌ها برحسب MeV، میلیون الکترون ولت داده شده‌اند به طوری که داریم

$$1 \text{ MeV} = 1.6 \times 10^{-13} \text{ J}$$

اما برای حل این مسئله نیازی به دانستن آن نداریم. M جرم هسته‌اتم با Z پروتون و N نوترون ($A = Z + N$) عدد جرمی) برابر است با مجموع جرم نوکلئون‌های (پروتون و نوترون) آزاد منهای انرژی بستگی B/c^2 .

$$Mc^2 = Zm_p c^2 + Nm_n c^2 - B$$

در نمودار شکل ۶۱، بیشینه مقدار $\frac{B}{A}$ برای یک مقدار معین A برحسب A رسم شده است. هر چه $\frac{B}{A}$ بزرگتر باشد، معمولاً هسته پایدارتر است.



شکل ۶۱

الف) بیشتر از یک عدد جرمی معین A ، انرژی بستگی هسته‌ها به اندازه کافی کوچک است به طوری که هسته‌ها به طور مداوم ذره‌های آلفا ($A = 4$) گسیل می‌کنند. با فرض خطی بودن این منحنی در بیش از $A = 100$ ، مقدار A را برآورد کنید.

در این مدل فرض کنید:

• هستهٔ اولیه و نهایی، هر دو روی این منحنی قرار دارند.

• انرژی بستگی کل ذرهٔ α از $B_f = 25.0 \text{ MeV}$ به دست می‌آید. (این مقدار را نمی‌توان از روی منحنی به دست آورد.)

(ب) انرژی بستگی هر هستهٔ اتم با Z پروتون و N نوترون ($A = Z + N$) از رابطهٔ نیمه-تجربی زیر به دست می‌آید

$$B = a_v A - a_s A^{2/3} - a_c Z^2 A^{-1/3} - a_a \frac{(N - Z)^2}{A} - \delta$$

که مقدار δ برابر است با

$$+a_p A^{-3/4} \text{ برای هستهٔ با } N \text{ فرد و } Z \text{ فرد.}$$

صفر برای هستهٔ با N زوج و Z فرد یا N فرد و Z زوج.

$$-a_p A^{-3/4} \text{ برای هستهٔ با } N \text{ زوج و } Z \text{ زوج.}$$

و مقادیر ضریب‌های آن برابر است با

$$a_v = 15.78 \text{ MeV} ; a_s = 16.78 \text{ MeV} ; a_c = 0.72 \text{ MeV}$$

$$a_a = 23.5 \text{ MeV} ; a_p = 33.5 \text{ MeV}$$

(i) رابطه‌ای برای تعداد پروتون هسته Z_{\max} با بزرگ‌ترین انرژی بستگی برحسب عدد جرمی A به دست آورید. (فقط برای این قسمت از δ صرف نظر کنید.)

(ii) مقدار Z برای هسته با $A = 200$ با بزرگ‌ترین B/A ، چقدر است؟ (δ را در نظر بگیرید.)

(iii) سه هسته با $A = 128$ را که در جدول صفحهٔ بعد آمده است در نظر بگیرید. معلوم کنید که کدام یک از لحاظ انرژی پایدارند و کدام یک انرژی کافی برای واپاشی در فرایندهای زیر را دارند. Z_{\max} را با استفاده از قسمت (i) تعیین و جدول زیر را کامل کنید.

در تکمیل کردن جدول

• فرایندهایی را که از نظر انرژی مجازند، علامت \checkmark بزنید.

• فرایندهایی را که از نظر انرژی مجاز نیستند، علامت \circ بزنید.

• فقط گذارهای بین این سه هسته را در نظر بگیرید.

فرایندهای واپاشی

۱. واپاشی β^- ; گسیل الکترون از هسته.

۲. واپاشی β^+ ; گسیل پوزیترون از هسته.

۳. واپاشی $\beta^-\beta^-$; گسیل دو الکترون به طور هم‌زمان از هسته.

۴. گیراندازی الکترون؛ گیراندازی یک الکترون اتم به وسیلهٔ هسته.

انرژی جرم سکون یک الکترون (و پوزیترون) $m_e c^2 = 0.51 \text{ MeV}$ ، برای یک پروتون $m_p c^2 = 938.27 \text{ MeV}$ و برای یک نوترون $m_n c^2 = 939.57 \text{ MeV}$ است. توجه: در $\frac{A}{Z}X$ ؛ X نماد شیمیایی است.

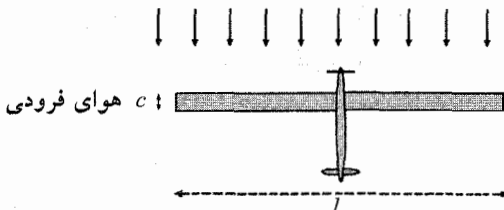
فرايندها/هسته‌ها	واپاشی β^-	واپاشی β^+	گیراندازی الکترون	واپاشی $\beta^- \beta^-$
$^{128}_{53}\text{I}$				
$^{128}_{54}\text{Xe}$				
$^{128}_{55}\text{Cs}$				

مسئله ۳ هواپیمای خورشیدی^۱

می‌خواهیم هواپیمایی طراحی کنیم که تنها با استفاده از انرژی خورشیدی بتواند پرواز کند. یکی از کارآمدترین انواع طرح‌ها پوشاندن کامل سطح روی بال با سلول‌های خورشیدی است. انرژی الکتریکی حاصل، پروانه هواپیما را به حرکت درمی‌آورد. بال هواپیما را به صورت یک صفحه مستطیل شکل به طول l و پهنای c در نظر بگیرید؛ مساحت بال $S = cl$ و نسبت اضلاع آن $A = l/c$ است (شکل ۶۲). با در نظر گرفتن یک لایه هوا به ارتفاع x و طول l که با تغییر اندکی در سرعت با زاویه کمی به طرف پایین منحرف می‌شود، می‌توانیم یک ایده تقریبی برای نمایش بال هواپیما به دست آوریم. می‌توانیم با استفاده از سطوح کنترل مقدار بهینه‌ای برای پرواز انتخاب کنیم. اگر $x = \pi l/4$ باشد، این مدل ساده به واقعیت نزدیک است. جرم کل هواپیما M است، و هواپیما با سرعت \vec{v} نسبت به هوای اطراف به طور افقی پرواز می‌کند. در محاسبه‌های زیر جریان هوا را فقط در اطراف بال در نظر بگیرید. تغییر جریان هوا بر اثر چرخش پروانه هواپیما را نادیده بگیرید.

الف) تغییر تکانه هوایی را که از کنار بال هواپیما می‌گذرد در نظر بگیرید، ولی فرض کنید که با تغییر تکانه، سرعت تغییر نمی‌کند. رابطه‌ای برای نیروی بالا بر L و نیروی کشش افقی D_1 وارد بر بال بر حسب ابعاد بال، v ، و چگالی هوا به دست آورید. فرض کنید جهت جریان هوا همیشه موازی صفحه نمودار جانبی است. یک نیروی کشش افقی اضافی D_2 به دلیل اصطکاک هوایی که روی سطح بال جریان دارد به وجود می‌آید (شکل ۶۳). سرعت هوا به کندی تغییر می‌کند ($\Delta v \ll v$) و

نمای بال (در چارچوب مرجعی که با هواپیما حرکت می‌کند)



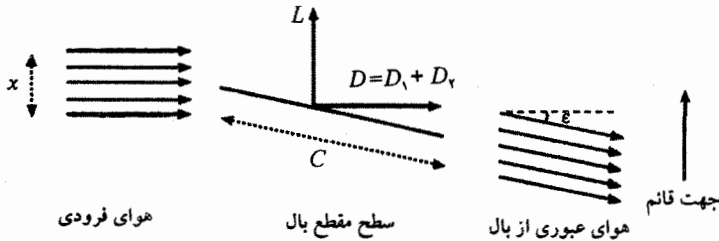
شکل ۶۲

از رابطه زیر به دست می‌آید

$$\frac{\Delta v}{v} = \frac{f}{A}$$

که مقدار f مستقل از آن است.

نمای هواپیما از بالا (چارچوب مرجع متصل به هواپیما)



شکل ۶۳

ب) رابطه‌ای (برحسب M, f, A, S و g شتاب گرانشی زمین) برای سرعت پرواز v به دست آورید که متناظر با کمترین توانی باشد که لازم است تا هواپیما با ارتفاع و سرعت ثابت پرواز کند. جمله‌های بزرگ‌تر از f^2 را نادیده بگیرید. رابطه تقریبی زیر می‌تواند برای زاویه‌های کوچک مفید باشد

$$1 - \cos \varepsilon \approx \frac{\sin^2 \varepsilon}{2}$$

پ) نمودار توان P برحسب سرعت پرواز v را رسم کنید. سهم هریک از نیروهای کشش را در توان لازم نشان دهید. رابطه‌ای (برحسب M, f, A, S و g) برای توان کمینه P_{\min} پیدا کنید.

ت) اگر سلول‌های خورشیدی بتوانند انرژی کافی تولید کنند به طوری که موتور الکتریکی و پروانه هواپیما توان مکانیکی $I = 10$ وات به‌ازای هر مترمربع از مساحت بال به‌وجود آورند، بیشترین بارگیری بال یعنی Mg/S را برحسب $\left(\frac{N}{m^2}\right)$ برای این توان و سرعت پرواز v حساب کنید. فرض کنید

$$A = 10, \quad f = 0.004, \quad \rho = 1.25 \text{ kg/m}^3$$

پاسخ تشریحی مسئله‌ها

حل مسئله ۱

الف) طول اصلی فنر را l و ثابت آن را k فرض کنید. f ، بسامد نوسان جرم m که به انتهای فنر بسته شده است از رابطه زیر به دست می‌آید

$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}}$$

k ، ثابت فنر به این معنی است که نیروی F لازم است تا کشش Δx ایجاد شود

$$k = \frac{F}{\Delta x}$$

با وجود نیروی F فاصله نقطه میانی فنر هنگامی که کشیده شده است برابر $\Delta x/2$ است. به علاوه

ثابت فنر برای نصف طول فنر از رابطه زیر به دست می آید

$$k' = \frac{F}{\Delta x/2} = 2k$$

در نتیجه بسامد نوسان جرم متصل به فنری که طول آن نصف شده است برابر است با

$$f' = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{2k}{m}} = \sqrt{2} f$$

(ب) روش اول. با استفاده از کوانتیده بودن تکانه زاویه‌ای

طول موج دوبروی یک ذره برابر است با

$$\lambda = \frac{h}{p}$$

با استفاده از اصل دوبروی (برای حالت زمینه) داریم

$$2\pi r = \lambda$$

بنابراین

$$pr = mvr = \hbar$$

(این رابطه را می توان با توجه به کوانتیده بودن تکانه زاویه‌ای به طور مستقیم به دست آورد.)

بنابر مدل بور و نیروی جانب مرکز ناشی از جاذبه الکتروستاتیکی داریم

$$m \frac{v^2}{r} = \frac{ke^2}{r^2} \Rightarrow v = \sqrt{\frac{ke^2}{mr}}$$

$$\sqrt{ke^2 mr} = \hbar \Rightarrow r \propto \frac{1}{m}$$

بنابراین شعاع اتم هیدروژن میونی به صورت زیر به دست می آید

$$a_{\mu} = \frac{a_0}{4.7} = 0.256 \text{ pm}$$

روش دوم. با استفاده از تحلیل ابعادی

شعاع اتم هیدروژن، r ، در حالت زمینه به کمیت‌های زیر بستگی دارد:

• جرم ذره مداری. (جرم هسته در مقایسه با جرم ذره مداری خیلی بزرگتر است، به همین

جهت آن را ایستا در نظر می‌گیریم، در نتیجه شعاع اتمی به جرم هسته بستگی ندارد.)

• نیروی الکتریکی بین ذرهٔ مداری و هسته. این نیرو به بار هسته q_n ، بار ذرهٔ مداری q و ثابت ϵ_0 بستگی دارد.

• \hbar . زیرا تکانهٔ زاویه‌ای همان‌طور که در بالا نشان دادیم، کوانتیده است.
بنابراین

$$r = A \hbar^\alpha m^\beta q_n^{r_1} q^{r_2} \epsilon_0^\delta$$

که در آن A یک ثابت بدون بُعد است. معادلهٔ ابعادی برابر است با

$$[D] = [M]^{\alpha+\beta-\delta} [D]^{2\alpha-2\delta} [Q]^{r_1+r_2+2\delta} [T]^{2\delta-\alpha}$$

در این رابطه $[D]$ بعد فاصله، $[M]$ بعد جرم، $[Q]$ بعد بار و $[T]$ دارای بعد زمان است. با فرض $\gamma = r_1 + r_2$ داریم

$$\alpha + \beta - \delta = 0, \quad 2\alpha - 2\delta = 1, \quad \gamma + 2\delta = 0, \quad 2\delta - \alpha = 0$$

با حل این معادله‌ها داریم

$$\alpha = 2; \quad \beta = -1; \quad \gamma = -2; \quad \delta = 1$$

در نتیجه شعاع با عکس جرم ذرهٔ مداری متناسب است

$$r \propto \frac{1}{m}$$

بنابراین شعاع اتم هیدروژن میونی برابر است با

$$a_\mu = \frac{a_0}{20.7} = 0.256 \text{ pm}$$

پ) اگر توان خورشیدی خروجی P و شعاع مدار زمین R باشد، دمای T با مساوی قرار دادن تابش ورودی و خروجی به دست می‌آید

$$(1-r) \frac{P}{4\pi R^2} \times \pi R_E^2 = 4\pi R_E^2 \epsilon \sigma T^4$$

که در آن r ضریب بازتاب زمین نسبت به تابش خورشید (سپیدی)، R_E شعاع زمین و σ ثابت بولتزن است. توان خروجی خورشید P و متوسط شعاع مدار زمین R است. گسیلمندی تابعی است از دما (دمای اولیه را نمی‌دانیم)، اما انتظار داریم تغییر دما کوچک باشد. با توجه به اینکه

است، با کاهش شعاع به اندازه یک درصد، دمای $T \propto \sqrt{1/R}$ به اندازه 0.5% درصد، یعنی 1.4% ، افزایش می‌یابد. بنابراین

$$T' = 288.4\text{K}$$

(ت) معادلهٔ گاز کامل برای N مولکول به صورت $pV = NkT$ است. روشن است اگر حجم، فشار و دمای دو گاز یکسان باشد، تعداد مولکول‌های آن‌ها برابر است. به علاوه چگالی هر گاز با جرم مولکولی متوسط آن گاز متناسب است. در اینجا از زیرنویس‌های d ، m و w به ترتیب به جای «خشک»، «مرطوب» و «آب» استفاده شده است. برای هوای خشک، با جرم مولکولی متوسط m_d داریم

$$\rho = \rho_d = m_d \frac{N_d}{V} = \frac{m_d p}{kT}$$

برای هوای مرطوب، با جرم مولکولی متوسط m_m داریم

$$\rho_m = m_m \frac{N_m}{V} = \frac{m_m p}{kT}$$

برای جرم M از هوای خشک داریم

$$N_d \propto \frac{M}{28.8}$$

برای جرم M' از هوای مرطوب داریم

$$N_m \propto 0.2 \frac{M'}{18} + 0.98 \frac{M'}{28.8}$$

$$N_m = N_d$$

$$\frac{\rho_m}{\rho_d} = \frac{M'}{M} = \frac{1}{28.8 \left[\frac{0.2}{18} + \frac{0.98}{28.8} \right]} = 0.9881$$

$$\rho' = \rho_m = 0.9925 \rho_d = 1.2352 \text{ kg/m}^3$$

(ث) P ، توان مکانیکی لازم برای معلق ماندن چرخ‌بال برابر است با

$$P = T v$$

در این رابطه T نیروی رانشی روبه پایین ناشی از حرکت پره‌های پروانهٔ چرخ‌بال است که برابر با وزن چرخ‌بال (W) و v ، سرعت ستون هوایی است که در زیر چرخ‌بال جریان دارد. پره‌های پروانهٔ

چرخ‌بال سرعت v را به هوایی که با آهنگ dm/dt جریان دارد می‌دهد، و سطحی که این پره‌ها جاروب می‌کنند برابر A است. بنابراین داریم

$$T = v \frac{dm}{dt}; \quad \frac{dm}{dt} = \rho Av$$

$$W = T = \rho Av^2$$

اگر اندازه چرخ‌بال را با مکعبی به ابعاد L توصیف کنیم، داریم

$$\left. \begin{aligned} W &\propto L^3; & A &\propto L^2 \\ v &\propto \sqrt{\frac{W}{A}} & &\propto \sqrt{L} \end{aligned} \right\} \Rightarrow P = Wv \propto L^{5/2}$$

بنابراین توان چرخ‌بالی با اندازه نصف برابر است با

$$P' = 0.70884P$$

حل مسئله ۲

الف) فرایند واپاشی آلفا را به صورت زیر است

$$\frac{A}{Z}X \rightarrow \frac{A-4}{Z-2}Y + \frac{4}{2}\alpha$$

همچنین معیار انرژی برای انجام واپاشی به صورت زیر است

$$m_A - m_{A-4} - m_4 > 0$$

چون تعداد و نوع نوکلئون‌ها در واپاشی حفظ شده است، ما تنها به انرژی بستگی توجه می‌کنیم

$$-B_A + B_{A-4} + B_4 > 0$$

اگر بنویسیم $\frac{B}{A} = a + bA$ ، که در a و b ثابت‌هایی هستند که از نمودار به دست می‌آیند، خواهیم داشت

$$-A(a + bA) + (A - 4)[a + b(A - 4)] + B_4 > 0$$

$$-4bA - 4a + 16b + B_4 > 0$$

با توجه به نمودار، یک تقریب خطی خوب در بالای $A = 100$ به قرار زیر است

$$B/A = (9.6 - 0.0080A) \text{ MeV}$$

این به آن معنی است که $a = ۹,۶ \text{ MeV}$ و $b = ۰,۰۰۸ \text{ MeV}$ ، و شرط بالا به صورت زیر درمی آید

$$-۰,۰۰۶۴A - ۳۸,۴ - ۰,۱ + ۲۵ > ۰$$

$$A > \frac{۱۳,۵}{۰,۰۰۶۴} = ۲۱۱$$

(ب)

(i) چون A ثابت است فقط دو جمله مانده به آخر را که به Z بستگی دارند در نظر می گیریم

$$\frac{dB}{dZ} = -۲Za_c A^{-۱/۳} - \frac{a_a}{A}(-۴A + ۸Z)$$

$$Z_{\max} = \frac{۴a_a}{۲a_c A^{-۱/۳} + ۸\frac{a_a}{A}} = \frac{A}{۲} \left(۱ + \frac{a_c A^{2/۳}}{۴a_a} \right)$$

$$Z_{\max} = ۷۹,۲۵$$

(ii) جمله کامل برای معادله دیفرانسیل در قسمت (الف) برابر است با

$$\frac{dB}{dZ} = -۲Za_c A^{-۱/۳} - \frac{a_a}{A}(-۴A + ۸Z) \pm ۲a_p A^{-۳/۴}$$

جمله آخر مثبت است اگر با تغییر Z به $Z + ۱$ هسته از زوج-زوج به فرد-فرد تبدیل شود؛ و منفی است اگر عکس آن باشد. توجه کنید در این حالت A مثبت است. درباره جمله آخر چه می توانیم بگوییم؟

Z_{\max} باید یک عدد صحیح باشد، و عددهای زوجی مطلوب ماست که بزرگتر از عدد فرد $۷۹,۲۵$ باشند، بنابراین می توانیم مقدار $Z_{\max} = ۸۰$ را حدس بزنیم. برای آزمودن این موضوع، سه جمله آخر را برای مقادیر مختلف Z محاسبه می کنیم

$$۷۷ \rightarrow ۹۷۹,۲۴۱$$

$$۷۸ \rightarrow ۹۷۵,۹۱۵$$

$$۷۹ \rightarrow ۹۷۶,۲۹۵$$

$$۸۰ \rightarrow ۹۷۵,۳۴۱$$

$$۸۱ \rightarrow ۹۷۸,۰۹۳$$

$$۸۲ \rightarrow ۹۷۹,۵۱۲$$

$$۸۳ \rightarrow ۹۸۴,۶۳۷$$

این امر مبین آن است که $Z_{\max} = ۸۰$ است؛ این یک هسته زوج-زوج است.

(iii) تنها سه جمله آخر معادله را در نظر بگیرید. اگر A ثابت باشد سایر آن‌ها نیز ثابت اند. مجموع این سه کمیت را X می‌نامیم. برای پی بردن به اینکه این هسته پایدار است لازم است اختلاف X بین هسته‌های همسایه را پیدا کنیم و این اختلاف را با انرژی لازم برای هر فرایند واپاشی مقایسه می‌کنیم.

۱. برای واپاشی β^- : $m \rightarrow p + e^-$ لازم است

$$X > -1,30 + 0,51 = -0,79 \text{ MeV}$$

باشد.

۲. برای واپاشی β^+ : $p \rightarrow n + e^+$ لازم است

$$X > 1,30 + 0,51 = 1,81 \text{ MeV}$$

باشد.

۳. برای واپاشی دو بتایی $(\beta^-\beta^-)$: $2n \rightarrow 2p + 2e^-$ لازم است

$$X > 2(-1,30 + 0,51) = -1,58 \text{ MeV}$$

باشد.

۴. برای گیراندازی الکترون: $e^- + p \rightarrow n$ لازم است

$$X > 1,30 + 0,51 = 0,79 \text{ MeV}$$

باشد.

فرایندها/هسته‌ها	واپاشی β^-	واپاشی β^+	گیراندازی الکترون	واپاشی $\beta^-\beta^-$
$^{128}_{53}\text{I}$	✓	○	○	✓
$^{128}_{54}\text{Xe}$	○	○	○	○
$^{128}_{55}\text{Cs}$	○	✓	✓	○

حل مسئله ۳

(الف) \vec{F} نیروی لازم برای تغییر سرعت $\Delta \vec{v}$ یک شاره با آهنگ شارش dm/dt از رابطه زیر به دست می‌آید

$$\vec{F} = \Delta \vec{v} dm/dt$$

در این مورد آهنگ شارش برابر است با

$$\frac{dm}{dt} = x l \rho v = \frac{\pi}{4} l^2 \rho v$$

مؤلفه عمودی $\Delta \vec{v}$ برابر است با

$$\Delta v_{\text{عمودی}} = v \sin \varepsilon$$

و مؤلفه افقی $\Delta \vec{v}$ برابر است با

$$\Delta v_{\text{افقی}} = v(1 - \cos \varepsilon)$$

اکنون می‌توانیم رابطه نیروی بالابر L و نیروی کشش D_1 را به صورت زیر بنویسیم

$$L = \frac{\pi}{4} \rho v^2 l^2 \sin \varepsilon$$

$$D_1 = \frac{\pi}{4} \rho v^2 l^2 (1 - \cos \varepsilon)$$

استفاده از تقریب‌هایی به جای سینوس و کسینوس مجاز است.

(ب) توان لازم برای نگه‌داشتن هوایمای در حال پرواز به‌طور مستقیم و مسطح برابر است با

$$P = Dv = (D_1 + D_2)v$$

D_2 نیروی افقی مقاومت هوا (نیروی مالشی مقاومت هوا) برابر است با آهنگ تغییر اندازه حرکت هوایی که از اطراف بال بر اثر مالش جریان می‌یابد

$$D_2 = v_1 \frac{dm_1}{dt} - v_2 \frac{dm_2}{dt}$$

چون هیچ چشمه یا منبع (جریان هوا) در بال نیست، هوایی که به داخل بال جریان می‌یابد (dm_1/dt) باید برابر هوایی باشد که از بال خارج می‌شود (dm_2/dt). پس

$$\frac{dm_1}{dt} = \frac{dm_2}{dt} = \frac{dm}{dt} = xl\rho v$$

با جایگذاری $v_1 = v$ و $v_2 = (v - \Delta v)$ داریم

$$\begin{aligned} D_2 &= vxl\rho v - (v - \Delta v)xl\rho v = xl\rho v^2 - xl\rho v^2 + v\Delta vxl\rho \\ &= xl\rho v\Delta v = \frac{\pi l}{4} l\rho v\Delta v = \frac{\pi f}{4A} \rho v^2 l^2 \end{aligned}$$

این نیروی مقاومت هوا الزاماً در طول سطح بال است؛ هرگاه بال دارای یک زاویه انحراف باشد، مؤلفه افقی آن برابر است با حاصل ضرب این نیرو در کسینوس زاویه انحراف، یعنی

$$\begin{aligned} \frac{\pi f}{4A} \rho v^2 l^2 \cos \varepsilon &\approx \frac{\pi f}{4A} \rho v^2 l^2 \left(1 - \frac{\varepsilon^2}{2}\right) \\ &\approx \frac{\pi f}{4A} \rho v^2 l^2 + O(\varepsilon^2 f) \end{aligned}$$

نیروی کل مقاومت هوا $D = D_1 + D_2$ وابسته به زاویه انحراف ε و ضریب مقاومت هوا f است

$$D = \frac{\pi}{4} \rho v^2 l^2 \left[(1 - \cos \varepsilon) + \frac{f}{A} \right]$$

$$\approx \frac{\pi}{4} \rho v^2 l^2 \left(\frac{1}{2} \sin^2 \varepsilon + \frac{f}{A} \right)$$

نیروی D را می‌توانیم برحسب جرم، سرعت و ابعاد بال هوایما بیان کنیم. برای پرواز افقی نیروی بالابر هوایما برابر وزن هوایماست.

$$L = Mg = \frac{\pi}{4} \rho v^2 l^2 \sin \varepsilon \Rightarrow \sin \varepsilon = \frac{\sqrt{4Mg}}{\pi \rho v^2 l^2}$$

توان را می‌توانیم نسبت به v یا l کمینه کنیم؛ در اینجا v را انتخاب می‌کنیم

$$P = Dv = \frac{\pi}{4} \rho v^3 l^2 \left[\frac{f}{A} + \frac{1}{2} \frac{(\sqrt{4Mg})^2}{(\pi \rho v^2 l^2)^2} \right]$$

$$= \frac{\pi}{4} \rho v^3 l^2 \frac{f}{A} + \frac{2(Mg)^2}{\pi \rho v l^2} = 0$$

$$\frac{dP}{dv} = \frac{3\pi}{4} \rho v^2 l^2 \frac{f}{A} - \frac{2(Mg)^2}{\pi \rho v^2 l^2} = 0$$

سرعت پرواز با کمترین توان برابر است با

$$v = v_0; \quad v_0^4 = \frac{\lambda(Mg)^2 A}{3\pi^2 \rho^2 l^4 f} = \frac{\lambda}{3Af} \left(\frac{Mg}{\pi \rho S} \right)^2$$

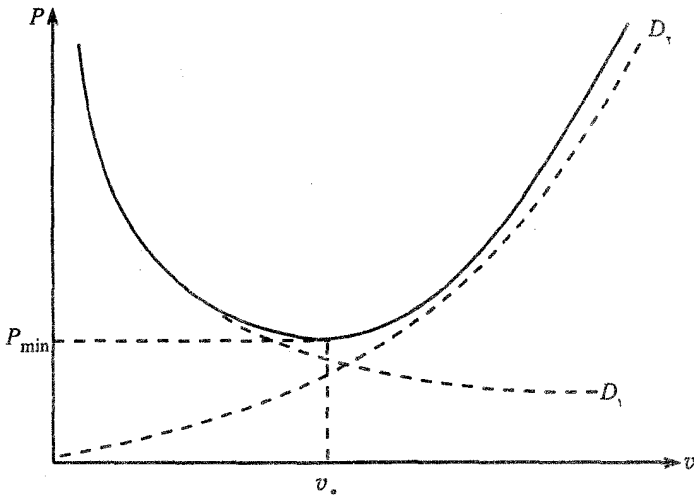
(ب) نمودار توان برحسب سرعت به صورت شکل ۶۴ است.

$$P_{\min} = \frac{\pi}{4} \rho v_0^3 l^2 \left[\frac{f}{A} + \frac{1}{2} \frac{(\sqrt{4Mg})^2}{(\pi \rho v_0^2 l^2)^2} \right]$$

$$= \frac{\pi}{4} \rho v_0^3 l^2 \left[\frac{f}{A} + \frac{(\sqrt{4Mg})^2}{2(\pi \rho l^2)^2} \frac{3\pi^2 \rho^2 l^4 f}{\lambda(Mg)^2 A} \right]$$

$$= \pi \rho v_0^3 l^2 \frac{f}{A}$$

$$= \pi \rho v_0^3 S f$$



شکل ۶۴

با جایگذاری مقدار v_0 داریم

$$P_{\min} = \pi \rho S f \frac{\lambda^{3/4} (Mg)^{3/2}}{(3A f)^{3/4} (\pi \rho S)^{3/2}}$$

$$= \left(\frac{\lambda}{3A} \right)^{3/4} f^{1/4} \frac{(Mg)^{3/2}}{(\pi \rho S)^{1/2}}$$

(ت) با مقایسه این توان و توان موجود، می‌توان $IS = P_{\text{موجود}} = P$ داریم

$$\left[\frac{Mg}{S} \right]^{3/2} = I \left[\frac{3A}{\lambda} \right]^{3/4} \frac{(\pi \rho)^{1/2}}{f^{1/4}}$$

$$\frac{Mg}{S} = I^{2/3} \left(\frac{3A}{\lambda} \right)^{1/2} \frac{(\pi \rho)^{1/3}}{f^{1/6}}$$

جواب‌های عددی برابر است با

$$\frac{Mg}{S} = 35,6 \text{ N/m}^2$$

$$v_0 = 1,6 \text{ m/s}$$

بیست و نهمین المپیاد بین‌المللی فیزیک

ریکیاویک-ایسلند*

مسابقه نظری- زمان ۵ ساعت

۱۹۹۸/۱۳۷۷

مسئله ۱ غلتش یک منشور شش‌وجهی^۱

یک منشور شش‌وجهی منتظم، بلند، جامد و صلب، شبیه یک مداد معمولی را در نظر بگیرید (شکل ۶۵). جرم منشور M است که به‌طور یکنواخت توزیع شده است. طول هر ضلع قاعده منشور a و لختی دورانی آن حول محور مرکزی‌اش برابر است با

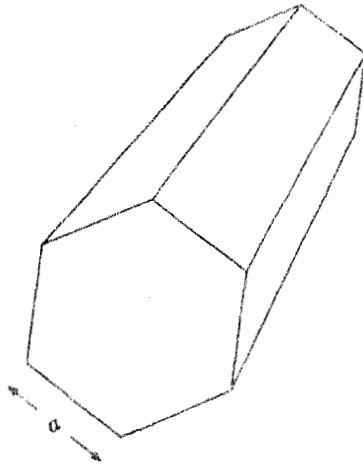
$$I = \frac{5}{12} Ma^2 \quad (1)$$

همچنین لختی دورانی I' حول یکی از یال‌های منشور برابر است با

$$I' = \frac{17}{12} Ma^2 \quad (2)$$

الف) در ابتدا منشور ساکن و محور افقی آن روی سطح شیب‌داری است که با افق زاویه کوچک θ می‌سازد (شکل ۶۶). فرض کنید وجوه منشور اندکی کاو هستند به‌گونه‌ای که تنها لبه‌های آن با سطح در تماس است. تأثیر این کاو بودن بر لختی دورانی منشور را می‌توان نادیده گرفت. منشور

*. Reykjavik, Iceland 1. Rolling of Hexagonal Prism

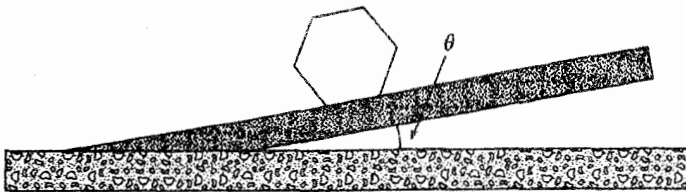


شکل ۶۵

را اندکی جابه‌جا می‌کنیم تا روی بال‌های خود غلتش ناهمواری را از حال سکون آغاز کند. فرض کنید اصطکاک از هرگونه لغزشی جلوگیری می‌کند و تماس منشور با سطح قطع نمی‌شود. سرعت زاویه‌ای منشور درست قبل از برخورد یکی از یال‌هایش به سطح، ω_i و بلافاصله پس از برخورد آن با سطح ω_f است. نشان دهید می‌توانیم بنویسیم

$$\omega_f = s\omega_i \quad (۳)$$

مقدار ضریب s را به‌دست آورید.



شکل ۶۶

(ب) انرژی جنبشی منشور درست قبل و بعد از برخورد هر یال را K_f و K_i در نظر بگیرید. نشان دهید می‌توانیم بنویسیم

$$K_f = rK_i \quad (۴)$$

مقدار ضریب r را به‌دست آورید.

ب) برای آنکه بعد از برخورد هر یال با سطح، برخورد‌های بعدی نیز انجام شود، انرژی جنبشی K_i باید از مقدار کمینه $K_{i,\min}$ بیشتر باشد، در این صورت می‌توان نوشت

$$K_{i,\min} = \delta Mga \quad (5)$$

که در آن $g = 9.81 \text{ m/s}^2$ شتاب گرانش است. ضریب δ را برحسب زاویه شیب θ و ضریب r به دست آورید (از نماد جبری r استفاده کنید، نه مقدار عددی آن).

ت) اگر شرط قسمت (پ) صادق باشد، انرژی جنبشی منشور در حین پایین آمدن به مقدار حدی $K_{i,0}$ میل می‌کند. اگر چنین حدی وجود داشته باشد، نشان دهید $K_{i,0}$ را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$K_{i,0} = kMga \quad (6)$$

ضریب k را برحسب θ و r به دست آورید.

ث) کمترین زاویه شیب θ را برای اینکه غلتش ناهموار منشور انجام گیرد، با دقت 0.1° (یک‌دهم درجه) به دست آورید.

مسئله ۲ آب در زیر یک کلاهک یخی^۱

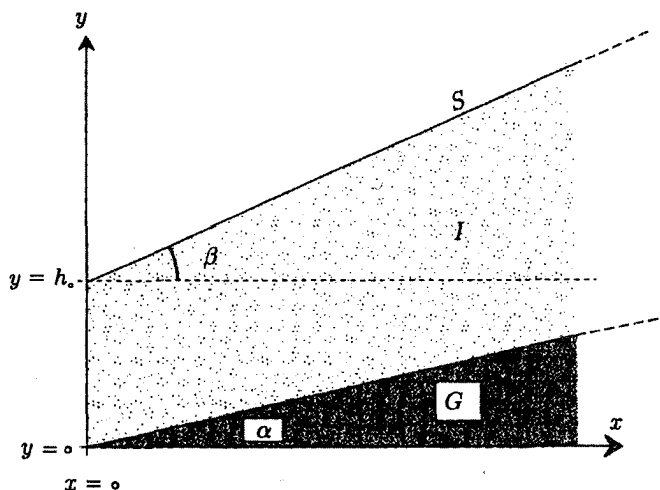
یک کلاهک یخی، به صورت لایه‌ای ضخیم از یخ (به ضخامت چند کیلومتر) بدون حرکت است که روی زمین تشکیل می‌شود و به صورت افقی بیشتر از ده‌ها یا صدها کیلومتر گسترده می‌شود. در این مسئله می‌خواهیم ذوب یخ و رفتار آب را زیر پوشش ملایمی از یخ بررسی کنیم، یعنی بررسی رفتار پوشش یخی در نقطه ذوب. می‌توان فرض کرد در این شرایط منشأ تغییرات فشار یخ شینه یک شاره چسبیده^۲ است، اما تغییر شکل آن شکننده و عمدتاً به صورت جابه‌جایی در راستای قائم است. برای حل قسمت‌های مختلف این مسئله از داده‌های جدول زیر استفاده کنید.

$\rho_w = 1000 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$	چگالی آب
$\rho_i = 917 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$	چگالی یخ
$c_i = 21 \times 10^3 \text{ J/(kg}^\circ\text{C)}$	گرمای ویژه یخ
$L_i = 34 \times 10^5 \text{ J/kg}$	گرمای نهان ذوب یخ
$\rho_r = 29 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$	چگالی مواد گداخته
$c_r = 700 \text{ J/(kg}^\circ\text{C)}$	گرمای ویژه مواد گداخته
$L_r = 42 \times 10^5 \text{ J/kg}$	گرمای نهان ویژه مواد گداخته
$J_Q = 0.6 \text{ W/m}^2$	شار گرمایی میانگین از سطح زمین
$T_i = 0^\circ\text{C}$ (ثابت)	نقطه ذوب یخ

الف) یک کلاهک یخی ضخیم را در نظر بگیرید که در معرض شار گرمایی میانگین از سطح زمین است. با استفاده از داده‌های جدول بالا، ضخامت d لایه یخی را که در هر سال ذوب می‌شود به دست آورید.

ب) حال سطح بالایی کلاهک یخی را در نظر بگیرید. فرض کنید که زمین زیر کلاهک یخی دارای زاویه شیب α است. سطح بالایی کلاهک یخی نیز دارای شیب β مطابق شکل ۶۷ است. ضخامت عمودی یخ در $x = 0$ برابر h_0 است. در این صورت سطح زیرین و بالایی پوشش یخی را می‌توان با معادله‌های زیر بیان کرد

$$y_1 = x \tan \alpha, \quad y_2 = h_0 + x \tan \beta$$

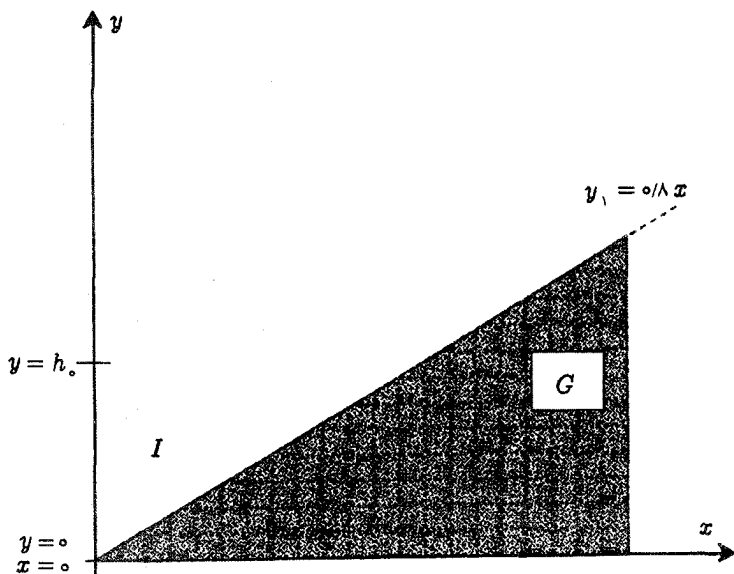


شکل ۶۷ سطح مقطع کلاهک یخی با سطح تخت که روی یک سطح شیب‌دار روی زمین قرار گرفته است (کلاهک یخی: I ; سطح زمین: G ; سطح بالایی کلاهک یخی: S)

رابطه‌ای برای فشار p در زیر کلاهک یخی برحسب x به دست آورید.

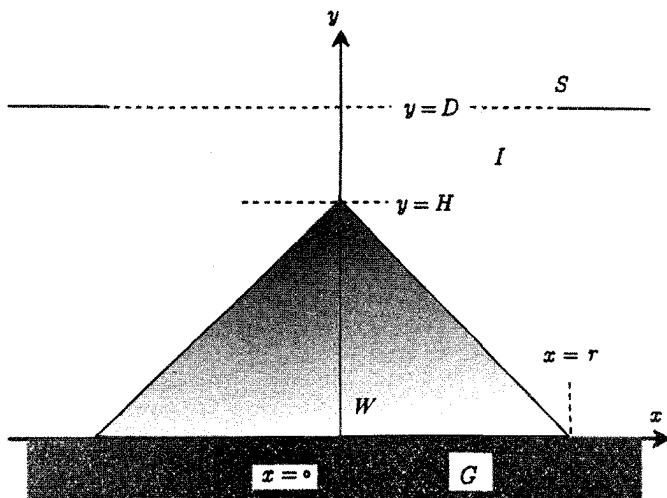
یک شرط ریاضی میان β و α به گونه‌ای برقرار کنید که اگر لایه‌ای از آب بین کلاهک یخی و زمین قرار گیرد، از هیچ طرف جاری نشود. نشان دهید که این شرط به صورت $\tan \beta = s \tan \alpha$ است. ضریب s را به دست آورید.

خط $y = 0.8x$ در شکل ۶۸ سطح زمین زیر کلاهک یخی را نشان می‌دهد. ضخامت عمودی h_0 در $x = 0$ برابر ۲ km است. فرض کنید آب در زیر کلاهک یخی با یخ در تعادل است. روی یک کاغذ میلی‌متری ابتدا خط y_1 و پس از آن خط y_2 مربوط به سطح بالایی یخ را رسم کنید. در شکل خود هر کدام از این دو خط را مشخص کنید.



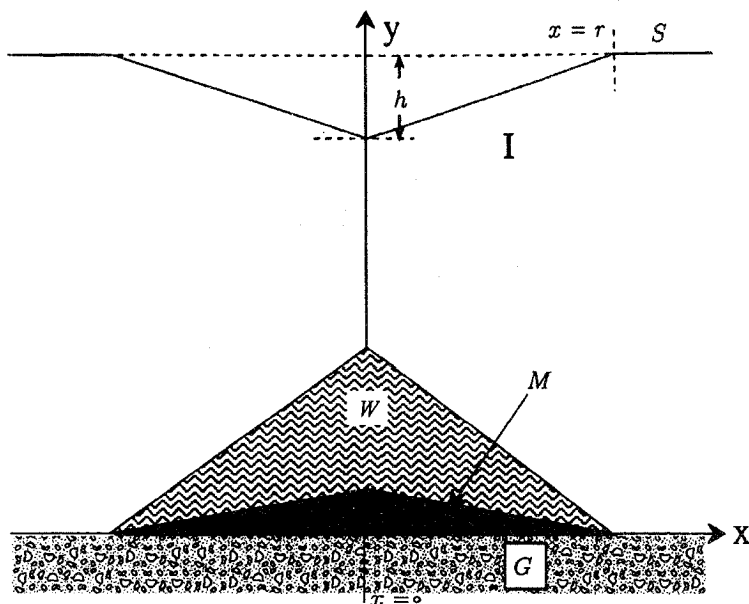
شکل ۶۸ سطح مقطع یک لایه یخ ملایم که روی یک سطح شیب‌دار قرار گرفته و در زیر آن آب، در حال تعادل است. زمین: G ، کلاهک یخی: I .

پ) بر اثر ذوب ناگهانی قسمتی از یک لایه بزرگ یخی با ضخامت ثابت $D = 2 \text{ km}$ ، منطقه‌ای مخروطی شکل از آب به ارتفاع $H = 1 \text{ km}$ و شعاع $r = 1 \text{ km}$ درون لایه مذکور مطابق شکل ۶۹ به وجود می‌آید. فرض کنید لایه یخی نسبت به زمین افقی است و یخ باقی‌مانده تنها با حرکت عمودی، خود را با وضعیت ایجاد شده تطبیق می‌دهد.



شکل ۶۹ مقطع قائم یک مخروط آب در زیر کلاهک یخی. S : سطح بالایی، W : آب، G : زمین و I : یخ.

شکل سطح کلاهک یخی بعد از ایجاد مخروط آب و رسیدن دستگاه به حالت تعادل هیدروستاتیک را به طور تحلیلی بررسی و همچنین تصویر آن را روی یک کاغذ میلی متری رسم کنید.
 (ت) یک گروه بین‌المللی از دانشمندان در جستجوی سالانه خود در قطب جنوب به یک کلاهک یخی ملایم برخوردند. معمولاً این مناطق به صورت فلاتی گسترده هستند، اما این بار آن‌ها با حفره‌ای به صورت مخروط وارونه شبیه دهانه یک آتشفشان به عمق $h = 100\text{ m}$ و شعاع $r = 500\text{ m}$ مواجه شدند (شکل ۷۰). آن‌ها ضخامت پوشش یخی را در این منطقه 2000 m برآورد کردند.



شکل ۷۰ سطح مقطع قائم و متقارن فرورفتگی مخروطی شکل در یک کلاهک یخی ملایم. S : سطح بالایی یخ، G : زمین، I : کلاهک یخی، M : سنگ (گدازه‌های نفوذی یا مواد گداخته) و W : آب. توجه کنید که نمودار با مقیاس رسم نشده است.

دانشمندان بعد از یک بحث علمی به این نتیجه رسیدند که به احتمال زیاد در زیر لایه یخی یک فوران آتشفشانی خفیف رخ داده و مقدار کمی مواد گداخته به زیر کلاهک یخی نفوذ کرده است و پس از ذوب حجم معینی از یخ، سرد و جامد شده است. دانشمندان کوشیدند با برآورد حجم مواد گداخته‌ای که به درون کلاهک یخی نفوذ کرده است، ایده‌ای در مورد پدیده‌ای که رخ داده است، به دست آورند. فرض کنید یخ فقط در امتداد قائم حرکت می‌کند. همچنین فرض کنید مواد گداخته در ابتدا کاملاً مذاب و در دمای 1200°C بوده‌اند. علاوه بر آن، برای سادگی فرض کنید مواد گداخته‌ای که از پایین درون کلاهک یخی نفوذ کرده‌اند به شکل مخروطی با همان شعاع قاعده مخروط فرورفتگی در سطح کلاهک یخی است. زمان بالا آمدن مواد مذاب در مقایسه با زمان مبادله گرما در این فرایند کوتاه است. جریان گرما در راستای قائم صورت می‌گیرد، به طوری که همواره حجم آب ناشی

از ذوب یخ را یک سطح مخروطی که مرکز آن بالای محل نفوذ مواد گداخته است محدود می‌کند. فرض کنید ذوب یخ در دو مرحله صورت گرفته است. نخست آب موجود در سطح در تعادل هیدروستاتیک نبوده و می‌توانسته جریان یابد. دمای آبی را که به اطراف جریان یافته 0°C بگیرید. در مرحله بعد با برقراری شرایط تعادل هیدروستاتیک آب‌های ناشی از ذوب یخ به جای آنکه به اطراف فرورفتگی جریان یابند، در بالای آن جمع شده‌اند. پس از برقراری شرایط هیدروستاتیک، کمیت‌های زیر را تعیین کنید.

(i) ارتفاع H ، یعنی فاصله بین بالاترین نقطه مخروط آب در زیر کلاهک یخی نسبت به سطح

زیرین اولیه کلاهک یخی.

(ii) h_1 ، ارتفاع فرورفتگی لایه مواد گداخته.

(iii) جرم کل m_{tot} آب تولید شده از ذوب یخ و جرم m' آبی که به اطراف مخروط جریان یافته است. شکل برآمدگی مواد گداخته و مخروط آبی را که در نهایت بالای آن قرار می‌گیرد با رعایت مقیاس روی کاغذ میلی‌متری رسم کنید. از دستگاه مختصاتی که در شکل 70° پیشنهاد شده است استفاده کنید.

مسئله ۳ سریعتر از نور؟

در این مسئله می‌خواهیم اندازه‌گیری‌هایی را که در سال ۱۹۹۴ روی موج‌های رادیویی گسیلی از یک چشمه مرکب در کهکشان ما انجام شده است، تحلیل کنیم. گیرنده روی نوار پهنی^۲ از طول موج‌ها حدود چندین سانتیمتر تنظیم شده بود. شکل ۷۱ مجموعه‌ای از تصویروهای ثبت شده را در زمان‌های مختلف نشان می‌دهد. هر کدام از پربندها* در شکل ۷۱ مانند پربندهای با ارتفاع ثابت در یک نقشه جغرافیایی، نشانگر شدت ثابتی هستند. در این شکل دو بیشینه وجود دارد که می‌توان آن‌ها را دو جسم در نظر گرفت که از یک مرکز مشترک که با علامت ضربدر مشخص شده دور می‌شوند. (فرض می‌شود که مرکز مشترک در فضا ثابت است، همچنین این مرکز مشترک خود یک چشمه گسیلنده تابشی قوی، اما عمدتاً در طول موج‌های دیگر است). همه اندازه‌گیری‌ها در زمان مشخصی از شبانه‌روز انجام شده‌اند.

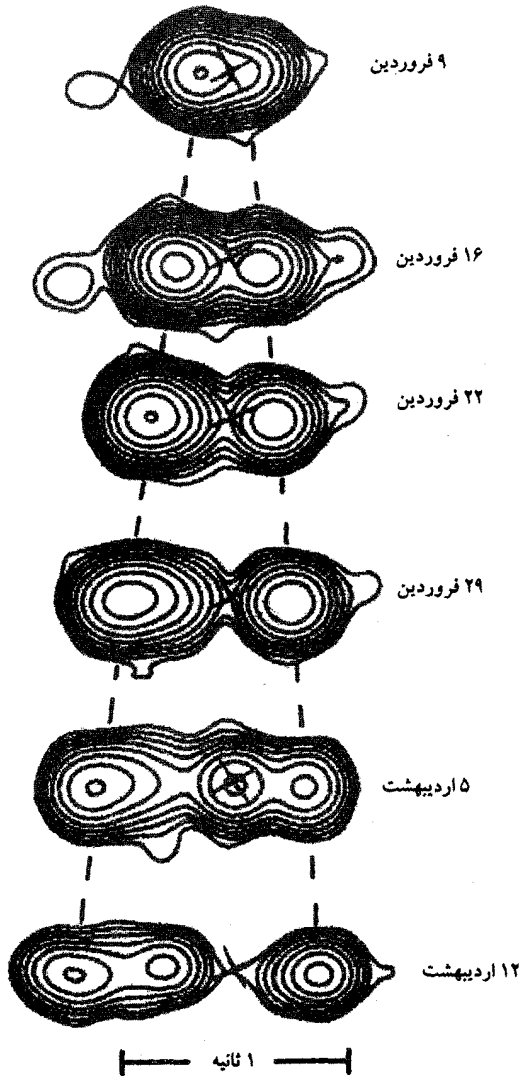
مقیاس منحنی‌های شکل ۷۱ توسط یک پاره خط که برابر با یک ثانیه قوسی (as) است مشخص شده است (درجه $1/3600 = 1 \text{ as}$).

فاصله جرم سماوی** از مرکز مشترک که با علامت ضربدر مشخص شده است، حدود $R = 12.5 \text{ kpc}$ برآورد می‌شود. هر کیلوپارسک (kpc) برابر 10^{19} m یا 9×10^3 است. سرعت نور نیز برابر $c = 3 \times 10^8 \text{ m/s}$ است. در حل این مسئله خطاهای محاسباتی لازم نیست.

1. Faster than Light? 2. Broad Band

*. به هر کدام از منحنی‌های بسته در شکل ۷۱ پربند (contour) گفته می‌شود.

** منظور از جرم سماوی (Celestial Body) در اینجا، همان گیرنده موج‌های رادیویی است که روی زمین قرار گرفته

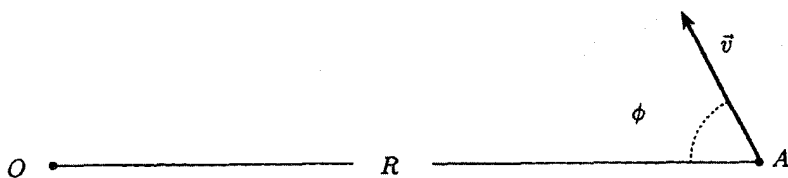


شکل ۷۱ تابش موج‌های رادیویی از چشمه‌ای در کهکشان ما

الف) موقعیت زاویه‌ای دو جسم گسیلنده موج‌های رادیویی را نسبت به مرکز مشترک آن‌ها با $\theta_1(t)$ و $\theta_2(t)$ نشان می‌دهیم. زیرنویس‌های ۱ و ۲ به ترتیب به چشمه سمت چپ و چشمه سمت راست مربوط‌اند و t زمان رصد است. سرعت‌های زاویه‌ای، آن‌طور که از روی زمین دیده می‌شود برابر ω_1 و ω_2 است. همین‌طور سرعت‌های خطی ظاهری چشمه‌ها عمود بر خط مشاهده را با $v'_{1,\perp}$ و $v'_{2,\perp}$ نشان می‌دهیم. با استفاده از شکل ۷۱، نمودارهایی برای به دست آوردن مقادیر عددی ω_1 و ω_2 برحسب میلی‌ثانیه زاویه‌ای (mas) رسم کنید. همچنین مقادیر عددی $v'_{1,\perp}$ و $v'_{2,\perp}$ را

به دست آورید. (ممکن است برخی نتایج برای شما تعجب‌آور باشد).

(ب) برای درک نتیجهٔ تعجب‌آور قسمت (الف)، یک چشمهٔ نور را که با سرعت \vec{v} در حرکت است در نظر بگیرید. جهت حرکت چشمه با امتداد خط دید آن توسط ناظر O زاویهٔ ϕ ($0 \leq \phi \leq \pi$) می‌سازد (شکل ۷۲). این سرعت را می‌توان به صورت $v = \beta c$ نوشت، که در آن c سرعت نور است. فاصلهٔ چشمه که ناظر اندازه‌گیری می‌کند، برابر R است. سرعت زاویه‌ای چشمه، از دید ناظر O ، برابر ω ، و سرعت خطی ظاهری آن در امتداد عمود بر خط مشاهده برابر v'_\perp است. ω و v'_\perp را بر حسب β ، R ، و ϕ به دست آورید.



شکل ۷۲ ناظر در نقطهٔ O و چشمه در ابتدا در نقطهٔ A قرار دارد، که بردار سرعت آن \vec{v} است.

(پ) فرض کنید چشمه‌های توصیف شده در مقدمه و قسمت (الف)، در جهت‌های مخالف و با سرعت‌های برابر $v = \beta c$ دور می‌شوند. همچنین با استفاده از نتایج قسمت (ب) می‌توان β و ϕ را بر حسب سرعت‌های زاویه‌ای ω_1 و ω_2 و فاصلهٔ R به دست آورد. در اینجا ϕ زاویهٔ تعریف شده در قسمت (ب) برای چشمهٔ سمت چپ و متناظر با زیرنویس ۱ در قسمت (الف) است. رابطه‌های مربوط به β و ϕ را بر حسب کمیت‌های یاد شده و مقادیر عددی آن‌ها را با توجه به داده‌های قسمت (الف) به دست آورید.

(ت) برای مورد تک جسمی در قسمت (ب)، شرط آنکه سرعت ظاهری در امتداد عمود بر خط دید، v'_\perp بزرگ‌تر از سرعت نور شود را به دست آورید.

این شرط را به صورت $\beta < f(\phi)$ بنویسید و یک عبارت تحلیلی برای تابع f به دست آورید. ناحیه‌ای از صفحهٔ (β, ϕ) ، مربوط به کمیت‌های فیزیکی را مشخص کنید و قسمتی از این ناحیه را که در آن شرط $v'_\perp > c$ صادق است هاشور بزنید.

(ث) باز هم برای وضعیت تک جسمی قسمت (ب)، عبارتی برای مقدار بیشینهٔ سرعت ظاهری در امتداد عمود بر خط مشاهدهٔ $(v'_\perp)_{\max}$ به‌ازای یک β معین، به دست آورید. توجه کنید که این کمیت وقتی $\beta \rightarrow 1$ ، به‌طور نامحدودی افزایش می‌یابد.

(ج) مقداری که برای R در مقدمه برآورد شده بود چندان دقیق نیست. دانشمندان برای به دست آوردن R از روش دقیق‌تر و سراسر تری استفاده می‌کنند. یکی از این روش‌ها به شرح زیر است.

فرض کنید طول موج‌های با انتقال دوپلر λ_1 و λ_2 را که از چشمه‌های موج‌های رادیویی گسیل می‌شوند بتوان از یکدیگر تشخیص داد و اندازه‌گیری کرد. همچنین فرض کنید که طول موج تابش

گسیلی از چشمه‌ها در حالت سکون برابر λ_0 است. با استفاده از معادله‌های مربوط به انتقال دوبلر نسبی

$$\lambda = \lambda_0 (1 - \beta \cos \phi) (1 - \beta^2)^{-\frac{1}{2}}$$

و این فرض که دو جسم همچنان با سرعتی برابر $v = \beta c$ از هم دور می‌شوند، نشان دهید که می‌توان $\beta = \frac{v}{c}$ را برحسب λ_0 ، λ_1 و λ_2 به صورت رابطه زیر به دست آورد

$$\beta = \sqrt{1 - \frac{\alpha \lambda_0^2}{(\lambda_1 + \lambda_2)^2}} \quad (7)$$

مقدار عددی ضریب α را به دست آورید.

توجه کنید که با اندازه‌گیری طول موج‌ها، در عمل می‌توان برآورد بهتری برای فاصله R به دست آورد.

پاسخ تشریحی مسئله‌ها

حل مسئله ۱

الف) راه حل اول

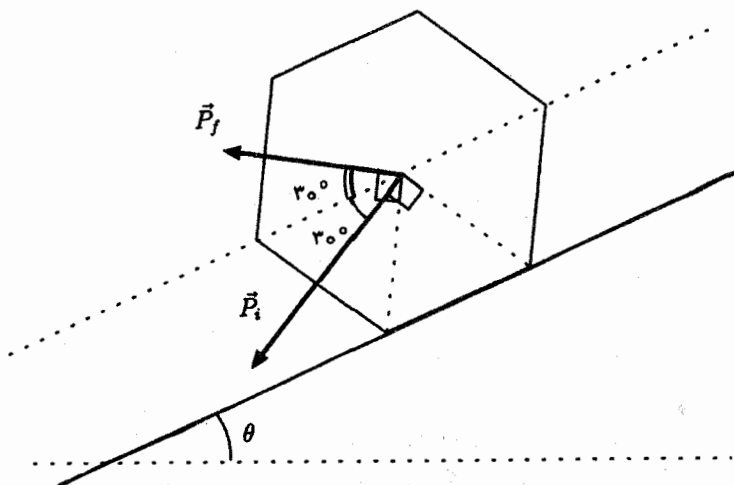
منشور بر اثر نیروی وارد، حول محوری جدید شروع به چرخش می‌کند، یعنی بر اثر برخورد یال منشور با سطح، نیروی واکنش سطح، حول این محور گشتاوری ندارد و در نتیجه تکانه زاویه‌ای حول این یال در مدت کوتاه برخورد با سطح، پایسته می‌ماند.

تکانه خطی منشور به طور کلی در جهت سرعت مرکز جرم آن خواهد بود $\vec{P} = M\vec{v}_C$ که در آن شاخص C نشانگر مرکز جرم است) و در جهت آسان حرکت قرار دارد. جهت \vec{P} قبل از برخورد دارای زاویه 30° درجه نسبت به سطح و به سمت پایین است، اما بلافاصله بعد از برخورد زاویه آن 30° درجه نسبت به سطح و به طرف بالا خواهد شد (شکل ۷۳).

برای به دست آوردن تکانه زاویه‌ای منشور حول یالی که با آن به سطح برخورد می‌کند درست قبل و بعد از برخورد، از معادله تکانه خطی \vec{L} حول یک محور اختیاری و تکانه زاویه‌ای \vec{L}_C حول محوری که از مرکز جرم می‌گذرد و با محور اختیاری موازی است، استفاده می‌کنیم، در این صورت داریم*

$$\vec{L} = \vec{L}_C + M \vec{r}_C \times \vec{v}_C \quad (8)$$

*. می‌توان نشان داد که تکانه زاویه‌ای کل یک سیستم برابر مجموع تکانه زاویه‌ای چرخشی (تکانه زاویه‌ای نسبت به مرکز جرم) و تکانه زاویه‌ای مداری (تکانه زاویه‌ای حرکت مرکز جرم C نسبت به مبدا وقتی تمام جرم سیستم در C متمرکز فرض شود) است، م.



شکل ۷۳ تکانه خطی منشور درست قبل و بعد از برخورد

حال این رابطه را برای محوری که از نقطه برخورد می‌گذرد، به‌کار می‌بریم، در این صورت برداری است که این نقطه را به مرکز جرم وصل می‌کند و جهت آن به طرف مرکز جرم است (شکل ۷۳). بردارهای \vec{L}_C و $(\vec{r}_C \times \vec{v}_C)$ در معادله (۸) هم‌جهت‌اند. بنابراین درست قبل از برخورد خواهیم داشت

$$|\vec{r}_C \times \vec{v}_C| = r_C v_{Ci} \sin 30^\circ = a^2 \omega_i / 2 \quad (9)$$

$$\begin{aligned} L_i &= I\omega_i + \frac{1}{2} M a^2 \omega_i \\ &= \left(\frac{5}{12} + \frac{1}{2} \right) M a^2 \omega_i = \frac{11}{12} M a^2 \omega_i \end{aligned} \quad (10)$$

از طرف دیگر تکانه زاویه‌ای حول این یال درست بعد از برخورد و با توجه به معادله (۲) برابر است با*

$$L_f = I' \omega_f = \frac{17}{12} M a^2 \omega_f \quad (11)$$

که در آن شاخص f مربوط به شرایط درست بعد از برخورد است. توجه کنید که این اختلاف ناشی از تفاوت جهت‌های \vec{v}_{Ci} و \vec{v}_{Cf} است. حال با توجه به پایستگی تکانه زاویه‌ای، $L_i = L_f$ می‌توان رابطه‌ای بین سرعت‌های زاویه‌ای به صورت زیر به دست آورد

$$\omega_f = \frac{11/12}{17/12} \omega_i = \frac{11}{17} \omega_i \quad (12)$$

$$\begin{aligned} L_f &= I\omega_f + M|\vec{r}_C \times \vec{v}_{Cf}| = I\omega_f + M a^2 \omega_f \sin 90^\circ \\ &= \left(\frac{5}{12} + 1 \right) M a^2 \omega_f = \frac{17}{12} M a^2 \omega_f \end{aligned} \quad .*$$

بنابراین داریم

$$s = \frac{11}{17} \quad (۱۳)$$

توجه کنید که s مستقل از a ، ω_i و θ است.

راه حل دوم

با برخورد منشور به سطح ضربه \vec{P} (برحسب $N \cdot s$) از طرف سطح به یالی که به آن برخورد کرده است زده می‌شود. در اینجا هیچ واکنشی از طرف یالی که از سطح جدا می‌شود وجود ندارد. ضربه \vec{P} دارای دو مؤلفه، یکی موازی سطح شیب‌دار $P_{||}$ (جهت مثبت را روبه بالا و در امتداد سطح شیب‌دار در شکل ۷۳ در نظر بگیرید) و دیگری، P_{\perp} ، عمود بر سطح شیب‌دار است (اینجا نیز جهت مثبت را به طرف بالا و عمود بر سطح شیب‌دار در همان شکل در نظر بگیرید).

بنابراین می‌توانیم سه معادله با سه مجهول $P_{||}$ ، P_{\perp} و نسبت $s = \frac{\omega_f}{\omega_i}$ بنویسیم. کمیت $P_{||}$ برابر با تغییر در مؤلفه موازی تکانه خطی و P_{\perp} برابر با تغییر در مؤلفه عمودی تکانه خطی منشور است.

در نتیجه داریم

$$P_{||} = M(\omega_i - \omega_f)a \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \quad (۱۴)$$

$$P_{\perp} = M(\omega_i + \omega_f)a \cdot \frac{1}{2} \quad (۱۵)$$

سرانجام داریم

$$\frac{1}{2}P_{\perp}a - \frac{\sqrt{3}}{2}P_{||}a = I(\omega_i - \omega_f) \quad (۱۶)$$

که طرف راست معادله اخیر تغییر تکانه زاویه‌ای حول مرکز جرم است. با حل معادله‌های (۱۴)،

(۱۵) و (۱۶)، برای نسبت $s = \frac{\omega_f}{\omega_i}$ همان مقدار قبلی را به دست می‌آوریم.

(ب) سرعت خطی مرکز جرم درست قبل از برخورد برابر $a\omega_i$ ، و درست بعد از برخورد برابر $a\omega_f$ است.

از طرفی می‌دانیم که انرژی جنبشی یک جسم صلب چرخان را همیشه می‌توان به صورت مجموع انرژی جنبشی «داخلی» و «خارجی» جسم نوشت

$$K_{tot} = \frac{1}{2}I\omega^2 + \frac{1}{2}Mv_C^2 \quad (۱۷)$$

همان‌طور که از این رابطه دیده می‌شود انرژی جنبشی K_{tot} قبل و بعد از برخورد متناسب با ω^2 است. در این صورت داریم

$$K_f = rK_i = \left(\frac{11}{17}\right)^2 K_i = \frac{121}{289} K_i \quad (۱۸)$$

بنابراین

$$r = \frac{121}{289} \approx 0,419 \quad (19)$$

پ) انرژی جنبشی K_f بعد از برخورد باید کافی باشد تا مرکز جرم را تا بالاترین وضعیت آن درست بالای نقطه تماس بلند کند. زاویه‌ای که \vec{r}_C برای این کار می‌پیماید برابر است با

$$x = \frac{\alpha}{\gamma} - \theta \quad (20)$$

که در آن $\alpha = 60^\circ$ زاویه رأس مثلث‌هایی است که در مرکز چندضلعی به هم می‌رسند.* انرژی لازم برای بالا بردن مرکز جرم در این وضعیت برابر است با

$$E_0 = Mga(1 - \cos x) = Mga[1 - \cos(30^\circ - \theta)] \quad (21)$$

در این صورت شرط لازم برای اینکه مرکز جرم به بالاترین وضعیت خود درست بالای نقطه تماس برود، به صورت زیر است

$$K_f = rK_i > E_0 = Mga[1 - \cos(30^\circ - \theta)] \quad (22)$$

از این رو

$$\delta = \frac{1}{r}[1 - \cos(30^\circ - \theta)] \quad (23)$$

$$[\cos(30^\circ - \theta) = \frac{\sqrt{3}}{2} \cos \theta + \frac{1}{2} \sin \theta \text{ توجه کنید که:}]$$

ت) فرض کنید $K_{i,n}$ و $K_{f,n}$ انرژی‌های جنبشی درست قبل و بعد از n امین برخورد باشند. می‌خواهیم نشان دهیم که رابطه زیر برقرار است

$$K_{f,n} = rK_{i,n} \quad (24)$$

که در آن $r = \frac{121}{289}$ برای یک منشور شش‌وجهی است. بین برخوردهای متوالی ارتفاع مرکز جرم منشور به اندازه $a \sin \theta$ کاهش می‌یابد، در این صورت انرژی جنبشی بین برخوردهای متوالی با عامل زیر افزایش می‌یابد

$$\Delta = Mga \sin \theta \quad (25)$$

پس داریم

$$K_{i,n+1} = rK_{i,n} + \Delta \quad (26)$$

*. به‌طورکلی برای یک N ضلعی $\alpha = 2\pi/N$ است.

برای به دست آوردن حد $K_{i,n+1}$ ، نمی‌توان بسط کاملی از $K_{i,n}$ بر حسب $K_{i,1}$ و n نوشت. اما با توجه به فرض مسئله چنین حدی وجود دارد. به این جهت برای n به حد کافی بزرگ با دقت خوبی می‌توان از $K_{i,n} \approx K_{i,n+1}$ استفاده کرد. در نتیجه $K_{i,0}$ باید در رابطه (۲۶) صدق کند

$$K_{i,0} = rK_{i,1} + \Delta \quad (27)$$

با حل آن داریم

$$K_{i,0} = \frac{\Delta}{1-r} \quad (28)$$

یعنی

$$k = \frac{\sin \theta}{1-r} \quad (29)$$

همچنین برای حل این مسئله با نوشتن بسط کامل رابطه (۲۶) داریم

$$K_{i,2} = rK_{i,1} + \Delta \quad (30)$$

$$K_{i,3} = rK_{i,2} + \Delta = r^2K_{i,1} + (1+r)\Delta \quad (31)$$

...

$$K_{i,n} = r^{n-1}K_{i,1} + (1+r+\dots+r^{n-2})\Delta \quad (32)$$

$$= r^{n-1}K_{i,1} + \frac{1-r^{n-1}}{1-r}\Delta \quad (33)$$

در حد $m \rightarrow \infty$ خواهیم داشت

$$K_{i,n} \rightarrow K_{i,0} = \frac{\Delta}{1-r} \quad (34)$$

البته این همان نتیجه‌ای است که در قسمت قبل به دست آوردیم.

اگر تغییر انرژی جنبشی را در یک دوره کامل حساب کنیم، یعنی درست قبل از n امین برخورد تا درست بعد از $(n+1)$ امین برخورد، داریم

$$\begin{aligned} \Delta K_{i,n} &= K_{i,n+1} - K_{i,n} \\ &= (r-1)r^{n-1}K_{i,1} + r^{n-1}\Delta \end{aligned} \quad (35)$$

$$= r^{n-1}[\Delta - (1-r)K_{i,1}] \quad (36)$$

که مثبت است اگر مقدار اولیه $K_{i,1} < K_{i,0}$ باشد، بنابراین $K_{i,n}$ تا مقدار حدی $K_{i,0}$ می‌تواند افزایش یابد. ولی اگر $K_{i,1} > K_{i,0}$ باشد، انرژی جنبشی $K_{i,n}$ درست قبل از برخورد، کاهش می‌یابد تا به مقدار حدی $K_{i,0}$ برسد.

همهٔ اینها شاید حرکت با اصطکاک راکه با سرعت افزایش می‌یابد به‌خاطر شما بیاورد. به زبان ریاضی، تفاوت اصلی این است که ما در اینجا به‌جای معادله‌های دیفرانسیل با معادله‌های تفاضلی سروکار داریم.

(ث) برای یک دنبالهٔ نامحدود حد مقدار K_i در قسمت (ت) باید بزرگ‌تر از کمترین مقداری که برای دنباله در قسمت (پ) به‌دست آوردیم باشد

$$\frac{1}{1-r} \Delta = \frac{1}{1-r} Mga \sin \theta > Mga [1 - \cos(30^\circ - \theta)] / r \quad (37)$$

با جایگذاری $A = \frac{r}{1-r} = \frac{121}{168}$ داریم

$$A \sin \theta > 1 - \cos 30^\circ \cos \theta - \sin 30^\circ \sin \theta \quad (38)$$

$$\left(A + \frac{1}{2}\right) \sin \theta + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos \theta > 1 \quad (39)$$

برای حل این نامعادله از تعریف زیر استفاده می‌کنیم*

$$u = \arccos \left(\frac{A + 1/2}{\sqrt{(A + 1/2)^2 + 3/4}} \right) \approx 35,36^\circ \quad (40)$$

در این صورت خواهیم داشت

$$\cos u \sin \theta + \sin u \cos \theta > \frac{1}{\sqrt{(A + 1/2)^2 + 3/4}} \quad (41)$$

$$\sin(u + \theta) > \frac{1}{\sqrt{(A + 1/2)^2 + 3/4}} \quad (42)$$

$$\theta > \arcsin \left\{ \frac{1}{\sqrt{(A + 1/2)^2 + 3/4}} \right\} - u$$

$$\approx 41,94^\circ - 35,36^\circ = 6,58^\circ \quad (43)$$

یعنی

$$\theta \approx 6,58^\circ \quad (44)$$

*. برای حل این نامعادله از روش اعداد مختلط نیز می‌توان استفاده کرد، یعنی روش تصاعدی گاوسی یا استفاده از تقریب‌های $\sin \phi \approx \phi$ و $\cos \phi \approx 1 - \phi^2/2$.

اگر $\theta > \theta_0$ و انرژی جنبشی قبل از اولین برخورد با توجه به قسمت (پ) کافی باشد، با توجه به این فرض، یک غلتش نامحدود خواهیم داشت.

حل مسئله ۲

الف) با توجه به پایداری انرژی داریم

$$JQ \times (\text{سال } 1) = L_i \rho_i d \quad (45)$$

$$\begin{aligned} d &= \frac{JQ \times (\text{سال } 1)}{L_i \rho_i} \\ &= \frac{(0.06 \text{ J} \cdot \text{s}^{-1} \cdot \text{m}^{-2}) \times (365/25 \times 24 \times 60 \times 60 \text{ s})}{(3.4 \times 10^5 \text{ J/kg}) \times (917 \text{ kg/m}^3)} \\ &= 6.1 \times 10^{-3} \text{ m} \end{aligned} \quad (46)$$

ب) با فرض اینکه فشار جو p_a و ثابت است، در عمق z کلاهک یخی فشار از رابطه زیر به دست می آید

$$p = \rho_i g z + p_a \quad (47)$$

به علاوه، در ته کلاهک یخی، $z = y_2 - y_1$ داریم

$$p = \rho_i g (y_2 - y_1) + p_a \quad (48)$$

$$= \rho_i g x (\tan \beta - \tan \alpha) + \rho_i g h_0 + p_a \quad (49)$$

برای اینکه آب به سطح زیرین کلاهک یخی جریان نیابد، لازم است شرایط هیدروستاتیک برقرار باشد، یعنی

$$p = (\text{مقدار ثابت}) - \rho_w g y_1 \quad (50)$$

$$= (\text{مقدار ثابت}) - \rho_w g x \tan \alpha \quad (51)$$

به علاوه

$$\rho_i g x (\tan \beta - \tan \alpha) = -\rho_w g x \tan \alpha \quad (52)$$

یا

$$\tan \beta = -\frac{\rho_w - \rho_i}{\rho_i} \tan \alpha \quad (53)$$

$$= -\frac{\Delta \rho}{\rho_i} \tan \alpha \approx -0.091 \tan \alpha \quad (54)$$

$$s = -\frac{\Delta \rho}{\rho_i} = -0.091 \quad (55)$$

که در آن علامت منفی مهم است.

این مسئله را همچنین به روش‌های مختلفی با توجه به یک جزء جرم آب در سطح زیرین یخ و تعادل فرض شده می‌توان حل کرد. اکنون به دنبال جواب آن می‌رویم. با توجه به اینکه $\tan \alpha = 0.78$ است، خواهیم داشت $\tan \beta = -0.73$ و

$$y_2 = 2 \text{ km} - 0.73x \quad (56)$$

دانش‌آموزان باید این خط را رسم کنند.

(پ) چون یخ باقی‌مانده تنها از حرکت عمودی تأثیر می‌پذیرد، مشاهده می‌شود که فرورفتگی مخروطی روی سطح دارای همان شعاع مواد گداخته در سطح زیرین کلاهک یخی، یعنی ۱ km است. مطابق آنچه در قسمت (ب) دیدیم، عمق فرورفتگی مخروطی روی سطح برابر است با

$$h = |r \tan \beta| = \frac{\Delta \rho}{\rho_i} r \tan \alpha \quad (57)$$

$$= \frac{\Delta \rho}{\rho_i} H \quad (58)$$

$$= 0.7 \times 91 \times 1 \text{ km} = 91 \text{ m} \quad (59)$$

دانش‌آموزان باید این نتایج را روی یک نمودار رسم کنند.

(ت)

(i) حجم مخروطی به شعاع قاعده r و ارتفاع h برابر $V = \frac{1}{3} \pi r^2 h$ است. فرض می‌کنیم که ارتفاع مواد گداخته h_1 است. در این صورت حجم یخ ذوب شده در مرحله اول پیش از برقراری تعادل هیدروستاتیکی برابر $V_1 = \frac{1}{3} \pi r^2 h_1$ است. در این صورت آب به اطراف مخروط جریان می‌یابد و تماس یخ با سطح بالایی مواد گداخته حفظ می‌شود. پس از برقراری شرایط هیدروستاتیک آب‌های ناشی از ذوب یخ بر اثر نفوذ مواد گداخته، در بالای آن جمع می‌شوند که ارتفاع آن برابر $h_2 = \frac{\Delta \rho}{\rho_i} h_1$ است. در طول مرحله دوم نیز، آب به اطراف مخروط جریان می‌یابد. قبل از آنکه دمای مواد گداخته به 0°C برسد، فرض کنید که حجم یخ ذوب شده معادل مخروطی به ارتفاع h_3 است، به طوری که آب جمع شده در بالای آن به شکل مخروطی به ارتفاع $h'_3 = \frac{\rho_i}{\rho_w} h_3$ خواهد بود. ارتفاع کل مخروط یخی ذوب شده برابر است با

$$h_{tot} = h_1 + h_2 + h_3 \quad (60)$$

و عمق فرورفتگی روی سطح برابر است با

$$h = \frac{\Delta \rho}{\rho_i} (h_1 + h'_3) \quad (61)$$

این رابطه را به طور خیلی ساده تر با در نظر گرفتن تعادل هیدروستاتیکی در وضعیت نهایی به دست آوردیم [قسمت (ب) را دوباره ببینید]. از این رو، ارتفاع بین بالاترین نقطهٔ مخروط آب در زیر پوشش یخی نسبت به سطح زیرین اولیهٔ پوشش یخی برابر است با

$$H = h_1 + h'_3 = \frac{\rho_i}{\Delta\rho} h = 1,1 \times 10^3 \text{ m} \quad (62)$$

(ii) با توجه به تعادل گرمایی داریم

$$\frac{1}{3} \pi r^2 \{ \rho_r h_1 (L_r + c_r \Delta T) - \rho_i L_i h_{tot} \} = 0 \quad (63)$$

که در آن $\Delta T = 120^\circ \text{C}$ تغییر دمای مواد گداخته است. با توجه به رابطهٔ (۶۰) و این

$$\text{واقعیت که } h_2 = \frac{\Delta\rho}{\rho_i} h_i \text{ و } h_3 = \frac{\rho_w}{\rho_i} h'_3 \text{ داریم}$$

$$h_{tot} = h_1 + \frac{\Delta\rho}{\rho_i} h_1 + \frac{\rho_w}{\rho_i} h'_3 = \frac{\rho_w}{\rho_i} (h_1 + h'_3) \quad (64)$$

به علاوه [با استفاده از معادلهٔ (۶۲)] داریم

$$h_{tot} = \frac{\rho_w}{\rho_i} (h_1 + h'_3) = \frac{\rho_w}{\rho_i} H = \frac{\rho_w}{\Delta\rho} h = 1,20 \times 10^3 \text{ m} \quad (65)$$

و این نشان می دهد که مخروط به سطح کلاهک یخی نمی رسد. با جایگذاری این عبارت در معادلهٔ (۶۳) برای h_1 داریم

$$\rho_r h_1 (L_r + c_r \Delta T) = \frac{\rho_i \rho_w L_i h}{\Delta\rho} \quad (66)$$

$$h_1 = \frac{\rho_i \rho_w L_i h}{\Delta\rho \rho_r (L_r + c_r \Delta T)} = 10^3 \text{ m} \quad (67)$$

(iii) جرم کل آبی که شکل گرفته برابر جرم آب ذوب شده است. در این صورت داریم

$$m_{tot} = \rho_i \left(\frac{1}{3}\right) \pi r^2 h_{tot} = 2,9 \times 10^{11} \text{ kg} \quad (68)$$

و جرم آبی که به اطراف مخروط جریان یافته برابر است با

$$m' = \frac{h_1 + h_2}{h_{tot}} m_{tot} = \frac{\rho_w h_1}{\rho_i h_{tot}} m_{tot} = 2,7 \times 10^{10} \text{ kg} \quad (69)$$

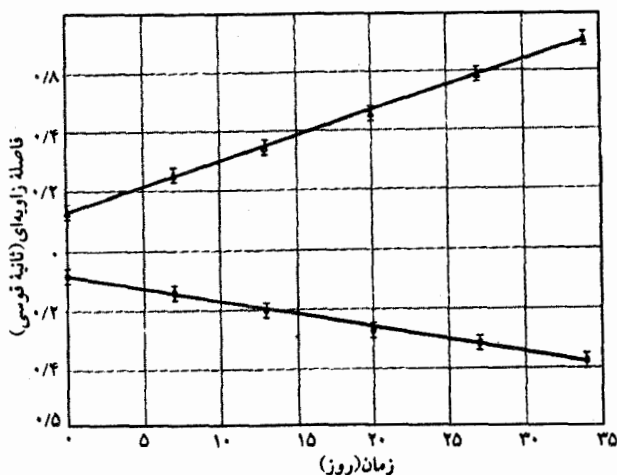
دانش آموزان باید شکل برآمدگی مواد گداخته و مخروط آبی را که نهایتاً بالای آن قرار می گیرد رسم کنند.

حل مسئله ۳

الف) مراکز چشمه‌ها را با دقت زیاد روی شکل ۷۱ علامت می‌زنیم. فاصله زاویه‌ای مرکز چشمه سمت چپ از علامت ضربدر را $\theta_1(t)$ و فاصله زاویه‌ای مرکز چشمه سمت راست از علامت ضربدر را $\theta_2(t)$ در نظر بگیرید. این دو کمیت را با استفاده از خطکش در روزهای مختلف روی شکل اندازه می‌گیریم و برحسب ثانیه زاویه‌ای (as) تبدیل می‌کنیم. نتایج آن در جدول زیر آمده است

$\theta_2(t)$ (as)	$\theta_1(t)$ (as)	زمان (روز)
۰٫۰۷۶	۰٫۱۳۹	۰
۰٫۱۳۹	۰٫۲۵۳	۷
۰٫۱۹۰	۰٫۳۵۴	۱۳
۰٫۲۵۳	۰٫۴۶۸	۲۰
۰٫۳۱۶	۰٫۶۰۱	۲۷
۰٫۳۶۷	۰٫۷۰۹	۳۴

در خواندن اندازه‌گیری‌های خطکش $\pm 0.5 \text{ mm}$ خطا وجود دارد، در نتیجه $\pm 0.13 \text{ as}$ خطا در مقادیر θ به‌وجود می‌آید. داده‌های به‌دست آمده در جدول بالا را مطابق شکل ۷۴ رسم می‌کنیم.



شکل ۷۴ فاصله‌های زاویه‌ای θ_1 و θ_2 (ثانیه قوسی) برحسب زمان (روز).

با عبور خط‌های مستقیم مناسب از نتایج داده‌ها خواهیم داشت

$$\begin{aligned} \omega_1 &= d\theta_1/dt = (17.0 \pm 1.0) \text{ mas/روز} \\ &= 9.54 \times 10^{-13} \text{ rad/s} \end{aligned} \quad (70)$$

$$\omega_2 = d\theta_2/dt = (8.8 \pm 1.0) \text{ mas/روز}$$

$$= 4,88 \times 10^{-13} \text{ rad/s} \quad (71)$$

$$v'_{\perp} = \omega_1 R = 9,54 \times 10^{-13} \times 12,5 \times 3,09 \times 10^{19} \\ = 3,68 \times 10^8 \text{ m/s} \approx (1,23 \pm 0,07) c \quad (72)$$

$$v'_{\parallel} = 1,89 \times 10^8 \text{ m/s} \approx (0,63 \pm 0,07) c \quad (73)$$

ب) حرکت چشمه در بازه زمانی Δt را از نقطه A تا نقطه A' در نظر می‌گیریم (شکل ۷۵). در این صورت داریم

$$\vec{r}_{AA'} = \vec{r}_{A'} - \vec{r}_A = \vec{v} \Delta t \quad (74)$$

فرض کنید $\Delta t'$ اختلاف زمانی است که علائم ایجاد شده در O به A و A' می‌رسد. با توجه به اختلاف فاصله A و A' و سرعت محدود نور، c ، داریم

$$\Delta t' = \Delta t + (r_{A'} - r_A)/c \quad (75)$$

برای Δt کوچک، $v \Delta t \ll r_A = R$ ، داریم

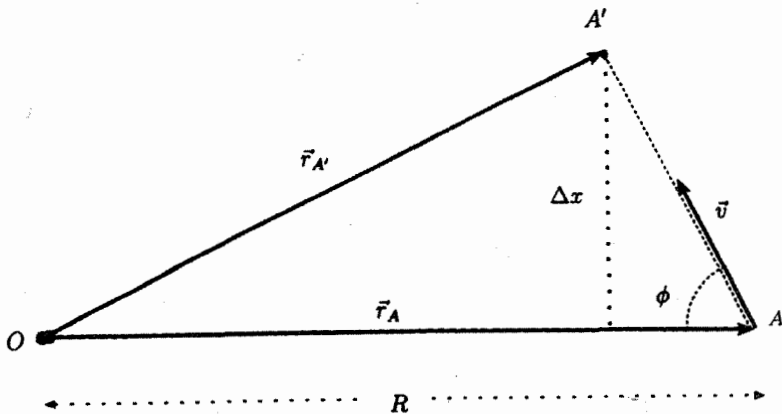
$$r_{A'} - r_A \approx -v \Delta t \cos \phi \quad (76)$$

در این صورت

$$\Delta t' \approx \Delta t(1 - \beta \cos \phi); \quad \beta = v/c \quad (77)$$

سرعت خطی ظاهری چشمه در امتداد عمود بر خط مشاهده برابر است با

$$v'_{\perp} = \frac{\Delta r}{\Delta t'} = \frac{\Delta x}{\Delta t(1 - \beta \cos \phi)} = \frac{c \beta \sin \phi}{1 - \beta \cos \phi} \quad (78)$$



شکل ۷۵ ناظر در نقطه O و مکان اولیه چشمه در نقطه A است. \vec{v} بردار سرعت است.

با استفاده از رابطهٔ اخیر، سرعت خطی حقیقی در چارچوب مرجع ناظر برابر

$$v_{\perp} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = c\beta \cos \phi$$
 است. سرعت زاویه‌ای چشمه از دید ناظر برابر است با

$$\omega = \frac{v'_{\perp}}{R} = \frac{c\beta \sin \phi}{R(1 - \beta \cos \phi)} \quad (79)$$

(ب) شکل ۷۶ وضعیت توصیف شده در این حالت را نشان می‌دهد. با قرار دادن $\phi = \phi_1$ داریم
 $\sin \phi_2 = \sin \phi$ و $\cos \phi_2 = -\cos \phi$. از معادلهٔ (۷۹) داریم

$$\omega_1 = \frac{\beta c \sin \phi}{R(1 - \beta \cos \phi)} \quad (80)$$

$$\omega_2 = \frac{\beta c \sin \phi}{R(1 + \beta \cos \phi)} \quad (81)$$

کمیت‌های ω_1 ، ω_2 و R داده شده‌اند، ولی در این قسمت می‌خواهیم کمیت‌های β و ϕ را به دست آوریم. با محاسبه‌های جبری ساده داریم

$$(1 - \beta \cos \phi)\omega_1\omega_2 = \beta c \sin \phi \omega_2/R \quad (82)$$

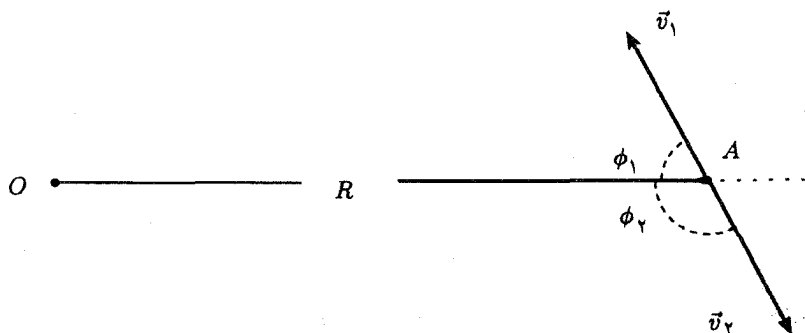
$$(1 + \beta \cos \phi)\omega_2\omega_1 = \beta c \sin \phi \omega_1/R \quad (83)$$

با کم کردن رابطه‌های (۸۲) و (۸۳) از یکدیگر داریم

$$2\beta \cos \phi \omega_2\omega_1 = \beta c \sin \phi (\omega_1 - \omega_2)/R \quad (84)$$

$$\tan \phi = \frac{2R\omega_2\omega_1}{c(\omega_1 - \omega_2)} \quad (85)$$

$$\phi = \arctan \left[\frac{2R\omega_2\omega_1}{c(\omega_1 - \omega_2)} \right] \quad (86)$$



شکل ۷۶ با فرض اینکه دو چشمه با سرعت‌های مساوی ولی در خلاف جهت هم حرکت می‌کنند داریم
 $\phi_2 = \pi - \phi_1$ و $\beta_1 = \beta_2 = \beta$ ، $\omega_1 = \omega_2 = \omega$

با تقسیم رابطه‌های (۸۲) و (۸۳) بر یکدیگر و با توجه به اینکه کمیت‌های ω_1 و ω_2 معلوم‌اند، داریم

$$\omega_1(1 - \beta \cos \phi) = \omega_2(1 + \beta \cos \phi) \quad (۸۷)$$

$$\beta = \frac{\omega_1 - \omega_2}{\cos \phi(\omega_1 + \omega_2)} \quad (۸۸)$$

با جایگذاری مقادیر ω_1 و ω_2 از قسمت (الف) و همچنین مقادیر R و c داریم

$$\phi = \arctan(۲٫۵۷) = ۱٫۲^\circ \text{ rad} = ۶۸٫۸^\circ \pm ۲^\circ \quad (۸۹)$$

$$\beta = ۰٫۸۹۲ \pm ۰٫۰۸ \quad (۹۰)$$

ت) معادله (۷۸) نشان می‌دهد که سرعت خطی ظاهری چشمه در امتداد عمود بر خط مشاهده بزرگتر یا مساوی با سرعت نور خواهد بود، اگر و تنها اگر

$$\frac{\beta \sin \phi}{1 - \beta \cos \phi} \geq 1 \quad (۹۱)$$

اگر $\beta < 1$ باشد، شرط (۹۱) معادل است با

$$\beta \sin \phi \geq 1 - \beta \cos \phi \quad (۹۲)$$

$$\beta(\sin \phi + \cos \phi) \geq 1 \quad (۹۳)$$

$$\beta\sqrt{2} \left(\sin \phi \cos \frac{\pi}{4} + \cos \phi \sin \frac{\pi}{4} \right) \geq 1 \quad (۹۴)$$

$$\sin \left(\phi + \frac{\pi}{4} \right) \geq \frac{1}{\beta\sqrt{2}} \quad (۹۵)$$

در نتیجه معادله (۹۱) در صورتی صادق است که

$$\beta > f(\phi) = \left[\sqrt{2} \sin \left(\phi + \frac{\pi}{4} \right) \right]^{-1} \quad (۹۶)$$

ناحیه مناسب فیزیکی در صفحه (β, ϕ) به صورت زیر است

$$(\beta, \phi) \in [0, 1[\times [0, \pi] \quad (۹۷)$$

واضح است که معادله (۹۱) تنها برای $\phi \in [0, \pi/2]$ می‌تواند برقرار باشد و اگر $\beta \geq 1/\sqrt{2}$ باشد تنها یک پاسخ برای ϕ در معادله (۹۵) وجود دارد. نگاهمان را به ناحیه زیر متمرکز می‌کنیم

$$(\beta, \phi) \in [1/\sqrt{2}, 1[\times [0, \pi/2] \quad (۹۸)$$

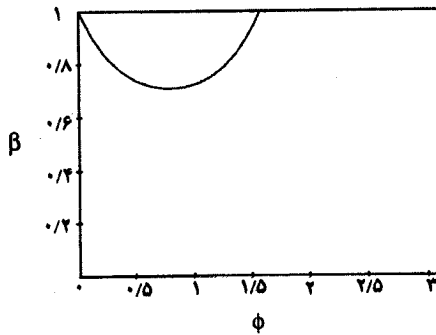
به طوری که نگاشت آن

$$(\beta, \phi) \mapsto \beta \sin \left(\phi + \frac{\pi}{4} \right) \quad (99)$$

در این ناحیه پیوسته است. همچنین مناسب است به مرز ناحیه که با نامساوی (۹۵) تعریف می‌شود، توجه کنیم

$$\beta \sin \left(\phi + \frac{\pi}{4} \right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad (100)$$

که نشان می‌دهد β تابع ϕ است که در شکل ۷۷ رسم شده است. این منحنی ناحیه‌ای را که $v'_{\perp} > c$ جدا کرده است.



شکل ۷۷ ناحیه بین خط افقی و منحنی واقع در بالا در گوشه سمت چپ، بیانگر $v'_{\perp}/c > 1$ است.

ث) برای به دست آوردن مقدار بیشینه v'_{\perp} بر حسب ϕ ، با مشتق‌گیری از رابطه (۷۸) خواهیم داشت

$$\frac{d}{d\phi} \left(\frac{v'_{\perp}}{c} \right) = \frac{\beta(\cos \phi - \beta)}{(1 - \beta \cos \phi)^2} \quad (101)$$

به‌ازای $\phi = \phi_m$ این عبارت صفر است. در این صورت

$$\cos \phi_m = \beta; \quad \phi_m = \arccos \beta \in]0, \pi/2[\quad (102)$$

برای به دست آوردن بیشینه آن از عبارت (۱۰۱) دوباره مشتق می‌گیریم. بنابراین داریم

$$\frac{d^2}{d\phi^2} \left(\frac{v'_{\perp}}{c} \right) = -\beta \left[\frac{\sin \phi}{(1 - \beta \cos \phi)^2} + \frac{2\beta \sin \phi (\cos \phi - \beta)}{(1 - \beta \cos \phi)^3} \right] \quad (103)$$

و در فرینه داریم

$$\left. \frac{d^2}{d\phi^2} \left(\frac{v'_{\perp}}{c} \right) \right|_{\phi_m} = -\frac{\beta \sin \phi_m}{(1 - \beta^2)^2} < 0 \quad (104)$$

که این نشان می‌دهد ϕ_m متناظر با یک بیشینه است. از رابطه‌های (۷۸) و (۱۰۲) مقدار بیشینه سرعت ظاهری در امتداد عمود بر خط مشاهده برابر است با

$$(v'_{\perp})_{\max} = \frac{\beta c}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad (105)$$

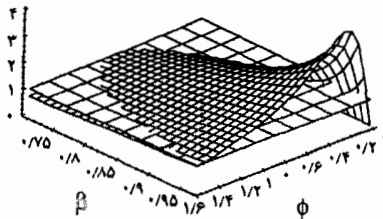
با استفاده از این رابطه و رابطه (۱۰۲) داریم

$$(v'_{\perp})_{\max} \xrightarrow{\beta \rightarrow 1} \infty; \quad \phi_m \xrightarrow{\beta \rightarrow 1} 0 \quad (106)$$

شکل ۷۸ نمودار تغییرات v'_{\perp}/c را بر حسب β و ϕ در ناحیه

$$(\beta, \phi) \in [1/\sqrt{2}, 1[\times [0, \pi/2]$$

نشان می‌دهد.



شکل ۷۸ سطح منحنی، v'_{\perp}/c ، تابعی از β و ϕ است. صفحه، تابع ثابت $\beta = 1$ را نشان می‌دهد.

(ج) معادله‌های دوپلر نسبیتی انتقالی به صورت زیر است

$$\frac{\lambda_{1,2}}{\lambda_0} = \frac{1 \mp \beta \cos \phi}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad (107)$$

با جمع آن‌ها و تعریف نسبت مفید ρ و حل آن بر حسب β خواهیم داشت

$$\rho = \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2\lambda_0} = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad (108)$$

$$\rho^2(1 - \beta^2) = 1 \quad (109)$$

$$\beta = \sqrt{1 - 1/\rho^2} = \sqrt{1 - \frac{4\lambda_0^2}{(\lambda_1 + \lambda_2)^2}} \quad (110)$$

مقایسه این رابطه و رابطه (۷) نشان می‌دهد که

$$\alpha = 4 \quad (111)$$

با حل سه معادله (۱۱۰)، (۸۵) و (۸۸) می‌توانیم β ، ϕ و R را به‌دست آوریم. برای مثال، اگر β را از معادله (۱۱۰) به‌دست آوریم و مقدار آن را در رابطه (۸۸) قرار دهیم، با حل آن می‌توان ϕ را به‌دست آورد. در این صورت مقدار R از رابطه (۸۴) تعیین می‌شود. با اندازه‌گیری طول موج‌های انتقال دویلر یافته می‌توانیم فاصله چشمه گسیل‌کننده موج‌های رادیویی را با سرعت‌های زاویه‌ای ω_1 و ω_2 (آن‌طور که از زمین دیده می‌شود) به‌دست آوریم.

سی امین المپیاد بین المللی فیزیک

پادوا - ایتالیا*

مسابقه نظری - زمان ۵ ساعت

۱۹۹۹/۱۳۷۸

مسئله ۱ جذب تابش توسط یک گاز^۱

یک ظرف استوانه‌ای که محور آن در راستای قائم است، محتوی مقداری گاز در تعادل ترمودینامیکی است. قاعده بالایی استوانه که از یک ورقه شیشه‌ای ساخته شده است می‌تواند آزادانه جابه‌جا شود. فرض کنید که گاز نشسته نمی‌کند و اصطکاک بین محل تماس ورقه شیشه‌ای و سطح استوانه به حدی است که باعث میرایی نوسان‌ها می‌شود، اما انرژی که از این طریق تلف می‌شود نسبت به انرژی‌های دیگر دستگانه ناچیز است. در ابتدا دمای گاز با دمای محیط اطراف برابر است و با تقریب خوبی می‌توان گاز را کامل در نظر گرفت. فرض کنید رسانایی و ظرفیت گرمایی استوانه (شامل سطح جانبی و قاعده‌های آن) ناچیز است، به علاوه تبادل گرمایی بین استوانه و محیط اطراف خیلی کند است و می‌توان در حل این مسئله آن را نادیده گرفت. از ورقه شیشه‌ای یک پرتو نور را که یک لیزر با توان ثابت گسیل کرده است به داخل استوانه می‌فرستیم؛ این تابش به راحتی از هوا و شیشه عبور می‌کند ولی گاز درون ظرف آن را کاملاً جذب می‌کند. با جذب این تابش مولکول‌های گاز به حالت‌های برانگیخته می‌روند، سپس این مولکول‌ها با گسیل تابش فرسوخ^۲ در چند مرحله به حالت پایه برمی‌گردند. با وجود این، بیشتر این تابش فرسوخ را مولکول‌های

*. Padua, Italy 1. Absorption of Radiation by a Gas 2. Infrared

ديگر جذب مي‌کنند و ديوارهٔ ظرف و ورقهٔ شيشه‌اي باز مي‌تاباند. بنابر اين، انرژی جذب شده از ليزر به سرعت به حرکت گرمایی (آشوب مولکولی) گاز تبديل مي‌شود و پس از آن برای مدت زمان به حد کافي طولانی در گاز باقي مي‌ماند.

مشاهده مي‌کنيم که ورقهٔ شيشه‌اي به طرف بالا حرکت مي‌کند؛ پس از زمان پرتودهي معين ليزر را خاموش مي‌کنيم و اين جابه‌جايی را اندازه مي‌گيريم. (الف) دما و فشار گاز را بعد از پرتودهي حساب کنيد.

(ب) کار مکانیکی را که گاز در نتیجهٔ جذب تابش به بيرون مي‌دهد حساب کنيد.

(پ) انرژی تابشی جذب شده را در مدت پرتودهي حساب کنيد.

(ت) توان گسيلی ليزر را که گاز جذب کرده است، و تعداد فوتون‌های متناظر با آن را در واحد زمان حساب کنيد.

(ث) کارایی فرايندهای تبديل انرژی نورانی به تغيير انرژی پتانسيل مکانیکی ورقهٔ شيشه‌اي را حساب کنيد. پس از آن محور استوانه به آرامی ۹۰ درجه مي‌چرخد و در جهت افقی قرار مي‌گيرد. در اين وضعيت نيز تبادل گرمایی بين گاز و ظرف را نادیده بگيريد.

(ج) پس از اينکه محور استوانه در جهت افقی قرار گرفت، حجم جديد گاز ناشی از تغيير دما و فشار را به دست آوريد.

در حل اين مسئله مي‌توانيد از داده‌های زير استفاده کنيد

$$p_0 = 101,3 \text{ kPa} \quad \text{فشار اتاق}$$

$$T_0 = 20^\circ \text{C} \quad \text{دمای اتاق}$$

$$r = 100 \text{ mm} \quad \text{قطر داخلی استوانه}$$

$$m = 800 \text{ g} \quad \text{جرم ورقهٔ شيشه‌اي}$$

$$n = 0,100 \text{ mol} \quad \text{مقدار گاز داخل ظرف}$$

$$C_V = 20,8 \text{ J}/(\text{mol} \cdot \text{K}) \quad \text{گرمای ویژهٔ مولی گاز در حجم ثابت}$$

$$\lambda = 514 \text{ nm} \quad \text{طول موج نور گسيلی از ليزر}$$

$$\Delta t = 10,0 \text{ s} \quad \text{زمان پرتودهي}$$

$$\Delta s = 30,0 \text{ mm} \quad \text{مقدار جابه‌جايی ورقهٔ شيشه‌اي بعد از پرتودهي}$$

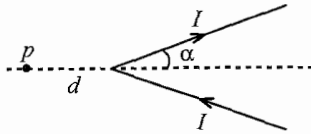
$$R = 8,314 \text{ J}/(\text{mol} \cdot \text{K}) \quad \text{ثابت گازها}$$

$$h = 6,62 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s} \quad \text{ثابت پلانک}$$

مسئلهٔ ۲ میدان مغناطیسی ناشی از یک سیم V-شکل^۱

یکی از نخستین موفقیت‌های آمپر در تفسير پدیده‌های مغناطیسی، محاسبهٔ میدان مغناطیسی \vec{B} ناشی از یک سیم حامل جریان در مقایسه با فرض‌های اولیهٔ بیو و ساوار بود.

یک مورد فوق العاده جالب توجه، مربوط به یک سیم نازک و بلند حامل جریان ثابت I است که از دو قطعه سیم و با زاویه رأس 2α مطابق شکل ۷۹ به صورت V ساخته شده باشد. بنا بر محاسبه‌های آمپر، اندازه میدان مغناطیسی \vec{B} در نقطه P روی محور سیم V - شکل، بیرون و در فاصله d از رأس آن با $\tan\left(\frac{\alpha}{\varphi}\right)$ متناسب است. کارهای آمپر بعدها وارد نظریه الکترومغناطیسی ماکسول شد و پذیرش عام یافت.



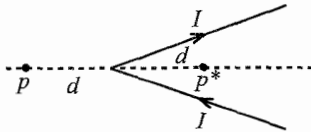
شکل ۷۹

با استفاده از معلومات فعلی از الکترومغناطیس

(الف) جهت میدان مغناطیسی \vec{B} را در نقطه P مشخص کنید.

(ب) با توجه به اینکه می‌دانیم میدان در نقطه P با $\tan\left(\frac{\alpha}{\varphi}\right)$ متناسب است، ثابت تناسب را در رابطه $|\vec{B}(P)| = k \tan\left(\frac{\alpha}{\varphi}\right)$ پیدا کنید.

(پ) میدان \vec{B} را در نقطه P^* که قرینه نقطه P نسبت به رأس است، یعنی روی محور و در همان فاصله d از رأس ولی داخل « V » قرار دارد، حساب کنید (شکل ۸۰).



شکل ۸۰

(ت) برای اندازه‌گیری میدان مغناطیسی، یک عقربه مغناطیسی کوچک را با گشتاور لختی I و گشتاور مغناطیسی μ در نقطه P قرار می‌دهیم. عقربه حول یک نقطه ثابت در صفحه شامل جهت \vec{B} ، نوسان می‌کند. دوره نوسان‌های کوچک عقربه را برحسب B حساب کنید.

ولی در همان شرایط بیو و ساوار فرض کردند، اندازه میدان مغناطیسی در نقطه P باید به صورت

$$B(P) = \frac{I\mu_0\alpha}{\pi^2 d}$$

جدید استفاده شده است). در واقع، آن‌ها می‌خواستند با اندازه‌گیری دوره نوسان‌های عقربه

مغناطیسی برحسب زاویه رأس سیم V - شکل ببینند کدام تفسیر (آمپر، بیو و ساوار) صحیح است. اما، برای بعضی مقادیر α ، اختلاف به اندازه‌ای کوچک بود که به آسانی قابل اندازه‌گیری نبود.

(ث) فرض کنید T_1 و T_2 به ترتیب دوره نوسان عقربه مغناطیسی در نقطه P ، با توجه به پیش‌بینی‌های

آمبر، بیو و ساوار باشد. برای اینکه بتوان به‌طور تجربی بین این دو پیش‌بینی تفاوت گذاشت باید حداقل اختلاف بین T_1 و T_2 برابر 1° درصد باشد، یعنی $T_2 > 1.01 T_1$.
 برای اینکه قادر به این‌کار باشیم، زاویه α (نصف زاویه رأس سیم V-شکل) چقدر باید باشد؟
 راهنمایی: با توجه به راهی که در راه‌حل این مسئله انتخاب می‌کنید، رابطه $\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha}$ می‌تواند مفید باشد.

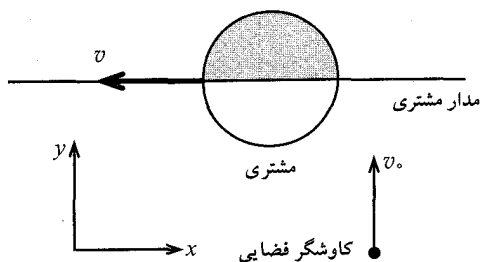
مسئله ۳ کاوشگر فضایی به مشتری^۱

در این مسئله به بررسی روشی می‌پردازیم که کاوشگرهای فضایی برای شتاب گرفتن در جهت مورد نظر، معمولاً از آن استفاده می‌کنند. کاوشگر فضایی در حوالی یک سیاره حرکت می‌کند و می‌تواند با گرفتن مقدار خیلی کمی انرژی از حرکت مداری سیاره، سرعتش را به‌طور چشمگیری زیاد کند و همچنین به‌طور قابل ملاحظه‌ای جهت حرکت را تغییر دهد. در این مسئله به تحلیل این اثر روی یک کاوشگر فضایی که از حوالی مشتری می‌گذرد می‌پردازیم.

مدار سیاره مشتری به دور خورشید بیضوی است که می‌توان آن را تقریباً دایره‌ای به شعاع متوسط R در نظر گرفت. برای بررسی این وضعیت فیزیکی باید ابتدا مقادیر زیر را به‌دست آورد:
 الف) سرعت v سیاره در مدارش به دور خورشید.

ب) هنگامی که کاوشگر بین خورشید و مشتری است (روی پاره‌خطی که خورشید را به مشتری وصل می‌کند) فاصله‌ای از مشتری را به‌دست آورید که جاذبه گرانشی خورشید و مشتری برابر می‌شوند.
 یک کاوشگر فضایی به جرم $m = 825 \text{ kg}$ در حوالی مشتری پرواز می‌کند، برای سادگی فرض کنید مسیر کاوشگر فضایی به‌طور کامل در صفحه مدار مشتری است؛ در این صورت مورد مهمی را که کاوشگر فضایی از صفحه مداری مشتری خارج می‌شود نادیده می‌گیریم.
 فقط به بررسی حالتی می‌پردازیم که نیروی جاذبه گرانشی مشتری بر سایر نیروهای گرانشی دیگر غلبه کند.

در چارچوب مرجعی که مبدأ آن منطبق بر مرکز جرم خورشید است، سرعت اولیه کاوشگر برابر $v_0 = 1.0^\circ \times 10^4 \text{ m/s}$ (در جهت مثبت محور y) است؛ در حالی که سرعت مشتری در جهت منفی محور x است (شکل ۸۱). منظور از سرعت اولیه کاوشگر سرعت در فضای میان سیاره‌ای است که هنوز از مشتری دور است ولی، نیروی جاذبه گرانشی خورشید در مقایسه با جاذبه مشتری قابل چشم‌پوشی است. فرض می‌کنیم رویارویی در یک زمان به حد کافی کوتاه رخ می‌دهد به‌طوری که می‌توانیم تغییر جهت مشتری در مدارش به دور خورشید را نادیده بگیریم. همچنین فرض می‌کنیم کاوشگر فضایی از پشت مشتری عبور می‌کند، یعنی با مختصه y برابر، مختصه x برای کاوشگر بزرگ‌تر از این مختصه برای مشتری است.



شکل ۸۱ منظره در سیستم مرکز جرم خورشید

پ) جهت حرکت کاوشگر فضایی (وقتی زاویه بین جهت حرکت آن و محور x برابر θ است) و سرعت v' آن را در چارچوب مرجع مشتری به دست آورید.

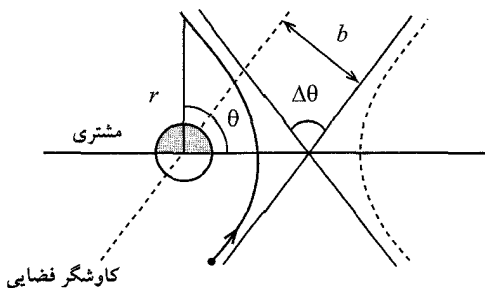
ت) مقدار انرژی مکانیکی کل E کاوشگر فضایی را در چارچوب مرجع مشتری به دست آورید. معمولاً انرژی پتانسیل را در فاصله‌های خیلی دور برابر صفر می‌گیرند، در این حالت وقتی فاصله آن به حد کافی زیاد است، به سبب کوچک بودن جاذبه‌های گرانشی با سرعت ثابت حرکت می‌کند.

مسیر کاوشگر فضایی در چارچوب مرجع مشتری هذلولی است و معادله آن در مختصات قطبی در این چارچوب مرجع به صورت زیر است

$$\frac{1}{r} = \frac{GMm}{2v'^2 Eb^2} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{2Ev'^2 b^2}{G^2 M^2 m} \cos \theta} \right) \quad (1)$$

که b فاصله بین یکی از مجانب‌های هذلولی و مشتری است (که آن را پارامتر برخورد می‌نامند)، E انرژی مکانیکی کل کاوشگر در چارچوب مرجع مشتری، G ثابت گرانش عمومی، M جرم مشتری، v' سرعت کاوشگر در چارچوب مرجع مشتری، r و θ نیز مختصات قطبی هستند (r فاصله شعاعی و θ زاویه قطبی). شکل ۸۲ شاخه‌های هذلولی را که با معادله (۱) بیان شد نشان می‌دهد؛ مجانب‌ها و مختصات

قطبی نیز نشان داده شده است.



شکل ۸۲

- ث) با استفاده از معادله (۱) که مسیر کاوشگر فضایی را بیان می‌کند، انحراف زاویه‌ای کل $\Delta\theta$ را در چارچوب مرجع مشتری برحسب v' و b به دست آورید (شکل ۸۲).
- ج) فرض کنید فاصله کاوشگر از مرکز مشتری نمی‌تواند کمتر از سه برابر شعاع مشتری باشد، با توجه به این فرض کمینه پارامتر برخورد و بیشینه انحراف زاویه‌ای را حساب کنید.
- چ) رابطه‌ای برای سرعت نهایی v'' کاوشگر در چارچوب مرجع خورشید تنها برحسب سرعت مشتری v ، سرعت اولیه کاوشگر v_0 و انحراف زاویه‌ای $\Delta\theta$ به دست آورید.
- ح) با استفاده از نتیجه قسمت قبل، مقدار عددی سرعت نهایی v'' کاوشگر را در چارچوب مرجع خورشید هنگامی که انحراف زاویه‌ای بیشینه است، به دست آورید.
- در حل این مسئله می‌توانید از داده‌های زیر استفاده کنید

$$G = 6,67259 \times 10^{-11} \text{ m}^3/\text{kg} \cdot \text{s} \quad \text{: ثابت گرانش عمومی}$$

$$M_s = 1,991 \times 10^{30} \text{ kg} \quad \text{: جرم خورشید}$$

$$M_E = 5,979 \times 10^{24} \text{ kg} \quad \text{: جرم زمین}$$

$$r_E = 6,373 \times 10^6 \text{ m} \quad \text{: شعاع متوسط زمین}$$

$$R_E = 1,4957 \times 10^{11} \text{ m} \quad \text{: شعاع مدار زمین}$$

$$M = 1,901 \times 10^{27} \text{ kg} \quad \text{: جرم مشتری}$$

$$R_B = 69,8 \times 10^6 \text{ m} \quad \text{: شعاع استوایی مشتری}$$

$$R = 7,783 \times 10^{11} \text{ m} \quad \text{: شعاع متوسط مدار مشتری}$$

$$y_J = 374,32 \times 10^6 \text{ s} \quad \text{: دوره گردش مشتری}$$

$$y = 31,558150 \times 10^6 \text{ s} \quad \text{: دوره گردش زمین}$$

پاسخ تشریحی مسئله‌ها

حل مسئله ۱

الف) در حالت تعادل، فشار p گاز داخل ظرف برابر فشار اتاق p_0 ، به اضافه فشار ناشی از وزن قاعده متحرک است، یعنی

$$p = p_0 + \frac{mg}{\pi r^2}$$

این موضوع قبل و بعد از پرتو دهی صادق است. در ابتدا دمای گاز با دمای اتاق برابر است. با توجه به معادله حالت گاز کامل، حجم اولیه گاز برابر $V_1 = \frac{nRT_0}{p}$ است که در آن R ثابت گازهاست،

در نتیجه ارتفاع اولیه استوانه که گاز اشغال کرده برابر است با

$$h_1 = \frac{V_1}{\pi r^2} = \frac{nRT_0}{p_0 \pi r^2 + mg}$$

پس از پرتو دهی، ارتفاع استوانه به $h_2 = h_1 + \Delta s$ می‌رسد، به علاوه دمای جدید آن برابر است با

$$T_2 = T_0 \left(1 + \frac{\Delta s}{h_1} \right) = T_0 + \frac{\Delta s (p_0 \pi r^2 + mg)}{nR}$$

و مقادیر عددی آن‌ها عبارت‌اند از

$$p = 102,32 \text{ kPa}; \quad T_2 = 322 \text{ K} = 49^\circ \text{ C}$$

(ب) کار مکانیکی که گاز انجام می‌دهد برابر مجموع کار وزن ورقه شیشه‌ای $mg\Delta s$ ، و کار فشار اتاق $p_0 \pi r^2 \Delta s$ است. بنابراین کار کل برابر است با

$$W = (mg + p_0 \pi r^2) \Delta s = 24,1 \text{ J}$$

(پ) تغییر انرژی داخلی، به دلیل تغییر دما به صورت زیر است

$$\Delta U = nC_V(T_2 - T_0)$$

مقدار گرمایی که در زمان پرتو دهی Δt وارد دستگاه می‌شود برابر است با

$$\begin{aligned} Q &= \Delta U + W = nC_V \frac{T_0 \Delta s}{h_1} + (mg + p_0 \pi r^2) \Delta s \\ &= \Delta s (p_0 \pi r^2 + mg) \left(\frac{C_V}{R} + 1 \right) \end{aligned}$$

این گرما منحصراً ناشی از جذب تابش نور است و در نتیجه با انرژی نوری جذب شده برابر است، مقدار عددی آن برابر $Q = 84 \text{ J}$ است.

(ت) چون لیزر با یک توان ثابت گسیل می‌کند، توان نوری جذب شده برابر است با

$$P = \frac{Q}{\Delta t} = \left(\frac{C_V}{R} + 1 \right) \frac{\Delta s}{\Delta t} (p_0 \pi r^2 + mg) = 8,4 \text{ W}$$

انرژی هر فوتون برابر $\frac{hc}{\lambda}$ است و از این رو تعداد فوتون‌های جذب شده در واحد زمان عبارت است از

$$\frac{P\lambda}{hc} = 2,2 \times 10^{19} \text{ s}^{-1}$$

ث) تغییر انرژی پتانسیل ورقه شیشه‌ای برابر است با کار مکانیکی که در مقابل وزن ورقه انجام می‌شود. بنابراین کارایی η تبدیل انرژی برابر است با

$$\eta = \frac{mg\Delta s}{Q} = \frac{1}{(1 + p_0 \pi r^2 / mg)(1 + C_V / R)} = 2,8 \times 10^{-3} \approx 0,3\%$$

ج) هنگامی که محور استوانه می‌چرخد و در جهت افقی قرار می‌گیرد، یک فرایند بی‌دررو انجام می‌شود و فشار گاز از p به p_0 تغییر می‌کند، همچنین دما به مقدار جدید T_3 می‌رسد. با استفاده از معادله فرایند بی‌دررو، ثابت $pV^\gamma = \text{ثابت}$ داریم

$$T_3 = T_2 \left(\frac{p_0}{p} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}$$

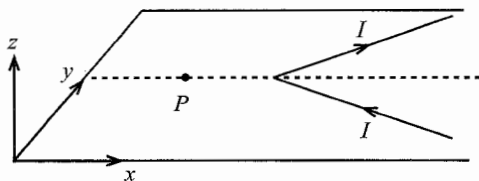
که در آن γ برابر است با

$$\gamma = \frac{C_p}{C_V} = \frac{C_V + R}{C_V} = 1 + \frac{R}{C_V} = 1,399$$

سرانجام $T_3 = 321\text{K} = 48^\circ\text{C}$ خواهد شد.

حل مسئله ۲

الف) سهم میدان مغناطیسی ناشی از هر یک از شاخه‌های سیم V -شکل، همان جهتی را دارد که دو سیم نامحدود اگر جهت جریان مطابق شکل ۸۳ باشد. بنابراین میدان \vec{B} در نقطه P ، عمود بر صفحه $x - y$ و در جهت مثبت z است. با توجه به تقارن‌های موجود، اندازه میدان کل در نقطه P ، دو برابر اندازه میدانی است که هر کدام از شاخه‌های سیم V -شکل به تنهایی در نقطه P ایجاد می‌کنند.



شکل ۸۳

ب) وقتی زاویه α در شکل ۷۹ برابر $\frac{\pi}{4}$ شود، سیم V -شکل به یک سیم مستقیم نامحدود تبدیل می‌شود. در این حالت میدان مغناطیسی در نقطه P برابر است با

$$B = \frac{I}{2\pi\epsilon_0 c^2 d} = \frac{I\mu_0}{2\pi d} \quad (۱)$$

از طرفی طبق فرض مسئله داریم

$$|\vec{B}(P)| = k \tan\left(\frac{\alpha}{2}\right)$$

برای $\alpha = \frac{\pi}{4}$ داریم

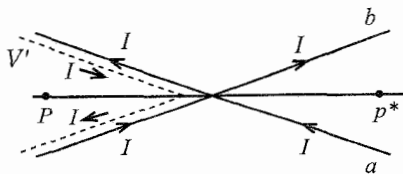
$$|\vec{B}(P)| = k \tan\left(\frac{\pi}{4}\right) = k \quad (2)$$

مقایسه رابطه‌های (۱) و (۲) نشان می‌دهد که $k = \frac{I\mu_0}{2\pi d}$ است.

(پ) روش اول

برای محاسبه $\vec{B}(P^*)$ ، می‌توان سیم V -شکل را به صورت دو سیم نامتناهی a و b و سیم V -شکل دیگری که جهت جریان در شاخه‌های آن مخالف جهت جریان در سیم‌های a و b است، در نظر گرفت (این سیم را در شکل ۸۴ با V' و به صورت خط چین نشان داده‌ایم). در این صورت داریم

$$B(P^*) = B_a(P^*) + B_b(P^*) + B_{V'}(P^*)$$



شکل ۸۴

اندازه میدان مغناطیسی ناشی از سیم‌های a و b در نقطه P^* بنابر تقارن برابر است، یعنی

$$B_a(P^*) = B_b(P^*) = \frac{I\mu_0}{2\pi d \sin \alpha}$$

و در جهت منفی محور z قرار دارد.
با توجه به نتیجه قسمت (ب) داریم

$$B_{V'}(P^*) = \frac{I\mu_0}{2\pi d} \tan\left(\frac{\alpha}{2}\right)$$

که در جهت مثبت محور z است. بنابراین

$$B(P^*) = \frac{I\mu_0}{2\pi d} \left[\frac{2}{\sin \alpha} - \tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) \right]$$

$$= k \left(\frac{1 + \cos \alpha}{\sin \alpha} \right) = k \cot\left(\frac{\alpha}{2}\right)$$

که در جهت منفی محور z است.

روش دوم

نقطه P^* داخل سیم V -شکل با نصف زاویه رأس α را می‌توان متناظر با نقطه‌ای خارج یک سیم V -شکل با نصف زاویه رأس $(\pi - \alpha)$ در نظر گرفت. در این صورت با توجه به نتیجه قسمت (ب) داریم

$$B(P^*) = k \tan\left(\frac{\pi - \alpha}{2}\right) = k \cot\left(\frac{\alpha}{2}\right)$$

که در جهت منفی محور z است.

ت) گشتاور مکانیکی \vec{M} که در نقطه P به عقربه مغناطیسی وارد می‌شود برابر است با

$$\vec{M} = \vec{\mu} \times \vec{B}$$

اگر عقربه مغناطیسی به اندازه زاویه کوچک β از حالت تعادل جابه‌جا شود، در این صورت با توجه به تقریب $\sin \beta \simeq \beta$ و نظریه تکانه زاویه‌ای داریم

$$M = -\mu B \beta = \frac{dL}{dt} = I \frac{d^2 \beta}{dt^2}$$

علامت منفی به این خاطر ظاهر شده است که گشتاور مکانیکی همواره برخلاف جابه‌جایی نسبت به حالت تعادل است. بنابراین دوره نوسان‌های کوچک T برابر است با

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{I}{\mu B}}$$

ث) اگر از زیرنویس A برای محاسبه‌های براساس تفسیر آمپر و از زیرنویس BS برای فرض‌های بیو و ساوار استفاده کنیم، خواهیم داشت

$$B_A = \frac{I\mu_0}{2\pi d} \tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) \quad \text{و} \quad B_{BS} = \frac{I\mu_0}{\pi^2 d} \alpha$$

$$T_A = 2\pi \sqrt{\frac{2\pi Id}{\mu_0 \mu I \tan(\alpha/2)}} \quad \text{و} \quad T_{BS} = 2\pi \sqrt{\frac{\pi^2 Id}{\mu_0 \mu I \alpha}}$$

$$\frac{T_A}{T_{BS}} = \sqrt{\frac{2\alpha}{\pi \tan(\alpha/2)}}$$

برای $\alpha = \frac{\pi}{4}$ (بیشترین مقدار ممکن) $T_A = T_{BS}$ ؛ و برای $\alpha \rightarrow 0$ داریم

$$T_A \rightarrow \frac{2}{\sqrt{\pi}} T_{BS} \approx 1.128 T_{BS}$$

در گستره $0 < \alpha < \frac{\pi}{4}$ ، به طور یکنواخت بر حسب α افزایش می‌یابد، در نتیجه $\frac{T_A}{T_{BS}}$ به طور یکنواخت بر حسب α کاهش می‌یابد. بنابراین برای اینکه بتوانیم بین تفسیرهای آمپر، بیو و ساوار تمایز قائل شویم مقداری از α قابل قبول‌اند که بازای آن‌ها حداقل T_A ده درصد بیشتر از T_{BS} باشد. یعنی

$$\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{4}{1,21\pi} \left(\frac{\alpha}{2}\right) = 1,05 \left(\frac{\alpha}{2}\right)$$

با نگاه کردن به جدول‌های مثلثاتی یا با استفاده از یک ماشین حساب، می‌بینیم که این شرط با تقریب خوبی به صورت $\frac{\alpha}{2} = 0,38 \text{ rad} \approx 22^\circ$ است. در این صورت α باید کمتر از $44^\circ \approx 0,77 \text{ rad}$ باشد.

حل مسئله ۳

الف) روش اول

بنابر فرضی که در صورت مسئله به آن اشاره کردیم، از ارتباط شتاب شعاعی $\frac{v^2}{R}$ با میدان گرانشی $\frac{GM_s}{R^2}$ در یک مدار دایره‌ای خواهیم داشت

$$\frac{v^2}{R} = \frac{GM_s}{R^2}$$

که در آن M_s جرم خورشید است. با قرار دادن مقادیر عددی سرعت مداری مشتری را به دست می‌آوریم

$$v = \sqrt{\frac{GM_s}{R}} \approx 1,306 \times 10^4 \text{ m/s}$$

روش دوم

چون حرکت مشتری، دایره‌ای و یکنواخت است، پس

$$v = \omega R = \frac{2\pi R}{y_j}$$

که در آن y_j دوره گردش مشتری به دور خورشید است.

(ب) با توجه به شرط تعادل، نیروهای گرانشی وارد بر کاوشگر باید برابر باشند، یعنی

$$\frac{GMm}{\rho^2} = \frac{GM_s m}{(R - \rho)^2} \quad (2)$$

(که در آن ρ فاصله کاشگر از مشتری و M جرم مشتری است)، در نتیجه

$$\sqrt{M}(R - \rho) = \rho\sqrt{M_s} \quad (3)$$

$$\rho = \frac{\sqrt{M}}{\sqrt{M_s} + \sqrt{M}} R = 0,02997R = 2,333 \times 10^{10} \text{ m} \quad (4)$$

یعنی در فاصله $23,3$ میلیون کیلومتر از مشتری نیروهای گرانشی برابر می‌شوند (حدود 334 برابر شعاع مشتری).

(پ) با استفاده از تبدیل گالیلو به راحتی می‌توانیم مؤلفه‌های سرعت کاشگر را در چارچوب مرجع مشتری به دست آوریم

$$\begin{cases} v'_x = v \\ v'_y = v_0 \end{cases}$$

از طرفی در چارچوب مرجع مشتری، زاویه جهت حرکت کاشگر نسبت به محور x برابر است با

$$\theta_0 = \arctan \frac{v_0}{v}$$

و سرعت آن برابر است با $v' = \sqrt{v_0^2 + v^2}$ ، همچنین توجه کنید که

$$\sin \theta_0 = \frac{v_0}{\sqrt{v_0^2 + v^2}} = \frac{v_0}{v'} \quad \text{و} \quad \cos \theta_0 = \frac{v}{\sqrt{v_0^2 + v^2}} = \frac{v}{v'}$$

با توجه به مقادیر داده شده خواهیم داشت

$$\theta_0 = 0,653 \text{ rad} \quad \text{و} \quad v' = 1,65 \times 10^4 \text{ m/s}$$

(ت) فرض می‌کنیم فاصله کاشگر از مشتری زیاد است اما نامتناهی نیست، در این صورت انرژی مکانیکی کل در چارچوب مرجع مشتری برابر است با

$$E \approx \frac{1}{2} m v'^2 \quad (5)$$

که مقدار عددی آن برابر است با $E = 112 \text{ GJ}$.

(ث) با توجه به معادله (۱) هنگامی که فاصله شعاعی به بی نهایت میل کند، مقدار داخل پرانتز برابر صفر می‌شود. در این صورت

$$1 + \left(\sqrt{1 + \frac{2E v'^2 b^2}{G^2 M^2 m}} \right) \cos \theta = 0 \quad (6)$$

$$\cos \theta = -\frac{1}{\sqrt{1 + 2Ev'{}^2 b^2 / G^2 M^2 m}} \quad (۷)$$

از طرفی باید توجه کنیم که فاصله شعاعی نمی‌تواند منفی شود، در این صورت داریم

$$1 + \left(\sqrt{1 + \frac{2Ev'{}^2 b^2}{G^2 M^2 m}} \right) \cos \theta \geq 0 \quad (۸)$$

$$\cos \theta \geq -\frac{1}{\sqrt{1 + 2Ev'{}^2 b^2 / G^2 M^2 m}} \quad (۹)$$

در حالت‌های حدی، مقادیر θ در معادله (۹) برابر است با

$$\begin{aligned} \theta_{\pm} &= \pm \arccos \left[- \left(1 + \frac{2Ev'{}^2 b^2}{G^2 M^2 m} \right)^{-1/2} \right] \\ &= \pm \left[\pi - \arccos \frac{1}{\sqrt{1 + 2Ev'{}^2 b^2 / G^2 M^2 m}} \right] \quad (۱۰) \end{aligned}$$

در نتیجه زاویه $\Delta\theta$ بین مجانب‌های هذلولی برابر است با

$$\begin{aligned} \Delta\theta &= (\theta_+ - \theta_-) - \pi \\ &= \pi - 2 \arccos \frac{1}{\sqrt{1 + 2Ev'{}^2 b^2 / G^2 M^2 m}} \quad (۱۱) \end{aligned}$$

$$= \pi - 2 \arccos \frac{1}{\sqrt{1 + v'{}^2 b^2 / G^2 M^2}} \quad (۱۲)$$

برای به دست آوردن رابطه (۱۲) از رابطه (۵) استفاده کرده‌ایم.

ج) انحراف زاویه‌ای برحسب پارامتر برخورد به‌طور یکنواخت کاهش می‌یابد، در نتیجه هنگامی که انحراف زاویه‌ای بیشینه است، پارامتر برخورد کمینه است. با توجه به معادله (۱) کمترین فاصله بین کاشگر مشتری وقتی است که $\theta = 0^\circ$ باشد، در این صورت داریم

$$r_{\min} = \frac{v'{}^2 b^2}{GM} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{v'{}^2 b^2}{G^2 M^2}} \right)^{-1} \quad (۱۳)$$

با حل این معادله خواهیم داشت

$$b = \sqrt{r_{\min}^2 + \frac{2GM}{v'^2} r_{\min}} \quad (14)$$

توجه کنید که می‌توانیم این نتیجه را با توجه به پایستگی تکانه زاویه‌ای نیز به دست آوریم، بنابراین خواهیم داشت

$$L = mv'b = mv'_{\min} r_{\min} \quad (15)$$

همچنین با توجه به پایستگی انرژی مکانیکی داریم

$$E = \frac{1}{2}mv'^2 = \frac{1}{2}mv'_{\min}^2 - \frac{GMm}{r_{\min}} \quad (16)$$

با مقایسه معادله‌های (۱۵) و (۱۶) دوباره به معادله (۱۴) می‌رسیم. با توجه به اینکه فاصله کاوشگر از مرکز مشتری نمی‌تواند کمتر از سه برابر شعاع مشتری باشد، با توجه به معادله (۱۴) خواهیم داشت

$$r_{\min} = 3R_B \quad (R_B \text{ شعاع سیاره مشتری})$$

$$b_{\min} = \sqrt{9R_B^2 + \frac{6GM}{v'^2} R_B} \quad (17)$$

با توجه به این معادله، بیشینه مقدار ممکن برای انحراف زاویه‌ای برابر است با

$$\begin{aligned} \Delta\theta_{\max} &= \pi - 2 \arccos \frac{1}{\sqrt{1 + v'^4 b_{\min}^2 / G^2 M^2}} \\ &= \pi - 2 \arccos \frac{1}{\sqrt{1 + v'^4 / G^2 M^2 \left(9R_B^2 + \frac{6GM}{v'^2} R_B \right)}} \end{aligned} \quad (18)$$

با قرار دادن مقادیر داده شده، خواهیم داشت

$$b_{\min} = 4.9^\circ \times 10^8 \text{ m} \approx 7.0 R_B$$

$$\Delta\theta_{\max} = 1.526 \text{ rad} \approx 87.4^\circ$$

چ) اگر کاوشگر در پشت مشتری عبور کند، جهت نهایی حرکت نسبت به محور x در چارچوب مرجع مشتری برابر است با مجموع زاویه اولیه و انحراف زاویه‌ای، یعنی

$$\theta_0 + \Delta\theta$$

مؤلفه‌های سرعت نهایی کاوشگر در چارچوب مرجع مشتری برابرند با

$$\begin{cases} v'_x = v' \cos(\theta_0 + \Delta\theta) \\ v'_y = v' \sin(\theta_0 + \Delta\theta) \end{cases}$$

و در چارچوب مرجع خورشید برابرند با

$$\begin{cases} v''_x = v' \cos(\theta_0 + \Delta\theta) - v \\ v''_y = v' \sin(\theta_0 + \Delta\theta) \end{cases}$$

در نتیجه سرعت نهایی کاوشگر در چارچوب مرجع خورشید برابر است با

$$\begin{aligned} v'' &= \sqrt{(v' \cos(\theta_0 + \Delta\theta) - v)^2 + (v' \sin(\theta_0 + \Delta\theta))^2} \\ &= \sqrt{v'^2 + 2v^2 - 2v'v \cos(\theta_0 + \Delta\theta)} \\ &= \sqrt{v'^2 + 2v^2 - 2v'v(\cos \theta_0 \cos \Delta\theta - \sin \theta_0 \sin \Delta\theta)} \\ &= \sqrt{v'^2 + 2v^2 - 2v(v \cos \Delta\theta - v_0 \sin \Delta\theta)} \\ &= \sqrt{v'(v' + 2v \sin \Delta\theta) + 2v^2(1 - \cos \Delta\theta)} \end{aligned}$$

(ح) با استفاده از مقدار بیشینه انحراف زاویه‌ای، مقدار عددی سرعت نهایی کاوشگر $v'' = 2,62 \times 10^4 \text{ m/s}$ است.

سی و یکمین المپیاد بین المللی فیزیک

لستر-انگلستان*

مسابقه نظری- زمان ۵ ساعت

۲۰۰۰/۱۳۷۹

مسئله ۱

(این مسئله شامل ۵ قسمت مستقل از هم است.)

الف) طنابی بلند و کشسان از یک طرف به شخصی که به کمک آن می‌پرد و از طرف دیگر به پلی مرتفع وصل شده است. شخص از حال سکون و از بالای پل به طرف رودخانه‌ای که از زیر پل می‌گذرد، می‌پرد؛ اما به آب نمی‌رسد. جرم این شخص m ، طول طناب در حالت عادی L ، ثابت نیروی کشسانی طناب k (نیروی لازم برای کشش طناب به‌ازای واحد طول) و شدت میدان گرانشی g است.

همچنین:

- شخصی که می‌پرد را می‌توان ذره‌ای به جرم m که به انتهای طناب وصل است در نظر گرفت،
- جرم طناب در مقایسه با جرم m ناچیز است،
- طناب از قانون هوک پیروی می‌کند؛
- مقاومت هوا را هنگام سقوط شخص می‌توان نادیده گرفت.

پاسخ هر یک از قسمت‌های زیر را به دست آورید

(i) فاصله v شخص قبل از آنکه برای اولین بار به طور لحظه‌ای ساکن شود،

(ii) بیشینه سرعت v که شخص در حین سقوط به آن می‌رسد،

(iii) زمان t سقوط قبل از آنکه شخص برای اولین بار به حال سکون برسد.

(ب) یک ماشین گرمایی بین دو جسم مشابه با دمای متفاوت T_A و T_B ($T_A > T_B$) کار می‌کند. جرم هر جسم m و ظرفیت گرمایی ویژه هر کدام C است. فرض کنید فشار هر دو جسم ثابت می‌ماند و همچنین دستخوش هیچ تغییر فازی نمی‌شوند.

(i) اگر ماشین گرمایی، بیشینه مقدار کار مکانیکی را که به لحاظ نظری امکان‌پذیر است از دستگاه

بگیرد، رابطه‌ای برای دمای نهایی T که هر دو جسم به آن می‌رسند، پیدا کنید.

(ii) بیشینه کار موجود را حساب کنید.

ماشین گرمایی بین دو منبع آب که حجم هر کدام 2.75 m^3 است کار می‌کند. اگر دمای یک

منبع 35°K و دمای منبع دیگر 30°K باشد،

(iii) بیشینه انرژی مکانیکی را که می‌توان به دست آورد حساب کنید.

$$\text{ظرفیت گرمایی ویژه آب} = 4.19 \times 10^3 \text{ Jkg}^{-1} \text{K}^{-1}$$

$$\text{چگالی آب} = 1000 \times 10^3 \text{ kgm}^{-3}$$

(پ) فرض می‌شود که هنگام شکل‌گیری زمین ایزوتوپ‌های ^{238}U و ^{235}U موجود بوده‌اند ولی

محصولات واپاشی آن‌ها وجود نداشته است. از واپاشی‌های ^{238}U و ^{235}U می‌توان برای تعیین

سن زمین، T ، بهره گرفت.

(i) نیمه عمر واپاشی ^{238}U برابر 4.75×10^9 سال است. اما، محصولات واپاشی آن نیمه عمر

کوتاهتری دارند؛ به طوری که در تقریب اول می‌توان وجود آن‌ها را نادیده گرفت. سری واپاشی

با تولید ایزوتوپ پایدار ^{206}Pb متوقف می‌شود.

تعداد اتم‌های ^{206}Pb را که بر اثر واپاشی پرتوزا در زمان t تولید می‌شود با ^{206}Pb نمایش دهید

و آن را برحسب تعداد اتم‌های موجود ^{238}U یعنی ^{238}N و نیمه عمر واپاشی ^{238}U به دست

آورید (بهتر است برحسب یکای 10^9 سال کار کنید).

(ii) همین‌طور، ^{235}U با نیمه عمر 0.71×10^9 سال در یک سری با محصولات با عمر کوتاهتر

به ایزوتوپ پایدار ^{207}Pb می‌انجامد. معادله‌ای برای ^{207}N برحسب ^{235}N و نیمه عمر ^{235}U

به دست آورید.

(iii) می‌خواهیم با یک طیف‌سنج جرمی، سنگ‌های معدنی اورانیوم مخلوط با سنگ معدن سرب

را جدا کنیم. تراکم نسبی سه ایزوتوپ سرب ^{204}Pb ، ^{206}Pb و ^{207}Pb اندازه‌گیری شده

است و نسبت تعداد اتم‌ها به ترتیب $1/10^6$ ، $29/6$ ، $22/6$ به دست آمده است. از ایزوتوپ ^{204}Pb به عنوان مرجع استفاده شده است و منشأ پرتوزا ندارد. تجزیه یک سنگ معدن خالص نسبت‌های $1/10^6$ ، $17/9$ ، $15/5$ را به دست می‌دهد.

اگر نسبت ^{238}N ، ^{235}N برابر $1/137$ باشد، معادله‌ای برای T به دست آورید.

(iv) فرض کنید T از نیمه عمرهای هر دو ایزوتوپ اورانیوم خیلی بزرگ‌تر است. یک مقدار تقریبی برای T به دست آورید.

(v) بدیهی است که این مقدار تقریبی از نیمه عمر بزرگ‌تر بسیار طولانی‌تر است، اما می‌توان با استفاده از آن، مقدار بسیار دقیق‌تری برای T به دست آورد.

با توجه به این، یا طریق دیگر، سن دقیق زمین را با خطای 2% به دست آورید.

(ت) بار Q به صورت یکنواخت روی سطح داخلی یک حفره کروی به شعاع R توزیع شده است.

(i) رابطه‌ای برای شدت میدان الکتریکی در فاصله r از مرکز کره برای دو حالت $r \leq R$ و $r > R$ به دست آورید.

(ii) رابطه‌ای برای انرژی الکتریکی کل ناشی از این توزیع بار به دست آورید.

(ث) یک حلقه دایره‌ای از سیم مسی حول قطر عمودی در یک نقطه داخل میدان مغناطیسی زمین می‌چرخد. چگالی شار مغناطیسی ناشی از میدان مغناطیسی زمین در این نقطه برابر $44/5 \mu\text{T}$ است و جهت خط‌های میدان با افق زاویه 64° می‌سازد. اگر چگالی مس 10^3kgm^{-3} و مقاومت ویژه آن $10^{-8} \Omega\text{m}$ باشد، چقدر طول می‌کشد تا سرعت زاویه‌ای حلقه نصف شود؟ این زمان خیلی بیشتر از زمان یک دور چرخش حلقه است. هر چند اثر خود-القایی را نمی‌توان نادیده گرفت ولی در حل این مسئله از آن چشمپوشی کنید. همچنین اصطکاک هوا و اصطکاک عوامل نگهدارنده حلقه را نادیده بگیرید.

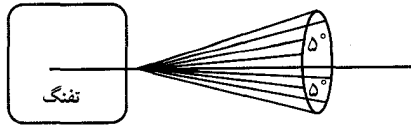
مسئله ۲

(الف) یک لامپ پرتوکاتی 1 متشکل از یک تفنگ و یک پرده است که در یک میدان مغناطیسی ثابت و یکنواخت به اندازه B قرار دارد، به طوری که میدان مغناطیسی موازی باریکه الکترونی است که از تفنگ خارج می‌شود (شکل ۸۵).



شکل ۸۵

باریکه الکترون از آند تفنگ الکترونی و از روی محور آن با واگرایی 5° نسبت به محور خارج می‌شود (شکل ۸۶). به‌طور کلی یک نقطه پخشیده روی پرده به‌وجود می‌آید، اما برای بعضی مقادیر میدان مغناطیسی یک نقطه کانونی شده واضح به‌دست می‌آید.

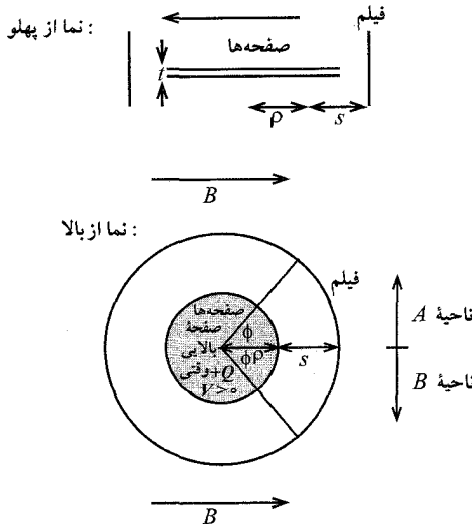


شکل ۸۶

با در نظر گرفتن حرکت الکترونی که در ابتدا با زاویه β ($0^\circ \leq \beta \leq 5^\circ$) نسبت به محور از تفنگ الکترونی خارج می‌شود، و با توجه به مؤلفه‌های موازی و عمود بر محور، رابطه‌ای برای نسبت بار به جرم الکترون (e/m) بر حسب کمیت‌های زیر به‌دست آید:

- کمترین میدان مغناطیسی برای آنکه یک نقطه کانونی شده واضح روی پرده تشکیل شود،
- اختلاف پتانسیل شتاب‌دهنده V که به دو سر تفنگ الکترونی اعمال می‌شود (توجه کنید $V < 2\text{ kV}$ است)،
- فاصله D ، بین آند و پرده.

(ب) روش دیگر اندازه‌گیری نسبت بار به جرم الکترون به قرار زیر است. شکل ۸۷ ترتیب چگونگی این روش را از پهلو و از بالا نشان می‌دهد، همچنین جهت میدان \vec{B} نیز مشخص شده است.



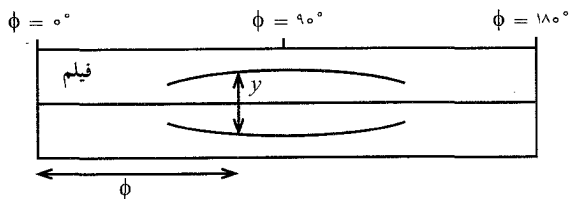
شکل ۸۷

در این میدان مغناطیسی یکنواخت B ، دو صفحه دایره‌ای برنجی به شعاع ρ و فاصله ناچیز t از یکدیگر قرار دارند و در دو سر آن‌ها اختلاف پتانسیل V وجود دارد. صفحه‌ها موازی و هم‌محورند به طوری که محور آن‌ها بر میدان مغناطیسی عمود است. یک فیلم عکاسی به صورت استوانه‌ای به شعاع $\rho + s$ و هم‌محور با صفحه‌ها مطابق شکل ۸۷ قرار گرفته است. به عبارت دیگر فاصله شعاعی فیلم از لبه صفحه‌ها برابر s است. کل دستگاه در خلأ قرار دارد. توجه کنید که t خیلی کوچک‌تر از s و ρ است. یک چشمه نقطه‌ای از ذره‌های β در بین مرکزهای دو صفحه قرار دارد و ذره‌های β را به‌طور یکنواخت در همه جهت‌ها و با گستره‌ای از سرعت‌ها گسیل می‌دهد. و یک قطعه فیلم در سه مورد زیر، این ذره‌ها را آشکار می‌کند:

- نخست $B = 0$ و $V = 0$.
- دوم با $B = B_0$ و $V = V_0$.
- سوم با $B = -B_0$ و $V = -V_0$.

که V_0 و B_0 مقادیر ثابت مثبت‌اند. توجه کنید که هرگاه $V > 0$ باشد صفحه بالایی دارای بار مثبت و هرگاه $V < 0$ باشد بار این صفحه منفی خواهد شد. همچنین هرگاه جهت میدان B مطابق شکل ۸۷ باشد $B > 0$ است (و در جهت مخالف $B < 0$ است). برای این قسمت می‌توانید فرض کنید فاصله دو صفحه قابل چشم‌پوشی است.

در شکل ۸۷ دو ناحیه A و B روی فیلم نشان داده شده است. شکل ۸۸ یکی از این ناحیه‌ها را پس از پرتودهی و ظهور فیلم نشان می‌دهد. این ناحیه را مشخص کنید. جواب خودتان را با نشان دادن جهت نیروهای وارد بر الکترون توجیه کنید.



شکل ۸۸

(پ) بعد از پرتودهی و ظهور فیلم، یک طرح کلی از فیلم در شکل ۸۸ آمده است. فاصله دو تا از دورترین رد‌ها با یک میکروسکوپ اندازه‌گیری شده و در شکل ۸۸ این فاصله (y) برای یک زاویه مشخص نشان داده شده است. در جدول زیر نتایج حاصل از اندازه‌گیری آمده است. زاویه ϕ که در شکل ۸۷ مشخص شده، زاویه بین جهت میدان مغناطیسی و خطی است که مرکز صفحه‌ها را به یک نقطه روی فیلم وصل می‌کند.

۲۳	۳۰	۴۰	۵۰	۶۰	۹۰	ϕ	زاویه با میدان مغناطیسی (درجه)	
	۳٫۳	۶٫۴	۹٫۷	۱۲٫۷	۱۷٫۴	y	فاصله (mm)	
							پایان رد	

مقادیر عددی پارامترهای دستگاه در زیر داده شده است

$$B_0 = 6,91 \text{ mT} , V_0 = 580 \text{ V}$$

$$t = 0,80 \text{ mm} , s = 41,0 \text{ mm}$$

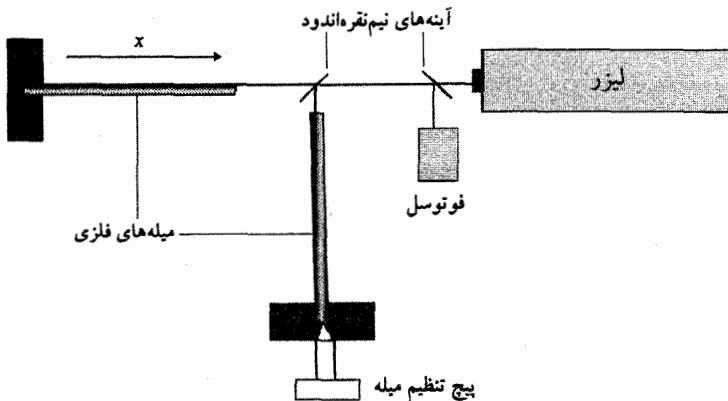
سرعت نور در خلأ را $3,00 \times 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ و جرم الکترون را $9,11 \times 10^{-31} \text{ kg}$ بگیرید. بیشینه انرژی جنبشی مشاهده شده برای ذره‌های β را به دست آورید. پاسخ عددی خود را بر حسب eV بیان کنید.

(ت) با استفاده از داده‌های به دست آمده در قسمت (پ)، مقداری برای نسبت بار به جرم الکترون به دست آورید. این کار را با رسم نموداری مناسب انجام دهید. توجه کنید به دلیل خطاهای سیستماتیک در مشاهده جوابی که به دست آورده‌اید می‌تواند با جواب پذیرفته شده سازگار نباشد.

مسئله ۳ موج‌های گرانشی و تأثیر گرانی بر نور^۱

(الف) این بخش به مشکلات آشکارسازی موج‌های گرانشی تولید شده در رویدادهای نجومی می‌پردازد. به عنوان مثال انفجار یک ابرنواختر دور دست می‌تواند افت و خیزهایی حدود $10^{-19} \text{ Nkg}^{-1}$ در شدت میدان گرانشی در سطح زمین ایجاد کند.

یک مدل آشکارساز موج‌های گرانشی (شکل ۸۹ را ببینید) شامل دو میله فلزی هر کدام به طول ۱ m است که به صورت عمود بر هم نگه داشته می‌شوند. انتهای یکی از میله‌ها از نظر اپتیکی صیقلی و صاف است و طرف دیگر آن به صورت صلب محکم شده است. موقعیت میله دیگر به گونه‌ای تنظیم شده است که بتواند ضعیف‌ترین علائم گسیل شده از سلول فوتوالکتریک را دریافت کند (شکل ۸۹).



شکل ۸۹

یک ابزار پیزوالکتریک به هر کدام از میله‌ها ضرب‌های شدید در مدت کوتاهی وارد می‌کند. در نتیجه انتهای آزاد میله‌ها با یک جابه‌جایی طولی Δx_t نوسان می‌کند، به طوری که داریم

$$\Delta x_t = ae^{-\mu t} \cos(\omega t + \phi)$$

a ، μ ، ω و ϕ مقادیر ثابتی هستند.

- (i) اگر دامنه حرکت در بازه 5° ثانیه به اندازه 2° درصد کاهش یابد، مقدار μ را تعیین کنید.
- (ii) اگر میله‌ها متشکل از آلومینیوم با چگالی $\rho = 2700 \text{ kgm}^{-3}$ و مدول یانگ $E = 71 \times 10^{10} \text{ Pa}$ باشند، مقدار ω را به دست آورید.
- (iii) ساختن دو میله با طول دقیقاً یکسان ناممکن است، در نتیجه علائم سلول فوتوالکتریک دارای بسامد زنش $5 \times 10^{-3} \text{ Hz}$ است. اختلاف طول دو میله چقدر است؟
- (iv) برای میله‌ای به طول l ، یک رابطه جبری برای تغییر طول Δl ناشی از تغییر شدت میدان گرانشی Δg ، برحسب l و دیگر ثابت‌های وابسته به جنس میله به دست آورید.
- (v) نور تولید شده توسط لیزر، تکفام و با طول موج 656 nm است. اگر کمترین جابه‌جایی فریز که می‌تواند آشکار شود برابر $\frac{1}{10000}$ طول موج لیزر باشد، کمترین مقدار l باید چقدر باشد تا بتواند تغییرات g از مرتبه $10^{-19} \text{ Nkg}^{-1}$ را آشکار کند؟
- نوعی آشکارساز غیرجهتی موج‌های گرانشی شامل کره‌ای از آلیاژ مس به جرم 1168 kg است. این کره در خلأ از مجموعه کاهنده ارتعاش آویزان است. برای آشکارسازی تغییرات ابعاد کره، مبدل‌هایی شامل مدارهای کوک شده، به آن وصل است. اما، مبدل‌ها قادرند همه ارتعاش‌های غیرواقعی مثلاً ناشی از اثرهای دما و نوفه (بر اثر افزایش الکتریکی^۱) را گردآوری کنند.
- (vi) برای کاهش ارتعاش‌های ناشی از اثرهای دما، دمای کره در یک فرایند خنک‌سازی به 100 mK رسانده می‌شود. دامنه ارتعاش‌های اتمی بر اثر خنک‌سازی دستگاه از 300 K با چه ضریبی کاهش می‌یابد؟
- (vii) در ابتدا با استفاده از نیتروژن مایع و هلیوم مایع کره تا دمای 4.2 K سرد می‌شود. سپس در فرایند خنک‌سازی^۲ به دمای 100 mK می‌رسد، به طوری که انرژی با آهنگ متوسط 1 mW از این دستگاه خارج می‌شود. ظرفیت گرمایی ویژه آلیاژ مس، C ، در دماهای کم با T^3 تناسب مستقیم دارد. زمان لازم را برای اینکه دمای دستگاه از 4.2 K به 100 mK برسد برآورد کنید. (در دمای 4.2 K) $C = 0.72 \text{ Jkg}^{-1} \text{ K}^{-1}$ است.
- (ب) این بخش به تأثیر میدان گرانشی بر انتشار نور در فضا می‌پردازد.

(i) فوتونی که از سطح خورشید (به جرم M و شعاع R) گسیل می‌شود انتقال به سرخ می‌یابد. با فرض یک جرم سکون معادل برای انرژی فوتون، و با استفاده از نظریه گرانشی نیوتون نشان دهید که بسامد مؤثر (یا اندازه‌گیری شده) فوتون در بی‌نهایت با ضریب $(1 - GM/Rc^2)$ کاهش می‌یابد (انتقال به سرخ می‌یابد).

(ii) کاهش بسامد فوتون با افزایش دوره آن هم‌ارز است، به طوری که اگر فوتون را به عنوان ساعت استاندارد به کار ببریم، این موضوع باعث اتساع زمان می‌شود. به علاوه، می‌توان نشان داد یک اتساع زمان همواره با انقباضی در واحد طول با همان ضریب همراه است. اکنون می‌خواهیم این اثر را بر انتشار نور در حوالی خورشید بررسی کنیم. نخست ضریب شکست مؤثر n_r را در نقطه‌ای به فاصله r از مرکز خورشید به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$n_r = c/c'_r$$

در این رابطه c سرعت نور اندازه‌گیری شده در دستگاه مختصاتی است که از تأثیر میدان گرانشی خورشید به دور است ($r \rightarrow \infty$)، و c'_r سرعت نور اندازه‌گیری شده در دستگاه مختصاتی است که در فاصله r از مرکز خورشید قرار دارد. نشان دهید n_r برای مقدار GM/rc^2 کوچک از رابطه تقریبی زیر به دست می‌آید

$$n_r = 1 + \alpha GM/rc^2$$

که α یک مقدار ثابت است که باید آن را تعیین کنید.

(iii) با استفاده از رابطه‌ای که برای n_r در قسمت قبل به دست آوردید، جابه‌جایی یک پرتو نور از خط راست را هنگامی که از کنار خورشید عبور می‌کند برحسب رادیان به دست آورید. داده‌های مورد نیاز عبارت‌اند از

$$G = 6.67 \times 10^{-11} \text{ Nm}^2 \text{ kg}^{-2} \quad \text{ثابت گرانش عمومی}$$

$$M = 1.99 \times 10^{30} \text{ kg} \quad \text{جرم خورشید}$$

$$R = 6.95 \times 10^8 \text{ m} \quad \text{شعاع خورشید}$$

$$c = 3.00 \times 10^8 \text{ ms}^{-1} \quad \text{سرعت نور}$$

همچنین در صورت نیاز می‌توانید از رابطه انتگرالی زیر استفاده کنید

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2 + a^2)^{3/2}} = \frac{2}{a^2}$$

پاسخ تشریحی مسئله‌ها

حل مسئله ۱

(الف)

(i) هنگامی شخصی که پریده است، به حال سکون می‌رسد که داشته باشیم

انرژی ذخیره شده در طناب = کاهش انرژی پتانسیل گرانشی

$$mgy = \frac{1}{2}k(y - L)^2$$

$$ky^2 - 2y(kL + mg) + kL^2 = 0$$

با حل این معادله داریم

$$y = \frac{2(kL + mg) \pm \sqrt{4(kL + mg)^2 - 4k^2L^2}}{2k}$$

$$= \frac{kL + mg \pm \sqrt{2mgkL + m^2g^2}}{k}$$

با توجه به شرط مسئله، ریشه مثبت قابل قبول است.

(ii) سرعت هنگامی بیشینه است که نیروها متوازن و شتاب صفر باشد، یعنی وقتی که $mg = kx$

انرژی کشسانی طناب - کاهش انرژی پتانسیل = انرژی جنبشی

$$\frac{1}{2}mv^2 = mg(L + x) - \frac{1}{2}kx^2$$

$$x = \frac{mg}{k}$$

$$v^2 = 2g\left(L + \frac{mg}{k}\right) - \frac{mg^2}{k}$$

$$v = \sqrt{2gL + mg^2/k}$$

(iii) زمان توقف کش آمدن طناب + زمان سقوط آزاد = زمان رسیدن به حال سکون

$$L = \frac{1}{2}gt_f^2$$

ارتفاع سقوط آزاد

در نتیجه زمان سقوط آزاد برابر است با

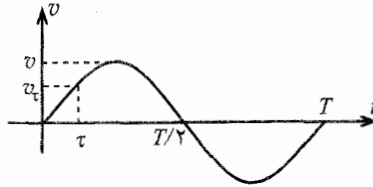
$$t_f = \sqrt{2L/g}$$

حرکت نوسانی ساده با سرعت سقوط آزاد زیر شروع می‌شود

$$v_{\tau} = gt_{\tau} = \sqrt{2gL}$$

$$T = 2\pi\sqrt{m/k} \text{ : دوره حرکت نوسانی ساده}$$

نمودار شکل ۹۰ یک چرخه کامل حرکت نوسانی ساده را نشان می‌دهد.



شکل ۹۰

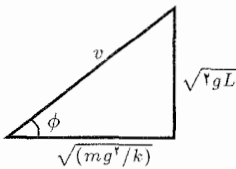
حرکت نوسانی شخصی که پریده در زمان τ شروع می‌شود و برابر است با

$$\tau = \frac{1}{\omega} \sin^{-1} \frac{v_{\tau}}{v} = \frac{1}{\omega} \sin^{-1} \frac{\sqrt{2gL}}{v}$$

زمانی که او در نیم دوره اول به حال سکون می‌رسد برابر است با

$$t = t_{\tau} + (T/2 - \tau) = \sqrt{\frac{2L}{g}} + \pi\sqrt{\frac{m}{k}} - \frac{1}{\omega} \sin^{-1} \frac{\sqrt{2gL}}{v}$$

با توجه به شکل ۹۱ داریم



شکل ۹۱

$$t = \sqrt{\frac{2L}{g}} + \pi\sqrt{\frac{m}{k}} - \frac{1}{\omega} \sin^{-1} \frac{\sqrt{2gL}}{\sqrt{2gL + mg^2/k}}$$

$$= \sqrt{\frac{2L}{g}} + \sqrt{\frac{m}{k}} \left\{ \pi - \sin^{-1} \frac{\sqrt{2gL}}{\sqrt{2gL + mg^2/k}} \right\}$$

یا می‌توان نوشت

$$t = \sqrt{\frac{2L}{g}} + \sqrt{\frac{m}{k}} \left\{ \frac{\pi}{2} + \cos^{-1} \frac{\sqrt{2gL}}{\sqrt{2gL + mg^2/k}} \right\}$$

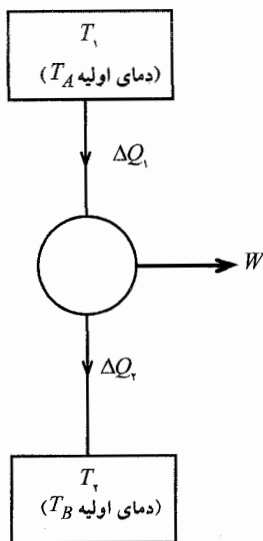
$$= \sqrt{\frac{2L}{g}} + \sqrt{\frac{m}{k}} \tan^{-1} \left\{ -\sqrt{\frac{2kL}{mg}} \right\}$$

(ب) ماشین گرمایی

(i) در محاسبه کار موجود فرض می‌کنیم اتلاف انرژی (از طریق اصطکاک و غیره) ناچیز است.

با توجه به شکل ۹۲ انرژی گرفته شده از جسم A برابر است با

$$\Delta Q_1 = -mC\Delta T_1$$



شکل ۹۲

و انرژی داده شده به جسم B برابر است با

$$\Delta Q_2 = mC\Delta T_2$$

برای بیشترین مقدار انرژی مکانیکی ماشین کارنورا در نظر می‌گیریم. بنابراین در حین کار آن

قانون دوم داریم

$$\frac{\Delta Q_1}{T_1} = \frac{\Delta Q_2}{T_2}$$

یا

$$\frac{-mC\Delta T_1}{T_1} = \frac{mC\Delta T_2}{T_2}$$

اگر دمای نهایی را T_0 فرض کنیم داریم

$$-mC \int_{T_A}^{T_0} \frac{dT_1}{T_1} = mC \int_{T_B}^{T_0} \frac{dT_2}{T_2}$$

$$\ln \frac{T_A}{T_0} = \ln \frac{T_0}{T_B}, \quad T_0^2 = T_A T_B \Rightarrow T_0 = \sqrt{T_A T_B}$$

(ii)

$$Q_1 = -mC \int_{T_A}^{T_0} dT_1 = mC(T_A - T_0)$$

$$Q_2 = mC \int_{T_B}^{T_0} dT_2 = mC(T_0 - T_B)$$

$$\begin{aligned} W &= Q_1 - Q_2 \\ &= mC(T_A - T_0 - T_0 + T_B) \\ &= mC(T_A + T_B - 2T_0) \\ &= mC(T_A + T_B - 2\sqrt{T_A T_B}) \end{aligned}$$

یا

$$W = mC(\sqrt{T_A} - \sqrt{T_B})^2$$

(iii) مثال عددی

چگالی \times حجم = جرم

$$\begin{aligned} W &= 2,50 \times 1,00 \times 10^3 \times 4,19 \times 10^3 \times (\sqrt{350} - \sqrt{300})^2 \\ &= 20 \times 10^6 \text{ J} = 20 \text{ MJ} \end{aligned}$$

(ب) یرتوزایی و سن زمین

$$N = N_0 e^{-\lambda t} \quad (N_0 \text{ تعداد اولیه:}) \quad (\text{i})$$

$$n = N_0 (1 - e^{-\lambda t})$$

یا

$$n = N e^{\lambda t} (1 - e^{-\lambda t}) = N(e^{\lambda t} - 1)$$

بنابراین داریم

$$n = N(2^{t/\tau} - 1)$$

که در آن τ نیمه عمر است.

$$\lambda = \frac{\ln 2}{T} = \frac{0,6931}{T}$$

$$n = N(e^{0,6931t} - 1), \quad 206 n = 238 N(2^{t/4,50} - 1)$$

یا

$${}^{206}_{\text{n}} = 238N(e^{0.1540t} - 1)$$

که در آن واحد t برابر 10^9 سال است.

(ii)

$${}^{207}_{\text{n}} = 235N(2^{t/0.710} - 1)$$

یا

$${}^{207}_{\text{n}} = 235N(e^{0.9762t} - 1)$$

(iii) در مخلوط اورانیوم یعنی، حاوی سرب دارای منشأ طبیعی و پرتوزایی داریم

$$204, 206, 207 \rightarrow 1,000, 29,6, 22,6$$

$$\text{سرب خالص (بدون پرتوزایی)} \rightarrow 1,000, 17,9, 15,5$$

در نتیجه برای سرب تولید شده در فرایندهای پرتوزا با عملیات تفریق داریم:

۲
۰
۶
:
۲
۰
۷
۱
۱
.
۷
:
۷
۰
۱

با تقسیم رابطه‌های به دست آمده در قسمت (i) و (ii) داریم

$$\frac{{}^{206}_{\text{n}}}{{}^{207}_{\text{n}}} = \frac{238N}{235N} \left\{ \frac{2^{t/4,50} - 1}{2^{t/0.701} - 1} \right\}$$

یا

$$\frac{{}^{206}_{\text{n}}}{{}^{207}_{\text{n}}} = \frac{238N}{235N} \left\{ \frac{e^{0.1540t} - 1}{e^{0.9762t} - 1} \right\}$$

$$\frac{11,7}{7,1} = 137 \left\{ \frac{2^{T/4,50} - 1}{2^{T/0.710} - 1} \right\}$$

یا

$$\frac{11,7}{7,1} = 137 \left\{ \frac{e^{0,1540T} - 1}{e^{0,9762T} - 1} \right\}$$

$$0,0120 \left\{ 2^{T/0,710} - 1 \right\} = \left\{ 2^{T/4,5} - 1 \right\}$$

یا

$$0,01210 \left\{ e^{0,9762T} - 1 \right\} = \left\{ e^{0,1540T} - 1 \right\}$$

(iv) اگر فرض کنید $T \gg 4,50 \times 10^9$ و از عدد یک در هر دو رابطه صرف نظر کنیم، داریم

$$0,0120 \left\{ 2^{T/0,710} \right\} = \left\{ 2^{T/4,50} \right\}$$

یا

$$0,0120 \left\{ e^{0,9762T} \right\} = \left\{ e^{0,1540T} \right\}$$

$$0,0120 = \left\{ 2^{T/4,50 - T/0,710} \right\} = 2^{T(0,222 - 1,4084)} = 2^{-1,1862T}$$

$$T = -\frac{\log 0,0120}{\log 2 \times 1,1862} = 5,38$$

$$T = 5,38 \times 10^9 \text{ سال}$$

یا

$$0,0120 = e^{-8222T}$$

$$T = \frac{\ln 0,0120}{-0,8222} = \frac{-4,4228}{-0,8222} = 5,38$$

$$T = 5,38 \times 10^9 \text{ (سال)}$$

(v) زمان به دست آمده برای T از عدد $4,5 \times 10^9$ چندان بزرگتر نیست ولی از عدد

$0,71 \times 10^9$ خیلی بزرگتر است.

می توانیم تقریب بهتری برای T به دست آوریم (آن را $T^* = 5,38 \times 10^9$ سال می نامیم).

$$0,0120 (2^{T^*/0,710} - 1) = 2^{T^*/4,50} - 1$$

$$2^{T^*/0,710} - 1 = \frac{2^{1,1956} - 1}{0,0120} = \frac{2,2904 - 1}{0,0120} = 107,5$$

$$T = 0,710 \frac{\log 107,5}{\log 2} = 4,80$$

با قرار دادن $T^* = ۴,۸ \times ۱۰^۹$ سال داریم

$$۲^{T/۰,۷۱۰} = \frac{۲۱,۰۶۶۸ - ۱}{۰,۰۱۲۰} = \frac{۲,۰۹۴۸ - ۱}{۰,۰۱۲۰} = ۹۱,۲$$

$$T = ۰,۷۱۰ \frac{\log ۹۱,۲}{\log ۲} = ۴,۶۲$$

با تکرار بیشتر، عدد $۴,۵۲$ به دست می‌آید. داریم

$$۰,۰۱۲۰ (e^{۰,۹۷۶۲T} - ۱) = (e^{۰,۱۵۴۰T^*} - ۱)$$

همین‌طور جواب دقیق‌تر برای T به جای $۴,۶ \times ۱۰^۹$ سال، عدد $۴,۵ \times ۱۰^۹$ است.

(ت) بارکروی

$$\rho = \frac{Q}{\frac{4}{3}\pi R^3} \quad (i)$$

در فاصله x از مرکز کره، داخل کره ($x \leq R$) داریم

$$E = \frac{\frac{4}{3}\pi x^3 \rho}{4\pi \epsilon_0 x^2} = \frac{Qx}{4\pi \epsilon_0 R^3}$$

و در فاصله x از مرکز کره، خارج کره ($x > R$) داریم

$$E = \frac{Q}{4\pi \epsilon_0 x^2}$$

(ii) روش اول

چگالی انرژی الکتریکی از رابطه $u_E = \frac{1}{2}\epsilon_0 E^2$ به دست می‌آید. چگالی انرژی الکتریکی

در پوسته‌ای به ضخامت δx و شعاع x (درون کره $x \leq R$) برابر است با

$$u_E = \frac{1}{2}\epsilon_0 E^2 (4\pi x^2 \delta x) = \frac{1}{2} 4\pi \epsilon_0 \frac{Q^2 x^2}{(4\pi \epsilon_0)^2 R^6} x^2 \delta x$$

در نتیجه انرژی الکتریکی درون حجم کروی برابر است با

$$U_{in} = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{(4\pi \epsilon_0) R^6} \int_{x=0}^{x=R} x^4 dx = \frac{1}{40} \frac{Q^2}{\pi \epsilon_0 R}$$

همچنین انرژی الکتریکی خارج کره ($x > R$)، درون یک پوسته کروی عبارت است از

$$\begin{aligned} u_E &= \frac{1}{2}\epsilon_0 E^2 (4\pi x^2) \delta x \\ &= \frac{1}{2} (4\pi \epsilon_0) \frac{Q^2}{(4\pi \epsilon_0)^2 x^4} x^2 \delta x \end{aligned}$$

در نتیجه انرژی در حجم کروی برای $x > R$ برابر است با

$$U_{out} = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{(4\pi\epsilon_0)} \int_{x=R}^{x=\infty} \frac{dx}{x^2} = \frac{1}{8} \frac{Q^2}{\pi\epsilon_0} \frac{1}{R}$$

برای انرژی کل ناشی از این توزیع بار داریم

$$U_T = U_{in} + U_{out} = \frac{1}{40} \frac{Q^2}{\pi\epsilon_0} \frac{1}{R} + \frac{1}{8} \frac{Q^2}{\pi\epsilon_0} \frac{1}{R} = \frac{3}{20} \frac{Q^2}{\pi\epsilon_0} \frac{1}{R}$$

روش دوم

یک پوسته با بار الکتریکی $4\pi x^2 \delta x \rho$ از بی نهایت تا سطح کره‌ای به شعاع x حرکت می‌کند که در آن پتانسیل الکتریکی برابر است با

$$\frac{\frac{4}{3}\pi x^3 \rho}{4\pi\epsilon_0 x} = \frac{x^2 \rho}{3\epsilon_0}$$

در این صورت انرژی پتانسیل الکتریکی عبارت است از

$$\left(\frac{x^2 \rho}{3\epsilon_0}\right) (4\pi x^2 \rho) \delta x$$

انرژی کل تمام کره برابر است با

$$\int_{x=0}^{x=R} \frac{4\pi\rho^2 x^4}{3\epsilon_0} dx = \frac{4}{15} \frac{\pi\rho^2 R^5}{\epsilon_0}$$

از طرفی

$$Q = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho, \quad \rho = \frac{3Q}{4\pi R^3}$$

(iii) انرژی بستگی برابر است با

$$E_{\text{بستگی}} = E_{\text{الکتریکی}} - E_{\text{مستای}}$$

انرژی بستگی، یک انرژی منفی است، در نتیجه

$$-8.768 = E_{\text{الکتریکی}} - 10.98 \text{ MeV (به‌ازای هر نوکلئون)}$$

$$E_{\text{الکتریکی}} = 2.212 \text{ MeV (به‌ازای هر نوکلئون)}$$

شعاع هسته کبالت از رابطه زیر به دست می‌آید

$$R = \frac{3}{20} \frac{Q^2}{\pi \epsilon_0 E_{\text{الکترونیکی}}^{\text{کل}}}$$

$$= \frac{3 \times 27^2 \times (1,60 \times 10^{-19})^2}{20 \times \pi \times 8,85 \times 10^{-12} \times 2,212 \times 10^6 \times 57 \times 1,60 \times 10^{-19}}$$

$$= 5,0 \times 10^{-15} \text{ m}$$

(ث) القای الکترومغناطیسی

روش اول. مساوی قرار دادن انرژی

مؤلفه افقی میدان مغناطیسی B باعث القای نیروی محرکه \mathcal{E} در حلقه می‌شود.

بنابراین داریم

$$B = 44,5 \times 10^{-6} \cos 64^\circ$$

شار مغناطیسی عبوری از حلقه تحت زاویه θ برابر است با

$$\varphi = B\pi a^2 \sin \theta$$

که در آن a شعاع حلقه است.

$$\mathcal{E} = \frac{d\varphi}{dt} = B\pi a^2 \frac{d}{dt}(\sin \omega t)$$

که در آن ω سرعت زاویه‌ای حلقه است.

$$\mathcal{E} = B\pi a^2 \omega \cos \omega t = B\pi a^2 \omega \cos \theta$$

نیروی محرکه متوسط برای بیشتر از یک دور چرخش حلقه برابر است با

$$\mathcal{E}_{\text{rms}} = \frac{B\pi a^2 \omega}{\sqrt{2}}$$

$$\text{میانگین گرم شدن مقاومتی حلقه} = \frac{B^2 \pi^2 a^4 \omega^2}{2R}$$

$$\text{گشتاور لختی حلقه} = \frac{1}{2} m a^2$$

$$\text{انرژی دورانی حلقه} = \frac{1}{2} m a^2 \omega^2$$

که در آن m جرم حلقه است.

توان تولید شده بر اثر تغییر ω برابر است با

$$P = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m a^2 \omega^2 \right) = \frac{1}{2} m a^2 (2\omega) \frac{d\omega}{dt}$$

با برابر قرار دادن میانگین گرم شدن مقاومتی و توان تولید شده، داریم

$$\frac{1}{2} m a^2 \omega \frac{d\omega}{dt} = - \frac{B^2 \pi^2 a^4 \omega^2}{2R}$$

$$\frac{d\omega}{\omega} = - \frac{B^2 \pi^2 a^2}{mR} dt$$

اگر T زمان لازم برای نصف شدن سرعت زاویه‌ای باشد، داریم

$$\int_{\omega}^{\omega/2} \frac{d\omega}{\omega} = - \int_0^T \frac{B^2 \pi^2 a^2}{mR} dt$$

$$\ln 2 = \frac{B^2 \pi^2 a^2}{mR} T$$

از طرفی داریم

$$R = \frac{\gamma \pi a \rho}{A}, \quad m = 2 \pi a A d$$

که در آن A سطح مقطع حلقه مسی و d چگالی مس است. بنابراین

$$\ln 2 = \frac{B^2 \pi^2 a^2 T}{\frac{\gamma \pi a \rho}{A} (2 \pi a A d)} = \frac{B^2 T}{4 \rho d}$$

$$T = \frac{4 \rho d \ln 2}{B^2}$$

$$= \frac{4 \times 1,70 \times 10^{-8} \times 1,90 \times 10^3 \times 0,6931}{(44,5 \times 10^{-6} \times 0,4384)^2}$$

$$= 1,10 \times 10^6 \text{ s}$$

که تقریباً برابر ۳۰۶ ساعت یا ۱۲ روز و ۱۸ ساعت است.

روش دوم. گشتاور نیروی روبه عقب

همان طور که دیدیم جریان القایی برابر است با

$$I = \frac{B \pi a^2}{R} \cos \theta$$

در نتیجه گشتاوری که با حرکت مخالفت می‌کند برابر است با

$$\tau = (B\pi a^2 \cos \theta)I = \frac{1}{R}(B\pi a^2)^2 \omega \cos^2 \theta$$

ولی کار انجام شده به‌ازای جابه‌جایی کوچک $\delta\theta$ برابر است با

$$\delta W = \frac{1}{R}(B\pi a^2)^2 \left(\frac{\cos^2 \theta + 1}{2} \right) \omega \delta\theta$$

در این صورت گشتاور متوسط برابر است با

$$\bar{\tau} = \frac{\text{کار انجام شده به‌ازای } 36^\circ \text{ درجه چرخش}}{2\pi}$$

$$= \frac{1}{2\pi R}(B\pi a^2)^2 \left(\frac{2\pi\omega}{2} \right) = \frac{1}{2R}(B\pi a^2)^2 \omega$$

از طرفی داریم

$$\bar{\tau} = -M \frac{d\omega}{dt}$$

که در آن M گشتاور لختی حلقه و برابر $\frac{1}{2}ma^2$ است. در نتیجه داریم

$$M \frac{d\omega}{dt} = -\frac{(B\pi a^2)^2}{2R} \omega$$

با قرار دادن $R = \rho \frac{2\pi a}{A}$ و $m = 2\pi a A d$ در رابطه بالا داریم

$$\frac{1}{2}(2\pi a A d)a^2 \frac{d\omega}{dt} = -\frac{(B\pi a^2)^2}{4\rho\pi a} A \omega$$

یا

$$\frac{d\omega}{dt} = -\frac{B^2}{4\rho d} \omega$$

$$\int_{\omega}^{\omega/2} \frac{d\omega}{\omega} = \int_0^T \frac{B^2}{4\rho d} dt$$

$$\ln 2 = \frac{B^2 T}{4\rho d}$$

$$T = \frac{4\rho d \ln 2}{B^2}$$

$$= \frac{4 \times 1,70 \times 10^{-8} \times 1,90 \times 10^3 \times 0,6931}{(44,5 \times 10^{-6} \times 0,4384)^2} \text{ s} = 1,10 \times 10^6 \text{ s}$$

که تقریباً برابر ۳۰۶ ساعت یا ۱۲ روز و ۱۸ ساعت است.

حل مسئله ۲

الف) کانونی شدن برای یک مدار «سیکلو ترون» الکترون رخ می دهد.

سرعت زاویه ای الکترون برابر است با

$$\omega = \frac{eB}{m}$$

در نتیجه زمان لازم برای یک دور چرخش برابر است با

$$T = \frac{2\pi m}{eB}$$

برای به دست آوردن سرعت الکترون داریم

$$\frac{1}{2}mv^2 = eV \Rightarrow v = \left(\frac{2eV}{m}\right)^{1/2}$$

فاصله طی شده توسط الکترون برابر است با

$$D = Tv \cos \beta \approx Tv = \frac{\pi}{B} \left(\frac{2mV}{e}\right)^{1/2}$$

در این صورت نسبت بار به جرم الکترون عبارت است از

$$\frac{e}{m} = 2V \left(\frac{\pi}{BD}\right)^2$$

ب) شرط دوم را در نظر بگیرید. نیروی ناشی از میدان الکتریکی روبه بالا اثر می کند.

در ناحیه A، نیروی ناشی از میدان مغناطیسی به طرف بالاست، به طوری که الکترون به صفحه بالایی برخورد می کند و به فیلم نمی رسد.

در ناحیه B، نیروی ناشی از میدان مغناطیسی به طرف پایین وارد می شود، به طوری که اگر این نیرو مخالف و برابر نیروی الکتریکی باشد، الکترون از صفحه ها خارج می شود و فیلم آن را آشکار می کند.

در صورتی که نیروهای الکتریکی و مغناطیسی برابر نباشند الکترون به صفحه ها برخورد می کند.

پ) لازم است نیروها متوازن شوند. نیروی الکتریکی از رابطه $\frac{eV}{t}$ و اندازه نیروی مغناطیسی از رابطه

$eV \sin \phi$ به دست می آید. که در آن v سرعت الکترون است.

شرط تعادل دو نیرو به صورت زیر بیان می شود

$$\frac{eV}{t} = evB |\sin \phi| \Rightarrow v = \frac{V}{tB |\sin \phi|}$$

همان‌طور که در رابطه قبل دیده می‌شود، کمترین مقدار v متناظر با کمترین مقدار ϕ یعنی 23° است. در نتیجه داریم

$$v = 2,687 \times 10^8 \text{ m/s} = 0,896c$$

در این صورت انرژی جنبشی نسبیتهی الکترون عبارت است از

$$k = (\gamma - 1)mc^2$$

که در آن γ برابر است با

$$\gamma = (1 - v^2/c^2)^{-1/2} = 2,255$$

در نتیجه

$$k = 641 \text{ keV}$$

ت) بعد از خروج الکترون‌ها از ناحیه بین صفحه‌ها، تنها نیروی ناشی از میدان مغناطیسی بر آن‌ها وارد می‌شود. چون زاویه جهت حرکت الکترون‌ها با محور افقی کوچک باقی می‌ماند، نیروی مغناطیسی را می‌توان تقریباً یک نیروی عمودی در نظر گرفت. شتاب ناشی از این نیرو برابر است با

$$a = \frac{Bev \sin \phi}{\gamma m}$$

که در آن v سرعت اولیه خروج الکترون‌ها از بین صفحه‌ها و در جهت افقی است. در نتیجه مدت زمانی که طول می‌کشد تا الکترون‌ها پس از خروج از بین صفحه‌ها به فیلم برسند برابر است با

$$t = \frac{s}{v}$$

که در آن s فاصله بین لبه صفحه‌ها و فیلم است (شکل ۸۷).

تغییر جابه‌جایی عمودی در این مدت برابر است با

$$\frac{y}{\gamma} = \frac{1}{2}at^2 = \frac{1}{2}a\left(\frac{s}{v}\right)^2$$

با قرار دادن مقدار به‌دست آمده برای شتاب a در رابطه اخیر داریم

$$y = \frac{Bes^2 \sin \phi}{\gamma mv}$$

با توجه به قسمت (پ)، برای الکترون‌هایی که از بین صفحه‌ها خارج می‌شوند، داریم

$$v = \frac{V}{tB|\sin \phi|}$$

در نتیجه برای حذف v از رابطه به دست آمده برای جابه‌جایی y داریم

$$y^2 = \left(\frac{eBs \sin \phi}{m} \right)^2 \left\{ \left(\frac{Bst \sin \phi}{V} \right)^2 - \left(\frac{s}{c} \right)^2 \right\}$$

حال اگر $\left(\frac{y}{Bs \sin \phi} \right)^2$ را بر حسب $\left(\frac{Bst \sin \phi}{V} \right)^2$ روی محور مختصات رسم کنیم، به عبارت

دیگر روی محور قائم $\left(\frac{y}{Bs \sin \phi} \right)^2$ و روی محور افقی $\left(\frac{Bst \sin \phi}{V} \right)^2$ را اختیار کنیم، شیب

خط برابر $\left(\frac{e}{m} \right)^2$ و عرض از مبدأ آن برابر $\left(\frac{es}{mc} \right)^2$ خواهد شد. ولی مقداری که برای عرض

از مبدأ به دست آمده برابر $\left(\frac{Cs}{kg} \right)^2$ است. در این صورت

$$-\left(\frac{es}{mc} \right)^2 = -537,7 \Rightarrow \frac{e}{m} = 1,70 \times 10^{11} \frac{C}{kg}$$

همچنین مقدار به دست آمده برای شیب خط برابر $\left(\frac{C}{kg} \right)^2$ است. در این صورت

$$\left(\frac{e}{m} \right)^2 = 2,826 \times 10^{22} \Rightarrow \frac{e}{m} = 1,68 \times 10^{11} \frac{C}{kg}$$

حل مسئله ۳

(الف)

$$\Delta x_t = ae^{-\mu t} \cos(\omega t + \phi) \quad (i)$$

با توجه به فرض مسئله و قرار دادن مقادیر داده شده داریم

$$0,8 = e^{-50\mu} \Rightarrow \mu = 4,5 \times 10^{-3} s^{-1}$$

$$v = \left(\frac{E}{\rho} \right)^{1/2} = \left(\frac{7,1 \times 10^{10}}{2700} \right)^{1/2} \quad (ii)$$

$$= 5100 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

طول موج میله برابر است با

$$\lambda_{\text{میله}} = 4l = 4 \text{ m}$$

$$f = \frac{v}{\lambda} = \frac{5100}{4} = 1,3 \times 10^3 \text{ Hz}$$

$$\omega = 2\pi f = 8,1 \times 10^3 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$$

$$v = f\lambda_{\text{میله}}, \quad \frac{\delta\lambda_{\text{میله}}}{\lambda_{\text{میله}}} = \frac{-\delta f}{f} \quad (\text{iii})$$

در نتیجه داریم

$$\frac{\delta l}{l} = \frac{\delta f}{f}$$

$$\delta l = 1 \times \left(\frac{51^\circ \times 10^{-3}}{1,3 \times 10^3} \right) = 3,8 \times 10^{-6} \text{ m}$$

(iv) تغییر در نیروی گرانشی میله در فاصله x از انتهای آزاد آن برابر $m\Delta g$ است. همچنین جرم میله برابر $m = \rho x A$ است که در آن A سطح مقطع میله است.

$$\text{تغییر تنش} = \frac{m\Delta g}{A} = \rho x \Delta g$$

$$\text{تغییر کرنش} = \frac{\delta(dx)}{dx} = \frac{\rho x \Delta g}{E}$$

به طوری که

$$dx \rightarrow \left(1 + \frac{\rho x \Delta g}{E} \right) dx$$

در نتیجه

$$\Delta l = \left(\frac{\rho \Delta g}{2E} \right) l^2$$

$$\lambda_{\text{میله}} = 4l \Rightarrow \Delta l = \frac{\Delta \lambda_{\text{میله}}}{4} \quad (\text{v})$$

برای $\Delta \lambda_{\text{میله}} = 656 \times 10^{-4} \text{ nm}$ داریم

$$\Delta l = \frac{656 \times 10^{-4}}{4} \text{ nm}$$

از طرفی با توجه به نتیجه قسمت (iv) داریم

$$\frac{656 \times 10^{-4}}{4} \text{ nm} = \left(\frac{\rho \Delta g}{2E} \right) l^2$$

یا

$$l^2 = \left(\frac{656 \times 10^{-4}}{4} \times 10^{-9} \text{ m} \right) \left(\frac{2 \times 7 \times 10^{10}}{2700 \times 10^{-19}} \text{ m} \right)$$

$$l = 9,2 \times 10^7 \text{ m}$$

(ب)

$$mc^{\nu} = hf \Rightarrow m = \frac{hf}{c^{\nu}} \quad (i)$$

$$hf = hf - \frac{GMm}{R}$$

$$hf = hf \left(1 - \frac{GM}{Rc^{\nu}} \right)$$

$$f = f \left(1 - \frac{GM}{Rc^{\nu}} \right)$$

$$n_r = \frac{c}{c'_r} = \frac{c}{c \left(1 - \frac{GM}{rc^{\nu}} \right)^{\nu}} \quad (ii)$$

با توجه به کوچک بودن $\frac{GM}{rc^{\nu}}$ داریم

$$n_r \simeq 1 + \frac{\nu GM}{rc^{\nu}}$$

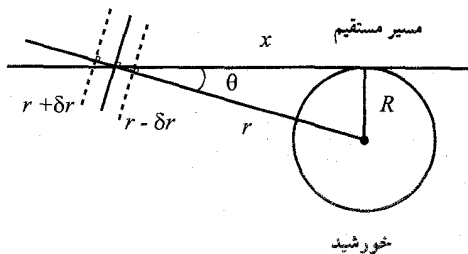
مقایسه این رابطه و رابطه داده شده در صورت مسئله نشان می دهد که

$$\alpha = \nu$$

(iii) با توجه به شکل ۹۳ و قانون اسنل داریم

$$n(r + \delta r) \sin \theta = n(r) \sin(\theta - \delta \xi)$$

$$\left\{ n(r) + \left(\frac{dn}{dr} \right) \delta r \right\} \sin \theta = n(r) \sin \theta \cos \delta \xi - n(r) \sin \delta \xi \cos \theta$$



شکل ۹۳

با توجه به کوچک بودن $\delta \xi$ با تقریب خوبی داریم

$$\cos \delta \xi \simeq 1 \quad \text{و} \quad \sin \delta \xi = \delta \xi$$

در این صورت

$$\left\{ n(r) + \left(\frac{dn}{dr} \right) \delta r \right\} \sin \theta = n(r) \sin \theta - n(r) \delta \xi \cos \theta$$

$$\left(\frac{dn}{dr} \right) \delta r \sin \theta = -n(r) \delta \xi \cos \theta$$

از طرفی چون $n(r) = 1 + \frac{\gamma GM}{rc^2}$ است، داریم

$$\frac{dn}{dr} = -\frac{\gamma GM}{r^2 c^2}$$

در نتیجه

$$\left(\frac{\gamma GM}{r^2 c^2} \right) \delta r \sin \theta = n(r) \delta \xi \cos \theta$$

بنابراین

$$\delta \xi = \left(\frac{\gamma GM}{r^2 c^2} \right) \left(\frac{\delta r}{n} \right) \tan \theta$$

$$\approx \left(\frac{\gamma GM \tan \theta}{r^2 c^2} \right) \delta r$$

با توجه به شکل ۹۳ داریم

$$r^2 = x^2 + R^2 \Rightarrow r dr = x dx$$

بنابراین

$$\int d\xi = \frac{\gamma GM}{c^2} \int \frac{\tan \theta}{r^2} dr$$

$$= \frac{\gamma GM}{c^2} \int \frac{r \tan \theta}{r^3} dr$$

$$= \frac{\gamma GMR}{c^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2 + R^2)^{3/2}}$$

یا

$$\xi = \frac{\gamma GM}{Rc^2}$$

$$= 8,4 \times 10^{-6} \text{ (رادیان)}$$

سی و دومین المپیاد بین‌المللی فیزیک

آنتالیا - ترکیه*

مسابقه نظری - زمان ۵ ساعت

۲۰۰۱/۱۳۸۰

مسئله ۱

الف) کلیسترون^۱

کلیسترون‌ها وسایلی هستند که برای تقویت سیگنال‌های با بسامد خیلی زیاد به‌کار می‌روند. همان‌طور که در شکل ۹۴ دیده می‌شود یک کلیسترون اساساً شامل دو جفت صفحه موازی مشابه (کاواک‌ها)^۲ است که در فاصله b از یکدیگر قرار دارند.

یک باریکه الکترون با سرعت اولیه v_0 با گذشتن از سوراخ‌های کوچک روی صفحه‌ها، از تمام دستگاه می‌گذرد. به دوسر هر دو جفت صفحه، ولتاژی با بسامد زیاد که باید تقویت شود با اختلاف فاز معین (دوره T متناظر با فاز 2π است) اعمال می‌شود. این امر باعث برقراری یک میدان الکتریکی افقی و متناوب در کاواک‌ها می‌شود. هرگاه الکترون‌هایی که وارد کاواک ورودی می‌شوند، میدان الکتریکی به‌طرف راست باشد، فاصله a در شکل ۹۴ را با تأخیر طی می‌کنند و برعکس. در نتیجه باریکه الکترون‌های خروجی دسته‌هایی^۳ از الکترون را با فاصله معینی از یکدیگر تشکیل می‌دهند. اگر کاواک خروجی در نقطه دسته‌بندی^۴ قرار گرفته باشد، میدان الکتریکی در این کاواک

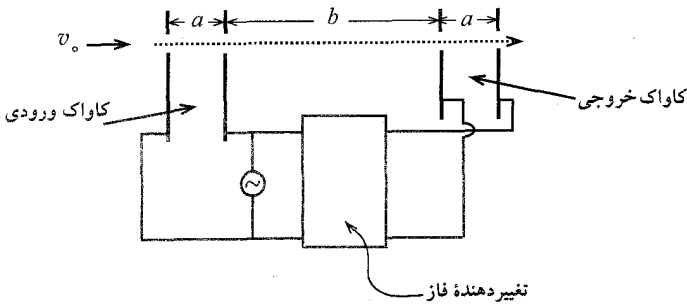
*. Antaliya, Turkey

1. Klystron

2. Cavities

3. Bunches

4. Bunching Point



شکل ۹۴

در صورتی از باریکه توان جذب می‌کند که فاز آن به صورت مناسب برگزیده شود. فرض کنید سیگنال ولتاژ به صورت یک موج مربعی باشد که با دوره $T = 10^{-9} \times 10^{-9} \text{ s}$ بین $V = \pm 0.5$ ولت تغییر می‌کند.

سرعت اولیه الکترون‌ها برابر $v_0 = 2.7 \times 10^6 \text{ m/s}$ و نسبت بار به جرم الکترون برابر $\frac{e}{m} = 1.76 \times 10^{11} \text{ C/kg}$ است. فاصله a به قدری کوچک است که می‌توانیم زمان عبور الکترون‌ها از درون کاواک‌ها را نادیده بگیریم. با توجه به شکل ۹۴ مطلوب است

- (i) فاصله b به طوری که کاواک خروجی در محل نقطه دستهبندی باریکه الکترون قرار داشته باشد.
- (ii) اختلاف فاز لازم که تغییر دهنده فاز^۱ باید به وجود آورد.

(ب) فاصله میان مولکولی^۲

فرض کنید dV و dL به ترتیب فاصله بین مولکول‌های آب در حالت‌های مایع و بخار باشد. همچنین فرض کنید هر دو حالت در دمای 100° C و فشار جو هستند و رفتار بخار آب مانند یک گاز کامل است. با استفاده از داده‌های زیر، نسبت $\frac{dV}{dL}$ را حساب کنید.

$$\rho_L = 10^3 \text{ kg/m}^3 \text{ : چگالی آب در حالت مایع}$$

$$M = 18 \times 10^{-2} \text{ kg/mol} \text{ : جرم مولی آب}$$

$$P_a = 10^5 \text{ N/m}^2 \text{ : فشار جو}$$

$$R = 8.3 \text{ J/mol.K} \text{ : ثابت گازها}$$

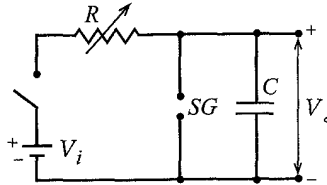
$$N_A = 6.0 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1} \text{ : عدد آووگادرو}$$

(پ) مولد سیگنال دندانانه اره‌ای ساده^۳

یک موج دندانانه اره‌ای با ولتاژ V_0 را می‌توانیم از دو سر خازن C در مدار شکل ۹۵ به دست آوریم. در این مدار R یک مقاومت متغیر، V_i یک باتری آرمانی و SG یک گاف جرقه^۴ متشکل از

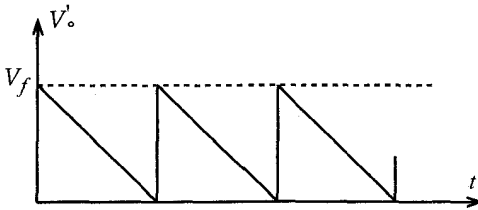
1. Phase shifter
2. Intermolecular Distance
3. Simple Sawtooth Signal Generator
4. Spark Gap

دو الکتروود است که فاصله بین آنها قابل تنظیم است. وقتی ولتاژ دو سر الکتروودها بیشتر از ولتاژ تولید جرقه V_f بشود، هوای بین الکتروودها فرو می‌ریزد و در نتیجه گاف بین الکتروودها به صورت اتصال کوتاه درمی‌آید و تا هنگامی که ولتاژ دو سر گاف خیلی کوچک نشود همین‌طور باقی می‌ماند.



شکل ۹۵

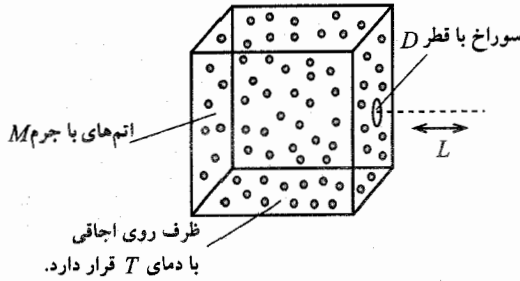
- (i) پس از بستن کلید، شکل موج V_o و ولتاژ V_o را برحسب زمان t رسم کنید.
- (ii) چه شرطی باید برقرار شود تا تقریباً یک موج دندان‌اره‌ای با تغییرات خطی با ولتاژ V_o داشته باشیم؟
- (iii) به فرض اینکه این شرط برقرار شود، عبارت ساده‌شده‌ای برای دوره T شکل موج به دست آورید.
- (iv) چه چیزی را باید تغییر دهیم (R یا SG) تا فقط دوره تغییر کند؟
- (v) چه چیزی را باید تغییر دهیم (R یا SG) تا فقط دامنه تغییر کند؟
- (vi) به شما یک ولتاژ DC قابل تنظیم دیگر داده می‌شود. مداری را طراحی و رسم کنید که از پایانه‌های آن یک موج دندان‌اره‌ای با ولتاژ V_o' مطابق شکل ۹۶ به دست آورید.



شکل ۹۶

(ت) باریکه اتمی^۳

یک باریکه اتمی با گرم کردن مجموعه‌ای از اتم‌ها تا دمای T و عبور افقی آنها از یک سوراخ کوچک (در ابعاد اتمی) به قطر D در یک طرف کوره تولید می‌شود (شکل ۹۷). قطر باریکه اتمی را پس از طی مسافت افقی L در مسیرش به دست آورید.

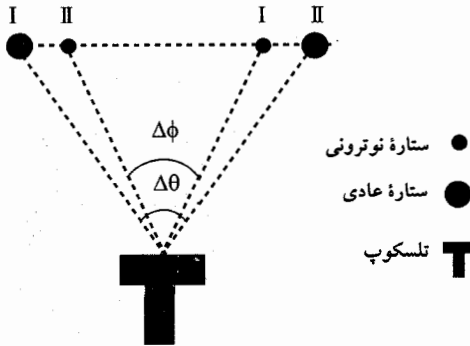


شکل ۹۷

مسئله ۲ سیستم ستاره دوتایی^۱

الف) می‌دانیم که بیشتر ستاره‌ها یک سیستم دوتایی را تشکیل می‌دهند. یک نوع از این سیستم‌های دوتایی، شامل یک ستاره عادی به جرم m_0 و شعاع R و یک ستاره نوترونی متراکم و بسیار سنگین به جرم M است که به دور یکدیگر می‌چرخند. در همه موارد زیر حرکت زمین را نادیده بگیرید. از رصد چنین سیستم‌های دوتایی اطلاعات زیر به دست آمده است

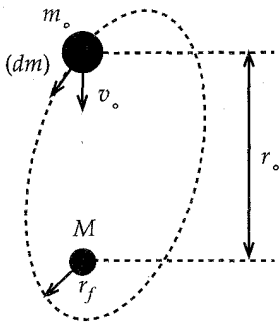
- بیشینه جابه‌جایی زاویه‌ای ستاره عادی $\Delta\theta$ است در حالی که برای ستاره نوترونی برابر $\Delta\phi$ است (شکل ۹۸).



شکل ۹۸

- مدت زمان لازم برای این بیشینه جابه‌جایی‌ها T است.
- ویژگی‌های تابشی ستاره عادی نشان می‌دهد که دمای سطح آن T و انرژی تابشی فرودی که به واحد سطح زمین در واحد زمان می‌رسد برابر P است.
- تنها به دلیل میدان گرانشی ستاره عادی، خط کلسیم در این تابش به اندازه مقدار $\Delta\lambda$ با طول موج

طبیعی λ اختلاف دارد. (برای این محاسبه می‌توانیم جرم مؤثر فوتون را $\frac{h}{c\lambda}$ در نظر بگیریم). عبارتی برای فاصله زمین از این دستگاه، تنها برحسب کمیت‌های رصد شده و ثابت‌های جهانی به دست آورید.



شکل ۹۹

ب) فرض کنید $M \gg m_0$ است، در نتیجه ستاره عادی روی یک مدار دایره‌ای به شعاع r_0 حول ستاره نوترونی می‌چرخد. فرض کنید ستاره عادی شروع به گسیل گاز به طرف ستاره نوترونی می‌کند، و سرعت گسیل گاز نسبت به ستاره عادی برابر v_0 است (شکل ۹۹). همچنین فرض کنید در این مسئله نیروی گرانشی ستاره نوترونی غالب است و از تغییرات مداری ستاره عادی چشم‌پوشی کنید. کمترین فاصله بین دو ستاره را که در شکل ۹۹ با r_f نشان داده شده است، به دست آورید.

مسئله ۳ مولد مغناطو هیدرو دینامیک^۱

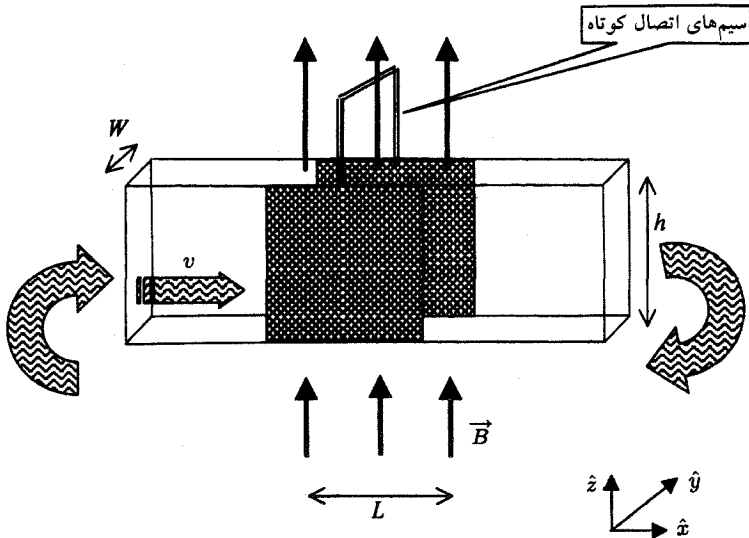
یک لوله پلاستیکی چهارگوش افقی به عرض w و ارتفاع h ، که حلقه بسته‌ای را تشکیل می‌دهد، از جیوه با مقاومت ویژه ρ پر شده است. توسط یک توربین که این شاره را با سرعت ثابت v_0 به حرکت درمی‌آورد فشار بالای P تولید می‌شود. قسمتی از دو دیواره عمودی مقابل هم لوله به طول L ، از مس ساخته شده است. حرکت یک شاره واقعی بسیار پیچیده است. در اینجا برای سادگی فرض‌های زیر را در نظر بگیرید:

- هرچند شاره چسبیده است، اما سرعت آن در تمام سطح مقطع یکنواخت است.
- سرعت شاره همواره با برابری نیروی خارجی که از بالا بر آن وارد می‌شود متناسب است.
- شاره تراکم‌ناپذیر است.

این دیواره‌ها از خارج به لحاظ الکتریکی اتصال کوتاه شده‌اند و میدان مغناطیسی یکنواخت \vec{B} به‌طور عمودی و به طرف بالا تنها در این قسمت اعمال می‌شود. این مجموعه به‌طوری که بیان شد در شکل ۱۰۰ نشان داده شده است. در حل این مسئله از بردارهای یک‌جهت \hat{x} ، \hat{y} و \hat{z} به‌طوری که در شکل نشان داده شده است استفاده کنید.

الف) نیروی ناشی از میدان مغناطیسی را که بر شاره وارد می‌شود برحسب B ، L ، h ، w ، ρ و سرعت جدید v شاره به دست آورید.

ب) بعد از اعمال میدان مغناطیسی عبارتی برای سرعت جدید v شاره برحسب v_0 ، P ، L ، B و ρ به دست آورید.



شکل ۱۰۰

پ) عبارتی برای توان اضافی را که باید توسط توربین برای افزایش سرعت شاره تا مقدار اصلی آن v_0 به کار رود به دست آورید.
 ت) اکنون میدان مغناطیسی قطع می‌شود و به جای جیوه، آب با سرعت حرکت v_0 جایگزین می‌شود. یک موج الکترومغناطیسی تک بسامد در امتداد قسمت با طول L و در جهت حرکت آب، فرستاده می‌شود. ضریب شکست آب n و $c \ll v_0$ است. عبارتی برای سهم حرکت شاره روی اختلاف فازی که بین موج ورودی و خروجی در قسمت به طول L ، به وجود می‌آید به دست آورید.

پاسخ تشریحی مسئله‌ها

حل مسئله ۱

(الف)

(i) در هر یک از رابطه‌های زیر اندیس‌های ret و acc به ترتیب نشان دهنده تأخیری و غیرتأخیری است.

$$v_{ret} = \sqrt{v_0^2 - 2(e/m)V} = 1,956 \times 10^6 \text{ m/s}$$

$$v_{acc} = \sqrt{v_0^2 + 2(e/m)V} = 2,044 \times 10^6 \text{ m/s}$$

$$x_{\text{ret}} = v_{\text{ret}}t \quad \text{و} \quad x_{\text{acc}} = v_{\text{acc}}(t - T/2)$$

$$x_{\text{ret}} = x_{\text{acc}} \rightarrow t_{\text{bunch}} = \frac{v_{\text{acc}}T}{2(v_{\text{acc}} - v_{\text{ret}})} = 11,6 \text{ nT}$$

$$b = v_{\text{ret}}t_{\text{bunch}} = 2,272 \times 10^{-2} \text{ m}$$

کمیت t_{bunch} نشان دهندهٔ زمان دسته‌بندی است.

(ii) اختلاف فاز لازم برابر است با

$$\Delta\varphi = \pm \left(\frac{t_{\text{bunch}}}{T} - n \right) 2\pi = \pm 0,61 \times 2\pi = \pm 220^\circ$$

یا

$$\Delta\varphi = \pm 140^\circ$$

(ب) اگر تعداد مولکول‌های آب در هر مترمکعب در حالت مایع را با n_L نشان دهیم، داریم

$$\rho_L = n_L \frac{M}{N_A}$$

به این ترتیب فاصلهٔ متوسط مولکول‌های آب در حالت مایع برابر است با

$$d_L = (n_L)^{-\frac{1}{3}} = \left(\frac{M}{\rho_L N_A} \right)^{\frac{1}{3}}$$

با توجه به فرض مسئله چون رفتار بخار آب مانند گاز کامل است، داریم

$$P_a V = nRT \Rightarrow P_a = \frac{nM}{V} \frac{RT}{M} = \rho_V \frac{RT}{M} = \frac{n_V M}{N_A} \frac{RT}{M}$$

که در آن n_V تعداد مولکول‌های آب در هر متر مکعب در حالت بخار است.

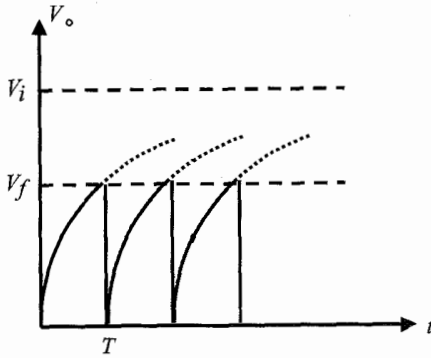
$$d_V = (n_V)^{-\frac{1}{3}} = \left(\frac{RT}{P_a N_A} \right)^{\frac{1}{3}}$$

به این ترتیب

$$\frac{d_V}{d_L} = \left(\frac{RT\rho_L}{P_a M} \right)^{\frac{1}{3}} = \left(\frac{8,3 \times 273 \times 1 \times 10^3}{1 \times 10^5 \times 1,8 \times 10^{-2}} \right) = 12$$

(پ)

(i) شکل ۱۰۱ موج ولتاژ V_o را برحسب زمان t نشان می‌دهد.



شکل ۱۰۱

$$V_i \gg V_f \quad (ii)$$

$$V_f = V_i(1 - e^{-T/RC}) \quad (iii)$$

اگر $1 \ll T/RC$ باشد، داریم

$$e^{-T/RC} \approx 1 - (T/RC)$$

به این ترتیب

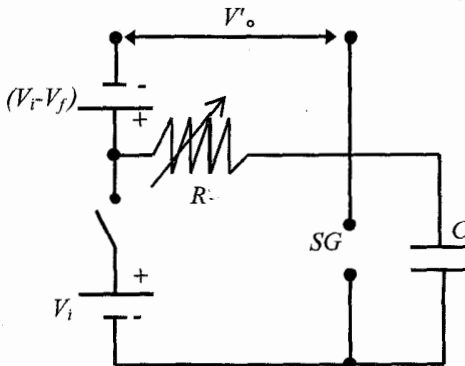
$$T = (V_f/V_i) RC$$

(iv) مقاومت R .

(v) گاف جرقة SG و مقاومت R .

(vi) شکل ۱۰۲ مداری را نشان می‌دهد که از پایانه‌های آن یک موج دندانه‌اره‌ای با ولتاژ V_o

به دست می‌آید.



شکل ۱۰۲

ت) وقتی باریکه از سوراخی به قطر D می‌گذرد، عدم قطعیت در مؤلفه y اندازه حرکت برابر است با

$$\Delta P_y \approx \frac{\hbar}{D}$$

$$\Delta v_y \approx \frac{\hbar}{MD}$$

یا

قطر باریکه نسبت به قطر سوراخ به اندازه $\Delta D = \Delta v_y t$ بیشتر می‌شود. در این رابطه t زمان حرکت است.

اگر دمای اجاق برابر T باشد، انرژی جنبشی اتم معینی که از سوراخ خارج می‌شود برابر است با

$$K = \frac{1}{2} M v^2 = \frac{3}{2} kT$$

$$v = \sqrt{\frac{3kT}{M}}$$

باریکه مسافت افقی L را با سرعت v در زمان t می‌پیماید. بنابراین،

$$t = \frac{L}{v}$$

$$\Delta D = t \Delta v_y \approx \frac{L}{v} \frac{\hbar}{MD} = \frac{L\hbar}{MD\sqrt{3kT/M}} = \frac{L\hbar}{D\sqrt{3MkT}}$$

به این ترتیب قطر جدید باریکه پس از طی مسافت L برابر است با

$$D_{\text{جدید}} = D + \frac{L\hbar}{D\sqrt{3MkT}}$$

حل مسئله ۲

الف) انرژی کل تابش شده در هر ثانیه برابر است با

$$4\pi R^2 \sigma T^4$$

که در آن σ ثابت استفان-بولتزمن است. به این ترتیب، انرژی تابشی فرودی که به واحد سطح زمین

در واحد زمان می‌رسد، برابر است با

$$P = \frac{4\pi R^2 \sigma T^4}{4\pi l^2} \Rightarrow R = \left(\frac{P}{\sigma T^4} \right)^{1/2} l \quad (1)$$

جرم مؤثر هر فوتون برابر $h/c\lambda$ و انرژی آن برابر $h\nu = hc/\lambda$ است. با توجه به پایستگی انرژی

فوتون، داریم

$$\frac{hc}{\lambda_0} - \frac{Gm_0}{R} = \frac{h}{c\lambda_0} = \frac{hc}{\lambda}$$

در نتیجه

$$R = \frac{Gm_0(\lambda_0 + \Delta\lambda)}{c^2\Delta\lambda} \quad (2)$$

یا

$$m_0 = \frac{c^2\Delta\lambda(P/\sigma T^4)^{\frac{1}{4}}}{G(\lambda_0 + \Delta\lambda)} l \quad (3)$$

از آنجا که ستاره‌ها با سرعت زاویه‌ای یکسانی حول مرکز جرم می‌چرخند، داریم

$$\omega = \frac{2\pi}{2\tau} = \frac{\pi}{\tau} \quad (4)$$

شرط تعادل برای ستاره‌ها به صورت زیر است

$$\frac{GMm_0}{(r_1 + r_2)^2} = m_0 r_1 \omega^2 = M r_2 \omega^2 \quad (5)$$

همچنین داریم

$$r_1 = l\Delta\theta/2, \quad r_2 = l\Delta\phi/2 \quad (6)$$

با قرار دادن عبارت‌های (۳)، (۴) و (۶) در عبارت (۵) داریم

$$l = \left[\frac{\lambda c^2 \Delta\lambda (P/\sigma T^4)^{\frac{1}{4}}}{\Delta\phi(\pi/\tau)^2 (\lambda_0 + \Delta\lambda) (\Delta\theta + \Delta\phi)^2} \right]^{\frac{1}{2}}$$

(ب) پایستگی اندازه حرکت زاویه‌ای برای ستاره عادی ایجاب می‌کند

$$mr^2\omega = m_0 r_0^2 \omega_0 \quad (7)$$

همچنین پایستگی اندازه حرکت زاویه‌ای برای جرم dm به دست می‌دهد

$$r^2\omega dm = r_f^2\omega_f dm \quad (8)$$

که در آن ω_f سرعت زاویه‌ای در مکانی است که فاصله بین دو ستاره کمینه است. تعادل در حالت اولیه نتیجه می‌دهد

$$\omega_0 = \left(GM/r_0^3 \right)^{\frac{1}{2}} \quad (9)$$

از رابطه‌های (۷)، (۸) و (۹) داریم

$$\omega = \frac{m_0 r_0}{mr^2} (GM/r_0)^{\frac{1}{2}} \quad \text{و} \quad \omega_f = \frac{m_0 r_0}{mr_f^2} (GM/r_0)^{\frac{1}{2}} \quad (10)$$

از پایستگی انرژی برای dm داریم

$$\frac{1}{2} dm (v_o^2 + r^2 \omega^2) - \frac{GM dm}{r} = \frac{1}{2} dm r_f^2 \omega_f^2 - \frac{GM dm}{r_f} \quad (11)$$

با قرار دادن عبارت‌های (۱۰) در معادله (۱۱) به دست می‌آید

$$v_o^2 + \frac{m_o^2 r_o GM}{m^2} \left(\frac{1}{r^2} - \frac{1}{r_f^2} \right) - 2GM \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_f} \right) = 0 \quad (12)$$

از آنجا که $r_f \gg r_o$ است، اگر $r > r_o$ باشد از عبارت‌های r^{-2} و r^{-1} می‌توان چشم‌پوشی کرد. به این ترتیب

$$r_f = \frac{GM}{v_o^2} \left[\left(1 + \frac{m_o^2 r_o v_o^2}{GM m^2} \right)^{\frac{1}{2}} - 1 \right]$$

برای نشان دادن اینکه $r > r_o$ در تکانه خطی ستاره معمولی نسبت به چارچوب مرجع‌اش تغییر ایجاد می‌کند داریم

$$\frac{-GMm}{r^2} + mr\omega^2 - m \frac{dv_r}{dt} = -v_o \frac{dm_{gas}}{dt} \quad (13)$$

این معادله بر وجود نیروی اولیه‌ای به طرف بیرون و در نتیجه آغاز افزایش شعاع r اشاره دارد. به کمک معادله (۷) داریم

$$mr\omega^2 = \frac{m_o^2 r_o^2 \omega_o^2}{mr^3}$$

در نتیجه

$$\frac{\text{نیروی گرانشی}}{\text{نیروی جانب مرکز}} \propto m^2 r$$

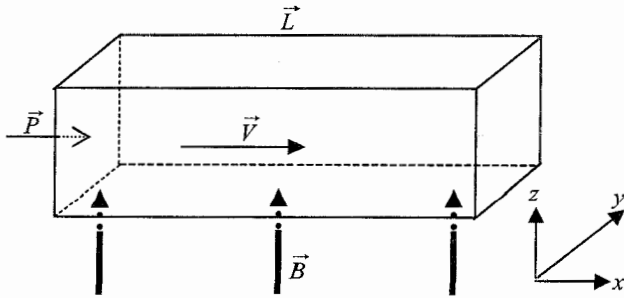
که در آن m به طور قطع در حال کاهش است. اگر شعاع r ستاره نیز در برخی زمان‌ها کاهش یابد، این نسبت شروع به کاهش می‌کند که این یک تناقض است. به این ترتیب $r > r_o$ است.

حل مسئله ۳

الف) شکل ۱۰۳ قسمتی از دو دیواره عمودی مقابل هم لوله‌ای به طول L را نشان می‌دهد. نیروی برآیند روی ذره باردار شده در حالت تعادل، باید صفر باشد.

$$\vec{F} = 0 = q\vec{E} + q\vec{v} \times \vec{B}$$

$$\vec{E} = -\vec{v} \times \vec{B} = vB\hat{y}$$



شکل ۱۰۳

از طرفی پتانسیل عرضی بین دو ورقهٔ مسی که به فاصلهٔ w از هم قرار دارند، برابر است با

$$V_H = vBw$$

$$I = \frac{V_H}{R} = \frac{V_H}{\rho w/Lh} = \frac{vBwLh}{\rho w} = \frac{vBLh}{\rho} \quad (\text{در جهت } -\hat{y})$$

$$\vec{F} = I\vec{l} \times \vec{B} = \frac{vB^\dagger Lhw}{\rho} (-\hat{y} \times \hat{z}) = -\frac{vB^\dagger Lhw}{\rho} \hat{x}$$

این نیرو فشار رو به عقب زیر را به وجود می‌آورد

$$P_b = \frac{vB^\dagger Lhw}{\rho hw} = \frac{vB^\dagger L}{\rho}$$

$$F_{\text{net}} = (P - P_b)hw$$

که در آن اندیس net نشان دهندهٔ برآیند است.

(ب)

$$v = \alpha F_{\text{net}} = \alpha(P - P_b)hw$$

$$= \alpha \left(P - \frac{vB^\dagger L}{\rho} \right) \frac{v_0}{\alpha P} = v_0 - \frac{vv_0 B^\dagger L}{P\rho}$$

$$v \left(1 + \frac{v_0 B^\dagger L}{P\rho} \right) = v_0 \Rightarrow v = v_0 \left[1 + \frac{v_0 B^\dagger L}{P\rho} \right]^{-1}$$

$$v = v_0 \frac{P\rho}{P\rho + v_0 B^\dagger L}$$

(پ) با توجه به پایستگی انرژی داریم

$$\Delta P = V_H I = \frac{v_0^\dagger B^\dagger whL}{\rho}$$

(ت)

$$u = c/n, \quad u' = \frac{c/n + v}{1 + (c/n)(v/c^2)} = \frac{c/n + v}{1 + v/cn}$$

برای $v \ll c$ ، از عبارات های v^2/c^2 و بالاتر در بسط $(1 + v/cn)^{-1}$ می توان چشم پوشی کرد

$$u' = (c/n + v) \frac{1}{1 + v/cn} \approx (c/n + v)(1 - v/cn) \approx c/n + v(1 - 1/n^2)$$

$$\Delta u = u' - u \approx v(1 - 1/n^2)$$

$$\Delta \phi = 2\pi f \Delta T, \quad T = L/u, \quad \Delta T = (\Delta u/u^2)L \approx (Lv/c^2)(n^2 - 1)$$

$$v = v_0 \Rightarrow \Delta \phi = 2\pi f L/c^2 (n^2 - 1)v_0.$$

به ازای اختلاف فاز $\pi/36$ داریم

$$\begin{aligned} v_0 &= \frac{c^2}{72L(n^2 - 1)f} \\ &= \frac{9 \times 10^{16}}{72 \times 10^{-1} \times (2,56 - 1) \times 25} = 3,2 \times 10^{14} \text{ m/s} \end{aligned}$$

که مقداری غیرفیزیکی است.

به ازای $v = 20 \text{ m/s}$ و $f \approx 4 \times 10^{14} \text{ Hz}$ عمق پوستی حدود 25 nm است. این بدان معنی

است که دامنه سیگنالی که به انتهای لوله می رسد، در عمل صفر است. به علاوه، وقتی جیوه با آب جایگزین شود، به ازای بسامد 25 Hz ، عمق پوستی $\delta = 3 \times 10^5 \text{ m}$ است. سیگنال ها با

سرعت $v = 6 \times 10^{14} \text{ m/s}$ به انتهای لوله می رسند که هنوز مقداری غیرفیزیکی است.

به ازای $v = 20 \text{ m/s}$ عمق پوستی موج الکترومغناطیسی با بسامد $f = 8 \times 10^{14} \text{ Hz}$ برابر

$\delta = 5,6 \text{ cm}$ در آب است و اختلاف فاز موج خروجی نسبت به موج فرودی $\pi/36$ است.

(دامنه موجی که به انتهای لوله می رسد نسبت به دامنه موج فرودی حدود 17 درصد است.) به

این ترتیب جیوه باید با آب جایگزین شود و بسامد باید $f = 8 \times 10^{14} \text{ Hz}$ باشد.

سی و سومین المپیاد بین‌المللی فیزیک

بالی، اندونزی*

مسابقه نظری - زمان ۵ ساعت

۲۰۰۲/۱۳۸۱

مسئله ۱ رادار نافذ در زمین^۱

رادار نافذ زمین (GPR)، برای آشکارسازی و تعیین محل اجسام زیرزمینی نزدیک به سطح زمین مورد استفاده قرار می‌گیرد. اساس کار این رادار، گسیل موج‌های الکترومغناطیسی به زمین و دریافت موج‌های بازتابیده از اجسام است. آنتن و آشکارساز کاملاً روی زمین قرار دارند و می‌توان آن‌ها را در یک محل قرار داد.

میدان الکتریکی یک موج الکترومغناطیسی تخت با قطبیدگی خطی و بسامد زاویه‌ای ω که در جهت محور z منتشر می‌شود، با رابطه زیر بیان می‌شود

$$E = E_0 e^{-\alpha z} \cos(\omega t - \beta z) \quad (1)$$

که در آن E_0 مقداری ثابت است. همچنین، α ثابت تضعیف و β عدد موج است که به ترتیب به صورت

*. Bali, Indonesia 1. Ground-Pene-Trating Radar (GPR)

زیر بیان می شوند

$$\alpha = \omega \left\{ \frac{\mu\epsilon}{\gamma} \left[\left(1 + \frac{\sigma^2}{\epsilon^2 \omega^2} \right)^{\frac{1}{2}} - 1 \right] \right\}^{\frac{1}{2}} \quad (2)$$

$$\beta = \omega \left\{ \frac{\mu\epsilon}{\gamma} \left[\left(1 + \frac{\sigma^2}{\epsilon^2 \omega^2} \right)^{\frac{1}{2}} + 1 \right] \right\}^{\frac{1}{2}} \quad (3)$$

در رابطه‌های بالا، μ ، ϵ و σ به ترتیب تراوایی مغناطیسی، گذردهی الکتریکی و رسانندگی الکتریکی هستند.

اگر دامنه سیگنالی که به رادار می‌رسد به $1/e$ مقدار اولیه‌اش (تقریباً ۳۷ درصد) فروافتد، آشکار نمی‌شود. معمولاً از یک موج الکترومغناطیسی با بسامد متغیر (۱۰-۱۰۰۰ MHz) استفاده می‌شود تا تنظیم برد و تفکیک آشکارساز امکان‌پذیر شود.

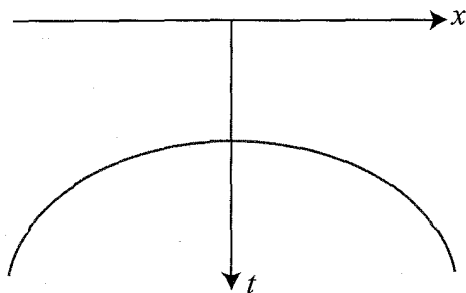
عملکرد GPR به تفکیک آن بستگی دارد. این تفکیک را کمترین فاصله میان دو بازتابنده مجاور که باید آشکار شوند، تعیین می‌کند. این کمترین فاصله باید اختلاف فاز کمینه 180° را بین دو موج بازتابیده در آشکارساز تولید کند.

الف) فرض کنید زمین یک ماده غیرمغناطیسی است ($\mu = \mu_0$) که شرط $1 \ll (\sigma/\omega\epsilon)^2$ در مورد آن صدق می‌کند. با استفاده از معادله‌های (۱)، (۲) و (۳)، رابطه‌ای برای سرعت انتشار v برحسب μ و ϵ به دست آورید.

ب) بیشترین عمق آشکارسازی جسمی را پیدا کنید که داخل زمین قرار گرفته است و رسانندگی الکتریکی $(\Omega \cdot m)^{-1} \cdot 10^{-3}$ و گذردهی $9\epsilon_0$ دارد و شرط $1 \ll (\sigma/\omega\epsilon)^2$ در مورد آن صادق است.

پ) دو میله رسانای موازی را در نظر بگیرید که به‌طور افقی در عمق ۴ متری زمین قرار گرفته‌اند. رسانندگی الکتریکی زمین را $(\Omega \cdot m)^{-1} \cdot 10^{-3}$ و گذردهی آن را $9\epsilon_0$ بگیرید. فرض کنید اندازه‌گیری‌های GPR در محلی انجام شود که تقریباً بالای یکی از میله‌ها قرار دارد. همچنین فرض کنید از آشکارساز نقطه‌ای^۱ استفاده شده است. کمترین بسامد لازم را برای به‌دست آوردن تفکیک جانبی ۵ cm پیدا کنید.

ت) برای تعیین عمق میله قرار گرفته در همان زمین (d)، فرض کنید اندازه‌گیری‌ها در امتداد عمود بر میله انجام می‌شوند. نتیجه در شکل ۱۰۴ نشان داده شده است. زمان t را برحسب x به دست آورید و عمق d را پیدا کنید.

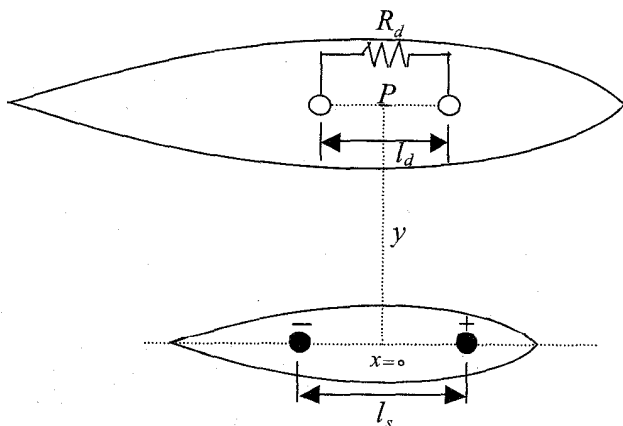


شکل ۱۰۴ نمودار زمان حرکت t برحسب محل آشکارساز x : $t_{\min} = 10^{-8} \text{ ns} \cdot x$

مسئله ۲ احساس سیگنال‌های الکتریکی^۱

بعضی از جانوران دریایی قادرند جانوران دیگری را که با آن‌ها فاصله دارند، آشکار سازند. این کار را با استفاده از جریان‌های الکتریکی که این جانوران در فرایند تنفس یا فرایندهای دیگری که در آن‌ها انقباض عضلانی دخیل است، انجام می‌دهند. بعضی از جانوران شکارچی، این سیگنال‌های الکتریکی را برای تعیین محل شکارشان به کار می‌برند؛ حتی وقتی که شکار زیر شن پنهان شده باشد.

سازوکار فیزیکی دخیل در این فرایند، تولید جریان الکتریکی در شکار و آشکارسازی آن توسط شکارچی است که می‌توان آن را مطابق شکل ۱۰۵، به صورت یک مدل نشان داد. جریان تولید شده توسط شکار، بین دو کره با پتانسیل‌های مثبت و منفی در بدن او، برقرار است. فاصله بین مرکزهای این کره‌ها l_s و شعاع هر کدام r_s خیلی کوچک‌تر از l_s است. مقاومت ویژه آب دریا ρ است. فرض کنید

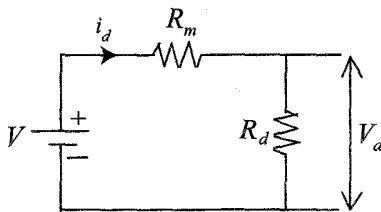


شکل ۱۰۵ مدلی برای بیان چگونگی آشکارسازی سیگنال‌های الکتریکی که از شکار به شکارچی می‌رسند.

مقاومت ویژه بدن شکار نیز مانند محیط اطرافش، یعنی آب دریا، برابر p است. در نتیجه می‌توان از مرزی که شکار را در بر گرفته است (شکل ۱۰۵)، چشم‌پوشی کرد.

بدین ترتیب، برای توصیف چگونگی آشکارسازی سیگنال‌های الکتریکی که از طرف شکار به شکارچی می‌رسند، مدلی را به صورت زیر در نظر می‌گیریم.

در این مدل، روی بدن شکارچی نیز دو کره در نظر گرفته می‌شود که با آب دریا به یکدیگر مرتبط می‌شوند. خطی که مرکزهای این دو کره را به هم وصل می‌کند، با خط رابط مرکزهای دو کره در شکار موازی است. فاصله دو کره l_d و شعاع آن‌ها $r_d \ll l_d$ است. در این حالت، مرکز آشکارساز (نقطه p روی شکارچی) در فاصله l از چشمه (شکار) و بالای آن قرار دارد (شکل ۱۰۵)؛ به طوری که l_s و l_d هر دو از l خیلی کوچک‌ترند. همچنین، راستای میدان الکتریکی موازی خطی است که مرکز دو کره را به هم متصل می‌کند، و در شکل ۱۰۵ نشان داده شده است. شدت میدان الکتریکی در امتداد این خط رابط ثابت فرض می‌شود. بنابراین، آشکارساز سیستم مدار بسته‌ای را تشکیل می‌دهد که شکار، آب دریای اطراف و شکارچی را به هم متصل می‌کند (شکل ۱۰۶).



شکل ۱۰۶ مدار معادل سیستم مدار بسته شامل شکارچی، شکار و آب دریای اطراف

در شکل ۱۰۶، V اختلاف پتانسیل الکتریکی بین کره‌های آشکارساز ناشی از میدان الکتریکی القایی توسط شکار و R_m مقاومت درونی ناشی از آب دریای اطراف است. به علاوه، V_d و R_d به ترتیب اختلاف پتانسیل الکتریکی بین کره‌های آشکارساز (شکارچی) و مقاومت اجزای آشکارساز درون شکارچی هستند. الف) بردار چگالی جریان \vec{J} (جریان برواحد سطح) را در فاصله r از یک چشمه نقطه‌ای جریان I_s ، در یک محیط نامتناهی پیدا کنید.

ب) با استفاده از رابطه $\vec{E} = \rho \vec{J}$ ، میدان الکتریکی \vec{E}_p را در نقطه P وسط خط رابط کره‌های آشکارساز، برای جریان I_s بین دو کره موجود در بدن شکار، تعیین کنید.
پ) برای همان جریان I_s ، مطلوب است محاسبه:

- اختلاف پتانسیل الکتریکی بین کره‌های درون شکار (V_s)؛

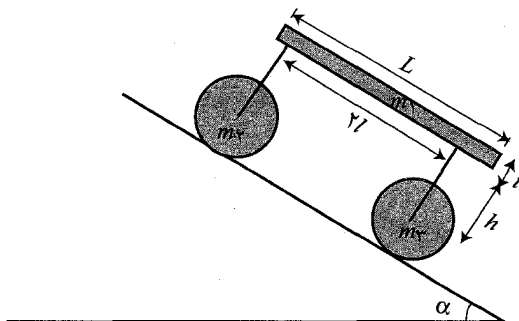
- مقاومت بین کره‌های درون شکار (R_s)؛

- توان الکتریکی تولید شده توسط شکار (P_s).

ت) V_d و R_m را که در مدار شکل ۱۰۶ نشان داده شده‌اند، حساب کنید. همچنین P_d ، توان منتقل شده از چشمه به آشکارساز (شکار به شکارچی) را پیدا کنید.
 ث) مناسب‌ترین مقدار R_d را برای آشکارسازی بیشینه توان حساب کنید. همچنین توان بیشینه را به دست آورید.

مسئله ۳ حرکت ماشین سنگین روی جاده‌ای شیب‌دار^۱

شکل ۱۰۷ مدل ساده‌ای از یک ماشین سنگین (غلتک راه‌سازی^۲) را نشان می‌دهد که، یک استوانه جلویی و یک استوانه عقبی چرخ‌های آن را تشکیل می‌دهند.



شکل ۱۰۷

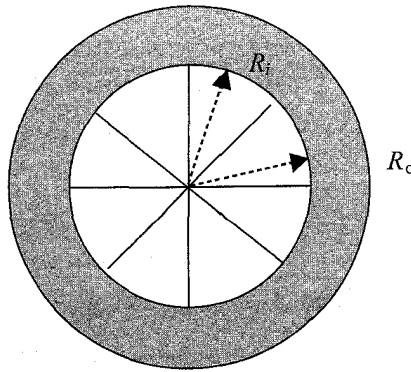
ماشین روی جاده‌ای شیب‌دار با زاویه شیب α در حرکت است. جرم کل هر یک از این استوانه‌ها $M (m_2 = m_3 = M)$ است و از یک پوسته استوانه‌ای به شعاع خارجی R_o و شعاع داخلی $R_i = 0.18R_o$ و همچنین، ۸ عدد پره^۳ با جرم کل $0.12M$ تشکیل شده است. جرم بقیه اجزایی را که چرخ‌ها را به بدنه ماشین وصل می‌کنند، نادیده بگیرید.

استوانه را می‌توان مطابق شکل ۱۰۸ مدل‌سازی کرد. ماشین تحت تأثیر نیروهای گرانش و اصطکاک در جاده حرکت می‌کند. استوانه‌های جلویی و عقبی نسبت به ماشین، به‌طور متقارن قرار گرفته‌اند.

ضریب‌های اصطکاک ایستایی و جنبشی بین استوانه و سطح جاده را به ترتیب μ_s و μ_k در نظر بگیرید. جرم بدنه ماشین $5M$ ، طول آن L و ضخامت آن t است. فاصله بین استوانه‌های جلویی و عقبی برابر $2l$ و همچنین، فاصله قاعده بدنه ماشین از مرکز استوانه‌ها برابر h است. فرض کنید، اصطکاک چرخشی بین استوانه و محورش ناچیز است.

الف) گشتاور لختی هر استوانه را پیدا کنید.

ب) همه نیروهایی را که بر بدنه ماشین، استوانه جلویی و استوانه عقبی وارد می‌شوند، رسم کنید و معادله‌های حرکت را برای هر قسمت از آن‌ها بنویسید.



شکل ۱۰۸ مدل ساده شده استوانه‌ها

پ) فرض کنید ماشین از حال سکون به حرکت درآید و تحت تأثیر نیروی گرانش، آزادانه حرکت کند. انواع ممکن حرکت و شتاب‌هایی را که استوانه‌ها به دست می‌آورند، برحسب کمیت‌های فیزیکی داده شده بیان کنید.

ت) فرض کنید ماشین از حال سکون به حرکت درآید و مسافت d را با چرخش خالص طی کند. همچنین پس از آن، ماشین وارد بخشی از جاده شود که ضریب‌های اصطکاک (برای این بخش جاده) کوچک‌تر از مقدارهای μ_s و μ_k باشند؛ به طوری که هر دو استوانه شروع به لغزش کنند. پس از اینکه ماشین مسافت s را در این جاده طی کرد، سرعت‌های خطی و زاویه‌ای هر استوانه را به طور جداگانه حساب کنید. فرض کنید مسافت‌های d و s خیلی بزرگ‌تر از ابعاد ماشین هستند.

پاسخ تشریحی مسئله‌ها

حل مسئله ۱

الف) سرعت انتشار سیگنال رادار، v_m ، در ماده برابر است با

$$\omega t - \beta z = \text{ثابت} \Rightarrow \beta z = \omega t - \text{ثابت}$$

$$v_m = dz/dt = \omega/\beta$$

با استفاده از رابطه (۳) داریم

$$v_m = \frac{\omega}{\omega \left\{ \frac{\mu_s}{\mu_k} \left[\left(1 + \sigma^2 / \varepsilon^2 \omega^2 \right)^{1/2} + 1 \right] \right\}^{1/2}}$$

با توجه به فرض مسئله داریم

$$v_m = \frac{1}{\left\{ \frac{\mu \epsilon}{\tau} (1 + 1) \right\}^{\frac{1}{\tau}}} = \frac{1}{\sqrt{\mu \epsilon}}$$

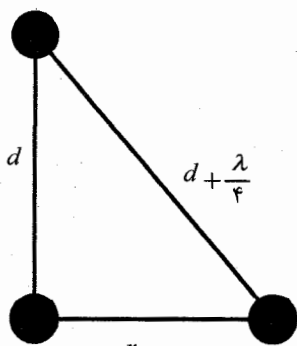
(ب) بیشترین عمق آشکارسازی (عمق پوسته، δ) یک جسم درون زمین با عکس ثابت تضعیف متناسب است. در نتیجه

$$\begin{aligned} \delta = \frac{1}{\alpha} &= \frac{1}{\omega \left\{ \frac{\mu \epsilon}{\tau} \left[(1 + \sigma^2 / \epsilon^2 \omega^2)^{\frac{1}{\tau}} - 1 \right] \right\}^{\frac{1}{\tau}}} \\ &= \frac{1}{\omega \left\{ \frac{\mu \epsilon}{\tau} \left[\left(1 + \frac{1}{\tau} \sigma^2 / \epsilon^2 \omega^2 \right) - 1 \right] \right\}^{\frac{1}{\tau}}} \\ &= \frac{1}{\omega \left\{ \frac{\mu \epsilon}{\tau} \left(\frac{1}{\tau} \sigma^2 / \epsilon^2 \omega^2 \right) \right\}^{\frac{1}{\tau}}} = (\tau / \sigma) (\epsilon / \mu)^{\frac{1}{\tau}} \end{aligned}$$

با قرار دادن مقدارهای داده شده داریم

$$\delta = \left(\frac{\tau}{10^{-3}} \right) \left(\frac{9 \epsilon_0}{\mu_0} \right)^{\frac{1}{\tau}} = \left(\frac{\tau}{10^{-3}} \right) \left(\frac{9 \times 1,85 \times 10^{-12}}{4 \times 3,14 \times 10^{-7}} \right)^{\frac{1}{\tau}} \approx 15,93 \text{ m}$$

(پ) با توجه به فرض‌های مسئله، شکل ۱۰۹ رسم شده است. با توجه به این شکل داریم



شکل ۱۰۹

$$r^2 + d^2 = \left(d + \frac{\lambda}{4} \right)^2$$

در نتیجه

$$r = \left(\frac{\lambda d}{2} + \frac{\lambda^2}{16} \right)^{\frac{1}{\tau}}$$

با قرار دادن مقدارهای داده شده داریم

$$0,5 = \left(\frac{4\lambda}{2} + \frac{\lambda^2}{16} \right)^{\frac{1}{\tau}}$$

یا

$$\lambda^2 + 32\lambda - 4 = 0$$

با حل معادله بالا به این نتیجه می‌رسیم

$$\lambda = 0,125 \text{ m}$$

از طرف دیگر، سرعت انتشار موج در زمین برابر است با

$$v_m = \frac{1}{\sqrt{\mu \epsilon}} = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 (9\epsilon_0)}}$$

$$v_m = \frac{1}{3\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}}$$

می‌دانیم سرعت نور برابر است با

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}} = 3 \times 10^8 \text{ m/s}$$

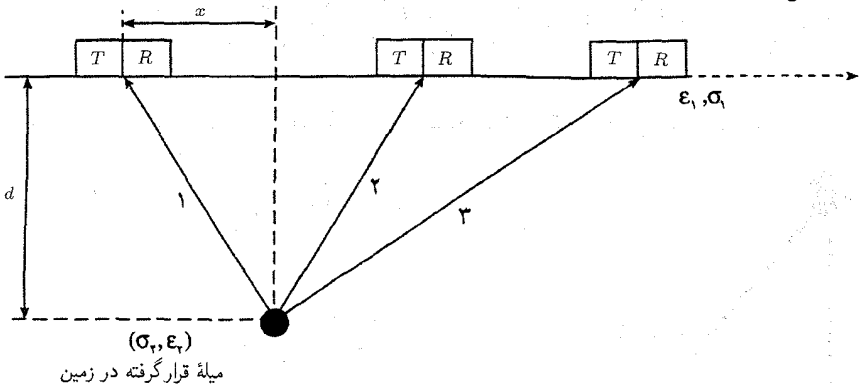
در نتیجه

$$v_m = 10^8 \text{ m/s}$$

بدین ترتیب، کمترین سامد لازم برای تشخیص دو میله به‌عنوان دو شیء مستقل از هم برابر است با

$$f_{\min} = \frac{v_m}{\lambda} = \frac{10^8}{0,125} = 8 \times 10^8 \text{ Hz} = 800 \text{ MHz}$$

(در شکل ۱۱۰، مسیر موج‌های الکترومغناطیسی برای بعضی از موقعیت‌های آنتن روی زمین، نشان داده شده است)



شکل ۱۱۰

زمان حرکت برحسب x به‌صورت زیر است

$$\left(\frac{tv}{2}\right)^2 = d^2 + x^2$$

$$t(x) = \frac{2\sqrt{d^2 + x^2}}{v}$$

به‌ازای $x = 0$ داریم

$$t(0) = t_{\min} = 100 \text{ ns}$$

$$v = v_m = 10^8 \text{ m/s}$$

$$100 \times 10^{-9} = \frac{2\sqrt{d^2}}{10^8} \Rightarrow d = 5 \text{ m}$$

حل مسئله ۲

الف) هرگاه چشمه نقطه‌ای جریان I_s در یک محیط همسانگرد نامتناهی قرار داشته باشد، بردار چگالی جریان در فاصله r از چشمه متناهی برابر است با

$$\vec{j} = \frac{I_s}{4\pi r^2} \vec{r}$$

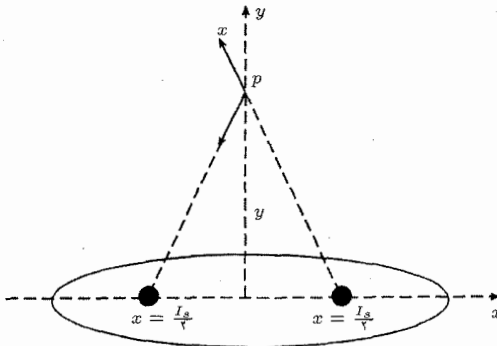
ب) با توجه به فرض مسئله، چون مقاومت ویژه بدن شکار و آب دریای اطراف آن برابرند، می‌توان دو کره را در یک محیط همسانگرد با مقاومت ویژه ρ در نظر گرفت. وقتی یکی از این کره‌های کوچک جریانی با آهنگ I_s تولید می‌کند، چگالی جریان در فاصله r از مرکز این کره برابر است با

$$\vec{j} = \frac{I_s}{4\pi r^2} \vec{r}$$

بدین ترتیب، میدان الکتریکی در فاصله r برابر است با

$$\vec{E}(\vec{r}) = \rho \vec{j} = \frac{\rho I_s}{4\pi r^2} \vec{r}$$

با توجه به مدلی که برای شکار در نظر گرفتیم، دو کره کوچک، یکی با پتانسیل مثبت و دیگری با پتانسیل منفی در بدن شکار وجود دارند، به طوری که جریان I_s از کره‌ای که پتانسیل مثبت دارد، به طرف کره‌ای که پتانسیل منفی دارد، برقرار است. شکل ۱۱۱ این مدل را نشان می‌دهد. فاصله دو کره کوچک برابر I_s است.



شکل ۱۱۱

میدان الکتریکی در نقطه P به مختصات $(0, y)$ برابر است با

$$\vec{E}_p = \vec{E}_+ + \vec{E}_-$$

که در آن \vec{E}_+ و \vec{E}_- به ترتیب میدان الکتریکی مربوط به کره‌های با پتانسیل مثبت و منفی هستند.
در نتیجه

$$\begin{aligned} \vec{E}_p &= \frac{\rho I_s}{4\pi} \left\{ \frac{1}{\left[(l_s/2)^2 + y^2 \right]^{3/2}} \left(-\frac{l_s}{2} \vec{i} + y \vec{j} \right) + \frac{1}{\left[(l_s/2)^2 + y^2 \right]^{3/2}} \left(-\frac{l_s}{2} \vec{i} - y \vec{j} \right) \right\} \\ &= \frac{\rho I_s}{4\pi} \left\{ \frac{l_s (-\vec{i})}{\left[(l_s/2)^2 + y^2 \right]^{3/2}} \right\} \end{aligned}$$

با توجه به فرض مسئله $l_s \ll y$ است. بنابراین،

$$\vec{E}_p \simeq -\frac{\rho I_s l_s}{4\pi y^3} \vec{i}$$

پ) میدان الکتریکی در نقطه وسط خط رابط دو چشمه کروی برابر است با

$$\vec{E}(x) = \frac{\rho I_s}{4\pi} \left[\frac{1}{(x - l_s/2)^2} + \frac{1}{(x + l_s/2)^2} \right] (-\vec{i})$$

در نتیجه، اختلاف پتانسیل بین کره‌ها برابر است با

$$\begin{aligned} V_s &= \Delta V = V_+ - V_- = - \int_{(-l_s/2+r_s)}^{(l_s/2-r_s)} \vec{E}(x) \cdot d\vec{x} \\ &= -\frac{\rho I_s}{4\pi} \int \left[\frac{1}{(x - l_s/2)^2} + \frac{1}{(x + l_s/2)^2} \right] (-\vec{i}) \cdot (\vec{i} dx) \\ &= \frac{\rho I_s}{4\pi} \left\{ -\frac{1}{-2+l} \left[\frac{1}{(l_s/2 - r_s - l_s/2)} - \frac{1}{(-l_s/2 + r_s - l_s/2)} \right] \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{-2+l} \left[\frac{1}{(l_s/2 - r_s + l_s/2)} - \frac{1}{(-l_s/2 + r_s + l_s/2)} \right] \right\} \\ &= \frac{\rho I_s}{4\pi} \left(\frac{2}{r_s} - \frac{2}{l_s - r_s} \right) = \frac{2\rho I_s}{4\pi} \left[\frac{l_s - r_s - r_s}{(l_s - r_s)r_s} \right] \\ &= \frac{\rho I_s}{2\pi r_s} \left(\frac{l_s - 2r_s}{l_s - r_s} \right) \end{aligned}$$

با توجه به فرض مسئله $l_s \gg r_s$ است. بنابراین،

$$V_s = \Delta V \approx \frac{\rho I_s}{2\pi r_s}$$

مقاومت بین کره‌های درون شکار برابر است با

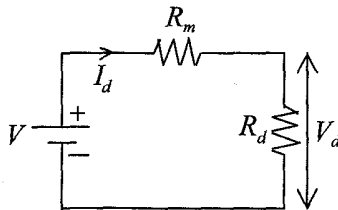
$$R_s = \frac{V_s}{I_s} = \frac{\rho}{2\pi r_s}$$

همچنین توان تولید شده توسط شکار برابر است با

$$P = I_s V_s = \frac{\rho I_s^2}{2\pi r_s}$$

(ت در مدار شکل ۱۱۲، جریان موجود در مدار و V_d اختلاف پتانسیل بین کره‌های آشکارساز (شکارچی) هستند. با توجه به آنچه که در قسمت قبل به دست آمد، می‌توان نوشت

$$R_m = \frac{\rho}{2\pi r_d}$$



شکل ۱۱۲

همچنین میدان الکتریکی بین کره‌های آشکارساز (شکارچی)، برابر است با

$$E = \frac{\rho I_s l_s}{2\pi y^2}$$

به علاوه، اختلاف پتانسیل الکتریکی بین کره‌های آشکارساز ناشی از میدان الکتریکی القایی توسط شکار عبارت است از

$$V = E l_d = \frac{\rho I_s l_s l_d}{2\pi y^2}$$

در نتیجه، برای اختلاف پتانسیل بین کره‌های آشکارساز (شکارچی) داریم

$$V_d = V \frac{R_d}{R_d + R_m} = \frac{\rho I_s l_s l_d}{2\pi y^2} \frac{R_d}{R_d + \rho/2\pi r_d}$$

توان منتقل شده از چشمه به طرف آشکارساز برابر است با

$$P_d = I_d V_d = \frac{V}{R_d + R_m} V_d = \left(\frac{\rho I_s l_s l_d}{\sqrt{2} \pi y^2} \right)^2 \left[\frac{R_d}{(R_d + \rho / \sqrt{2} \pi r d)} \right]^2$$

ث) هنگامی توان P_d بیشینه است که عبارت زیر بیشینه باشد

$$R_t = \frac{R_d}{(R_d + \rho / \sqrt{2} \pi r d)^2} = \frac{R_d}{(R_d + R_m)^2}$$

بدین ترتیب

$$\frac{dR_t}{dR_d} = \frac{(R_d + R_m)^2 - 2R_d(R_d + R_m)}{(R_d + R_m)^4} = 0$$

در نتیجه

$$(R_d + R_m) - 2R_d = 0$$

مناسبترین مقدار R_d را با R_d^o نشان می‌دهیم که برابر است با

$$R_d^o = R_m = \frac{\rho}{\sqrt{2} \pi r d}$$

بیشینه توان را با P_d^m نشان می‌دهیم به طوری که داریم

$$P_d^m = \left(\frac{\rho I_s l_s l_d}{\sqrt{2} \pi y^2} \right)^2 \left(\frac{\pi r d}{\sqrt{2} \rho} \right) = \frac{\rho (I_s l_s l_d)^2 r d}{32 \pi y^6}$$

حل مسئله ۳

برای ساده‌تر شدن، شکل ۱۱۳ را به جای شکل ۱۰۷ در نظر بگیرید.

(الف)

$$h_1 = h + 0,5t$$

$$R_i = 0,8R.$$

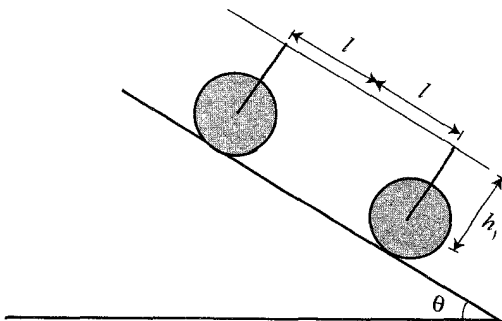
جرم استوانه بدون در نظر گرفتن پره‌ها m استوانه = $0,8M$

جرم هر پره m پره = $\frac{0,2M}{8} = 0,025M$

$$I = \int_{\text{استوانه}} r^2 dm = \int_{\text{پوسته استوانه‌ای}} r^2 dm + \int_{\text{پره ۱}} r^2 dm + \dots + \int_{\text{پره ۸}} r^2 dm$$

$$\begin{aligned} \oint_{\text{پوسته استوانه‌ای}} r^2 dm &= 2\pi\sigma \int_{R_i}^{R_o} r^3 dr \\ &= 0,1\Delta\pi\sigma(R_o^4 - R_i^4) \\ &= 0,1\Delta m \text{ استوانه} (R_o^2 + R_i^2) \\ &= 0,1\Delta(0,8M)R^2(1 + 0,64) = 0,1656MR^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \oint_{\text{پره}} r^2 dm &= \lambda \int_0^{R_i} r^2 dr = \frac{1}{3}\lambda R_i^3 \\ &= \frac{1}{3}m \text{ میله} R_i^2 = \frac{1}{3}(0,1 \times 25M)(0,64R^2) \\ &= 0,100533MR^2 \end{aligned}$$



شکل ۱۱۳

در نتیجه گشتاور لختی هر استوانه برابر است با

$$I = 0,1656MR^2 + 8 \times 0,100533MR^2 = 0,9MR^2$$

(ب) برای ساده‌تر شدن، دستگاه را به سه قسمت تقسیم می‌کنیم:

قسمت اول: بدنه که بیشتر شبیه یک صفحه همگن تخت رفتار می‌کند؛

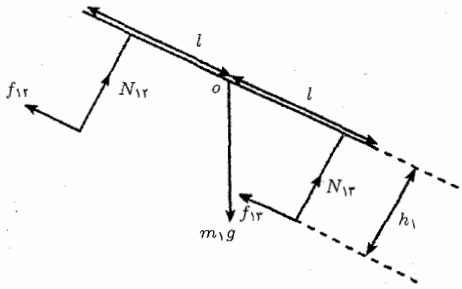
قسمت دوم: استوانه عقبی؛

قسمت سوم: استوانه جلویی.

قسمت اول: بدنه

در شکل ۱۱۴ نیروهای وارد بر بدنه ماشین نشان داده شده‌اند. در این شکل

N_{12} و f_{12} : مؤلفه‌های قائم و افقی نیرویی که از طرف استوانه عقبی به بدنه وارد می‌شود.



شکل ۱۱۴

N_{13} و f_{13} : مؤلفه‌های قائم و افقی نیرویی که از طرف استوانهٔ عقبی به بدنه وارد می‌شود.
نیروی وزن بدنه m_1g

بنابر قانون دوم نیوتون، برای راستای افقی داریم

$$m_1g \sin \theta - f_{12} - f_{13} = m_1a \quad (۱)$$

همچنین برای راستای قائم داریم

$$m_1g \cos \theta = N_{12} + N_{13} \quad (۲)$$

شرط تعادل گشتاورها حول نقطهٔ O به صورت زیر بیان می‌شود

$$N_{12}l - N_{13}l + f_{12}h_1 + f_{13}h_1 = 0 \quad (۳)$$

قسمت دوم: استوانهٔ عقبی

در شکل ۱۱۵ نیروهای وارد بر استوانهٔ عقبی نشان داده شده‌اند. در این شکل N_{21} و f_{21} : مؤلفه‌های قائم و افقی نیروی واکنشی که، از بدنه به استوانهٔ عقبی وارد می‌شود.

Mg : نیروی وزن استوانه

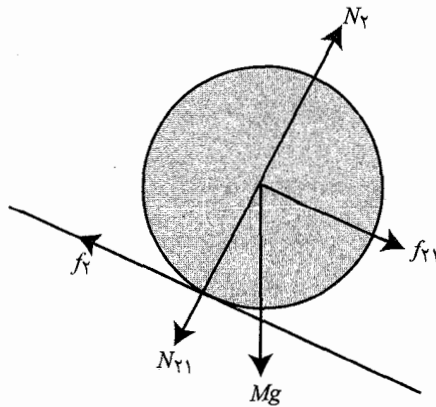
N_2 و f_2 : مؤلفه‌های قائم و افقی نیرویی که، از سطح زمین به استوانهٔ عقبی وارد می‌شود.
با استفاده از قانون دوم نیوتون، برای استوانهٔ عقبی داریم

$$f_{21} - f_2 + Mg \sin \theta = Ma \quad (۴)$$

$$N_2 - N_{21} - Mg \cos \theta = 0 \quad (۵)$$

برای چرخش خالص داریم

$$f_2 R = I \alpha_2 = I \frac{a_2}{R}$$



شکل ۱۱۵

یا

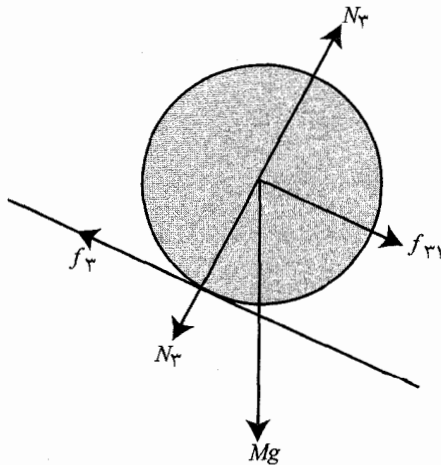
$$f_2 = \frac{I}{R^2} a \quad (۶)$$

برای چرخش همراه با لغزش داریم

$$F_2 = \mu_k N_2 \quad (۷)$$

قسمت سوم: استوانهٔ جلویی

در شکل ۱۱۶ نیروهای وارد بر استوانهٔ جلویی نشان داده شده‌اند. در این شکل



شکل ۱۱۶

N_{31} و f_{31} : مؤلفه‌های قائم و افقی نیروی واکنشی که از بدنه به استوانهٔ عقبی وارد می‌شود.

Mg : نیروی وزن استوانه

N_3 و f_3 : مؤلفه‌های قائم و افقی نیرویی که، از سطح زمین به استوانه عقبی وارد می‌شود. با استفاده از قانون دوم نیوتون، برای استوانه جلویی داریم

$$f_{31} - f_3 + Mg \sin \theta = Ma \quad (8)$$

$$N_3 - N_{31} - Mg \cos \theta = 0 \quad (9)$$

برای چرخش خالص داریم

$$f_3 R = I \alpha_3 = I a_3 / R$$

$$f_3 = \frac{I}{R^2} a \quad (10)$$

برای چرخش همراه با لغزش (غلتش)

$$F_3 = \mu_k N_3 \quad (11)$$

(پ) با توجه به معادله‌های (۲)، (۵) و (۹) داریم

$$m_1 g \cos \theta = N_2 - m_2 g \cos \theta + N_3 - m_3 g \cos \theta$$

$$N_2 + N_3 = (m_1 + m_2 + m_3) g \cos \theta = \gamma M g \cos \theta \quad (12)$$

همچنین از معادله‌های (۳)، (۵) و (۸) داریم

$$(N_3 - Mg \cos \theta)l - (N_2 - Mg \cos \theta)l$$

$$= h_1 (f_2 + Ma - Mg \sin \theta + f_3 + Ma - Mg \sin \theta)$$

$$(N_3 - N_2) = h_1 (f_2 + 2Ma - 2Mg \sin \theta + f_3) / l \quad (13)$$

در حالتی که هر دو استوانه فقط می‌چرخند

از معادله‌های (۴) و (۶) خواهیم داشت

$$f_{21} = \left(I / R^2 \right) a + Ma - Mg \sin \theta \quad (14)$$

همچنین از معادله‌های (۸) و (۱۰) داریم

$$f_{31} = \left(I / R^2 \right) a + Ma - Mg \sin \theta \quad (15)$$

بدین ترتیب، از معادله‌های (۱)، (۱۴) و (۱۵) می‌توان نوشت

$$\begin{aligned} \Delta Mg \sin \theta - \left\{ \left(I/R^2 \right) a + Ma - Mg \sin \theta \right\} \\ - \left\{ \left(I/R^2 \right) a + Ma - Mg \sin \theta \right\} = m_1 a \end{aligned}$$

$$\forall Mg \sin \theta = \left(\forall I/R^2 + \forall M \right) a$$

$$\begin{aligned} a &= \frac{\forall Mg \sin \theta}{\forall M + \forall I/R^2} = \frac{\forall Mg \sin \theta}{\forall M + \forall (\circ, \forall MR^2/R^2)} \\ &= \circ, ۸۳۳g \sin \theta \end{aligned} \quad (۱۶)$$

$$\begin{aligned} N_T &= \frac{\forall M}{\forall} g \cos \theta + \frac{h_1}{l} \left[\left(M + I/R^2 \right) \times \circ, ۸۳۳g \sin \theta - Mg \sin \theta \right] \\ &= \forall, ۵Mg \cos \theta + \frac{h_1}{l} \left[\left(M + \circ, \forall M \right) \times \circ, ۸۳۳g \sin \theta - Mg \sin \theta \right] \\ &= \forall, ۵Mg \cos \theta + \circ, ۴۱ \left(h_1/l \right) Mg \sin \theta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} N_T &= \frac{\forall M}{\forall} g \cos \theta - \frac{h_1}{l} \left[\left(I/R^2 + M \right) \times \circ, ۸۳۳g \sin \theta - Mg \sin \theta \right] \\ &= \forall, ۵g \cos \theta - \frac{h_1}{l} \left[\left(\circ, \forall M + M \right) \left(\frac{\forall Mg \sin \theta}{\circ, \forall M + \forall M} \right) - \forall Mg \sin \theta \right] \\ &= \forall, ۵g \cos \theta - \circ, ۴۱ \left(h_1/l \right) Mg \sin \theta \end{aligned}$$

شرایط چرخش خالص به صورت زیر است

$$f_T \leq \mu_s N_T \Rightarrow \left(I_T/R_T^2 \right) a \leq \mu_s N_T \quad (۱۷)$$

$$f_T \leq \mu_s N_T \Rightarrow \left(I_T/R_T^2 \right) a \leq \mu_s N_T \quad (۱۸)$$

برای معادله (۱۷) داریم

$$\circ, \forall M \times \circ, ۸۳۳g \sin \theta \leq \mu_s \left[\forall, ۵Mg \cos \theta - \circ, ۴۱ \left(h_1/l \right) Mg \sin \theta \right]$$

$$\tan \theta \leq \frac{\forall, ۵\mu_s}{\circ, ۵۸۳۱ + \circ, ۴۱\mu_s \left(h_1/l \right)}$$

همچنین برای معادله (۱۸) داریم

$$0,7m \times 0,833g \sin \theta \leq \mu_s [3,5mg \cos \theta + 0,41(h_1/l) mg \sin \theta]$$

$$\tan \theta \leq \frac{3,5\mu_s}{0,5831 - 0,41\mu_s (h_1/l)}$$

در حالتی که هر دو استوانه فقط می‌لغزند از معادله (۴) داریم

$$f_{21} = Ma + \mu_k N_2 - Mg \sin \theta \quad (19)$$

از معادله (۸) داریم

$$f_{31} = Ma + \mu_k N_3 - Mg \sin \theta \quad (20)$$

بدین ترتیب، از معادله‌های (۱۹) و (۲۰) داریم

$$\begin{aligned} \Delta Mg \sin \theta - (Ma + \mu_k N_2 - Mg \sin \theta) \\ - (Ma + \mu_k N_3 - Mg \sin \theta) &= m_1 a \\ a &= \frac{\forall Mg \sin \theta - \mu_k N_2 - \mu_k N_3}{\forall M} \\ &= g \sin \theta - \frac{\mu_k (N_2 + N_3)}{\forall M} \end{aligned} \quad (21)$$

از دو معادله بالا می‌توان نوشت

$$a = g \sin \theta - \mu_k g \cos \theta$$

شرایط لغزش کامل، مخالف شرایطی است که برای چرخش کامل بیان شد. بدین ترتیب داریم

$$f_2 > \mu_s N'_2 \Rightarrow (I_2/R'_2) a > \mu_s N'_2$$

$$f_3 > \mu_s N'_3 \Rightarrow (I_3/R'_3) a > \mu_s N'_3$$

که در آن N'_2 و N'_3 را در حالت چرخش کامل به‌دست آوردیم. در این صورت

$$\tan \theta > \frac{3,5\mu_s}{0,5831 + 0,41\mu_s (h_1/l)}$$

$$\tan \theta > \frac{3,5\mu_s}{0,5831 - 0,41\mu_s (h_1/l)}$$

در حالتی که یکی از استوانه‌ها فقط می‌چرخد و استوانهٔ دیگر در شرایط لغزش است (برای مثال، استوانهٔ جلویی فقط می‌چرخد و استوانهٔ عقبی لغزش کامل دارد).
با استفاده از معادلهٔ (۴) خواهیم داشت

$$f_{r1}h = m_2a + \mu_k N_2 - m_2g \sin \theta \quad (22)$$

همچنین از معادلهٔ (۵) داریم

$$f_{r1}h = m_3a + \left(I/R^2\right)a - m_3g \sin \theta \quad (23)$$

بدین ترتیب از معادله‌های (۱)، (۲۲) و (۲۳) خواهیم داشت

$$\begin{aligned} m_1g \sin \theta - \{m_2a + \mu_k N_2 - m_2g \sin \theta\} \\ - \{m_3a + (I/R^2)a - m_3g \sin \theta\} &= m_1a \\ m_1g \sin \theta + m_2g \sin \theta + m_3g \sin \theta - \mu_k N_2 \\ &= (I/R^2 + m_3)a + m_2a + m_1a \\ \Delta Mg \sin \theta + Mg \sin \theta + Mg \sin \theta - \mu_k N_2 \\ &= (0,7M + M)a + Ma + \Delta Ma \\ a &= \frac{\gamma Mg \sin \theta - \mu_k N_2}{\gamma, \gamma M} \quad (24) \end{aligned}$$

$$= 0,9091g \sin \theta - \frac{\mu_k N_2}{\gamma, \gamma M}$$

$$N_2 - N_2 = \frac{h_1}{l} \left(\mu_k N_2 + \frac{I}{R^2}a + \gamma Ma - \gamma Mg \sin \theta \right)$$

$$N_2 - N_2 = \frac{h_1}{l} (\mu_k N_2 + \gamma, \gamma M \times 0,9091g \sin \theta - \gamma, \gamma Mg - \gamma Mg \sin \theta)$$

$$N_2 - N_2 = \frac{h_1}{l} \left[\mu_k N_2 + \gamma, \gamma M (0,9091g \sin \theta - \frac{\gamma, \gamma \mu_k N_2}{\gamma, \gamma M}) - \gamma Mg \sin \theta \right]$$

$$N_2 - N_2 (1 + 0,65\mu_k h_1/l) = 0,4546Mg \sin \theta$$

$$N_2 + N_2 = \gamma Mg \cos \theta$$

در نتیجه خواهیم داشت

$$N_2 = \frac{\gamma M g \cos \theta - 0,4546 M g \sin \theta}{2 + 0,65 \mu_k (h_1/l)} \quad (25)$$

$$N_3 = \gamma M g \cos \theta - \frac{\gamma M g \cos \theta - 0,4546 M g \sin \theta}{2 + 0,65 \mu_k (h_1/l)}$$

با قرار دادن رابطه (25) در رابطه (24) داریم

$$\begin{aligned} a &= 0,9091 g \sin \theta - \frac{\mu_k N_2}{\gamma \gamma M} \\ &= 0,9091 g \sin \theta - \frac{\mu_k \gamma g \cos \theta - 0,4546 \sin \theta}{\gamma \gamma 2 + 0,65 \mu_k (h_1/l)} \end{aligned} \quad (26)$$

شرایط برای آن بخش از جاده که لغزش انجام می‌شود، به صورت زیر است

$$\begin{aligned} f_2 \leq \mu_s N_2' &\Rightarrow \left(I/R^2 \right) a \leq \mu_s N_2' \\ f_3 \leq \mu_s N_3' &\Rightarrow \left(I/R^2 \right) a > \mu_s N_3' \end{aligned} \quad (27)$$

که در آن N_2' و N_3' نیروهای عمودی برای شرایط چرخش خالص هستند.

ت) فرض می‌کنیم پس از چرخش به اندازه d ، هر دو استوانه شروع به لغزش می‌کنند و تا انتهای سطح شیب‌دار به همین صورت به حرکت خود ادامه می‌دهند (کل جابه‌جایی برابر s است). همچنین فرض می‌کنیم، در زمان t_1 جابه‌جایی d انجام می‌شود. در این صورت

$$v(t_1) = v_0 + at_1 = 0 + a_1 t_1 = a_1 t_1$$

$$d = v_0 t + \frac{1}{2} a_1 t_1^2 = \frac{1}{2} a_1 t_1^2$$

$$t_1 = \sqrt{2d/a_1}$$

$$v(t_1) = a_1 \sqrt{2d/a_1} = \sqrt{2a_1 d}$$

$$= \sqrt{2d \times 0,8233 g \sin \theta} = \sqrt{1,6466 dg \sin \theta}$$

سرعت زاویه‌ای پس از چرخش d ، برای هر دو استوانهٔ جلویی و عقبی برابر است با

$$\omega(t_1) = \frac{v(t_1)}{R} = \frac{1}{R} \sqrt{1,6466 dg \sin \theta}$$

فرض می‌کنیم زمان مورد نیاز از شروع لغزش تا انتهای سطح شیب‌دار برابر t_2 باشد، در این صورت داریم

$$v(t_2) = v(t_1) + a_2 t_2 = \sqrt{1,6666 dg \sin \theta} + a_2 t_2$$

$$s - d = v(t_1) t_2 + \frac{1}{2} a_2 t_2^2$$

$$t_2 = \frac{-v(t_1) + \sqrt{v(t_1)^2 + 2a_2(s-d)}}{a_2}$$

$$v(t_2) = \sqrt{1,6666 dg \sin \theta} - v(t_1) + \sqrt{v(t_1)^2 + 2a_2(s-d)}$$

سی و چهارمین المپیاد بین‌المللی فیزیک

تایپه، تایوان*

مسابقه نظری - زمان ۵ ساعت

۲۰۰۳/۱۳۸۲

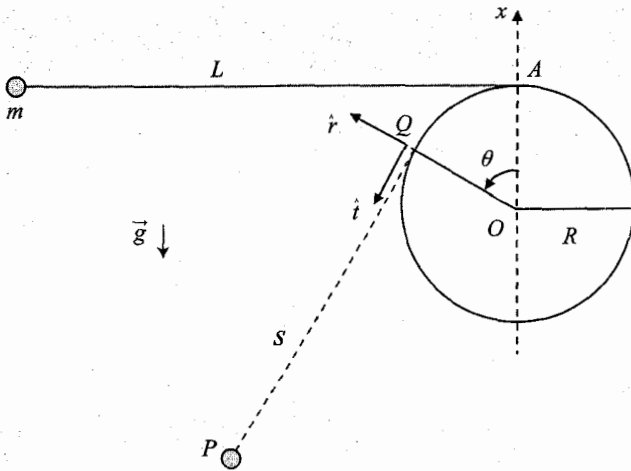
مسئله ۱ نوسان با وزنه در حال سقوط^۱

یک میله استوانه‌ای صلب به شعاع R ، به‌طور افقی بالای زمین نگه داشته شده است. وزنه آونگی به جرم m از نقطه A توسط ریسمانی به جرم ناچیز و طول L ($L > 2\pi R$) از بالای میله آویزان شده است (شکل ۱۱۷). وزنه را تا سطحی هم ارتفاع با نقطه A بالا می‌بریم و هنگامی که طناب سفت شد از حال سکون رها می‌کنیم. هرگونه کشیدگی طناب را نادیده بگیریم. فرض کنید رفتار وزنه آونگ شبیه جرم نقطه‌ای است و تنها در صفحه عمود بر محور میله نوسان می‌کند. بنابراین، وزنه آونگ رفتاری ذره‌ای دارد. شتاب گرانش \vec{g} است.

نقطه O را مبدأ دستگاه مختصات بگیریم. هنگامی که ذره در نقطه P است، ریسمان در نقطه Q بر سطح استوانه مماس است. طول پاره خط QP و s بنامید. بردارهای یک‌گانه مماسی و شعاعی در نقطه Q را به ترتیب \hat{t} و \hat{r} بگیریم. جابه‌جایی زاویه‌ای θ و شعاع OQ در صورتی مثبت در نظر گرفته می‌شود که به‌طور پادساعتگرد از محور عمودی x در امتداد OA ، اندازه‌گیری شود.

وقتی $\theta = 0^\circ$ است، طول s برابر L و انرژی پتانسیل گرانشی U ذره صفر است. همچنین هنگامی

*. Taipei, Taiwan 1. a swing with a falling weight



شکل ۱۱۷

که ذره حرکت می‌کند، آهنگ تغییر θ و s به ترتیب با $\dot{\theta}$ و \dot{s} داده می‌شود. تمام سرعت‌ها و بزرگی آن‌ها نسبت به نقطه ثابت O هستند؛ مگر اینکه به گونه‌ای دیگر فرض شوند.

قسمت اول

در این قسمت وقتی ذره حرکت می‌کند ریسمان سفت است. برحسب کمیت‌هایی که پیش از این معرفی کردیم (یعنی $s, \theta, \dot{s}, \dot{\theta}, g, L, R, \hat{r}, \hat{t}$)، مطلوب است

الف) رابطه بین $\dot{\theta}$ و \dot{s}

ب) سرعت \vec{v}_Q ذره نسبت به نقطه متحرک Q وقتی در مکان P است.

پ) سرعت \vec{v}' ذره نسبت به O وقتی در مکان P است.

ت) سرعت v ذره نسبت به O وقتی در مکان P است.

ث) مؤلفه مماسی شتاب ذره نسبت به O وقتی در مکان P است.

ج) انرژی پتانسیل گرانشی U وقتی در مکان P است.

چ) اندازه سرعت v_m ذره در پایین‌ترین نقطه مسیرش.

قسمت دوم

در این قسمت نسبت L/R برابر است با

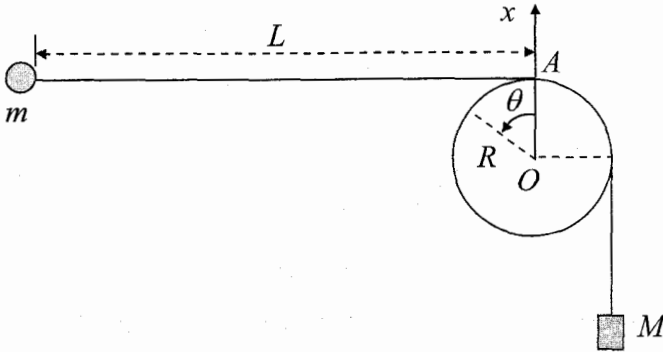
$$\frac{L}{R} = \frac{9\pi}{8} + \frac{2}{3} \cot \frac{\pi}{16} = 3,534 + 3,352 = 6,886$$

ح) اندازه سرعت v_0 ذره وقتی قطعه ریسمان از Q تا P هم راست است و هم کوتاه‌ترین طول را دارد، چقدر است؟ (برحسب g و R)

خ) اندازه سرعت v_H ذره در بالاترین نقطه H وقتی که به طرف دیگر میله نوسان می‌کند، چقدر است؟ (برحسب g و R).

قسمت سوم

در این قسمت، به جای آنکه وزنه آونگ از نقطه A آویزان شده باشد، توسط ریسمانی که از روی استوانه عبور کرده، به وزنه‌ای به جرم M وصل شده است (شکل ۱۱۸). وزنه M نیز مانند یک ذره رفتار می‌کند.



شکل ۱۱۸

در ابتدا جرم m آونگ در سطح A در حال سکون و وزنه M در زیر O آویزان است به گونه‌ای که بخش افقی L ریسمان سفت می‌ماند. سپس آونگ از حالت سکون رها می‌شود و وزنه M شروع به سقوط می‌کند. فرض کنید آونگ در صفحه قائم باقی می‌ماند و می‌تواند بدون هیچ برخوردی با وزنه در حال سقوط M ، نوسان کند.

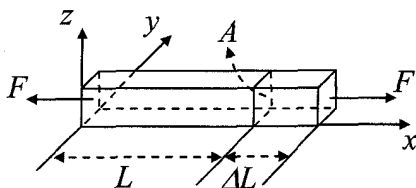
اصطکاک جنبشی بین طناب و سطح میله استوانه‌ای را نادیده بگیرید. اما اصطکاک ایستایی به حد کافی بزرگ فرض می‌شود به گونه‌ای که وقتی آونگ متوقف شد، وزنه به حالت سکون باقی بماند.

د) فرض کنید وزنه m پس از سقوط در مسافت D ، حتماً متوقف می‌شود و $(L - D) \gg R$. آونگ بتواند دور میله تا $\theta = 2\pi$ نوسان کند در حالی که، قسمت‌های آزاد ریسمان از میله مستقیم بمانند، نسبت $\alpha = D/L$ نباید از مقدار حدی α_c کمتر باشد. با نادیده گرفتن جمله‌های از مرتبه R/L یا بالاتر، برآوردی از α_c برحسب جمله‌هایی از M/m به دست آورید.

مسئله ۲ تشدیدگر بلوری پیزو الکتریک در ولتاژ متناوب^۱

میله یکنواخت بدون تنش^۲ به طول L و سطح مقطع A را در نظر بگیرید (شکل ۱۱۹). اگر نیروهایی برابر و مخالف و با اندازه F به طور عمود بر دو رخ انتهایی این میله اعمال شود، طول آن به اندازه ΔL تغییر می‌کند. تنش T روی دو رخ انتهایی به صورت F/A تعریف می‌شود. تغییر نسبی در طول میله، یعنی

1. a piezoelectric crystal resonator under an alternating voltage 2. stress



شکل ۱۱۹

$\Delta L/L$ کرنش^۱ نامیده می‌شود. قانون هوک را برحسب تنش و کرنش می‌توان به صورت زیر بیان کرد

$$T = YS \quad \text{یا} \quad \frac{F}{A} = Y\Delta L/L \quad (۱)$$

که در آن Y مدول یانگ میله نامیده می‌شود. توجه کنید که تنش تراکمی T متناظر با $F < 0$ و کاهش در طول است (یعنی $\Delta L < 0$). بدین ترتیب مقدار چنین تنشی منفی است و توسط $T = -P$ به فشار مرتبط است.

برای میله‌ای یکنواخت با چگالی ρ ، سرعت انتشار موج‌های طولی (یعنی، سرعت صوت) در طول

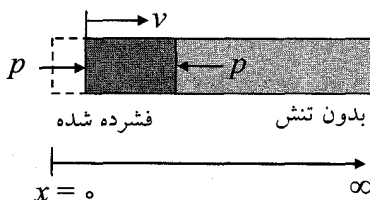
میله از رابطه زیر به دست می‌آید

$$u = \sqrt{Y/\rho} \quad (۲)$$

در پاسخ به پرسش‌های بعد اثر میرایی و اتلاف را نادیده بگیرید.

قسمت اول: ویژگی‌های مکانیکی

میله‌ای یکنواخت به چگالی ρ و طول نیم‌متناهی از $x = 0$ تا بی‌نهایت امتداد دارد (شکل ۱۲۰). میله در ابتدا ساکن و بدون تنش است. سپس پیستونی بدون وقفه فشار کوچک P را در مدت زمان کوتاه Δt روی سطح مقطع چپ آن در $x = 0$ وارد می‌کند، در نتیجه موج فشاری با سرعت u به طرف راست منتشر می‌شود.



شکل ۱۲۰

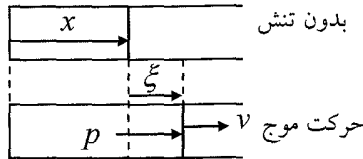
الف) اگر فشارهای بدون وقفه پیستون، میله را با سرعت ثابت v به حرکت درآورد، کرنش S و فشار P در سطح مقطع چپ میله طی مدت Δt چقدر است؟ پاسخ خود را تنها برحسب جمله‌هایی از ρ ، u و v به دست آورید.

1. strain

ب) موجی طولی را که در جهت x در میله حرکت می‌کند در نظر بگیرید. برای سطح مقطعی در x وقتی میله بدون تنش است (شکل ۱۲۱)، جابه‌جایی آن را در زمان t برابر $\xi(x, t)$ بگیرید و فرض کنید

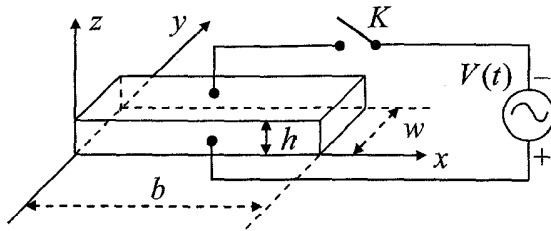
$$\xi(x, t) = \xi \cdot \sin k(x - ut) \quad (۳)$$

که در آن ξ و k مقادیر ثابتی هستند. سرعت $v(x, t)$ تنش $S(x, t)$ ، و فشار $P(x, t)$ را بر حسب تابعی از x و t به دست آورید.



شکل ۱۲۱

قسمت دوم: ویژگی‌های الکترومکانیکی (شامل اثر پیزوالکتریک) تیغه‌ای از بلور کوارتز را به طول b ، عرض w و ضخامت h در نظر بگیرید (شکل ۱۲۲). طول و ضخامت آن به ترتیب در امتداد محور x و محور z قرار دارند. الکترودهایی به صورت لایه فلزی نازک روی سطح‌های بالایی و پایینی آن نشانده شده است.



شکل ۱۲۲

رساناهای الکتریکی که در مرکز الکترودها لحیم شده‌اند به منزله پایه‌ای برای نگهداری بلور کوارتزند، به طوری که می‌توان فرض کرد که ساکن هستند و در راستای محور x نوسانی ندارند.

چگالی ρ و مدول یانگ Y بلور کوارتز مورد نظر به ترتیب برابرند با $2,65 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$ و $7,87 \times 10^{10} \text{ N/m}^2$. طول b تیغه 1 cm است و عرض w و ضخامت h آن به این صورت‌اند $w \ll b, h \ll w$.

با بستن کلید K ، فرض می‌کنیم تنها مدهای طولی موج ایستاده در بلور کوارتز در جهت x برانگیخته می‌شوند. برای موج ایستاده‌ای به بسامد $\nu = \omega/2\pi$ ، جابه‌جایی $\xi(x, t)$ سطح مقطع تیغه در وضعیت

x و زمان t را می‌توان به صورت زیر نوشت

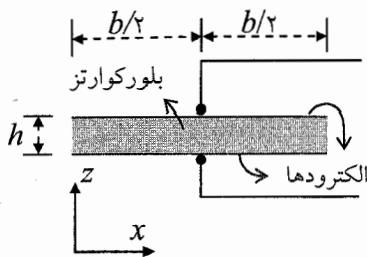
$$\xi(x, t) = 2\xi_0 g(x) \cos \omega t, \quad (0 \leq x \leq b) \quad (4)$$

که در آن ξ_0 ثابتی مثبت و تابع فضایی $g(x)$ به صورت زیر است

$$g(x) = B_1 \sin k(x - b/2) + B_2 \cos k(x - b/2) \quad (5)$$

$g(x)$ دارای مقدار بیشینه یک و از طرفی $k = \omega/u$ است. همان‌طور که فرض کردیم مرکز الکترودها ساکن‌اند و وجوه چپ و راست تیغه آزاد هستند و باید تنش (یا فشار) صفر داشته باشند.

(پ) مقادیرهای B_1 و B_2 را در معادله (۵) برای موج ایستاده طولی در بلور کوارتز به دست آورید.
 (ت) دو تا از کوتاه‌ترین بسامدهای موج‌های ایستاده طولی را که در این تیغه کوارتز می‌توانند برانگیخته شوند، پیدا کنید.



شکل ۱۲۳

اثر پیزوالکتریک ویژگی خاصی از بلور کوارتز است. فشردگی یا کشیدگی بلور، در عرض بلور ولتاژ الکتریکی تولید می‌کند، و برعکس، اعمال ولتاژ خارجی در عرض بلور بسته به چگونگی قطب‌های ولتاژ، موجب کشیدگی یا فشردگی بلور می‌شود. به علاوه، نوسان‌های مکانیکی و الکتریکی می‌توانند جمع شده و باعث تشدید در بلور کوارتز شوند.

برای بررسی اثر پیزوالکتریک، چگالی بار سطحی روی الکترودهای بالایی و پایینی را وقتی بلور در میدان الکتریکی E در جهت محور z است، به ترتیب $-\sigma$ و $+\sigma$ بگیرد. کرنش و تنش را در جهت محور x به ترتیب S و T بنامید. بدین ترتیب، اثر پیزوالکتریک بلور کوارتز را می‌توان با مجموعه معادله‌های زیر بیان کرد

$$S = (\lambda/Y)T + d_p E \quad (6)$$

$$\sigma = d_p T + \epsilon_T E \quad (7)$$

که در آن $1/Y = 1,27 \times 10^{-11} \text{ m}^2/\text{N}$ تن‌دهی کشسانی^۱ (یعنی عکس مدول یانگ) با میدان الکتریکی ثابت $\epsilon_T = 4,06 \times 10^{-11} \text{ F/m}$ و تنش ثابت، و $d_p = 2,25 \times 10^{-12} \text{ m/V}$ ضریب پیزوالکتریک است.

فرض کنید کلید K در شکل ۱۲۲ بسته شود. بدین ترتیب ولتاژ متناوب $V(t) = V_m \cos \omega t$ به الکترودها اعمال و میدان الکتریکی یکنواخت $E(t) = V(t)/h$ در امتداد محور z در بلور کوارتز ظاهر می‌شود. وقتی به حالت پایا برسیم، موج ایستاده طولی با بسامد زاویه‌ای ω در جهت x درون تیغه تولید می‌شود.

برای E یکنواخت، طول موج λ و بسامد ν موج ایستاده طولی درون تیغه توسط $\lambda = u/\nu$ مرتبط هستند، که در آن u از معادله (۲) به دست می‌آید. اما رابطه (۶) نشان می‌دهد، $T = YS$ اعتبار زیادی ندارد، هرچند تعریف‌های کرنش و تنش بدون تغییر می‌مانند و تنش وجوه انتهایی تیغه صفر می‌ماند.

ث) به کمک معادله‌های (۶) و (۷)، چگالی بار سطحی σ روی الکترود پایینی برحسب تابعی از x و t به صورت زیر خواهد شد

$$\sigma(x, t) = [D_1 \cos k(x - b/2) + D_2] V(t)/h \quad (8)$$

که در آن $k = \omega/u$ است. D_1 و D_2 را پیدا کنید.

ج) بار سطحی کل روی الکترود پایینی توسط رابطه زیر با $V(t)$ وابسته است

$$Q(t) = \left[1 + \alpha^2 \left(\frac{2}{kb} \tan \frac{kb}{2} - 1 \right) \right] C_0 V(t) \quad (9)$$

تابعی برای C_0 و همچنین تابع و یک مقدار عددی برای α^2 پیدا کنید.

مسئله ۳ قسمت اول: جرم نوترینو و واپاشی نوترونی^۲

یک نوترون آزاد به جرم m_n ، در حال سکون و در چارچوب مرجع آزمایشگاه به سه ذره بدون برهم‌کنش پروتون، الکترون، و پادنوترینو و امی‌پاشد. جرم سکون پروتون m_p است، در حالی که جرم سکون پادنوترینو m_{ν} غیرصفر و خیلی کوچک‌تر از جرم سکون الکترون m_e فرض می‌شود. سرعت نور در خلأ را با c نشان می‌دهیم و مقادیر جرم‌های اندازه‌گیری شده به شرح زیر است

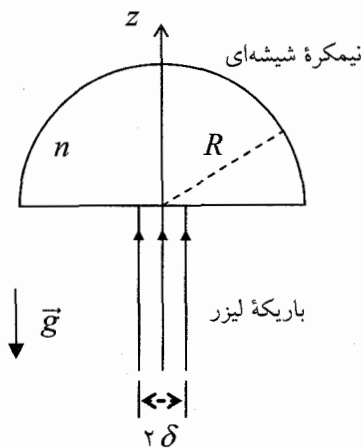
$$m_n = 939,56563 \text{ MeV}/c^2$$

$$m_p = 938,27231 \text{ MeV}/c^2$$

$$m_e = 0,5109907 \text{ MeV}/c^2$$

در بالا، همه انرژی‌ها و سرعت‌ها در چارچوب آزمایشگاه داده شده‌اند. انرژی کل الکترون خروجی از واپاشی را E بگیرد.

الف) بیشینه مقدار ممکن E ، یعنی E_{\max} و همچنین سرعت پادوترینو را وقتی $E = E_{\max}$ است پیدا کنید. هر دو جواب باید برحسب جرم‌های سکون ذره‌ها و سرعت نور بیان شوند. با فرض اینکه $m_\nu < \sqrt{3}eV/c^2$ ، نسبت v_m/c و E_{\max} را تا سه رقم بامعنا حساب کنید.



شکل ۱۲۴

قسمت دوم: تعلیق نوری^۱

نیمکره شیشه‌ای شفافى را به شعاع R و جرم m که ضریب شکست n دارد، در نظر بگیرید. ضریب شکست محیط بیرونی نیمکره برابر یک است. مطابق شکل ۱۲۴ باریکه موازی نور لیزر تکفام به طور یکنواخت و عمود به قسمت مرکزی قاعده نیمکره فرود می‌آید. شتاب گرانش \vec{g} به طور قائم و به طرف پایین است. شعاع سطح مقطع دایره‌ای باریکه لیزر δ ، خیلی کوچک‌تر از R است. هم نیمکره شیشه‌ای و هم باریکه لیزر نسبت به محور z ، به طور متقارن هم‌محورند. نور لیزر توسط نیمکره شیشه‌ای جذب نمی‌شود. سطح نیمکره توسط لایه نازکی از ماده‌ای شفاف پوشانده شده است؛ به طوری که وقتی نور وارد و از نیمکره خارج می‌شود بازتابی وجود ندارد. همچنین راه نوری طی شده توسط نور لیزر را که از لایه سطحی غیر بازتاباننده می‌گذرد نادیده بگیرید.

ب) با چشم‌پوشی از جمله‌های از مرتبه $(\delta/R)^3$ و بالاتر، توان لیزر P باید چقدر باشد تا با وزن نیمکره شیشه‌ای به تعادل برسد.

پاسخ تشریحی مسئله‌ها

حل مسئله ۱

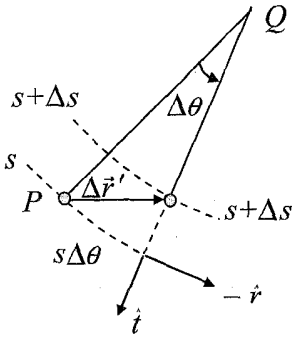
قسمت اول

الف) چون طول ریسمان $L = s + R\theta$ ثابت است، آهنگ تغییرات آن باید صفر باشد. به این ترتیب داریم

$$\dot{s} + R\dot{\theta} = 0 \quad (1)$$

ب) نقطه Q نسبت به O روی دایره‌ای به شعاع R و با سرعت زاویه‌ای θ حرکت می‌کند، به این ترتیب

$$\vec{v}_Q = R\theta\hat{t} = -s\hat{t} \quad (2)$$



شکل ۱۲۵

پ) با توجه به شکل ۱۲۵ جابه‌جایی نقطه P در بازه زمانی Δt نسبت به Q برابر است با

$$\begin{aligned} \Delta \vec{r}' &= (s\Delta\theta)(-\hat{r}) + (\Delta s)\hat{t} \\ &= [(s\dot{\theta})(-\hat{r}) + \dot{s}\hat{t}] \end{aligned}$$

به این ترتیب

$$\vec{v}' = -s\dot{\theta}\hat{r} + \dot{s}\hat{t} \quad (3)$$

ت) سرعت آونگ نسبت به O برابر است با جمع سرعت‌های نسبی که با معادله‌های (۲) و (۳) داده شده‌اند. به این ترتیب داریم

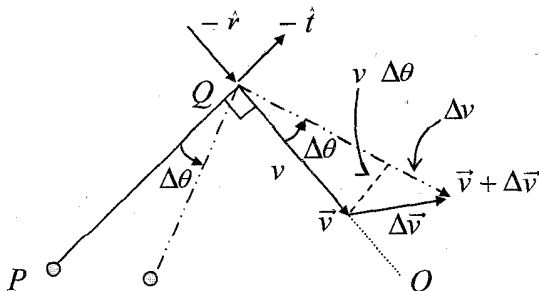
$$\begin{aligned} \vec{v} &= \vec{v}' + \vec{v}_Q \\ &= (-s\dot{\theta}\hat{r} + \dot{s}\hat{t}) + R\theta\hat{t} = -s\dot{\theta}\hat{r} \end{aligned} \quad (4)$$

ث) با توجه به شکل ۱۲۶ مؤلفه $(-\hat{t})$ تغییر سرعت $\Delta \vec{v}$ برابر است با

$$(-\hat{t}) \cdot \Delta \vec{v} = v\Delta\theta = v\dot{\theta}\Delta t \quad (5)$$

به علاوه، مؤلفه \hat{t} شتاب $\vec{a} = \Delta \vec{v} / \Delta t$ برابر است با

$$\hat{t} \cdot \vec{a} = -v\dot{\theta} \quad (6)$$



شکل ۱۲۶

با توجه به معادله (۴)، بزرگی سرعت \vec{v} آونگ برابر $s\dot{\theta}$ است. بنابراین، مؤلفه t شتاب را می‌توان به صورت زیر بازنویسی کرد

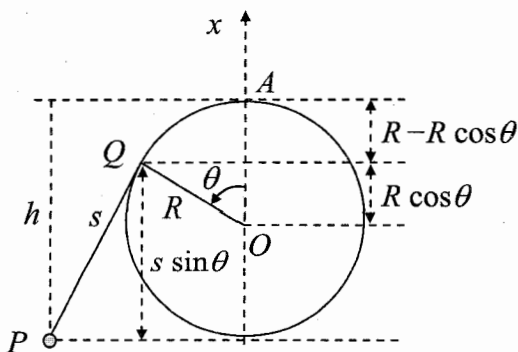
$$\vec{a} \cdot \hat{t} = -v\dot{\theta} = -(s\dot{\theta})\dot{\theta} = -s\dot{\theta}^2 \quad (7)$$

با توجه به شکل ۱۲۶ همچنین مؤلفه شعاعی شتاب برابر است با

$$\vec{a} \cdot \hat{r} = -\frac{dv}{dt} = -\frac{d(s\dot{\theta})}{dt} \quad (8)$$

(ج) با توجه به شکل ۱۲۷ انرژی پتانسیل گرانشی آونگ برابر است با

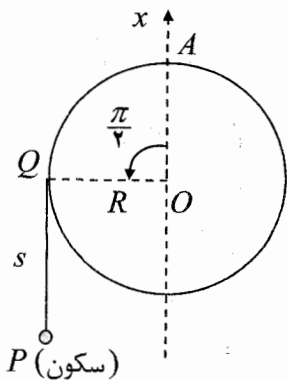
$$U = -mgh \quad (9)$$



شکل ۱۲۷

که می‌توان آن را برحسب جمله‌هایی از s و θ به صورت زیر بیان کرد

$$U(\theta) = -mg [R(1 - \cos \theta) + s \sin \theta] \quad (10)$$



شکل ۱۲۸

(ج) انرژی پتانسیل گرانشی آونگ U در پایین‌ترین نقطه مسیرش باید برابر کمترین مقدارش U_m فرض شود. اگر در این نقطه انرژی مکانیکی آونگ E ، برابر U_m باشد، انرژی جنبشی آن برابر صفر خواهد بود. به این ترتیب مطابق شکل ۱۲۸ آونگ ساکن باقی می‌ماند و در حالت تعادل استاتیکی خواهد بود. به علاوه انرژی پتانسیل وقتی $\theta = \pi/2$ یا $s = L - \pi R/2$ است به کمترین مقدارش می‌رسد.

با توجه به شکل ۱۲۸ انرژی پتانسیل کمینه برابر است با

$$U_m = U(\pi/2) = -mg[R + L - (\pi R/2)] \quad (11)$$

در ابتدا، انرژی مکانیکی کل E صفر است. از آنجا که E پایسته است، سرعت v_m آونگ در پایین‌ترین نقطه مسیرش باید در رابطه زیر صدق کند

$$E = 0 = \frac{1}{2}mv_m^2 + U_m \quad (12)$$

از معادله‌های (۱۱) و (۱۲) داریم

$$v_m = \sqrt{-2U_m/m} = \sqrt{2g[R + (L - \pi R/2)]} \quad (13)$$

قسمت دوم

(ح) با توجه به معادله (10) ، انرژی مکانیکی کل آونگ به صورت زیر نوشته می‌شود

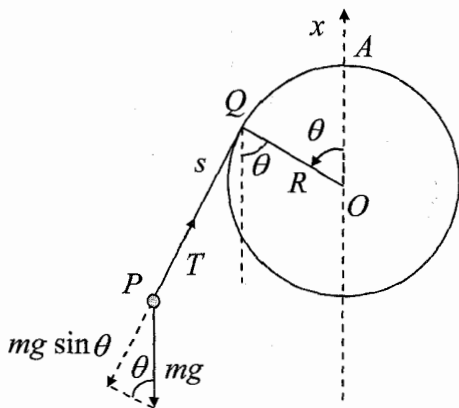
$$\begin{aligned} E = 0 &= \frac{1}{2}mv^2 + U(\theta) \\ &= \frac{1}{2}mv^2 - mg[R(1 - \cos \theta) + s \sin \theta] \end{aligned} \quad (14)$$

با توجه به معادله (۴) سرعت v برابر $s\dot{\theta}$ است. با قرار دادن در معادله (۱۴) داریم

$$v^2 = (s\dot{\theta})^2 = 2g[R(1 - \cos \theta) + s \sin \theta] \quad (15)$$

T را کشش ریسمان بگیرد. در این صورت با توجه به شکل ۱۲۹، مؤلفه \hat{t} نیروی برآیند وارد شده به آونگ برابر است با

$$-T + mg \sin \theta$$



شکل ۱۲۹

با توجه به معادله (۵) مؤلفه مماسی شتاب آونگ برابر $(-s\theta^2)$ است. بنابراین، با توجه به قانون دوم نیوتون خواهیم داشت

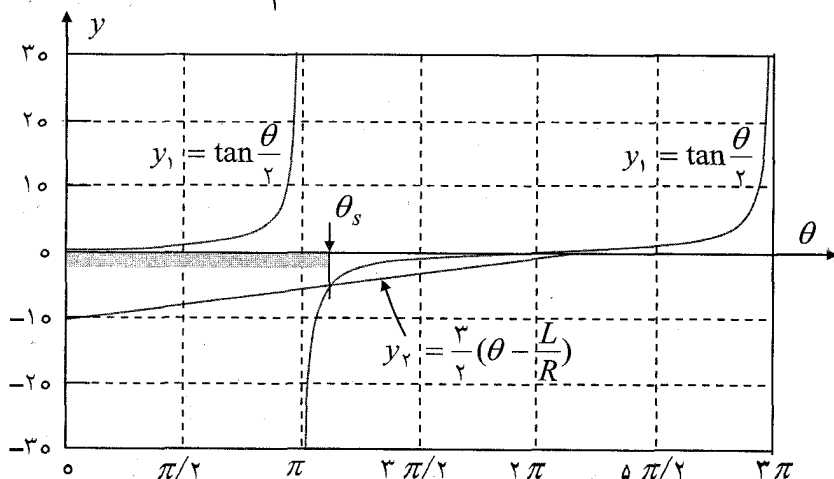
$$m(-s\theta^2) = -T + mg \sin \theta \quad (۱۶)$$

به کمک معادله‌های (۱۵) و (۱۶)، کشش ریسمان برابر است با

$$\begin{aligned} T &= m(s\theta^2 + g \sin \theta) \\ &= \frac{mg}{s} [2R(1 - \cos \theta) + 3s \sin \theta] \\ &= \frac{2mgR}{s} \left[\tan \frac{\theta}{2} - \frac{3}{2} (\theta - L/R) \right] (\sin \theta) \\ &= \frac{2mgR}{s} (y_1 - y_2) (\sin \theta) \end{aligned} \quad (۱۷)$$

تابع‌های $y_1 = \tan(\theta/2)$ و $y_2 = 3(\theta - L/R)/2$ در شکل ۱۳۰ رسم شده‌اند. با توجه به معادله (۱۷) و شکل ۱۳۰، نتایج جدول ۱ به دست می‌آید. در حالتی که $y_2 = y_1$ است، زاویه را θ_s می‌نامیم که از رابطه زیر به دست می‌آید

$$\frac{3}{2} (\theta_s - L/R) = \tan(\theta_s/2) \quad (۱۸)$$



شکل ۱۳۰

همین‌طور، می‌توان نوشت

$$L/R = \theta_s - \frac{2}{3} \tan(\theta_s/2) \quad (۱۹)$$

جدول ۱

	$(y_1 - y_2)$	$\sin \theta$	کشش T
$0 < \theta < \pi$	مثبت	مثبت	مثبت
$\theta = \pi$	$+\infty$	صفر	مثبت
$\pi < \theta < \theta_s$	منفی	منفی	مثبت
$\theta = \theta_s$	صفر	منفی	صفر
$\theta_s < \theta < 2\pi$	مثبت	منفی	منفی

با توجه به فرض مسئله، مقدار L/R برابر است با

$$L/R = \frac{9\pi}{8} + \frac{2}{3} \cot \frac{\pi}{16}$$

$$= \left(\pi + \frac{\pi}{8}\right) - \frac{2}{3} \tan \frac{1}{2} \left(\pi + \frac{\pi}{8}\right) \quad (20)$$

مقایسه معادله‌های (۱۹) و (۲۰) مقدار $\theta_s = 9\pi/8$ را به دست می‌دهد.

جدول ۱ نشان می‌دهد در گستره زاویه‌ای $0 < \theta < \theta_s$ کشش ریسمان باید مثبت (یا ریسمان باید سفت و راست) باشد. وقتی θ به θ_s می‌رسد، کشش T باید صفر شود و قسمتی از ریسمان که در تماس با میله نیست پس از آن راست نیست. به این ترتیب کمترین مقدار ممکن s_{\min} برای طول s پاره خط QP به ازای $\theta = \theta_s$ است و خواهیم داشت

$$s_{\min} = L - R\theta_s$$

$$= R \left(\frac{9\pi}{8} + \frac{2}{3} \cot \frac{\pi}{16} - \frac{9\pi}{8} \right) = \frac{2R}{3} \cot \frac{\pi}{16} = 3.352R \quad (21)$$

وقتی $\theta = \theta_s$ است، $T = 0$ و از معادله‌های (۱۵) و (۱۶) داریم

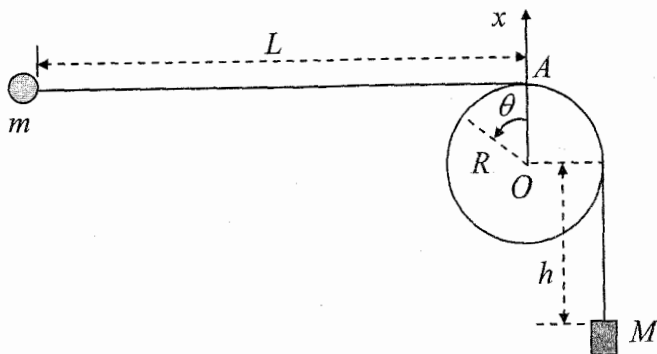
$$v^2 = -gs \sin \theta$$

بدین ترتیب اندازه سرعت v_s برابر است با

$$v_s = \sqrt{-gs_{\min} \sin \theta} = \sqrt{\frac{2gR}{3} \cot \frac{\pi}{16} \sin \frac{\pi}{8}}$$

$$= \sqrt{\frac{2gR}{3}} \cot \frac{\pi}{16} = 1/133 \sqrt{gR} \quad (22)$$

(خ) وقتی $\theta \geq \theta_s$ است، آونگ شبیه پرتابه‌ای بر اثر گرانش حرکت می‌کند. همان‌طور که در شکل ۱۳۱ نشان داده شده است، آونگ با سرعت اولیه v_s از مکان $P = (x_s, y_s)$ در جهتی که با محور y زاویه $\phi = (3\pi/2 - \theta_s)$ می‌سازد، پرتاب شده است.



شکل ۱۳۲

برابر است با

$$-Mgh = E' - Mg(h + D) \tag{۲۷}$$

که در آن E' انرژی مکانیکی آونگ در هنگامی است که وزنه متوقف می‌شود. در نتیجه

$$E' = MgD \tag{۲۸}$$

فرض کنید Λ طول کل ریسمان باشد. بدین ترتیب، مقدار آن در $\theta = 0^\circ$ باید برابر با هر جابه‌جایی زاویه‌ای دیگر θ باشد. در نتیجه داریم

$$\Lambda = L + \frac{\pi}{\varphi} R + h = s + R\left(\theta + \frac{\pi}{\varphi}\right) + (h + D) \tag{۲۹}$$

با توجه به اینکه $D = \alpha L$ و با قرار دادن $l = L - D$ می‌توان نوشت

$$l = L - D = (1 - \alpha)L \tag{۳۰}$$

از معادله‌های (۲۹) و (۳۰) داریم

$$s = L - D - R\theta = l - R\theta \tag{۳۱}$$

پس از اینکه وزنه متوقف شد، انرژی مکانیکی کل آونگ باید پایسته بماند. مطابق معادله (۲۸) به‌جای معادله (۱۴) می‌توان نوشت

$$E' = MgD = \frac{1}{2}mv^2 - mg[R(1 - \cos \theta) + s \sin \theta] \tag{۳۲}$$

به این ترتیب مجذور اندازه سرعت آونگ برابر است با

$$v^2 = (s\dot{\theta})^2 = \frac{2MgD}{m} + 2gR \left[(1 - \cos \theta) + \frac{s}{R} \sin \theta \right] \tag{۳۳}$$

با قرار دادن این مقدار در معادله (۱۶) داریم

$$\begin{aligned}
 T &= m(s\dot{\theta}^2 + g \sin \theta) \\
 &= \frac{mg}{s} \left[\frac{2M}{m} D + 2R(1 - \cos \theta) + 3s \sin \theta \right] \\
 &= \frac{2mgR}{s} \left[\frac{MD}{mR} + (1 - \cos \theta) + \frac{3}{2} \left(\frac{l}{R} - \theta \right) \sin \theta \right] \quad (34)
 \end{aligned}$$

برای به دست آوردن آخرین معادله، از معادله (۳۱) استفاده کرده‌ایم.
با تعریف تابع زیر

$$f(\theta) = 1 - \cos \theta + \frac{3}{2} \left(\frac{l}{R} - \theta \right) \sin \theta \quad (35)$$

و با توجه به این واقعیت که $l = (L - D) \gg R$ می‌توان نوشت

$$\begin{aligned}
 f(\theta) &\approx 1 + \frac{3}{2} \frac{l}{R} \sin \theta - \cos \theta \\
 &= 1 + A \sin(\theta - \phi) \quad (36)
 \end{aligned}$$

که در آن

$$A = \sqrt{1 + \left(\frac{3l}{2R} \right)^2} \quad \text{و} \quad \phi = \tan^{-1} \frac{3l/2R}{\sqrt{1 + (3l/2R)^2}} \quad (37)$$

با استفاده از معادله (۳۶)، کمترین مقدار $f(\theta)$ برابر است با

$$f_{\min} = 1 - A = 1 - \sqrt{1 + \left(\frac{3l}{2R} \right)^2} \quad (38)$$

از این رو کشش T وقتی آونگ دور میله نوسان می‌کند مثبت می‌ماند، بنابراین، از معادله (۳۴) نامساوی زیر را می‌توان نوشت

$$\frac{MD}{mR} + f_{\min} = \frac{M(L-l)}{mR} + 1 - \sqrt{1 + \left(\frac{3l}{2R} \right)^2} \geq 0 \quad (39)$$

یا

$$\left(\frac{ML}{mR} \right) + 1 \geq \left(\frac{Ml}{mR} \right) + \sqrt{1 + \left(\frac{3l}{2R} \right)^2} \approx \left(\frac{Ml}{mR} \right) + \left(\frac{3l}{2R} \right) \quad (40)$$

به کمک معادله‌های (۳۰) و (۴۰) می‌توان نوشت

$$\left(\frac{ML}{mR}\right) + 1 \geq \left[\left(\frac{ML}{mR}\right) + \left(\frac{3L}{2R}\right)\right] (1 - \alpha) \quad (41)$$

با نادیده گرفتن جمله‌های از مرتبه (R/L) یا بالاتر، نامساوی بالا به صورت زیر درمی‌آید

$$\alpha \geq 1 - \frac{(ML/mR) + 1}{(ML/mR) + (3L/2R)} = \frac{(3L/2R) - 1}{(ML/mR) + (3L/2R)} \\ = \frac{1 - (2R/3L)}{2M/3m + 1} \approx \frac{1}{1 + 2M/3m} \quad (42)$$

در نتیجه مقدار حدی برای نسبت D/L برابر است با

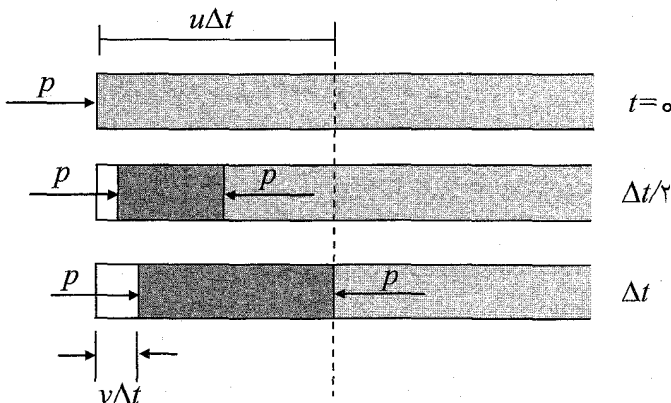
$$\alpha_c = \frac{1}{(1 + 2M/3m)} \quad (43)$$

حل مسئله ۲

قسمت اول

الف) با توجه به شکل ۱۳۳، ریخ چپ میله مسافت $v\Delta t$ را طی می‌کند در حالی که موج فشار مسافت $u\Delta t$ را می‌پیماید به طوری که $u = \sqrt{Y/\rho}$ است. کرنش در ریخ چپ برابر است با

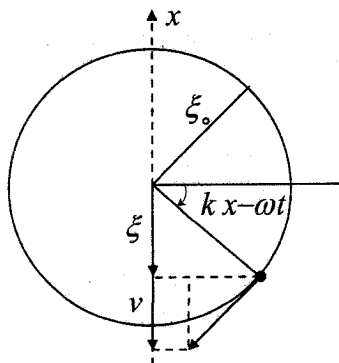
$$S = \frac{\Delta L}{L} = \frac{-v\Delta t}{u\Delta t} = \frac{v}{u} \quad (1)$$



شکل ۱۳۳

با توجه به قانون هوک، فشار در ریخ چپ برابر است با

$$P = -YS = Y \frac{v}{u} = \rho uv \quad (2)$$



شکل ۱۳۴

(ب) سرعت v با جابه‌جایی ξ مرتبط است. در حرکت هماهنگ ساده (یا مطابق شکل ۱۳۴ در حرکت دایره‌ای یکنواخت) داریم

$$\omega = kv$$

به علاوه، با توجه به اینکه

$$\xi(x, t) = \xi \cdot \sin k(x - ut)$$

است، داریم

$$v(x, t) = -kv\xi \cdot \cos k(x - ut)$$

همچنین با توجه به رابطه بین فشار و سرعت که در قسمت (الف) به دست آمد، می‌توان نوشت

$$S(x, t) = \Delta\xi/\Delta x = k\xi \cdot \cos k(x - ut)$$

$$P(x, t) = -Y\Delta\xi/\Delta x = -kY\xi \cdot \cos k(x - ut)$$

قسمت دوم

(پ) با توجه به فرض مسئله، تغییرات فضایی جابه‌جایی $\xi(x, t)$ به صورت زیر است

$$g(x) = B_1 \sin k(x - b/2) + B_2 \cos k(x - b/2)$$

چون مرکز الکترودها ساکن فرض شده است، به ازای $x = b/2$ داریم

$$g(b/2) = 0 \Rightarrow B_2 = 0$$

از طرفی بیشینه $g(x)$ برابر یک است، به این ترتیب $B_1 = \pm 1$ و داریم

$$g(x) = \pm \sin \frac{\omega}{u}(x - b/2)$$

که در آن از رابطه $k = \omega/u$ استفاده شده است. در نتیجه جابه‌جایی برابر است با

$$\xi(x, t) = \pm 2\xi \cdot \sin \frac{\omega}{u}(x - b/2) \cos \omega t$$

(ت) چون در دو انتهای تیغه کوارتز (یعنی $x = 0$ و $x = b$) نباید فشار P (یا تنش T) وجود داشته باشد، پاسخ این مسئله را می‌توان با مقایسه بسامدهای تشدید موج‌های صوتی در یک لوله باز به طول b به دست آورد. از طرفی، چون مرکز الکترودها ساکن‌اند، همه هماهنگ‌های زوج صوت اصلی را باید به حساب نیاوریم زیرا شکم‌های آن‌ها از گره‌ها بیشتر است.

به این ترتیب طول موج صوت اصلی برابر $\lambda = 2b$ است که متناظر با بسامد اصلی $f_1 = u/2b$ است. سرعت انتشار u برابر است با

$$u = \sqrt{\frac{Y}{\rho}} = \sqrt{\frac{7,87 \times 10^{10}}{2,65 \times 10^3}} = 5,45 \times 10^3 \text{ m/s}$$

با توجه به فرض مسئله $b = 1 \times 10^{-2}$ است، به این ترتیب

$$f_1 = u/2b = 272 \text{ kHz}$$

$$f_3 = 3v_1 = \frac{3u}{2b} = 818 \text{ kHz}$$

ث) از معادله (۶) داریم

$$T = Y(S - d_p E)$$

با قرار دادن این معادله در معادله (۷) داریم

$$\sigma = Y d_p S + \varepsilon_T \left(1 - Y d_p^2 / \varepsilon_T \right) E$$

از آنجایی که به ازای $x = b/2$ باید یک گره برای هر موج ایستاده طولی درون تیغه داشته باشیم، جابه جایی ξ و کرنش S باید به صورت زیر باشند

$$\xi(x, t) = \xi_m \sin k(x - b/2) \cos(\omega t + \phi)$$

$$S(x, t) = \frac{\Delta \xi}{\Delta x} = k \xi_m \cos k(x - b/2) \cos(\omega t + \phi)$$

که در آن ثابت فاز ϕ مستقل از زمان است.

با فرض اینکه، میدان الکتریکی E بین الکترودها یکنواخت و تنها به زمان وابسته است، داریم

$$E(x, t) = \frac{V(t)}{h} = \frac{V_m \cos \omega t}{h}$$

با قرار دادن دو معادله اخیر در معادله $T = Y(S - d_p E)$ داریم

$$T = Y \left[k \xi_m \cos k(x - b/2) \cos(\omega t + \phi) - \frac{d_p}{h} V_m \cos \omega t \right]$$

تنش T در دو انتهای تیغه (یعنی $x = 0$ و $x = b$) در همه زمانها باید صفر باشد، زیرا آنها آزادند و این در حالتی ممکن است که $\phi = 0$ باشد، در نتیجه

$$k \xi_m \cos kb/2 = d_p \frac{V_m}{h}$$

با توجه به آنچه گفته شد، چگالی بار سطحی باید به صورت زیر به زمان وابسته باشد

$$\sigma(x, t) = \sigma(x) \cos \omega t$$

به طوری که داریم

$$\begin{aligned} \sigma(x) &= Y d_p k \xi_m \cos k(x - b/2) + \varepsilon_T \left(1 - Y d_p^2 / \varepsilon_T\right) V_m / h \\ &= \left[Y \frac{d_p^2}{\cos kb/2} \cos k(x - b/2) + \varepsilon_T \left(1 - Y d_p^2 / \varepsilon_T\right) \right] V_m / h \end{aligned}$$

ج) بار سطحی کل $Q(t)$ روی الکتروود پایینی در زمان t ، با انتگرال‌گیری از $\sigma(x, t)$ روی تمام سطح الکتروود به دست می‌آید. به این ترتیب

$$\begin{aligned} \frac{Q(t)}{V(t)} &= \frac{1}{V(t)} \int_0^b \sigma(x, t) w dx = \frac{1}{V_m} \int_0^b \sigma(x) w dx \\ &= \frac{w}{h} \int_0^b \left[Y \frac{d_p^2}{\cos kb/2} \cos k(x - b/2) + \varepsilon_T \left(1 - Y d_p^2 / \varepsilon_T\right) \right] dx \\ &= \left(\varepsilon_T \frac{bw}{h} \right) \left[Y \frac{d_p^2}{\varepsilon_T} \left(2/kb \tan kb/2 \right) + \left(1 - Y d_p^2 / \varepsilon_T \right) \right] \\ &= C_0 \left[\alpha^2 \left(2/kb \tan kb/2 \right) + \left(1 - \alpha^2 \right) \right] \end{aligned}$$

که در آن

$$C_0 = \varepsilon_T bw / h$$

$$\alpha^2 = Y d_p^2 / \varepsilon_T = \frac{(2/25)^2 \times 10^{-2}}{1,27 \times 4,06} = 9,82 \times 10^{-3}$$

(ثابت α ضریب جفت‌شدگی الکترومکانیکی نامیده می‌شود.)

حل مسئله ۳

قسمت اول

الف) در چارچوب ساکن نوترون، چار بردار انرژی تکانه الکترون، پروتون، و پادنوترون را به ترتیب $(c^2 E_e, c\vec{q}_e)$ ، $(c^2 E_p, c\vec{q}_p)$ ، و $(c^2 E_\nu, c\vec{q}_\nu)$ بگیرد. توجه کنید که یکای همه کمیت‌های E_e ، E_p ، E_ν ، \vec{q}_e ، \vec{q}_p ، \vec{q}_ν جرم است. پروتون و پادنوترون را می‌توان به صورت دستگاهی به جرم سکون کل M_c ، انرژی کل $c^2 E_c$ ، و تکانه کل $c\vec{q}_c$ در نظر گرفت. به علاوه داریم

$$E_c = E_p + E_\nu, \quad \vec{q}_c = \vec{q}_\nu + \vec{q}_p, \quad M_c^2 = E_c^2 - q_c^2 \quad (1)$$

اندازه بردار \vec{q}_c را با q_c نشان می‌دهیم. این موضوع را برای سایر بردارها نیز به‌کار می‌بریم. از آنجایی که در واپاشی نوترون، انرژی و تکانه پایسته می‌مانند، داریم

$$E_c + E_e = m_n \quad (۲)$$

$$\vec{q}_c = -\vec{q}_e \quad (۳)$$

یا

$$q_c^2 = q_e^2 = E_e^2 - m_e^2 \quad (۴)$$

با قرار دادن سومین معادله (۱) در معادله (۴) داریم

$$E_c^2 - M_c^2 = E_e^2 - m_e^2 \quad (۵)$$

از معادله‌های (۲) و (۵) داریم

$$E_c - E_e = \frac{1}{m_n} (M_c^2 - m_e^2) \quad (۶)$$

از حل دستگاه دو معادله‌ای (۲) و (۶) داریم

$$E_c = \frac{1}{\sqrt{2}m_n} (m_n^2 - m_e^2 + M_c^2) \quad (۷)$$

$$E_e = \frac{1}{\sqrt{2}m_n} (m_n^2 + m_e^2 - M_c^2) \quad (۸)$$

از معادله‌های (۴) و (۸) می‌توان نوشت

$$\begin{aligned} q_e &= \frac{1}{\sqrt{2}m_n} \sqrt{(m_n^2 + m_e^2 - M_c^2) - (2m_n m_e)^2} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}m_n} \sqrt{(m_n + m_e + M_c)(m_n + m_e - M_c)} \\ &\quad \times \sqrt{(m_n - m_e + M_c)(m_n - m_e - M_c)} \end{aligned} \quad (۹)$$

معادله (۸) نشان می‌دهد، بیشینه E_e متناظر با کمینه M_c است.

این حالت در چارچوب دستگاه مرکز جرم (یا تکانه) به این معنی است که، جرم سکون M_c با انرژی کل پروتون و پادنوترینو برابر است. به این ترتیب

$$M = m_p + m_\nu \quad (۱۰)$$

وقتی پروتون و پادنوترینو در چارچوب مرکز جرم در حال سکون‌اند، در نتیجه، با توجه به معادله‌های (۸) و (۱۰) بیشینه انرژی الکترون $E = c^2 E_e$ برابر است با

$$E_{\max} = \frac{c^2}{2m_n} [m_n^2 + m_e^2 - (m_p + m_\nu)^2] \approx 1,292569 \text{ MeV} \approx 1,29 \text{ MeV} \quad (11)$$

با توجه به معادله (۱۰)، پروتون و پادنوترینو با همان سرعت v_m مرکز جرم حرکت می‌کنند و داریم

$$\begin{aligned} \frac{v_m}{c} &= \left(\frac{q_\nu}{E_\nu} \right) \Big|_{E=E_{\max}} = \left(\frac{q_p}{E_p} \right) \Big|_{E=E_{\max}} \\ &= \left(\frac{q_c}{E_c} \right) \Big|_{E=E_{\max}} = \left(\frac{q_e}{E_e} \right) \Big|_{M_c=m_p+m_\nu} \end{aligned} \quad (12)$$

آخرین رابطه از معادله (۳) نتیجه شده است. به کمک معادله‌های (۷) و (۹) و همچنین آخرین قسمت معادله (۱۲)، می‌توانیم سرعت پادنوترینو را وقتی $E = E_{\max}$ است به دست آوریم. به این ترتیب، با توجه به $M = m_p + m_\nu$ ، داریم

$$\begin{aligned} \frac{v_m}{c} &= \frac{\sqrt{(m_n + m_e + M)(m_n + m_e - M)(m_n - m_e + M)(m_n - m_e - M)}}{m_n^2 - m_e^2 + M^2} \\ &\approx 0,100126538 \approx 0,100127 \end{aligned} \quad (13)$$

قسمت دوم

(ب) با توجه به شکل ۱۳۵ و قانون اسنل داریم

$$n \sin \theta_i = \sin \theta_t \quad (1)$$

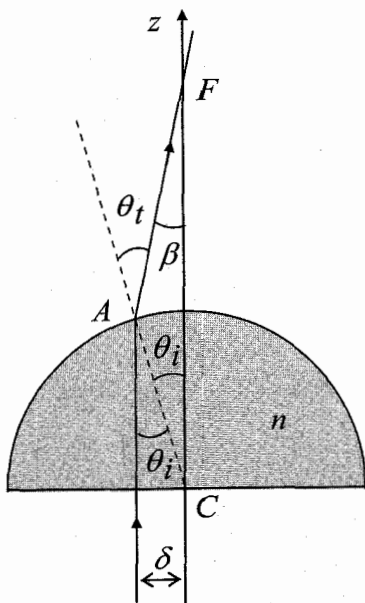
با نادیده گرفتن جمله‌های از مرتبه $(\delta/R)^3$ یا بالاتر در توابع سینوسی، از معادله (۱) داریم

$$n\theta_i \approx \theta_t \quad (2)$$

برای مثلث FAC داریم

$$\beta = \theta_t - \theta_i \approx n\theta_i - \theta_i = (n - 1)\theta_i \quad (3)$$

f را بسامد نور فرودی بگیرد. اگر n_p تعداد فوتون‌های فرودی به قاعده نیمکره شیشه‌ای بر واحد سطح بر واحد زمان باشد، تعداد فوتون‌های فرودی به قاعده نیمکره شیشه‌ای بر واحد زمان برابر



شکل ۱۳۵

$n_p \pi \delta^2$ است. توان کل P فوتون‌های فرودی به قاعده نیمکره شیشه‌ای برابر $(n_p \pi \delta^2)(hf_0)$ است که در آن h ثابت پلانک است. به این ترتیب

$$n_p = \frac{P}{\pi \delta^2 hf_0} \quad (۴)$$

تعداد فوتون‌های فرودی روی قرصی حلقه‌ای به شعاع داخلی r و شعاع خارجی $r + dr$ روی قاعده نیمکره شیشه‌ای بر واحد زمان برابر $n_p (2\pi r dr)$ است، که در آن $r = R \tan \theta_i \approx R \theta_i$ در نتیجه

$$n_p (2\pi r dr) \approx n_p (2\pi R^2) \theta_i d\theta_i \quad (۵)$$

$$\begin{aligned} dF_z &= n_p \frac{hf_0}{c} (2\pi r dr) \cos \beta \\ &\approx n_p \frac{hf_0}{c} (2\pi R^2) \left(1 - \beta^2/2\right) \theta_i d\theta_i \\ &\approx n_p hf_0 / c (2\pi R^2) \left[\theta_i - \frac{(n-1)^2}{2} \theta_i^3 \right] d\theta_i \end{aligned} \quad (۶)$$

$$\begin{aligned} F_z &= 2\pi R^2 n_p (hf_0 / c) \int_0^{\theta_{im}} \left[\theta_i - \frac{(n-1)^2}{2} \theta_i^3 \right] d\theta_i \\ &= \pi R^2 n_p (hf_0 / c) \theta_{im}^2 \left[1 - \frac{(n-1)^2}{2} \theta_{im}^2 \right] \end{aligned} \quad (۷)$$

که در آن $\tan \theta_{im} = \delta/R \approx \theta_{im}$ است. به علاوه، با توجه به معادله (۵) داریم

$$\begin{aligned} F_z &= \frac{\pi R^2 p}{\pi \delta^2 h f_0} (h f_0 / c) \frac{\delta^2}{R^2} \left[1 - \frac{(n-1)^2 \delta^2}{4R^2} \right] \\ &= \frac{P}{c} \left[1 - \frac{(n-1)^2 \delta^2}{4R^2} \right] \end{aligned} \quad (۸)$$

نیروی تعلیق نوری برابر است با جمع مؤلفه‌های z نیروهای اعمال شده توسط نورهای فرودی و شکسته روی نیمکره شیشه‌ای و برابر است با

$$\begin{aligned} \frac{P}{c} + (-F_z) &= \frac{P}{c} - \frac{P}{c} \left[1 - \frac{(n-1)^2 \delta^2}{4R^2} \right] \\ &= \frac{(n-1)^2 \delta^2}{4R^2} \frac{P}{c} \end{aligned} \quad (۹)$$

با برابر قرار دادن این معادله با نیروی وزن نیمکره شیشه‌ای، یعنی mg ، کمینه توان لیزر برای تعلیق نوری نیمکره شیشه‌ای به صورت زیر به دست می‌آید

$$P = \frac{4mgcR^2}{(n-1)^2 \delta^2} \quad (۱۰)$$

سی و پنجمین المپیاد بین المللی فیزیک

پانگ، کره جنوبی *

مسابقه نظری - زمان ۵ ساعت

۲۰۰۴/۱۳۸۳

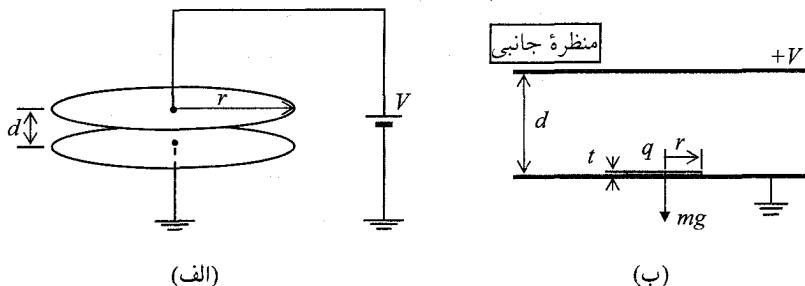
مسئله ۱ مقاومت «پینگ-پونگ»^۱

خازنی از دو صفحه دایره‌ای موازی به شعاع R تشکیل شده است که مطابق شکل ۱۳۶-الف به فاصله d از یکدیگر قرار دارند ($d \ll R$). صفحه بالایی به یک منبع ولتاژ ثابت با پتانسیل V وصل شده است در حالی که صفحه پایینی به زمین متصل است. همچنین قرص نازک و کوچکی به جرم m و شعاع r ($r \ll R, d$) و ضخامت t ($t \ll r$) روی صفحه پایینی و هم‌مرکز با آن قرار دارد (شکل ۱۳۶-ب) فضای بین صفحه‌ها را خلاصاً با ثابت دی‌الکتریک ϵ_0 در نظر بگیرید؛ صفحه‌ها و قرص از رساناهای کامل ساخته شده‌اند؛ و می‌توان همه اثرهای لبه‌ای الکتروستاتیکی را نادیده گرفت.

الف) نیروی الکتروستاتیک F_e بین صفحه‌های خازن را که به فاصله d از یکدیگر قرار دارند بیش از وارد کردن قرص رسانا بین آن‌ها به دست آورید (شکل ۱۳۶-الف).

ب) وقتی قرص رسانا روی صفحه پایینی قرار داده می‌شود، بار الکتریکی q روی آن به صورت $q = \chi V$ با ولتاژ V متناوب است. ضریب χ را برحسب d, r و ϵ_0 به دست آورید.

پ) صفحه‌های موازی خازن عمود بر میدان گرانشی یکنواخت g هستند. برای بلند شدن قرص رسانا



شکل ۱۳۶

از حالت سکون اولیه، باید ولتاژ اعمال شده از ولتاژ آستانه V_{th} بیشتر شود. ولتاژ آستانه V_{th} را برحسب m, g, d و χ به دست آورید.

(ت) وقتی $V > V_{th}$ است، قرص بین صفحه‌ها بالا و پایین می‌رود. (فرض کنید قرص بدون هیچ لرزشی تنها به طور قائم حرکت می‌کند). برخورد بین قرص و صفحه‌ها، ناکشسان و با ضریب بازگشت $\eta \equiv \left(\frac{v_{پس}}{v_{پیش}}\right)$ است، که در آن $v_{پیش}$ و $v_{پس}$ به ترتیب سرعت قرص درست پیش و پس از برخورد است. صفحه‌ها در محل خود ثابت‌اند. سرعت قرص درست پس از برخورد به صفحه پایینی به «سرعت حالت پایا» v_s می‌رسد، که با رابطه زیر به ولتاژ V بستگی دارد

$$v_s = \sqrt{\alpha V^2 + \beta} \quad (1)$$

ضریب‌های α و β را برحسب m, g, d, χ, η به دست آورید.

فرض کنید تمام سطح قرص هم‌زمان و یکنواخت با صفحه در تماس باشد به طوری که همه بار الکتریکی قرص هم‌زمان در هر برخورد مبادله می‌شود.

(ث) پس از رسیدن سرعت قرص به حالت پایا، جریان میانگین-زمانی I که بین صفحه‌های خازن برقرار می‌شود را می‌توان هنگامی که $qV \gg mgd$ است به صورت $I = \gamma V^2$ تخمین زد. ضریب γ را برحسب m, χ, d, η به دست آورید.

(ج) وقتی ولتاژ اعمال شده V کاهش می‌یابد (بسیار آرام)، ولتاژ حدی V_c وجود دارد که به ازای کمتر از آن شارش بار قطع می‌شود. مقدار V_c و جریان متناظر به آن I_c را برحسب m, g, d, χ, η به دست آورید. از مقایسه V_c با ولتاژ آستانه V_{th} که در قسمت (پ) بحث شد، نمودار تقریبی $I-V$ را برای حالتی که ولتاژ V درگستره $V = 0$ تا $3V_{th}$ افزایش و کاهش می‌یابد، رسم کنید.

مسئله ۲ بالون بالارونده ۲

یک بالون لاستیکی پر از گاز هلیوم در آسمان، که در آن دما با ارتفاع کاهش می‌یابد، بالا می‌رود. در پرش‌های زیر، بدون توجه به بار مفید بالون فرض کنید بالون شکل کروی خود را حفظ می‌کند، و حجم

بار مفید آن را نادیده بگیرید. همچنین فرض کنید دمای گاز هلیوم درون بالون با دمای هوای محیط یکسان است، و همه گازها را گاز کامل در نظر بگیرید. ثابت عمومی گازها برابر $R = 8.31 \text{ J/mol}$ است و جرم‌های مولی هلیوم و هوا به ترتیب برابر است با

$$M_H = 4.00 \times 10^{-3} \text{ kg/mol}$$

$$M_A = 28.9 \times 10^{-3} \text{ kg/mol}$$

و شتاب گرانشی $g = 9.8 \text{ m/s}^2$ است.

بخش اول

(الف) فشار و دمای هوای محیط بالون را P و T بگیرید. به علت کشش سطح بالون، فشار داخل آن بیشتر از فشار بیرون است. بالون حاوی n مول گاز هلیوم در فشار $P + \Delta P$ است. نیروی بالا برد F_B وارد بر بالون را بر حسب P و ΔP به دست آورید.

(ب) در یک روز تابستانی معین در کشور کره، دمای هوا، T ، در ارتفاع z از سطح دریا به صورت $T(z) = T_0(1 - z/z_0)$ در گستره $0 < z < 15 \text{ km}$ با $T_0 = 30.3 \text{ K}$ و $z_0 = 49 \text{ km}$ گزارش شده است. فشار و چگالی هوا در سطح دریا برابر است با

$$P_0 = 1.0 \text{ atm} = 1.01 \times 10^5 \text{ Pa}, \quad \rho_0 = 1.16 \text{ kg/m}^3$$

برای این گستره ارتفاع فشار به صورت زیر تغییر می‌کند

$$P(z) = P_0(1 - z/z_0)^\eta \quad (2)$$

η را بر حسب z_0 ، ρ_0 ، P_0 و g به دست آورید و مقدار عددی آن را تا دو رقم معنی دار محاسبه کنید. شتاب گرانشی را ثابت و مستقل از ارتفاع در نظر بگیرید.

بخش دوم

هرگاه بالون لاستیکی کروی با شعاع ناکشیده r_0 به صورت کره‌ای به شعاع r ($r \geq r_0$) پرباد شود، سطح بالون به دلیل کشیدگی دارای انرژی کشسانی اضافی می‌شود. بر اساس ساده‌ترین نظریه، انرژی کشسانی در دمای ثابت T را می‌توان به صورت زیر بیان کرد

$$U = 4\pi r_0^2 kRT \left(2\lambda^2 + \frac{1}{\lambda^4} - 3 \right) \quad (3)$$

که در آن $\lambda = r/r_0$ (≥ 1) نسبت اندازه تورم و k مقدار ثابتی بر حسب mol/m^2 است.

پ) ΔP را برحسب پارامترهایی که در معادله (۳) آمده است، به دست آورید و ΔP را برحسب $\lambda = r/r_0$ رسم کنید.

ت) ثابت k را می‌توان از مقدار گاز برای بادکردن بالون تعیین کرد. در دمای $T_0 = 303\text{K}$ و فشار $P_0 = 1\text{ atm} = 1.01 \times 10^5\text{ Pa}$ ، بالون در حالت کش نیامده ($\lambda = 1$) حاوی $n_0 = 12.5\text{ mol}$ گاز هلیوم است. در همان دمای T_0 و فشار P_0 ، وقتی بالون به طور کامل پر می‌شود، حاوی $n = 45\text{ mol}$ گاز هلیوم است. پارامتر بالون a را، که به صورت $k_0 = r_0 P_0 / 4RT_0$ در آن λ و n_0 ، برحسب n ، به دست آورید که در آن $a = k/k_0$ است. مقدار a را تا دو رقم معنی‌دار محاسبه کنید.

بخش سوم

بالونی در کنار دریا به صورتی که در قسمت (ت) اشاره شد، آماده شده است ($\lambda = 1/5$) و با $n = 45\text{ mol}$ گاز هلیوم در دمای $T_0 = 303\text{K}$ و فشار $P_0 = 1\text{ atm} = 1.01 \times 10^5\text{ Pa}$ پر شده است). جرم کل شامل گاز، خود بالون و بار مفید آن برابر $M_T = 1.12\text{ kg}$ است. حال بگذارید بالون از سطح دریا بالا برود.

ث) فرض کنید سرانجام بالون در ارتفاع z که در آن نیروی بالا بر با نیروی کل وزن متوازن می‌شود، متوقف شود. z و نسبت بادشدگی λz را در این ارتفاع به دست آورید. پاسخ‌های خود را با دو رقم معنی‌دار به دست آورید. فرض کنید هیچ اثر رانشی و نشت گاز در حین پرواز بالون وجود ندارد.

مسئله ۳ میکروسکوپ کاوشگر اتمی^۱

میکروسکوپ‌های کاوشگر اتمی (APMs)، ابزارهای قدرتمندی در زمینه نانو-علوم^۲ هستند. حرکت بازو^۳ در APM را یک آشکارسازی فوتونی کنترل می‌کند که باریکه لیزر بازتابیده را دیدبانی می‌کند (شکل ۱۳۷). این بازو تنها می‌تواند در امتداد قائم حرکت کند و جابه‌جایی z آن برحسب زمان t با معادله زیر بیان می‌شود

$$m \frac{d^2 z}{dt^2} + b \frac{dz}{dt} + kz = F \quad (4)$$

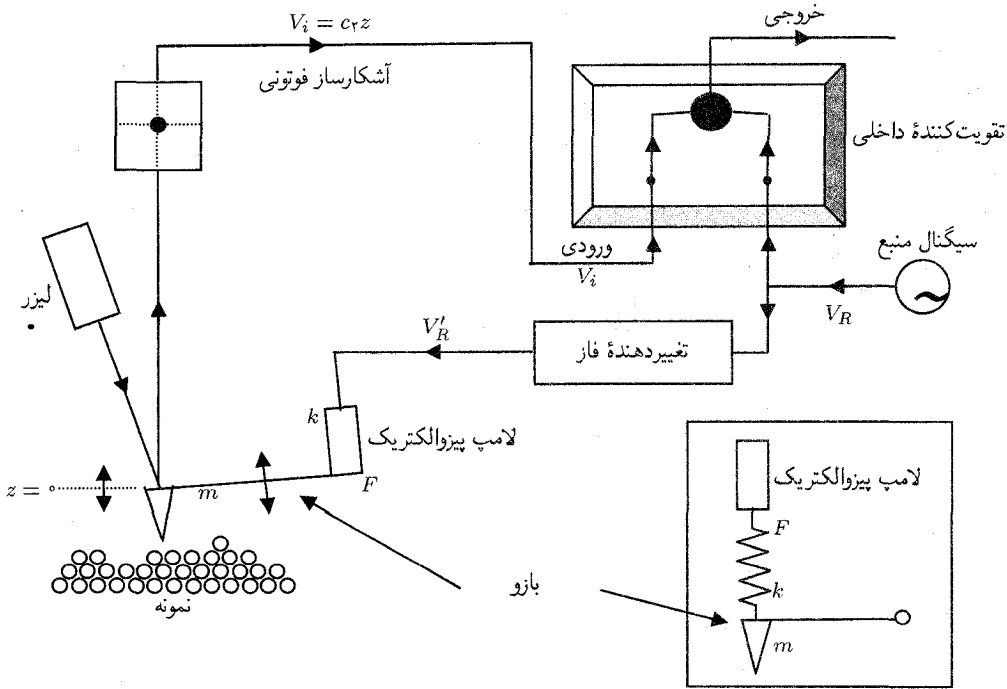
که در آن m جرم بازو، $k = m\omega^2$ ثابت فنر آن، b ضریب میرایی کوچکی است که در شرط $(b/m) \gg \omega$ صدق می‌کند، و سرانجام F نیروی محرک خارجی لامپ پیزوالکتریک است.

بخش اول

الف) اگر نیروی محرک خارجی F به صورت $F = F_0 \sin \omega t$ باشد، $z(t) = A \sin(\omega t - \phi)$ معادله (۴) صادق است، که در آن $A > 0$ و $0 \leq \phi \leq \pi$. رابطه‌ای برای A و $\tan \phi$ برحسب

ω ، m ، F ، ω و b پیدا کنید. همچنین A و ϕ را در بسامد شدید $\omega = \omega_0$ تعیین کنید.

(ب) تقویت کننده داخلی در شکل ۱۳۷ سیگنال ورودی را در سیگنال مرجع داخلی، $V_R = V_{R_0} \sin \omega t$ ضرب می کند و تنها مؤلفه dc (جریان مستقیم) از سیگنال چندین برابر شده از آن عبور می کند.



شکل ۱۳۷ نمودار کلی یک میکروسکوپ کاوشگر رویشی (SPM). تصویر کوچک سمت راست، مدل مکانیکی ساده ای برای توصیف اتصال لامپ پیزوالکتریک به بازو را نشان می دهد.

فرض کنید سیگنال ورودی به صورت $V_i = V_{i_0} \sin(\omega_i t - \phi_i)$ باشد که در آن، V_{i_0} ، ω_i و ϕ_i همگی ثابت های مثبت اند.

شرط $\omega (> 0)$ برای یک سیگنال خروجی غیر صفر را پیدا کنید. عبارت مربوط به اندازه سیگنال خروجی غیر صفر سیگنال dc خروجی در این بسامد کدام است؟

(پ) ولتاژ مرجع داخلی $V_R = V_{R_0} \sin \omega t$ در گذران تغییر دهنده فاز به صورت

$$V'_R = V_{R_0} \sin(\omega t + \pi/2)$$

در می آید. ولتاژ V'_R به لامپ پیزوالکتریک اعمال می شود و بازو را با نیروی $F = c_1 V'_R$ به حرکت در می آورد. سپس، آشکارساز فوتونی، جابه جایی بازو، z ، را به ولتاژ $V_i = c_2 z$ تبدیل می کند. در اینجا c_1 و c_2 ثابت اند. عبارتی برای اندازه سیگنال خروجی در $\omega = \omega_0$ پیدا کنید.

ت) تغییر کوچک Δm در جرم بازو، بسامد تشدید را به اندازه $\Delta \omega$ تغییر می‌دهد. به این ترتیب، فاز ϕ در بسامد تشدید اصلی ω به اندازه $\Delta \phi$ تغییر می‌کند. تغییر جرم Δm نظیر تغییر فاز $\Delta \phi = \pi/180^\circ$ را پیدا کنید، که تفکیک نوعی در اندازه‌گیری‌های فازی است. پارامترهای فیزیکی بازو عبارت‌اند از $m = 1.0 \times 10^{-12} \text{ kg}$ و $k = 1.0 \text{ N/m}$ و $(b/m) = 1.0 \times 10^3 \text{ s}^{-1}$. برای وقتی که $|x| \ll 1$ است از تقریب‌های $(1+x)^a \approx 1+ax$ و $\tan(\pi/2 + x) \approx -1/x$ استفاده کنید.

بخش دوم

از این پس حالتی را در نظر می‌گیریم که بعضی نیروهای دیگر، علاوه بر نیروی محرک که در بخش اول بحث شد، به واسطه نمونه شکل ۱۳۷ به بازو وارد می‌شود.

ث) فرض کنید نیروی اضافی $f(h)$ فقط به فاصله h بین بازو و سطح نمونه بستگی داشته باشد. می‌توان مکان تعادل جدید h_0 را به دست آورد. در حوالی $h = h_0$ می‌توان $f(h)$ را به صورت زیر نوشت

$$f(h) \approx f(h_0) + c_3(h - h_0)$$

که در آن c_3 در h_0 ثابت است. بسامد تشدید جدید ω'_0 را برحسب ω_0 ، m و c_3 بیابید. ج) هنگام رویش سطح با حرکت افقی نمونه، برخورد نوک بازوی باردار شده با $Q = 6e$ ، به الکترونی با بار $q = e$ روبه‌رو می‌شود که در زیر سطح (به صورت جای‌گزیده در فضا) به دام افتاده است. در مدت رویش در اطراف الکترون، مشاهده می‌کنیم که بیشینه تغییر بسامد تشدید

$$\Delta \omega_0 (= \omega'_0 - \omega_0)$$

خیلی کمتر از ω_0 است. فاصله بازو تا الکترون به دام افتاده، d ، را در بیشینه تغییر بسامد تشدید برحسب m ، q ، Q ، ω_0 ، $\Delta \omega_0$ ، و ثابت کولن k_e به دست آورید. مقدار d را برحسب نانومتر ($1 \text{ nm} = 1 \times 10^{-9} \text{ m}$) به ازای $\Delta \omega_0 = 2.0 \text{ s}^{-1}$ حساب کنید. پارامترهای فیزیکی بازو عبارت‌اند از $m = 1.0 \times 10^{-12} \text{ kg}$ و $k = 1.0 \text{ N/m}$. هرگونه اثر قطبش در نوک بازو و سطح نمونه را نادیده بگیرید. توجه کنید که

$$k_e = 1/4\pi\epsilon_0 = 9.0 \times 10^9 \text{ N} \cdot \text{m}/\text{C}^2$$

$$e = -1.6 \times 10^{-19} \text{ C}$$

پاسخ تشریحی مسئله‌ها

حل مسئله ۱

(الف) به کمک قانون گاوس می‌توان بار Q الفاشده بر اثر ولتاژ خارجی V را به دست آورد

$$\epsilon_0 \oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = Q$$

$$\epsilon_0 E(\pi R^2) = \epsilon_0 (V/d)(\pi R^2) = Q$$

انرژی ذخیره شده در خازن برابر است با

$$U = \int_0^V Q(V') dV' = \int_0^V \epsilon_0 \pi R^2 (V'/d) dV' = \frac{1}{2} \epsilon_0 R^2 V^2 / d$$

نیروی بین صفحه‌ها، هنگامی که ولتاژ بایاس V ثابت نگه داشته می‌شود برابر است با

$$F_e = +\partial U / \partial d = -\frac{1}{2} \epsilon_0 \pi R^2 V^2 / d^2$$

(ب) بار q روی قرص کوچک را نیز می‌توان به کمک قانون گاوس به دست آورد

$$\epsilon_0 \oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = q$$

چون تنها یک طرف قرص کوچک با صفحه در تماس است، داریم

$$q = -\epsilon_0 E(\pi r^2) = -\epsilon_0 \frac{\pi r^2}{d} V = \chi V$$

(پ) نیروی خالص، F خالص، که بر قرص کوچک وارد می‌شود، برابر مجموع نیروهای گرانشی و الکتروستاتیکی است

$$F_{\text{خالص}} = F_g + F_e$$

نیروی گرانشی برابر $F_g = -mg$ و نیروی الکتروستاتیکی با توجه به نتیجه قسمت (الف) برابر است با

$$F_e = \frac{1}{2} \epsilon_0 \frac{\pi r^2}{d^2} V^2 = \frac{\chi}{2d} V^2$$

برای بلند شدن قرص، لازم است $F_{\text{خالص}} > 0$ ، بنابراین،

$$\frac{\chi}{2d} V^2 - mg > 0 \Rightarrow V_{th} = \sqrt{2mgd/\chi}$$

ت) سرعت پایای قرص کوچک را درست پس از برخورد آن با صفحه پایینی v_s بگیرید. در این صورت، انرژی جنبشی حالت پایای K_s قرص درست بالای صفحه پایینی برابر است با

$$K_s = \frac{1}{4} m v_s^2$$

برای هر رفت و برگشت، قرص انرژی الکتروستاتیک زیر را به دست می‌آورد

$$\Delta U = 2qV$$

برای هر برخورد ناکشسان، قرص انرژی جنبشی زیر را از دست می‌دهد

$$\begin{aligned} \Delta K &= K_{\text{پیش از}} - K_{\text{پس از}} = (1 - \eta^2) K_{\text{پیش از}} \\ &= \left(\frac{1}{\eta^2} - 1 \right) K_{\text{پس از}} \end{aligned}$$

چون K_s برابر انرژی قرص پس از برخورد به صفحه پایین است و انرژی قرص پیش از برخورد به صفحه بالایی برابر $(K_s + qV - mgd)$ است، انرژی کل که طی یک رفت و برگشت از دست می‌رود را می‌توان برحسب K_s به صورت زیر نوشت

$$\Delta K_{\text{کل}} = \left(\frac{1}{\eta^2} - 1 \right) K_s + (1 - \eta^2)(K_s + qV - mgd)$$

در حالت پایا، ΔU را باید کل ΔK جبران کند.

$$2qV = \left(\frac{1}{\eta^2} - 1 \right) K_s + (1 - \eta^2)(K_s + qV - mgd)$$

با بازنویسی معادله اخیر داریم

$$\begin{aligned} K_s &= \left(\frac{\eta^2}{1 - \eta^2} \right) \left[(1 + \eta^2)qV + (1 - \eta^2)mgd \right] \\ &= \left(\frac{\eta^2}{1 - \eta^2} \right) qV + \left(\frac{\eta^2}{1 + \eta^2} \right) mgd = \frac{1}{4} m v_s^2 \end{aligned} \quad (5)$$

در نتیجه

$$v_s = \sqrt{\left(\frac{\eta^2}{1 - \eta^2} \right) \left(\frac{2\chi V^2}{m} \right) + \left(\frac{\eta^2}{1 + \eta^2} \right) (2gd)}$$

با مقایسه این معادله با معادله $v_s = \sqrt{\alpha V^2 + \beta}$ داریم

$$\alpha = \left(\frac{\eta^2}{1 - \eta^2} \right) \left(\frac{2\chi}{m} \right) \quad \text{و} \quad \beta = \left(\frac{\eta^2}{1 + \eta^2} \right) (2gd)$$

ث) مقدار باری که قرص در مدت رفت و برگشت بین صفحه‌ها و در بازه زمانی $\Delta t = t_+ + t_-$ حمل می‌کند برابر $\Delta Q = 2q$ است که در آن $t_+(t_-)$ زمان لازم برای حرکت قرص به طرف بالا (پایین) است.

در اینجا $t_+(t_-)$ را می‌توان به صورت زیر به دست آورد

$$v_{0+}t_+ + \frac{1}{2}a_+t_+^2 = d \quad (6)$$

$$v_{0-}t_- + \frac{1}{2}a_-t_-^2 = d$$

که در آن $v_{0+}(v_{0-})$ سرعت اولیه در صفحه پایینی (بالایی) و $a_+(a_-)$ به ترتیب شتاب ناحیه بالا (پایین) است.

چون نیروی وارد بر قرص از رابطه زیر به دست می‌آید

$$F = ma_{\pm} = qE \mp mg = \frac{qV}{d} \mp mg$$

در حد $mgd \ll qV$ مقدار a_{\pm} را می‌توان به صورت زیر تخمین زد

$$a_{\pm} = a_+ = a_- \approx \frac{qV}{md} \quad (7)$$

که تأکید می‌کند حرکت قرص به طرف بالا و پایین باید متقارن باشد. در نتیجه، معادله‌های (۶) را می‌توان به صورت تک معادله‌ای با $t_+ = t_- = t_0$ و $v_{0+} = v_{0-} = v_s$ و $a_+ = a_- = a_0$ نوشت. به علاوه، چون سرعت قرص درست پس از برخورد باید برای صفحه‌های پایینی و بالایی یکسان باشد، می‌توان رابطه زیر را استنتاج کرد

$$v_s = \eta(v_s + a_0 t_0)$$

و از آن می‌توان بازه زمانی $\Delta t = 2t_0$ را به دست آورد

$$\Delta t = 2t_0 = 2 \left(\frac{1-\eta}{\eta} \right) \left(\frac{v_s}{a_0} \right) \quad (8)$$

با توجه به معادله (۱)، در شرایط حدی $mgd \ll qV$ داریم

$$K_s = \frac{1}{2}mv_s^2 \approx \left(\frac{\eta^2}{1-\eta^2} \right) qV \quad (9)$$

با قرار دادن نتیجه معادله‌های (۳) و (۵) در معادله (۴) حاصل می‌شود

$$\Delta t = 2 \left(\frac{1-\eta^2}{\eta} \right) \sqrt{\frac{2\eta^2}{1-\eta^2}} \sqrt{\frac{md^2}{qV}} = 2 \sqrt{\frac{1-\eta}{1+\eta}} \sqrt{\frac{2md^2}{\chi V^2}}$$

به‌علاوه از رابطه $I = \Delta Q / \Delta t = \gamma q / \Delta t$ داریم

$$I = \gamma q / \Delta t = \chi V \sqrt{\frac{1+\eta}{1-\eta}} \sqrt{\frac{\chi V^2}{2md^2}} = \left(\sqrt{\frac{1+\eta}{1-\eta}} \sqrt{\frac{\chi^2}{2md^2}} \right) V^2$$

در نتیجه

$$\gamma = \sqrt{\frac{1+\eta}{1-\eta}} \sqrt{\frac{\chi^2}{2md^2}}$$

ج) قرص انرژی جنبشی خود را از دست می‌دهد و سرانجام وقتی دیگر نتوانست به صفحه بالایی برسد متوقف می‌شود. به بیان دیگر، ولتاژ حدی V_c را می‌توان از این شرط که سرعت v_0 قرص در صفحه بالایی صفر است، یعنی $v_0 = 0$ به دست آورد.

برای آنکه سرعت قرص در صفحه بالایی صفر باشد، $v_0 = 0$ ، انرژی جنبشی $\overline{K_s}$ در صفحه بالایی باید در رابطه زیر صدق کند

$$\overline{K_s} = K_s + qV_c - mgd = 0$$

که در آن K_s انرژی جنبشی حالت پایا در صفحه پایینی پس از برخورد است. به‌علاوه، داریم

$$\left(\frac{\eta^2}{1-\eta^2} \right) qV_c + \left(\frac{\eta^2}{1+\eta^2} \right) mgd + qV_c - mgd = 0$$

یا معادل آن

$$(1+\eta^2)qV_c - (1-\eta^2)mgd = 0$$

در نتیجه

$$qV_c = \left(\frac{1-\eta^2}{1+\eta^2} \right) mgd$$

از رابطه $q = \chi V_c$ داریم

$$V_c = \sqrt{\frac{1-\eta^2}{1+\eta^2}} \sqrt{\frac{mgd}{\chi}}$$

در مقایسه با ولتاژ حدی V_{th} ، می‌توان نوشت

$$V_c = z_c V_{th}$$

که در آن z_c که در رسم I بر حسب (V/V_{th}) مورد استفاده می‌گیرد برابر است با (شکل ۱۳۸ را ببینید)

$$z_c = \sqrt{\frac{1 - \eta^2}{2(1 + \eta^2)}}$$

حال می‌توان معادله‌های تعیین بازه زمانی $\Delta t = t_- + t_+$ را نوشت

$$v_{o-} t_- + \frac{1}{\gamma} a_- t_-^2 = d$$

$$v_{o+} t_+ + \frac{1}{\gamma} a_+ t_+^2 = d \quad (10)$$

که در آن شتاب‌ها از رابطه زیر به دست می‌آیند

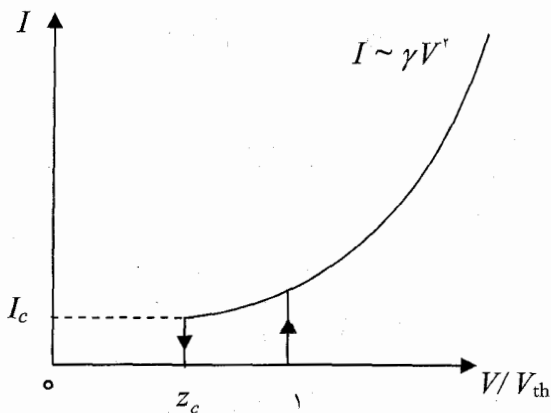
$$a_+ = \frac{qV_c}{md} - g = \left[\frac{1 - \eta^2}{1 + \eta^2} - 1 \right] g = \left(\frac{-2\eta^2}{1 + \eta^2} \right) g$$

$$a_- = \frac{qV_c}{md} + g = \left[\frac{1 - \eta^2}{1 + \eta^2} + 1 \right] g = \left(\frac{2}{1 + \eta^2} \right) g$$

$$\frac{a_+}{a_-} = -\eta^2$$

چون $v_{o-} = 0$ است، داریم $v_{o+} = \eta(a_- t_-)$ و $t_-^2 = 2d/a_-$

$$t_- = \sqrt{2d/a_-} = \sqrt{(1 + \eta^2)(d/g)}$$



شکل ۱۳۸

با استفاده از $v_{o+}^2 = \eta^2(2da - 1) = -2da_+$ می‌توان معادلهٔ درجهٔ دوم (۱۰) را حل کرد

$$t_+ = \frac{v_{o+}}{a_+} \left(\sqrt{1 + \frac{2da_+}{v_{o+}^2}} - 1 \right) = -\frac{v_{o+}}{a_+} = \sqrt{\frac{2d}{|a_+|}}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{1 + \eta^2}{\eta^2} \right) \left(\frac{d}{g} \right)} = \frac{t_-}{\eta}$$

در نتیجه

$$\Delta t = t_- + t_+ = \left(1 + \frac{1}{\eta} \right) \sqrt{(1 + \eta^2) \left(\frac{d}{g} \right)}$$

$$I_c = \frac{\Delta Q_c}{\Delta t} = \frac{2q}{\Delta t} = \frac{2\chi V_c}{\Delta t} = \frac{2\eta\sqrt{1 - \eta^2}}{(1 + \eta)(1 + \eta^2)} g\sqrt{m\chi}$$

حل مسئلهٔ ۲

بخش اول

الف) به کمک معادلهٔ حالت گاز کامل، حجم n مول گاز هلیوم در فشار $P + P\Delta P$ و دمای t برابر است با

$$V = nRT/(P + \Delta P)$$

در حالی که، حجم n' مول هوا در فشار P و دمای t برابر است با

$$V = n'RT/P$$

از این رو تغییر تعداد مول‌های هوا با وزن $M_A n'g$ برابر $n' = nP/(P + \Delta P)$ است. این تغییر وزن هوا برابر نیروی بالابر است. یعنی

$$F_B = M_A n' g P / (P + \Delta P) \quad (11)$$

ب) با فرض ثابت بودن چگالی هوا ρ ، اختلاف فشار بین دو نقطه با اختلاف ارتفاع z برابر $-\rho g z$ است. در این صورت تغییرات این تابع بر حسب ارتفاع برابر است با

$$\frac{dP}{dz} = -\rho g = \frac{\rho_0 T_0}{\rho} \frac{P}{T} g$$

که در آن از قانون گازهای کامل، ثابت $\rho T/P = \text{ثابت}$ استفاده شده است. با قرار دادن معادله (۲) و $T/T_0 = 1 - z/z_0$ در دو طرف معادلهٔ بالا، و مقایسهٔ دو طرف آن داریم

$$\gamma = \frac{\rho_0 z_0 g}{P_0} = \frac{1,16 \times 4,9 \times 10^4 \times 9,8}{10,01 \times 10^5} = 5,52$$

بخش دوم

پ) کار لازم برای افزایش شعاع بالون از r به $r + dr$ بر اثر اختلاف فشار ΔP برابر است با

$$dW = 4\pi r^2 \Delta P dr$$

در این صورت افزایش انرژی کشسانی برای همان تغییر شعاع r برابر است با

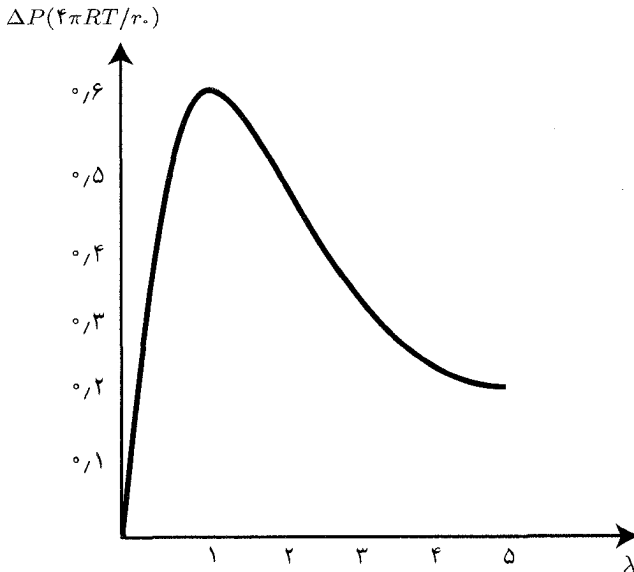
$$dW = dU = (dU/dr) dr = 4\pi kRT \left(4r - 4r_0^6/r^5 \right) dr \quad (12)$$

با مساوی قرار دادن طرف دوم دو معادله اخیر داریم

$$\Delta P = 4kRT \left(\frac{1}{r} - \frac{r_0^6}{r^7} \right) = \frac{4kRT}{r_0} \left(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda^7} \right)$$

این جواب مورد نظر است.

نمودار برحسب $\lambda (> 1)$ در ابتدا به سرعت افزایش می‌یابد و به ازای $\lambda = \sqrt[6]{7}$ بیشینه می‌شود، و برای λ های بزرگ به صورت λ^{-1} کاهش می‌یابد. در شکل ۱۳۹ نمودار $\Delta P/(4\pi RT/r_0)$ برحسب λ آمده است.



شکل ۱۳۹

(ت) قانون گاز کامل

$$P \cdot V = n \cdot RT.$$

که در آن V حجم بالون در حالت کش نیامده است. در حجم $V = \lambda^3 V_0$ که بالون حاوی n مول گاز در دمای $T = T_0$ است، فشار گاز درون آن P_{in} برابر است با

$$P_{in} = nRT_0 / V = \frac{n}{n_0 \lambda^3} P_0 \quad (13)$$

از طرف دیگر، با توجه به نتیجه قسمت (پ) در دمای $T = T_0$ داریم

$$\begin{aligned} P_{in} &= P_0 + \Delta P = P_0 + \frac{4kRT_0}{r_0} \left(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda^3} \right) \\ &= \left[1 + a \left(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda^3} \right) \right] P_0 \end{aligned} \quad (14)$$

با برابر قرار دادن طرف دوم معادله‌های (۱۳) و (۱۴) مقدار a برابر است با

$$a = \frac{n / (n_0 \lambda^3) - 1}{\lambda^{-1} - \lambda^{-3}}$$

به‌ازای $n/n_0 = 3/6$ و $\lambda = 1/5$ ، داریم $a = 0.110$

بخش سوم

ث) نیروی بالابره که در قسمت (الف) به‌دست آوردیم، باید با وزن نظیر جرم کل $M_T = 1.12 \text{ kg}$ متوازن شود، در نتیجه از معادله (۱۱) داریم

$$\frac{P}{P + \Delta P} = \frac{M_T}{M_A n} \quad (15)$$

به‌عبارت دیگر، با اعمال دوباره قانون گاز کامل برای n مول گاز هلیوم درون حجم V داریم

$$V = \frac{4}{3} \pi r^3 = \lambda^3 \frac{4}{3} \pi r_0^3 = \lambda^3 V_0$$

و به‌ازای مقدار دلخواه P و T ، داریم

$$(P + \Delta P) \lambda^3 = \frac{nRT}{V_0} = P_0 \frac{T}{T_0} \frac{n}{n_0} \quad (16)$$

به‌کمک معادله‌های (۱۲)، (۱۵) و (۱۶) سه پارامتر نامعلوم P ، ΔP و λ برحسب T و پارامترهای دیگر به‌دست می‌آیند. با قرار دادن معادله (۱۶) در معادله (۱۵)، داریم

$$\frac{P}{P_0} \frac{T}{T_0} \lambda^3 = \frac{M_T}{M_A n_0} \quad (17)$$

همچنین با قرار دادن معادله (۱۲) در معادله (۱۶) داریم

$$P\lambda^3 + \frac{4kRT}{r_0} \lambda^2 (1 - \lambda^{-6}) = P_0 \frac{T}{T_0} \frac{n}{n_0}$$

یا، با مرتب کردن آن داریم

$$\frac{P}{P_0} \frac{T}{T_0} \lambda^3 = \frac{n}{n_0} - a\lambda^2 (1 - \lambda^{-6}) \quad (18)$$

که در آن از تعریف a دوباره استفاده شده است.

با مساوی قرار دادن طرف دوم معادله‌های (۱۷) و (۱۸)، معادله‌ای برای λ به صورت زیر خواهیم داشت

$$\lambda^2 (1 - \lambda^{-6}) = \frac{1}{an_0} (n - M_T/M_A) = 4,54$$

با حل این معادله مقدار زیر برای λ به دست می‌آید

$$\lambda^2 \approx 4,54 / (1 - 4,54^{-3}) \approx 4,54 \Rightarrow \lambda_f \cong 2,13$$

برای پیدا کردن ارتفاع، با قرار دادن $(P/P_0)(T/T_0)$ در طرف چپ معادله (۱۷) برحسب ارتفاع که در (ب) به دست آمد، داریم

$$\frac{P}{P_0} \frac{T}{T_0} \lambda^3 = (1 - z_f/z_0)^{\gamma-1} \lambda_f^3 = \frac{M_T}{M_A n_0} = 3,10 \quad (19)$$

با حل معادله (۱۵) به‌ازای $\lambda_f = 2,13$ و $\gamma - 1 = 4,5$ برای z_f داریم

$$z_f = 49 \times \left[1 - \left(3,10 / 2,13^3 \right)^{1/4,5} \right] = 10,9 \text{ km}$$

حل مسئله ۳

الف) با قرار دادن $z(t) = A \sin(\omega t - \phi)$ در معادله

$$m \frac{d^2 z}{dt^2} + b \frac{dz}{dt} + m\omega_0^2 z = F_0 \sin \omega t$$

داریم

$$-m\omega^2 \sin(\omega t - \phi) + b\omega \cos(\omega t - \phi) + m\omega_0^2 \sin(\omega t - \phi) = \frac{F_0}{A} \sin \omega t$$

یا

$$\left[m(\omega_0^2 - \omega^2) \cos \phi + b\omega \sin \phi - F_0/A \right] \sin \omega t$$

$$+ \left[-m(\omega_0^2 - \omega^2) \sin \phi + b\omega \cos \phi \right] \cos \omega t = 0$$

با برابر صفر قرار دادن عبارت داخل هر کروه نتیجه می‌شود

$$\tan \phi = \frac{b\omega}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} \quad (۲۰)$$

$$A = \frac{F_0}{\sqrt{m^2(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + b^2\omega^2}}$$

در $\omega = \omega_0$ داریم

$$A = F_0/b\omega_0 \quad \text{و} \quad \phi = \pi/2$$

(ب) سیگنال چندین برابر شده برابر است با

$$\begin{aligned} & V_{i_1} \sin(\omega_i t - \phi_i) V_{R_1} \sin(\omega t) \\ &= \frac{1}{2} V_{i_1} V_{R_1} \{ \cos[(\omega_i - \omega)t - \phi_i] - \cos[(\omega_i + \omega)t - \phi_i] \} \end{aligned}$$

مؤلفه غیر صفر dc تنها وقتی که $\omega = \omega_i$ است وجود دارد. در این حالت، دامنه سیگنال خواهد شد

$$\frac{1}{2} V_{i_1} V_{R_1} \cos \phi_i$$

(پ) وقتی که تقویت‌کننده داخلی سیگنال ac همان بسامد سیگنال مرجع را اندازه می‌گیرد، باید بسامدهای نوسان لامپ پیزوالکتریک، بسامد بازو، و بسامد آشکارساز فوتو دیود یکسان باشند. اندازه سیگنال ورودی در تشدید برابر است با

$$V_{i_1} = c_1 F_0/b\omega_0 = c_1 c_2 V_{R_1}^2/b\omega_0$$

به این ترتیب، از هنگامی که فاز سیگنال ورودی در تشدید برابر $-\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = 0$ است، $\phi_i = 0$ سیگنال تقویت‌کننده داخلی

$$\frac{1}{2} V_{i_1} V_{R_1} \cos 0^\circ = \frac{c_1 c_2 V_{R_1}^2}{2 b\omega_0}$$

است.

(ت) بسامد تشدید اصلی $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ به

$$\sqrt{\frac{k}{m + \Delta m}} = \sqrt{\frac{k}{m}} \left(1 + \frac{\Delta m}{m} \right)^{-\frac{1}{2}} = \omega_0 \left(1 - \frac{1}{2} \frac{\Delta m}{m} \right)$$

تغییر می‌کند. در نتیجه

$$\Delta\omega_0 = -\frac{1}{2} \omega_0 \Delta m/m \quad (۲۱)$$

در نزدیکی شدید، با قرار دادن $\phi \rightarrow \pi/2 + \Delta\phi$ و $\omega \rightarrow \omega_0 + \Delta\omega$ در معادله (۲۰)، تغییر فاز ناشی از تغییر اندک ω (بدون تغییر ω) برابر است با

$$\tan(\pi/2 + \Delta\phi) = -1/\tan \Delta\phi = b/2m\Delta\omega.$$

به علاوه

$$\Delta\phi \approx \tan \Delta\phi = -2m\Delta\omega_0/b \quad (22)$$

از معادله‌های (۲۱) و (۲۲) داریم

$$\begin{aligned} \Delta m &= \frac{b}{\omega_0} \Delta\phi = \frac{10^3 \times 10^{-12}}{10^6} \frac{\pi}{1800} = \frac{\pi}{178} \times 10^{-18} \\ &= 1.7 \times 10^{-18} \text{ kg} \end{aligned}$$

ث) در حضور برهم‌کنش، معادله حرکت در حوالی وضعیت تعادل جدید h به صورت زیر خواهد شد

$$m \frac{d^2 z}{dt^2} + b \frac{dz}{dt} + m\omega_0^2 z - c_3 z = F_0 \sin \omega t$$

که در آن از تقریب $z = h - h_0$ و $f(h) \approx f(h_0) + c_3 z$ استفاده شده است. توجه کنید که $f(h_0)$ در معادله اخیر حذف شده است. به این ترتیب، بسامد تشدید اصلی $\omega_0 = \sqrt{k/m}$

به صورت زیر تغییر می‌کند

$$\omega'_0 = \sqrt{\frac{k - c_3}{m}} = \sqrt{\frac{m\omega_0^2 - c_3}{m}} = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{c_3}{m\omega_0^2}}$$

در نتیجه تغییر بسامد تشدید به صورت زیر به دست می‌آید

$$\Delta\omega_0 = \omega_0 \left[\sqrt{1 - \frac{c_3}{m\omega_0^2}} - 1 \right] \quad (23)$$

ج) بیشینه تغییر بسامد تشدید هنگامی رخ می‌دهد که بازو در بالای بار قرار می‌گیرد، که در آن نیروی برهم‌کنش از رابطه زیر به دست می‌آید

$$f(h) = k_e \frac{qQ}{h^2}$$

داریم

$$c_3 = \left. \frac{df}{dh} \right|_{h=d_0} = -2k_e \frac{qQ}{d_0^3} \quad (24)$$

از آنجایی که $\omega_0 \ll \Delta\omega_0$ ، معادله (۲۳) را می‌توان تقریباً به صورت زیر نوشت

$$\Delta\omega_0 \approx -\frac{c^2}{2m\omega_0} \quad (25)$$

از معادله‌های (۲۴) و (۲۵) داریم

$$\Delta\omega_0 = -\frac{1}{2m\omega_0} \left(-2k_e \frac{qQ}{d_0^3} \right) = k_e \frac{qQ}{m\omega_0 d_0^3}$$

با قرار دادن $Q = 6e = -9.6 \times 10^{-19} \text{C}$ و $q = e = -1.6 \times 10^{-19} \text{C}$ داریم

$$d_0 = \left[k_e \frac{qQ}{m\omega_0 \Delta\omega_0} \right]^{\frac{1}{3}} = 4.1 \times 10^{-8} \text{m} = 41 \text{nm}$$

به این ترتیب فاصلهٔ بازو تا الکترون به دام افتاده ۴۱ nm است.

سی و ششمین المپیاد بین‌المللی فیزیک

سالامانکا، اسپانیا*

مسابقه نظری - زمان ۵ ساعت

۲۰۰۵/۱۳۸۴

مسئله ۱ ماهواره بدفرجام^۱

اغلب مانورهای مداری که فضاییماها انجام می‌دهند، تغییر سرعت در امتداد جهت پرواز، یعنی شتاب‌گیری برای رسیدن به مدارهای بالاتر یا ترمز کردن برای ورود دوباره به جو است. در این مسئله، تغییرهای مداری را هنگامی بررسی می‌کنیم که نیروی پیشرانده موتور در جهت شعاعی وارد می‌شود. شعاع زمین $R_T = 6.37 \times 10^6$ m، شتاب گرانی در سطح زمین $g = 9.81$ m/s²، و مدت یک شبانه‌روز را $T_0 = 24$ h اختیار کنید.

یک ماهواره اطلاعاتی همگام با زمین^۲، به جرم m_0 را در نظر می‌گیریم که در مدار دایره‌ای استوایی به شعاع r_0 قرار دارد. این ماهواره یک «موتور اوج‌گیری»^۳ دارد که نیروی پیشرانده مورد نیاز برای رسیدن

*. Salamanca, Spain 1. an ill fated satellite

۲. دوره گردش آن T_0 است.

۳. اگر ماهواره‌ای بخواهد بر فراز محلی ثابت بماند، باید صفحه مدار ماهواره همان صفحه استوای زمین و سرعت زاویه‌ای

آن همان سرعت زاویه‌ای زمین باشد. شعاع چنین مداری را همگام می‌نامند [مترجم].

4. apogee engine

به مدار نهایی را تأمین می‌کند.^۱
(الف)

الف-۱. مقدار عددی r_0 را حساب کنید.

الف-۲. رابطه‌ای برای سرعت ماهواره (v_0) برحسب R_T, g و r_0 به دست آورید و مقدار عددی آن را محاسبه کنید.

الف-۳. عبارت‌هایی را برای تکانه زاویه‌ای L و انرژی مکانیکی E برحسب v_0, m, g و R_T به دست آورید.

وقتی ماهواره به یک مدار دایره‌ای همگام با زمین می‌رسد، در مکان موردنظر تثبیت و آماده کار می‌شود (شکل ۱۴۱)، ولی به دلیل خطای کنترل کنندگان زمینی، موتور اوج‌گیری باید دوباره روشن شود. جهت نیروی پیشرانه به طرف زمین می‌شود و به رغم واکنش سریع خدمه زمینی برای خاموش کردن موتور، تغییر سرعت ناخواسته Δv به ماهواره منتقل می‌شود. این خیز سرعت را با $\beta = \Delta v/v_0$ مشخص می‌کنیم. مدت زمان روشن بودن موتور نسبت به زمان‌های مدارهای دیگر، همواره قابل چشم‌پوشی است، به طوری که می‌توان آن را لحظه‌ای در نظر گرفت.

(ب) با فرض اینکه $\beta < 1$ است:

ب-۱. پارامترهای مداری جدید l و ε را برحسب r_0 و β به دست آورید.

ب-۲. زاویه α بین محور اصلی مدار جدید و بردار مکان را در نقطه‌ای به دست آورید که موتور

۱. جسم‌هایی که در مسیرهای بیضی، سهمی، یا هذلولی حرکت می‌کنند، تحت کنش نیروهای مرکزی قرار دارند که از قانون عکس مجذور پیروی می‌کنند. در تقریب $m \ll M$ جرم گرانشی M در یکی از کانون‌ها قرار دارد. با گرفتن مبدأ روی این کانون، معادله قطبی کلی این منحنی‌ها به صورت زیر نوشته می‌شود (شکل ۱۴۰ را ببینید):

$$r(\theta) = \frac{l}{1 - \varepsilon \cos \theta}$$

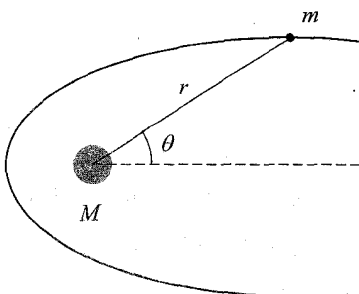
که در آن l ثابتی مثبت است و نیم‌پارامتر مسیر (semi-latus-rectum) نامیده می‌شود و ε خروج از مرکز منحنی است. برحسب ثابت‌های حرکت داریم

$$l = L^2 / GMm^2, \quad \varepsilon = \left(1 + 2EL^2 / G^2 M^2 m^3 \right)^{1/2}$$

که در آن G ثابت جهانی نیوتون، L مدول تکانه زاویه‌ای جرم در حال گردش نسبت به مبدأ، و E انرژی مکانیکی است که انرژی پتانسیل آن در بی‌نهایت صفر است.

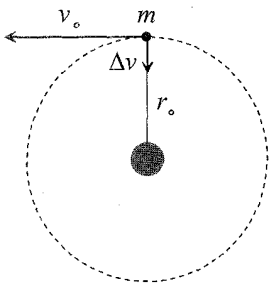
شرایط زیر برقرارند

- (i) اگر $0 < \varepsilon < 1$ ، منحنی بیضی است (محیط دایره برای $\varepsilon = 0$).
- (ii) اگر $\varepsilon = 1$ ، منحنی سهمی است.
- (iii) اگر $\varepsilon > 1$ ، منحنی هذلولی است.



شکل ۱۴۰

ماهواره به طور لحظه‌ای روشن می‌شود.



شکل ۱۴۱

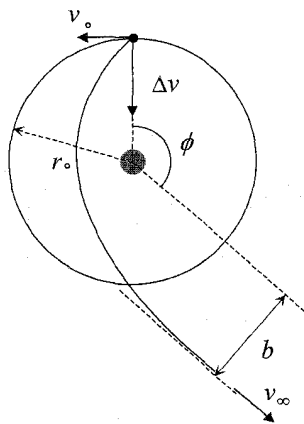
- ب-۳. عبارت‌هایی تحلیلی برای فاصله‌های حضيض r_{min} و اوج r_{max} نسبت به مرکز زمین برحسب r_0 و β به دست آورید و مقدار عددی آن‌ها را به ازای $\beta = \frac{1}{4}$ حساب کنید.
- ب-۴. دوره مدار جدید T را برحسب T_0 و β به دست آورید و مقدار عددی آن را به ازای $\beta = \frac{1}{4}$ حساب کنید.

(پ)

- پ-۱. کمینه پارامترخیز β_{esc} را که ماهواره برای فرار از گرانش زمین نیاز دارد، حساب کنید.
- پ-۲. در این حالت، نزدیک‌ترین محل ماهواره به مرکز زمین در مسیر جدید r'_{min} را برحسب r_0 تعیین کنید.

(ت) با فرض اینکه $\beta > \beta_{esc}$ است:

- ت-۱. سرعت باقی مانده در بی‌نهایت، v_∞ را برحسب v_0 و β به دست آورید.
- ت-۲. «پارامتر برخورد» b مجانب جهت فرار را برحسب r_0 و β به دست آورید (شکل ۱۴۲).
- ت-۳. زاویه ϕ مجانب جهت فرار را برحسب β تعیین کنید. مقدار عددی آن را برای $\beta = \frac{3}{4}\beta_{esc}$ حساب کنید.



شکل ۱۴۲

مسئله ۲ اندازه‌گیری مطلق کمیت‌های الکتریکی^۱

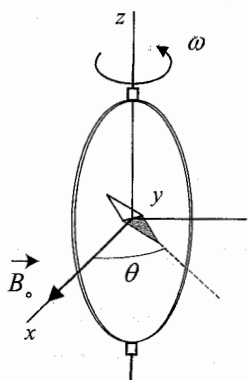
تحول‌های علمی و فناوریانه در طول قرن نوزدهم، نیاز مبرم به استانداردهای جهانی مورد توافق برای کمیت‌های الکتریکی را فراهم آورد. تصور می‌شده که بکاهای مطلق باید تنها به استانداردهای طول، جرم و زمان وابسته

1. absolute measurements of electrical quantities

باشند که پس از انقلاب فرانسه بنا نهاده شده بودند. بین سال‌های ۱۸۶۱ تا ۱۹۱۲، کارهای آزمایشگاهی فشرده‌ای برای تثبیت مقدارهای این یکاها انجام شد. در اینجا سه مطالعه موردی را ارائه می‌کنیم.

تعیین اهم (کلوین)^۱

پیچ‌های دایره‌ای با N دور، شعاع a و مقاومت کل R با سرعت زاویه‌ای یکنواخت ω در میدان مغناطیسی افقی $\vec{B}_0 = B_0 \vec{i}$ ، دور قطر عمودی می‌چرخد.



شکل ۱۴۳

۱. نیروی محرکه القایی \mathcal{E} در پیچه و توان متوسط $\langle P \rangle$ مورد نیاز برای آنکه پیچه در حرکت باقی بماند را حساب کنید.^۲ خودالقایی پیچه را نادیده بگیرید.

عقربه مغناطیسی کوچکی مطابق شکل ۱۴۳ در مرکز پیچه قرار داده می‌شود. این عقربه می‌تواند، آزادانه و به آرامی دور محور z در صفحه‌ای افقی بچرخد، ولی نمی‌تواند چرخش سریع پیچه را دنبال کند. ۲. در وضعیتی که دستگاه به حالت مانا می‌رسد، عقربه با میدان \vec{B}_0 زاویه کوچک θ را می‌سازد. مقاومت پیچه R را برحسب این زاویه و پارامترهای دیگر دستگاه به دست آورید.

لرد کلوین در سال ۱۲۳۹/۱۸۶۰، با استفاده از این روش، استاندارد مطلق برای اهم را تعیین کرد. برای جلوگیری از چرخش پیچه، لورنتس روش دیگری را پیشنهاد کرد که لرد ریلی و خانم سیدویک از آن استفاده کردند. در ادامه این روش را بررسی و تحلیل می‌کنیم.

تعیین اهم (ریلی، سیدویک)^۳

ترتیب آزمایشی این روش در شکل ۱۴۴ نشان داده شده است. این مجموعه شامل دو قرص فلزی مشابه D و D' به شعاع b است که توسط میله رسانای SS' نگه داشته شده‌اند. موتوری با سرعت زاویه‌ای ω مجموعه را می‌چرخاند که می‌تواند برای اندازه‌گیری R تنظیم شود. دو پیچه مشابه C و C' (هرکدام با شعاع a و تعداد دور N) قرص‌ها را دربرگرفته‌اند. این دو پیچه طوری متصل شده‌اند که جریان I در جهت‌های مخالف از آن بگذرد. تمام این ابزارها برای اندازه‌گیری مقاومت R به کار می‌روند.

1. determination of the ohm (Kelvin)

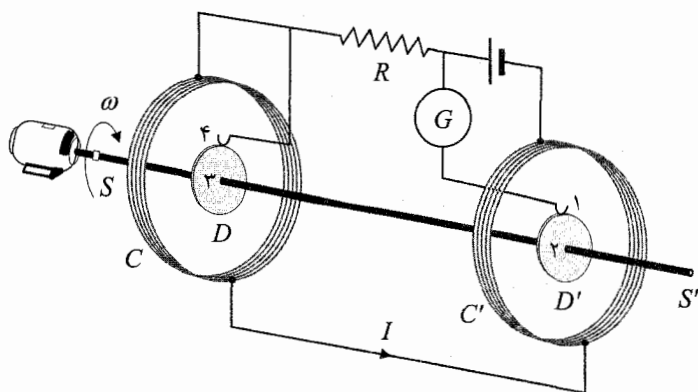
۲. مقدار متوسط $\langle X \rangle$ یک کمیت $x(t)$ در دستگاه دوره‌ای با دوره T ، برابر $\langle X \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) dt$ است. ممکن است در محاسبه‌های خود به انتگرال‌های زیر نیاز داشته باشید:

$$\int_0^{2\pi} \sin x \, dx = \int_0^{2\pi} \cos x \, dx = \int_0^{2\pi} \sin x \cos x \, dx$$

$$\int_0^{2\pi} \sin^2 x \, dx = \int_0^{2\pi} \cos^2 x \, dx = \pi$$

$$\int x^n \, dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1}$$

3. determination of the ohm (Rayleigh, Sidgwick)



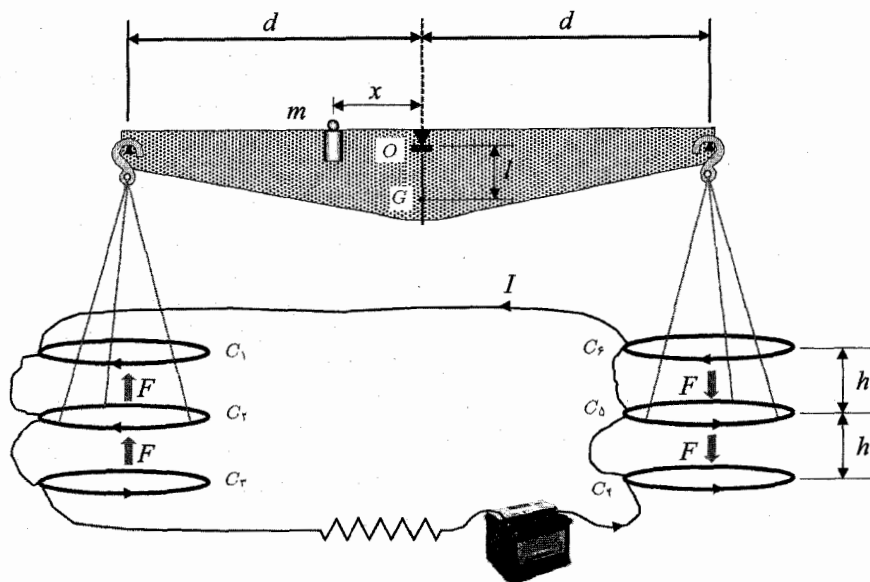
شکل ۱۴۴

۳. فرض کنید، جریان I که از پیچه‌های C و C' می‌گذرد، میدان مغناطیسی یکنواخت B را اطراف D و D' تولید می‌کند که در مرکز پیچه یکسان است. نیروی محرکه القایی ε را که بین لبه‌های بیرونی ۱ و ۴ القا شده است، با فرض آنکه فاصله بین پیچه‌ها خیلی بزرگ‌تر از شعاع پیچه‌ها باشد ($a \gg b$)، محاسبه کنید. قرص‌ها توسط برس‌هایی که با لبه بیرونی ۴ و ۱ در تماس‌اند، به مدار وصل شده‌اند. گالوانومتر G ، عبور جریان در مدار ۱-۲-۳-۴ را آشکار می‌کند.
۴. وقتی گالوانومتر عدد صفر را نشان می‌دهد، مقاومت R اندازه‌گیری می‌شود. مقاومت R را برحسب پارامترهای فیزیکی دستگاه به دست آورید.

تعیین آمپر

عبور جریان از دو رسانا و اندازه‌گیری نیروی بین آن‌ها، به خودی خود یک تعیین مطلق برای جریان ارائه می‌کند. «ترازوی جریان»^۱ در سال ۱۸۸۲/۱۲۶۱، توسط لرد کلونین برای استفاده از این روش طراحی شد. این ترازو شامل شش حلقه مشابه C_1, \dots, C_6 به شعاع a است که به‌طور متوالی به هم وصل شده‌اند. همان‌طور که شکل ۱۴۵ نشان می‌دهد، حلقه‌های C_1, C_3, C_4 و C_6 روی دو صفحه افقی ثابت شده‌اند و به فاصله کم $2h$ از هم قرار دارند. حلقه‌های C_2 و C_5 که توسط بازوهای ترازو به طول d ، نگه داشته شده‌اند، به فاصله یکسانی از صفحه‌های افقی در حال تعادل‌اند (شکل ۱۴۵).

۵. نیروی F وارد بر C_2 را که از برهم‌کنش مغناطیسی با C_1 ناشی می‌شود، حساب کنید. برای سادگی فرض کنید نیروی وارد بر واحد طول، مانند مورد دو سیم دراز مستقیم حامل جریان‌های موازی است.
۶. وقتی ترازو در تعادل است، جریان I اندازه‌گیری می‌شود. مقدار I را برحسب کمیت‌های فیزیکی دستگاه بیان کنید. ابعاد دستگاه به گونه‌ای است که می‌توان اثرهای متقابل حلقه‌های راست و چپ روی یکدیگر را نادیده گرفت.



شکل ۱۴۵

۷. تعادل ترازو در برابر تغییرات کوچک δz در ارتفاع C_2 و $-\delta z$ در ارتفاع C_1 پایدار است. بیشینه مقدار δz_{max} را که در آن ترازو به نقطه تعادل پس از کشیده شدن بازمی‌گردد، حساب کنید.^۱

مسئله ۳ نوترون‌ها - در میدان گرانشی^۲

در دنیای متعارف کلاسیک، برخورد کشسان متوالی توپ با سطح زمین، مثالی آرمانی برای حرکت دائمی است. حرکت توپ محدود شده است: نمی‌تواند پایین‌تر از سطح زمین یا بالاتر از نقطه بازگشت برود. توپ در این شرایط مقید می‌ماند، بالا و پایین می‌رود و مدام به این حرکت ادامه می‌دهد. تنها نیروی مقاوم هوا یا برخورد ناکشسان می‌توانند این حرکت دائمی را متوقف کنند که در ادامه آن‌ها را نادیده می‌گیریم.

در سال ۲۰۰۲، گروهی از فیزیکدانان انستیتوی «لاوه-لاتزون» در گرونوبل، دلیلی تجربی درباره رفتار نوترون‌ها در میدان گرانشی زمین گزارش دادند.^۳ در آزمایش آن‌ها، نوترون‌هایی که به سمت راست حرکت می‌کردند، به سطح افقی بلوری که به‌عنوان آینه نوترونی عمل می‌کرد، می‌خوردند و به‌طور کشسان به ارتفاع اولیه واجهیده می‌شدند.

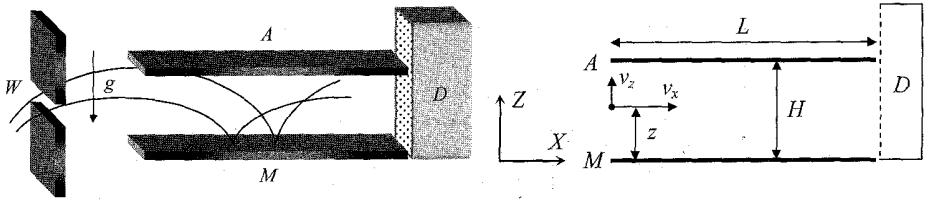
ترتیب این آزمایش در شکل ۱۴۶ رسم شده است. این ترتیب شامل روزنه W ، آینه نوترونی M از تقریب‌های زیر به‌ازای $\beta \ll 1$ استفاده کنید

$$\frac{1}{1 \mp \beta} \approx 1 \mp \beta + \beta^2 \quad \text{یا} \quad \frac{1}{1 \mp \beta^2} \approx 1 \mp \beta^2$$

همچنین برای θ های کوچک، $\sin \theta \approx \tan \theta$.

2. neutrons in a gravitational field

3. V.V. Nesvizhevsky et al., "Quantum states of neutrons in the earth's gravitational field." Nature, 415 (2002) 297 Phys Rev D 67, 10,2002 (2003).



شکل ۱۴۶

(در ارتفاع $z = 0$)، جذب‌کننده نوترونی A (در ارتفاع $H = z$ و با طول L) و آشکارساز نوترونی D است. باریکه نوترون‌ها از W تا D ، در کاواک بین A و M با مؤلفه افقی سرعت v_x حرکت می‌کند. همه نوترون‌هایی که به سطح A می‌رسند، جذب و از آزمایش حذف می‌شوند. آن‌هایی که به آینه M می‌رسند، به‌طور کشسان بازمی‌تابند. آشکارساز D ، آهنگ گذار $N(H)$ را می‌شمارد. این مقدار برابر تعداد کل نوترون‌هایی است که در واحد زمان به D می‌رسند.

نوترون‌ها با گستره وسیعی از سرعت‌های عمودی مثبت و منفی v_z وارد کاواک می‌شوند و در کاواک، بین آینه پایین و جذب‌کننده بالا حرکت می‌کنند.

۱. به‌طور کلاسیک، گستره سرعت‌های عمودی $v_z(z)$ نوترون‌هایی را حساب کنید که در ارتفاع z وارد کاواک می‌شوند و به آشکارساز می‌رسند. فرض کنید طول L از هر طول دیگری در مسئله بزرگ‌تر است.
 ۲. به‌طور کلاسیک، کمینه طول L_C کاواک را برای اطمینان از این موضوع محاسبه کنید که همه نوترون‌های خروجی با گستره سرعت قبلی، بدون توجه به مقدار z ، توسط A جذب می‌شوند. فرض کنید $v_x = 10 \text{ m/s}$ و $H = 50 \mu\text{m}$ است.

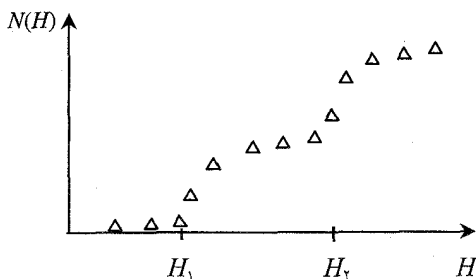
آهنگ عبور نوترون $N(H)$ توسط D اندازه‌گیری می‌شود. انتظار داریم که $N(H)$ به‌طور یکنواخت با H افزایش یابد.

۳. آهنگ کلاسیک $N_C(H)$ را با این فرض حساب کنید که برای نوترون‌هایی که با سرعت عمودی v_z و در ارتفاع z به کاواک می‌رسند، همه مقادیرهای v_z و z دارای احتمال یکسان هستند. پاسخ خود را برای نوترون‌هایی که با سرعت عمودی v_z و در ارتفاع z وارد کاواک می‌شوند، برحسب ρ ، «تعداد ثابت نوترون به‌ازای واحد زمان، به‌ازای واحد سرعت عمودی، و به‌ازای واحد ارتفاع» بیان کنید.

نتیجه‌های تجربی به‌دست آمده توسط گروه «گرونوبل»، با پیش‌بینی‌های کلاسیک بالا سازگار نبودند. در عوض، همان‌طور که نمودار شکل ۱۴۷ نشان می‌دهد، مقادیرهای تجربی $N(H)$ در اطراف برخی از ارتفاع‌های حدی H_1, H_2, H_3, \dots به‌شدت افزایش می‌یابند.

به‌عبارت دیگر، آزمایش نشان می‌دهد که حرکت عمودی نوترون‌هایی که از آینه و امی جهیدند، کوتاه‌تر است. به‌بیانی که بور و زومرفلد برای به‌دست آوردن ترازهای انرژی اتم هیدروژن به‌کار بردند، می‌توان نوشت: «کش S این نوترون‌ها در امتداد جهت عمودی، مضرب صحیحی از ثابت h پلانک است.» در اینجا S به این صورت است

$$S = \int p_z(z) dz = nh, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (\text{قاعده کوانتشن بور - زومرفلد})$$



شکل ۱۴۷

که در آن، p_z مؤلفه عمودی تکانه کلاسیک است و انتگرال، همه مقادیرهای چرخه واجهش را در برمی‌گیرد. تنها نوترون‌ها با این مقدار S مجازند وارد کاواک شوند.

۴. ارتفاع‌های بازگشت H_n و ترازهای انرژی E_n (وابسته به حرکت عمودی) را به کمک شرط کوانتاش بور-زومرفلد محاسبه کنید و نتیجه‌های عددی را برای H_1 برحسب μm و E_1 برحسب eV به دست آورید.

توزیع یکنواخت اولیه ρ نوترون‌ها در ورودی W ، در حین حرکت در کاواک طولی تغییر می‌کند و در محل آشکارساز به توزیع پله ماندنی تبدیل می‌شود (شکل ۱۴۷). از این به بعد برای سادگی، حالتی را در نظر می‌گیریم که کاواک طولی $H < H_1$ باشد. به طور کلاسیک، همه نوترون‌ها با انرژی‌هایی که در پرسش ۱ ملاحظه کردید، مجازند به آشکارساز برسند، در حالی که از دید مکانیک کوانتومی، تنها نوترون‌های با تراز انرژی E_1 مجازند. بنابر اصل عدم قطعیت زمان-انرژی هایزنبرگ، لازمه این تغییر و تبدیل کمیته زمان پرواز است. عدم قطعیت انرژی حرکت عمودی در صورتی قابل ملاحظه خواهد بود که طول کاواک کوچک باشد. این پدیده موجب پهن شدن ترازهای انرژی می‌شود.

۵. کمیته زمان پرواز t_q و کمیته طول L_q طول کاواک مورد نیاز برای مشاهده اولین افزایش شدید تعداد نوترون‌ها در D را برآورد کنید. فرض کنید $v_x = 10 \text{ m/s}$ باشد.

داده‌های مورد نیاز:

$$h = 6.63 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s} \quad \text{ثابت پلانک}$$

$$c = 3.00 \times 10^8 \text{ m/s} \quad \text{سرعت نور در خلأ}$$

$$e = 1.60 \times 10^{-19} \text{ C} \quad \text{بار پایه}$$

$$M = 1.67 \times 10^{-27} \text{ kg} \quad \text{جرم نوترون}$$

$$g = 9.81 \text{ m/s}^2 \quad \text{شتاب گرانش زمین}$$

همچنین در صورت نیاز از رابطه زیر استفاده کنید

$$\int (1-x)^{1/2} dx = -\frac{2(1-x)^{3/2}}{3}$$

پاسخ تشریحی مسئله‌ها

حل مسئله ۱

(الف)

الف-۱ و الف-۲

$$\left. \begin{aligned} G \frac{M_T m}{r_o^2} &= m \frac{v_o^2}{r_o} \\ v_o &= \frac{\sqrt{\pi} r_o}{T_o} \\ g &= \frac{GM_T}{R_T^2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{cases} r_o = (g R_T^2 T_o^2 / \pi^2)^{1/3} \Rightarrow r_o = 4,22 \times 10^7 \text{ m} \\ v_o = R T \sqrt{g/r_o} \Rightarrow v_o = 3,07 \times 10^3 \text{ m/s} \end{cases}$$

الف-۳

$$L_o = r_o m v_o = \frac{g R_T^2}{v_o^2} m v_o \Rightarrow L_o = \frac{m g R_T^2}{v_o}$$

$$E_o = \frac{1}{2} m v_o^2 - G \frac{M_T m}{r_o}$$

$$= \frac{1}{2} m v_o^2 - \frac{g R_T^2 m}{r_o} = \frac{1}{2} m v_o^2 - m v_o^2$$

$$\Rightarrow E_o = -\frac{1}{2} m v_o^2$$

(ب)

ب-۱. مقدار نیم‌پارامتر مسیر l با در نظر گرفتن اینکه اندازه حرکت زاویه‌ای مداری در هر دو مدار یکسان است، به دست می‌آید. یعنی

$$l = \frac{L_o^2}{GM_T m^2} = \frac{m^2 g^2 R_T^4}{v_o^2 g R_T^2 m^2} = \frac{g R_T^2}{v_o^2} = r_o \Rightarrow l = r_o$$

مقدار خروج از مرکز برابر است با

$$\varepsilon^2 = 1 + \frac{2EL_o^2}{G^2 M_T^2 m^3}$$

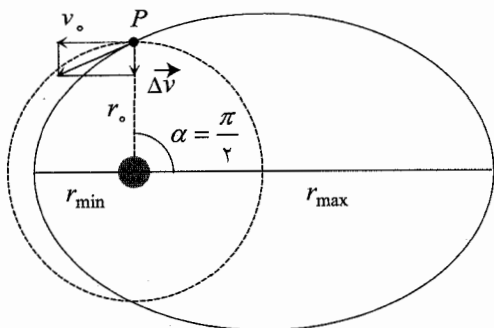
که در آن، E انرژی مکانیکی ماهواره جدید به ترتیب به دست می‌آید

$$E = \frac{1}{2} m (v_o^2 + \Delta v^2) - G \frac{M_T m}{r_o} = \frac{1}{2} m \Delta v^2 + E_o$$

$$= \frac{1}{2} m \Delta v^2 - \frac{1}{2} m v_o^2 = \frac{1}{2} m v_o^2 \left(\frac{\Delta v}{v_o} - 1 \right) = \frac{1}{2} m v_o^2 (\beta^2 - 1)$$

با مقایسه رابطه‌های بالا داریم $\varepsilon = \beta$. چون $\varepsilon = \beta < 1$ است، این مسیر بیضوی است.
 ب- مدارهای اولیه و نهایی در محل P برخورد دارند؛ جایی که موتور ماهواره به طور لحظه‌ای روشن می‌شود (شکل ۱۴۸). در این نقطه داریم

$$r(\theta = \alpha) = r_0 = \frac{r_0}{1 - \beta \cos \alpha} \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{2}$$



شکل ۱۴۸

ب-۳. از عبارت (معادله) مسیر، بی‌درنگ مقدارهای بیشینه و کمینه r که به ترتیب مربوط به $\theta = 0$ و $\theta = \pi$ هستند، به دست می‌آیند (شکل ۱۴۸). از این رو، داریم

$$r_{\max} = \frac{l}{1 - \varepsilon}, \quad r_{\min} = \frac{l}{1 + \varepsilon}$$

یعنی

$$r_{\max} = \frac{r_0}{1 - \beta}, \quad r_{\min} = \frac{r_0}{1 + \beta}$$

برای $\beta = \frac{1}{4}$ داریم

$$r_{\max} = 5,63 \times 10^7 \text{ m}; \quad r_{\min} = 3,38 \times 10^7 \text{ m}$$

همچنین، فاصله‌های r_{\min} و r_{\max} را می‌توان به کمک پایستگی تکانه زاویه‌ای و انرژی مکانیکی به دست آورد؛ با در نظر گرفتن اینکه \vec{r} و \vec{v} در حوضیض و اوج بر یکدیگر عمودند

$$E = \frac{1}{2} m v_0^2 (\beta^2 - 1) = \frac{1}{2} m v^2 - \frac{g R_T^2 m}{r}$$

$$L_0 = \frac{m g R_T^2}{v_0} = m v r$$

با حذف v از دو معادله بالا، به معادله درجه دومی می‌رسیم که پاسخ‌های آن r_{\min} و r_{\max} هستند.

ب-۴. با توجه به قانون سوم کپلر، دوره T در مدار جدید در رابطه زیر صدق می‌کند

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{T_0^2}{r_0^3}$$

که در آن، a نیم عدد اصلی بیضی است که با رابطه زیر داده می‌شود

$$a = \frac{r_{\max} + r_{\min}}{2} = \frac{r_0}{1 - \beta^2}$$

به این ترتیب

$$T = T_0 (1 - \beta^2)^{-\frac{2}{3}}$$

به ازای $\beta = \frac{1}{4}$ داریم

$$T = T_0 \left(\frac{15}{16} \right)^{-\frac{2}{3}} = 26,4 \text{ h}$$

(پ)

پ-۱. تنها اگر ماهواره مسیر بازی را ببیماید، می‌تواند از گرانس زمین فرار کند. در این صورت، خروج از مرکز مدار باید برابر یا بزرگ‌تر از یک شود. کمینه پارامتر خیز با مسیری سهموی، با $\varepsilon = 1$ متناظر است

$$\varepsilon = \beta \Rightarrow \beta_{\text{esc}} = 1$$

این را همچنین می‌توان با استفاده از انرژی کل ماهواره که باید در بی نهایت صفر شود ($E_P = 0$)، بدون سرعت باقی مانده ($E_K = 0$)، به دست آورد

$$E = \frac{1}{2} m v^2 (\beta_{\text{esc}}^2 - 1) = 0 \Rightarrow \beta_{\text{esc}} = 1$$

این نتیجه از $T = \infty$ یا $r_{\max} = \infty$ نیز ناشی می‌شود.

پ-۲. با در نظر گرفتن $\varepsilon = \beta_{\text{esc}} = 1$ ، معادله قطبی هذلولی عبارت است از

$$r = \frac{l}{1 - \cos \theta}$$

که در آن، نیم پارامتر مسیر برابر $l = r_0$ است. کمترین فاصله زمین-ماهواره، متناظر با $\theta = \pi$ است، به این ترتیب

$$r'_{\min} = \frac{r_0}{2}$$

این عبارت همچنین از پایستگی انرژی (برای $E = 0$) و از برابری بین تکانه زاویه‌ای (L_0) در نقطه اولیه P و در بیشینه تقریبی، جایی که \vec{r} و \vec{v} بر هم عمودند، به دست می‌آید.

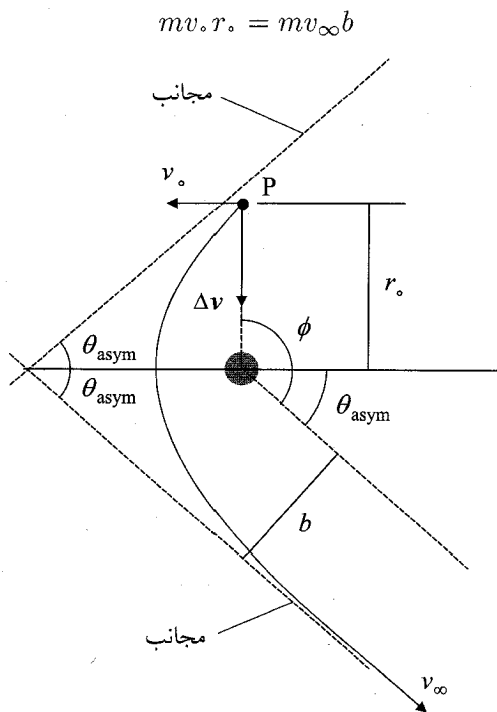
(ت)

ت-۱. اگر ماهواره با سرعت باقی مانده v_{∞} به سوی بی نهایت فرار کند، با توجه به پایستگی انرژی داریم

$$E = \frac{1}{2} m v_{\infty}^2 (\beta^2 - 1) = \frac{1}{2} m v_{\infty}^2$$

$$v_{\infty} = v_0 (\beta^2 - 1)^{\frac{1}{2}}$$

ت-۲. به ازای $\epsilon = \beta > \beta_{\text{esc}} = 1$ ، مسیر ماهواره سهمی خواهد شد.
 تکانه زاویه‌ای ماهواره در نقطه P و نقطه‌ای با سرعت باقی‌مانده v_∞ یکسان است (شکل ۱۴۹). در نتیجه



شکل ۱۴۸

و نیز

$$b = r_0 \frac{v_0}{v_\infty} \Rightarrow b = r_0 (\beta^2 - 1)^{-\frac{1}{2}}$$

ت-۳. زاویه بین هر مجانب و محور سهمی زاویه‌ای است که در معادله قطبی اش در حد $r \rightarrow \infty$ ظاهر می‌شود. این زاویه‌ای است که به ازای آن، مخرج معادله صفر می‌شود

$$1 - \beta \cos \theta_{\text{asym}} = 0 \Rightarrow \theta_{\text{asym}} = \cos^{-1}(1/\beta)$$

با توجه به شکل ۱۴۹

$$\phi = \frac{\pi}{2} + \theta_{\text{asym}} \Rightarrow \phi = \frac{\pi}{2} + \cos^{-1}(1/\beta)$$

به ازای $\beta = \frac{3}{2} \beta_{\text{esc}} = \frac{3}{2}$ ، داریم

$$\phi = 138^\circ = 2,41 \text{ rad}$$

حل مسئله ۲

۱. پس از زمان t ، خط عمود بر صفحه حلقه با میدان مغناطیسی $\vec{B}_0 = B_0 \vec{i}$ ، زاویه ωt را می‌سازد. در نتیجه، شار عبوری از حلقه برابر است با

$$\phi = N \vec{B}_0 \cdot \vec{S}$$

که در آن، بردار سطح \vec{S} با رابطه $\vec{S} = \pi a^2 (\cos \omega t \vec{i} + \sin \omega t \vec{j})$ بیان می‌شود. به این ترتیب داریم

$$\phi = N \pi a^2 \beta_0 \cos \omega t$$

نیروی محرکه القایی برابر است با

$$\varepsilon = -\frac{d\phi}{dt} \Rightarrow \varepsilon = N \pi a^2 \beta_0 \omega \sin \omega t$$

توان لحظه‌ای برابر $P = \varepsilon^2 / R$ است، در نتیجه

$$\langle P \rangle = \frac{(N \pi a^2 \beta_0 \omega)^2}{2R}$$

برای به دست آوردن رابطه بالا از $\frac{1}{T} \int_0^T \sin^2 \omega t dt = \frac{1}{2}$ استفاده کرده‌ایم. ۲. میدان کل در مرکز حلقه و در لحظه t برابر است با

$$\vec{B}_t = \vec{B}_0 + \vec{B}_i$$

که \vec{B}_i ، میدان مغناطیسی ناشی از جریان القایی، برابر است با

$$\vec{B}_i = B_i (\cos \omega t \vec{i} + \sin \omega t \vec{j})$$

$$B_i = \mu_0 N I / 2a, \quad I = \varepsilon / R$$

در نتیجه

$$B_i = \frac{\mu_0 N^2 \pi a B_0 \omega}{2R} \sin \omega t$$

و مقادیر متوسط مؤلفه‌های آن مساوی است با

$$\langle B_{ix} \rangle = \frac{\mu_0 N^2 \pi a B_0 \omega}{2R} \langle \sin \omega t \cos \omega t \rangle = 0$$

$$\langle B_{iy} \rangle = \frac{\mu_0 N^2 \pi a B_0 \omega}{2R} \langle \sin^2 \omega t \rangle = \frac{\mu_0 N^2 \pi a B_0 \omega}{4R}$$

به این ترتیب، برای مقدار متوسط میدان مغناطیسی کل داریم

$$\langle \vec{B}_t \rangle = B_0 \vec{i} + \frac{\mu_0 N^2 \pi a B_0 \omega}{4R} \vec{j}$$

عقبه در امتداد میدان متوسط جهت می‌گیرد، در نتیجه

$$\tan \theta = \frac{\mu_0 N^2 \pi a \omega}{4R}$$

سرانجام، مقاومت حلقه بر حسب θ که به این روش به دست می‌آید، برابر است با

$$R = \frac{\mu_0 N^2 \pi a \omega}{4 \tan \theta}$$

۳. نیروی وارد بر یکای بار مثبت در یک صفحه شعاعی است و داریم

$$\left| \vec{v} \times \vec{B} \right| = vB = \omega r B$$

که در آن، B ، میدان مغناطیسی در مرکز حلقه، برابر است با

$$B = N \frac{\mu_0 I}{2a}$$

در نتیجه، نیروی محرکه القایی روی هر صفحه توسط میدان مغناطیسی B برابر است با

$$\varepsilon_D = \varepsilon_{D'} = B\omega \int_0^b r dr = \frac{1}{4} B\omega b^2$$

سرانجام، نیروی محرکه القایی بین صفحه‌های ۱ و ۴ برابر است با

$$\varepsilon = \varepsilon_D + \varepsilon_{D'} = N \frac{\mu_0 b^2 \omega I}{2a}$$

۴. وقتی گالوانومتر G عدد صفر را نشان می‌دهد، یعنی $I_G = 0$ ، به کمک قانون‌های کیرشهف داریم

$$\varepsilon = IR \Rightarrow R = N \frac{\mu_0 b^2 \omega}{2a}$$

۵. نیرو بر واحد طول f بین دو سیم مستقیم موازی بی‌نهایت که به فاصله h از هم قرار دارند، برابر است با

$$f = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I_1 I_2}{h}$$

بازای $I_1 = I_2 = I$ و طول $2\pi a$ ، نیروی F القاشده روی C_2 توسط حلقه مجاور C_1 برابر است با

$$F = \frac{\mu_0 a}{h} I^2$$

۶. در حالت تعادل داریم

$$mgx = 4Fd$$

در نتیجه

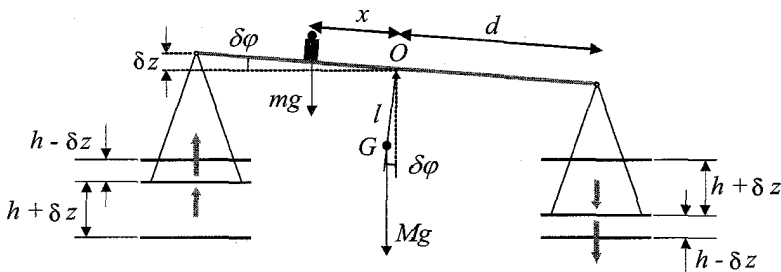
$$mgx = \frac{\sqrt[3]{\mu_0 a d}}{h} I^2$$

به این ترتیب

$$I = \left(\frac{mghx}{\sqrt[3]{\mu_0 a d}} \right)^{\frac{1}{3}} \quad (1)$$

۷. اگر گشتاورهای گرانشی نسبت به نقطه اتکای O بزرگتر از گشتاورهای مغناطیسی باشند، ترازو به اندازه زاویه انحراف کوچک $\delta\phi$ ، به سمت نقطه تعادل برمی‌گردد (شکل ۱۵۰).

$$Mgl \sin \delta\phi + mgx \cos \delta\phi > \sqrt[3]{\mu_0 a d} I^2 \left(\frac{1}{h - \delta z} + \frac{1}{h + \delta z} \right) d \cos \delta\phi$$



شکل ۱۵۰

در نتیجه، به کمک تقریبی که پیشنهاد شده است، داریم

$$Mgl \sin \delta\phi + mgx \cos \delta\phi > \frac{\sqrt[3]{\mu_0 a d} I^2}{h} \left(1 + \frac{\delta z^2}{h^2} \right) \cos \delta\phi$$

در نظر گرفتن شرط تعادل (۱)، به دست می‌دهد

$$Mgl \sin \delta\phi > mgx \frac{\delta z^2}{h^2} \cos \delta\phi$$

سرانجام به ازای $\tan \delta\phi \approx \sin \delta\phi = \delta z/d$ داریم

$$\delta z < \frac{Mlh^2}{mxd} \Rightarrow \delta z_{\max} = \frac{Mlh^2}{mxd}$$

حل مسئله ۳

۱. تنها نوترون‌هایی باقی می‌مانند که به ارتفاع H ، و در نتیجه به جذب‌کننده A نمی‌رسند. نقطه بازگشت این نوترون‌ها کمتر از H است. به این ترتیب، برای نوترون ورودی به فضای خالی کاواک در ارتفاع z و با

سرعت قائم v_z از پایداری انرژی داریم

$$\frac{1}{2} M v_z^2 + Mgz \leq Mgh$$

در نتیجه

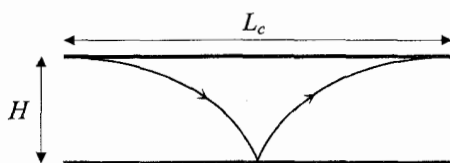
$$-\sqrt{2g(H-z)} \leq v_z(z) \leq \sqrt{2g(H-z)}$$

۲. برای اطمینان از جذب همهٔ نوترون‌هایی که سرعت آن‌ها خارج از گسترهٔ مجاز است، باید طول کاواک به اندازهٔ کافی بلند باشد. همچنین، نوترون‌ها باید دست‌کم یک بار درون کاواک به ارتفاع بیشینهٔ خود برسند. بزرگ‌ترین طول کاواک، متناظر با نوترون‌هایی است که در ارتفاع $z = H$ و $v_z = 0$ وارد می‌شوند (شکل ۱۵۱). اگر زمان سقوط را با t_f نشان دهیم، داریم

$$\left. \begin{aligned} L_c &= 2v_x t_f \\ H &= \frac{1}{2} g t_f^2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow L_c = 2v_x \sqrt{\frac{2H}{g}}$$

با قرار دادن مقدارهای داده شده داریم

$$L_c = 614 \text{ cm}$$



شکل ۱۵۱

۳. آهنگ عبور نوترون‌هایی که در ارتفاع z وارد کاواک می‌شوند، به‌ازای واحد ارتفاع، متناسب با گسترهٔ سرعت‌های مجازی است که در این ارتفاع می‌توانند داشته باشند و ثابت تناسب برابر ρ است.

$$\frac{dN_c(z)}{dz} = \rho [v_{z,\max}(z) - v_{z,\min}(z)] = 2\rho \sqrt{2g(H-z)}$$

تعداد کل نوترون‌هایی که عبور کرده‌اند با افزودن نوترون‌های ورودی به همهٔ ارتفاع‌های ممکن به‌دست می‌آید: $y = z/H$. بنابراین، داریم

$$\begin{aligned} N_c(H) &= \int_0^H dN_c(z) = \int_0^H 2\rho \sqrt{2g(H-z)} dz \\ &= 2\rho \sqrt{2gH} \int_0^1 (1-y)^{1/2} dy = 2\rho \sqrt{2gH} \left[-\frac{2}{3}(1-y)^{3/2} \right]_0^1 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow N_c(H) = \frac{4}{3} \rho \sqrt{2gH}^{3/2}$$

۴. برای نوترونی که از ارتفاع H سقوط می‌کند، کنش در یک چرخهٔ واجهیدن، دو برابر کنش در حین سقوط یا صعود است

$$S = 2 \int_0^H p_z dz = 2M\sqrt{2gH} \int_0^1 (1-y)^{\frac{1}{2}} dy = \frac{4}{3} M\sqrt{2gH}^{\frac{3}{2}}$$

به کمک قاعدهٔ کوانتس بور-زومرفلد داریم

$$S = \frac{4}{3} M\sqrt{2gH}^{\frac{3}{2}} = nh \Rightarrow H_n = \left(\frac{9h^2}{32M^2g} \right)^{\frac{1}{3}} h^{\frac{2}{3}}$$

ترازهای انرژی متناظر (وابسته به حرکت عمودی) برابرند با

$$E_n = MgH_n \Rightarrow E_n = \left(\frac{9Mg^2h^2}{32} \right)^{\frac{1}{3}} n^{\frac{2}{3}}$$

مقدارهای عددی برای تراز اول برابر است با

$$H_1 = \left(\frac{9h^2}{32M^2g} \right)^{\frac{1}{3}} = 1,65 \times 10^{-5} \text{ m} \Rightarrow H_1 = 16,5 \mu\text{m}$$

$$E_1 = MgH_1 = 2,71 \times 10^{-31} \text{ J} = 1,69 \times 10^{-12} \text{ eV} = 1,69 \text{ peV}$$

توجه کنید که H_1 از مرتبهٔ ارتفاع داده شدهٔ کاواک، یعنی $H = 50 \mu\text{m}$ است. این موضوع، احتمال مشاهدهٔ کوانتیدگی فضایی را هنگام تغییر H افزایش می‌دهد.

۵. بنابر اصل عدم قطعیت، تغییر زمان Δt و تغییر انرژی ΔE در رابطهٔ $\Delta E \Delta t \geq \hbar$ صدق می‌کنند. طی این زمان، نوترون‌ها مسافتی را به سمت راست حرکت می‌کنند

$$\Delta x = v_x \Delta t \geq v_x \hbar / \Delta E$$

چون کمینهٔ انرژی مجاز در کاواک برابر E_1 است، داریم $\Delta E \approx E_1$. در نتیجه، برآورد کمینهٔ زمان و کمینهٔ طول مورد نیاز کاواک برابر است با

$$t_q \approx \frac{\hbar}{E_1} = 0,4 \times 10^{-3} \text{ s} = 0,4 \text{ ms}$$

$$L_q \approx v_x \frac{\hbar}{E_1} = 4 \times 10^{-3} \text{ m} = 4 \text{ mm}$$

سی و هفتمین المپیاد بین المللی فیزیک

سنگاپور*

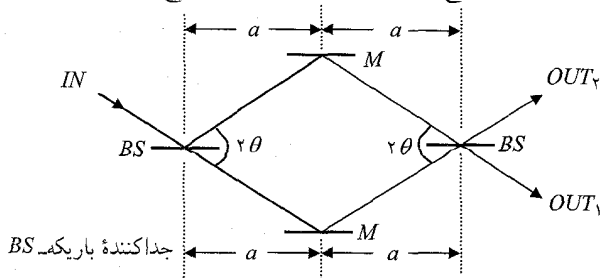
مسابقه نظری - زمان ۵ ساعت

۲۰۰۶/۱۳۸۵

مسئله ۱ گرانی در تداخل سنج نوترونی^۱

وضعیت فیزیکی: وضعیت آزمایش تداخل سنج - نوترونی مشهور کوللا، آورهازر و ورنر^۲ را در نظر می‌گیریم، اما تا آنجا که می‌توانیم ساختار جداکننده‌ها و آینه‌های داخل تداخل سنج را کامل فرض کنیم. این آزمایش اثر کشش گرانشی را روی موج‌های دو بروی نوترون‌ها بررسی می‌کند.

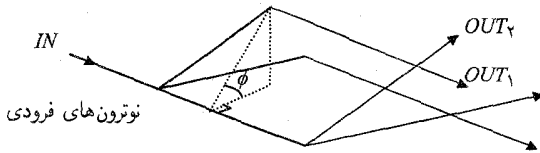
نمایش نمادین این تداخل سنج در مقایسه با یک تداخل سنج اپتیکی در شکل ۱۵۲-الف نشان



شکل ۱۵۲-الف

*. Singapore 1. gravity in a neutron interferometer 2. Collela, Overhauser and Werner

داده شده است. نوترون‌ها از طریق دو دریچه ورودی وارد تداخل‌سنج می‌شوند و یکی از دو مسیر نشان داده شده را طی می‌کنند. این نوترون‌ها در یکی از دو دریچه خروجی OUT_1 یا OUT_2 آشکار می‌شوند. این دو مسیر سطحی لوزی‌گونه را محصور می‌کنند که اندازه آن نوعاً در حدود چند cm^2 است. امواج دو بروی نوترون (که طول موج آن‌ها از مرتبه 10^{-10} m است) طوری تداخل می‌کنند، که اگر صفحه تداخل‌سنج افقی باشد همه آن‌ها از دریچه خروجی OUT_1 خارج می‌شوند. اما وقتی تداخل‌سنج حول محور باریکه نوترون فرودی در زاویه ϕ کج شده باشد (شکل ۱۵۲-ب)، باز توزیع نوترون‌ها بین دو دریچه خروجی OUT_1 و OUT_2 را مشاهده می‌کنند که وابسته به ϕ است.



شکل ۱۵۲-ب

هندسه: به‌ازای $\phi = 0^\circ$ صفحه تداخل‌سنج افقی است؛ و به‌ازای $\phi = 90^\circ$ صفحه عمودی است و دریچه‌های خروجی بالاتر از محور کج‌شدگی قرار دارند.

- الف) اندازه سطح لوزی شکل محصور بین دو مسیر تداخل‌سنج چقدر است؟
 ب) ارتفاع دریچه خروجی OUT_1 بالای صفحه افقی محور کج‌شدگی چقدر است؟
 H و A را برحسب a ، θ و ϕ به‌دست آورید.

طول راه نوری: طول راه نوری N_{opt} (یک عدد) نسبت طول راه هندسی (یک فاصله) به طول موج λ است. اگر λ در طول مسیر تغییر کند، N_{opt} با انتگرال‌گیری λ^{-1} در طول مسیر به‌دست می‌آید.
 پ) اگر تداخل‌سنج به‌اندازه زاویه ϕ کج شده باشد، اختلاف ΔN_{opt} در طول راه نوری دو مسیر چقدر است؟

- پاسخ خود را برحسب a ، θ ، ϕ ، همچنین جرم نوترون M ، طول موج دو بروی λ نوترون‌های فرودی، شتاب گرانشی g ، و ثابت پلانک h بیان کنید.
 ت) پارامتر حجم را به‌صورت زیر در نظر بگیرید

$$V = h^2 / gM^2$$

و ΔN_{opt} را فقط برحسب A ، V ، λ و ϕ بیان کنید. مقدار V را به‌ازای $M = 1.675 \times 10^{-27} \text{ kg}$ ، $g = 9.800 \text{ ms}^{-2}$ و $h = 6.626 \times 10^{-34} \text{ J}\cdot\text{s}$ به‌دست آورید.

ث) وقتی ϕ از 90° تا -90° تغییر می‌کند دریچه خروجی OUT_1 چند چرخه -از شدت زیاد تا شدت کم و برگشت به شدت زیاد- را تکمیل می‌کند؟

داده‌های تجربی: تداخل سنج در یک آزمایش واقعی با $a = ۳,۶۰۰ \text{ cm}$ ، $\theta = ۲۲,۱۰^\circ$ و $۱۹,۰۰^\circ$ چرخه کامل مشخص شده بود.

(ج) اندازه λ در این آزمایش چقدر بوده است؟

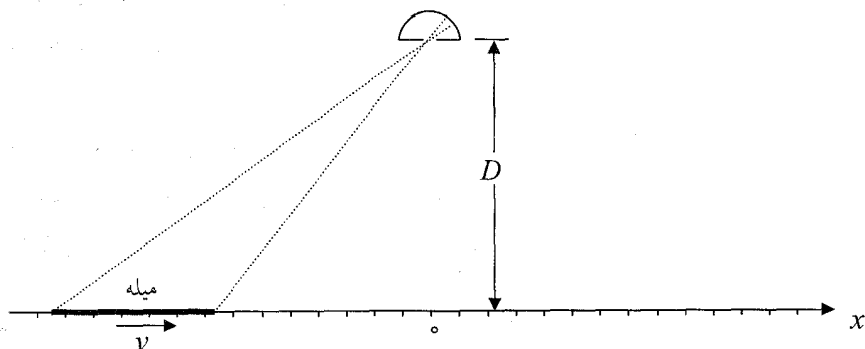
(چ) اگر در آزمایش دیگری از همان نوع ۳۰° چرخه کامل مشاهده شده باشد و از نوترون‌هایی با طول $\lambda_0 = ۰,۲۰۰ \text{ nm}$ استفاده شده باشد، اندازه سطح A چقدر است؟

راهنمایی: اگر $|\alpha x| \ll ۱$ ، می‌توان عبارت $(1+x)^\alpha$ را با $1 + \alpha x$ جایگزین کرد.

مسئله ۲ تماشای میله در حال حرکت

وضعیت فیزیکی: دوربینی با روزنه بسیار ریز، که روزنه آن در $x = 0$ و به فاصله D از محور x قرار دارد، با باز شدن روزنه برای مدتی بسیار کوتاه عکس‌هایی از میله می‌گیرد. علامت‌هایی هم فاصله در امتداد محور x وجود دارد. همان‌طور که شکل ۱۵۳ نشان می‌دهد طول ظاهری میله را می‌توان از روی عکس‌هایی که دوربین روزنه‌ای گرفته است تعیین کرد. در عکس، میله در حال سکون و طول آن L است. با این همه، میله ساکن نیست و با سرعت ثابت v در امتداد محور x در حال حرکت است.

دوربین روزنه‌ای



شکل ۱۵۳

رابطه‌های اصلی: عکسی که با دوربین روزنه‌ای گرفته می‌شود، بخش کوچکی از میله را در مکان \tilde{x} نشان می‌دهد.

(الف) مکان واقعی x این بخش از میله در هنگامی که عکس گرفته می‌شود، چیست؟ پاسخ خود را بر حسب \tilde{x} ، D ، L ، v و سرعت نور $c = ۳,۰۰ \times ۱۰^8 \text{ ms}^{-1}$ بیان کنید.

اگر به ساده‌تر شدن نتیجه شما کمک می‌کند از تعریف‌های زیر استفاده کنید

$$\beta = \frac{v}{c} \quad \text{و} \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

- ب) همین طور رابطه‌های معکوس متناظر یعنی، \bar{x} را برحسب x, D, L, v و c بیابید. توجه: مکان واقعی، مکان در چارچوبی است که در آن دوربین ساکن باشد.
- طول ظاهری میله: در لحظه‌ای که مکان واقعی مرکز میله در نقطه x است، دوربین روزنه‌ای یک عکس می‌گیرد.
- پ) طول ظاهری میله را روی این عکس برحسب متغیرهای به‌دست آمده تعیین کنید.
- ت) چگونگی تغییر طول ظاهری میله برحسب زمان را مشخص کنید.
- عکس متقارن: یک عکس دوربین روزنه‌ای هر دو انتهای میله را در فاصله مساوی از روزنه نشان می‌دهد.
- ث) طول ظاهری میله را روی این عکس تعیین کنید.
- ج) مکان واقعی وسط میله در زمانی که این عکس گرفته شده است چیست؟
- چ) این عکس تصویر وسط میله را در کجا نشان می‌دهد؟
- اولین و آخرین عکس‌ها: وقتی میله خیلی دور و در حال نزدیک شدن است دوربین روزنه‌ای اولین عکس را می‌گیرد، و هنگامی که میله خیلی دور و در حال دور شدن است آخرین عکس گرفته می‌شود.
- طول ظاهری میله در یکی از عکس‌ها $m/10^6$ و در عکس دیگر $m/3 \times 10^6$ است.
- ح) برای نشان دادن اینکه طول مشاهده شده در کدام عکس دیده می‌شود، یک جعبه را در ورقه پاسخ علامت بزنید.
- خ) سرعت v را تعیین کنید.
- د) طول L میله در حال سکون را به‌دست آورید.
- ذ) طول ظاهری میله را از عکس متقارن نتیجه بگیرید.

مسئله ۳

این مسئله شامل پنج بخش مستقل از هم است. هر بخش تنها جویای مرتبه بزرگی است، نه مقدار دقیق آن.

دوربین دیجیتال: یک دوربین دیجیتال را با تراشه مربعی CCD به ابعاد $L = 35 \text{ mm}$ و تعداد (پیکسل $10^6 = 1 \text{ MPix}$) $N_P = 5 \text{ MPix}$ در نظر بگیرید. فاصله کانونی عدسی این دوربین $f = 38 \text{ mm}$ است. عددهای پی در پی (۲، ۲٫۸، ۴، ۵٫۶، ۸، ۱۱، ۱۶ و ۲۲) که روی عدسی ظاهر می‌شود، مربوط به عدد F است و با $F\#$ نشان داده می‌شود و به‌صورت نسبت فاصله کانونی به قطر دهانه عدسی D تعریف می‌شود، $F\# = f/D$.

الف) بهترین تفکیک فضایی ممکن Δx_{\min} در تراشه دوربین را که توسط عدسی محدود شده است بیابید. نتیجه خود را برحسب طول موج λ و عدد $(F\#)F$ ، بیان کنید و مقدار عددی آن را به‌ازای $\lambda = 500 \text{ nm}$ به‌دست آورید.

(ب) تعداد مگاپیکسل N لازم را برای اینکه تراشه CCD با این تفکیک همساز شود پیدا کنید.
 (پ) گاهی، عکاسان می‌کوشند از دوربینی با کوچک‌ترین دهانه عملی استفاده کنند. فرض کنید که دوربینی با $N_0 = 16 \text{ MPix}$ و اندازه تراشه و فاصله کانونی ذکر شده در اختیار داریم. چه مقداری باید برای $F\#$ انتخاب شود تا کیفیت تصویر را اپتیک محدود نکند؟

(ت) می‌دانیم که چشم انسان تفکیک زاویه‌ای تقریبی $\phi = 2 \text{ arc min}$ دارد و یک چاپگر عکس نوعی با کمینه 30° dpi (نقطه بر اینچ) چاپ می‌کند. در چه فاصله کمینه z باید صفحه چاپ شده را از چشم خود نگه دارید تا چشم شما تک تک نقطه‌ها را نبیند؟

داده‌ها:

$$1 \text{ inch} = 25.4 \text{ mm} \quad \text{و} \quad 1 \text{ arcmin} = 2.91 \times 10^{-4} \text{ rad}$$

تخم مرغ سفت^۱: تخم مرغی مستقیماً از یخچالی با دمای $T_0 = 4^\circ \text{ C}$ به درون آب جوشان با دمای T_1 انداخته می‌شود.

(ث) چقدر انرژی U لازم است تا تخم مرغ بسته شود؟

(ج) جریان گرمای J به درون تخم مرغ چقدر است؟

(چ) اندازه توان گرمایی P که به تخم مرغ منتقل می‌شود چقدر است؟

(ح) چقدر باید تخم مرغ را پخت تا کاملاً سفت شود؟

راهنمایی: می‌توان از شکل ساده‌شده قانون فوریه $J = k\Delta T/\Delta r$ استفاده کرد، که در آن اختلاف دمای مربوط به Δr ، مقیاس طول نوعی مسئله، است. جریان گرمای J ، برحسب یکای Wm^{-2} است.

داده‌ها:

$$\mu = 10^3 \text{ kgm}^{-3} \quad \text{چگالی جرمی تخم مرغ}$$

$$C = 4.2 \text{ JK}^{-1}\text{g}^{-1} \quad \text{ظرفیت گرمایی ویژه تخم مرغ}$$

$$R = 2.5 \text{ cm} \quad \text{شعاع تخم مرغ}$$

$$T_c = 65^\circ \text{ C} \quad \text{دمای گرفتن سفیده تخم مرغ (پروتئین تخم مرغ)}$$

$$k = 0.64 \text{ WK}^{-1} \text{ m}^{-1} \quad \text{ضریب انتقال گرمایی}$$

(برای حالت مایع و جامد سفیده تخم مرغ یکسان فرض شود.)

آذرخش: مدل بسیار ساده شده‌ای از آذرخش ارائه شده است. آذرخش ناشی از تجمع بار الکتریکی در ابرهاست. در نتیجه، زیر ابر معمولاً دارای بار مثبت می‌شود و بالای آن دارای بار منفی و زمین زیر ابر دارای بار منفی است. وقتی میدان الکتریکی نظیر آن از شدت فروشکست هوا فراتر رود، یک تخلیه الکتریکی ویرانگر رخ می‌دهد: این آذرخش است.

1. hard-boiled egg

به کمک منحنی ساده شده جریان-زمان شکل ۱۵۴، و با توجه به داده‌های زیر به پرسش‌ها پاسخ دهید.

$h = 1 \text{ km}$: فاصله بین پایین ابر و سطح زمین

$E_0 = 300 \text{ kVm}^{-1}$: میدان الکتریکی فروشکست هوای مرطوب

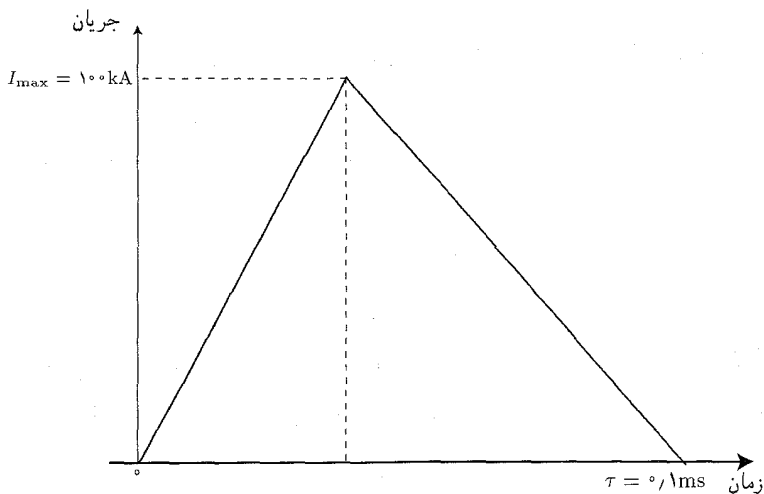
32×10^6 : تعداد کل آذرخش‌ها در سال که به زمین برخورد می‌کند

6.5×10^{19} : جمعیت کل انسان‌ها

(خ) مقدار کل بار Q آزاد شده در آذرخش، چقدر است؟

(د) جریان میانگین I بین زیر ابر و سطح زمین در طول آذرخش چقدر است؟

(ذ) فرض کنید انرژی همه آذرخش‌ها در طول یک سال جمع و به‌طور یکسان بین همه مردم تقسیم شود. با سهم خود چه مدت می‌توانید به‌طور پیوسته یک لامپ 100 W را روشن نگه دارید؟



شکل ۱۵۴

رگ‌های موئین^۱: خون را شاره‌ای چسبنده و تراکم‌ناپذیر با چگالی جرمی μ مانند آب و چسبندگی دینامیکی $\eta = 4.5 \text{ gm}^{-1} \text{ s}^{-1}$ در نظر بگیرید. رگ‌های خونی را به‌صورت لوله‌های راست دایره‌ای به شعاع r و طول L مدل‌سازی می‌کنیم و جریان خون را با قانون پوازوی توصیف می‌کنیم

$$\Delta p = RD$$

دینامیک شاره‌ها شبیه قانون اهم در الکتریسیته است. در اینجا Δp اختلاف فشار بین ورودی و خروجی رگ خونی است، $D = Sv$ حجمی است که از سطح مقطع S رگ خونی می‌گذرد و v سرعت خون است. مقاومت هیدرولیک R از رابطه زیر به دست می‌آید

$$R = \frac{8\eta L}{\pi r^4}$$

برای گردش خون منظم (جریان از بطن چپ به دهلیز راست قلب)، جریان خون برای مردی که در حال استراحت است $D \approx 10^3 \text{ cm}^3 \text{ s}^{-1}$ می‌شود. پرسش‌های زیر را با این فرض‌ها پاسخ دهید که، همه رگ‌های موین به‌طور موازی به هم متصل شده‌اند، شعاع و طول هر یک از آن‌ها به ترتیب $r = 4 \mu\text{m}$ و $L = 1 \text{ mm}$ است و تحت اختلاف فشار $\Delta p = 1 \text{ kPa}$ عمل می‌کنند.

(ر) چند رگ خونی در بدن انسان وجود دارد؟

(ز) سرعت جریان خون در یک رگ موین چقدر است؟

آسمان خراش^۱: دمای بیرونی در پایین آسمان خراشی به ارتفاع 1000 m برابر $T_{\text{bot}} = 30^\circ \text{C}$ است. می‌خواهیم دمای بیرونی T_{top} را در بالای آسمان خراش برآورد کنیم. تیغه‌ای از هوا (گاز نیتروژن کامل با ضریب بی‌دررویی $\gamma = \frac{7}{5}$) به آرامی تا ارتفاع z ، که در آن فشار کمتر است، بالا می‌رود. فرض کنید که این تیغه به‌طور بی‌دررو منبسط شود، در نتیجه دمای آن به دمای هوای اطراف فرو افتد.

(ژ) تغییر نسبی دما dT/T با تغییر نسبی فشار dp/p چه رابطه‌ای دارد؟

(س) اختلاف فشار dp را بر حسب تغییر ارتفاع dz بیان کنید.

(ش) دما در بالای ساختمان چقدر است؟

داده‌ها:

$$k = 1,38 \times 10^{-23} \text{ JK}^{-1} \quad \text{ثابت بولتزمن}$$

$$m = 4,65 \times 10^{-26} \text{ kg} \quad \text{جرم یک مولکول نیتروژن}$$

$$g = 9,80 \text{ ms}^{-2} \quad \text{شتاب گرانشی}$$

پاسخ تشریحی مسئله‌ها

حل مسئله ۱

الف) هر ضلع لوزی، طولی برابر $L = a/\cos \theta$ دارد و فاصله بین ضلع‌های موازی برابر است با

$$D = \frac{a}{\cos \theta} \sin 2\theta = 2a \sin \theta$$

حاصل ضرب این دو، اندازه سطح لوزی شکل را به دست می‌دهد

$$A = LD = 2a^2 \tan \theta$$

(ب) ارتفاع دریچه خروجی OUT_1 بالای صفحه افقی محور کج شدگی برابر است با

$$H = 2a \sin \theta \sin \phi$$

(پ) تنها طول هریک از خط‌های موازی ورودی (IN) و خروجی (OUT_1) برابر L است. با توجه به طول موج دوبروی λ_0 در طرف ورودی و طول موج λ_1 در طرف خروجی ۱، داریم

$$\Delta N_{opt} = \frac{L}{\lambda_0} - \frac{L}{\lambda_1} = \frac{a}{\lambda_0 \cos \theta} \left(1 - \frac{\lambda_0}{\lambda_1} \right)$$

تکانه متناظر با هر طول موج به ترتیب برابر h/λ_0 یا h/λ_1 است و با توجه به پایستگی انرژی داریم

$$\frac{1}{2M} \left(\frac{h}{\lambda_0} \right)^2 = \frac{1}{2M} \left(\frac{h}{\lambda_1} \right)^2 + MgH$$

در نتیجه

$$\frac{\lambda_0}{\lambda_1} = \sqrt{1 - 2 \frac{gM^2}{h^2} \lambda_0^2 H}$$

با توجه به اینکه عبارت $(gM^2/h^2) \lambda_0^2 H$ از مرتبه 10^{-7} است، با تقریب بسیار خوبی داریم

$$\frac{\lambda_0}{\lambda_1} = 1 - \frac{gM^2}{h^2} \lambda_0^2 H$$

به این ترتیب

$$\Delta N_{opt} = \frac{a}{\lambda_0 \cos \theta} \frac{gM^2}{h^2} \lambda_0^2 H$$

یا

$$\Delta N_{opt} = 2 \frac{gM^2}{h^2} a^2 \lambda_0 \tan \theta \sin \phi$$

(ت)

$$\Delta N_{opt} = \frac{\lambda_0 A}{V} \sin \phi$$

که در آن مقدار عددی کمیت حجم برابر است با

$$V = 0,1597 \times 10^{-13} \text{ m}^3 = 0,1597 \text{ nm} \cdot \text{cm}^2$$

(ث) وقتی اختلاف راه نوری برای دو پرتو عدد درستی باشد، یعنی $\Delta N_{opt} = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ تداخل سازنده (بیشترین شدت در خروجی ۱) وجود دارد و هنگامی که این اختلاف نصف

عدد درستی باشد، یعنی $\pm \frac{1}{4}, \pm \frac{3}{4}, \pm \frac{5}{4}, \dots$ ، تداخل ویرانگر (کمترین شدت در خروجی ۱) خواهیم داشت. با تغییر ϕ از 90° تا -90° داریم

$$\Delta N_{\text{opt}} \begin{cases} \phi = 90^\circ \\ \phi = -90^\circ \end{cases} = \frac{2\lambda_0 A}{V}$$

در این صورت بازای هر چرخه داریم: $2\lambda_0 A/V$.

(ج) بازای $a = 3,6 \text{ cm}$ و $\theta = 22,1^\circ$ داریم

$$A = 10,53 \text{ cm}^2$$

در این صورت

$$\lambda_0 = \frac{19 \times 0,1597}{2 \times 10,53} \text{ nm} = 0,1421 \text{ nm}$$

(چ) برای 30° چرخه کامل و بازای $\lambda_0 = 0,2 \text{ nm}$ مساحت نظیر آن برابر است با

$$A = \frac{30 \times 0,1597}{2 \times 0,2} \text{ cm}^2 = 11,98 \text{ cm}^2$$

حل مسئله ۲

(الف) مکان \tilde{x} روی عکس نشان می‌دهد اگر نور در لحظه‌ای زودتر از لحظه گرفتن عکس گسیل شده باشد، زمان حرکت نور برابر است با

$$T = \sqrt{D^2 + \tilde{x}^2}/c$$

در حین سپری شدن زمان T بخش مربوط به میله فاصله vT را حرکت کرده است، به این ترتیب مکان واقعی x در زمان گرفتن عکس برابر است با

$$x = \tilde{x} + \beta\sqrt{D^2 + \tilde{x}^2}$$

(ب) با حل معادله بالا برحسب \tilde{x} داریم

$$\tilde{x} = \gamma^2 x - \beta\gamma\sqrt{D^2 + (\gamma x)^2}$$

(پ) به دلیل انقباض لورنتس، طول واقعی میله در حال حرکت برابر L/γ است. به این ترتیب مکان واقعی دو انتهای میله برابر است با

$$x_{\pm} = x_0 \pm \frac{L}{2\gamma}$$

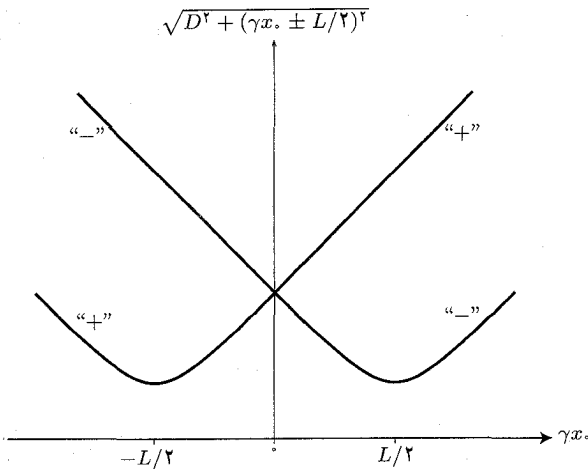
علامت مثبت برای انتهای جلو و منفی برای انتهای عقب میله در نظر گرفته می شود. عکس گرفته شده توسط دوربین روزنه ای، تصاویر انتهای میله را در مکان های زیر نشان می دهد

$$\tilde{x}_{\pm} = \gamma(\gamma x_0 \pm \frac{L}{\gamma}) - \beta\gamma\sqrt{D^2 + (\gamma x_0 \pm \frac{L}{\gamma})^2}$$

در نتیجه طول ظاهری میله $\tilde{L}(x_0) = \tilde{x}_+ - \tilde{x}_-$ برابر است با

$$\tilde{L}(x_0) = \gamma L + \beta\gamma\sqrt{D^2 + (\gamma x_0 - \frac{L}{\gamma})^2} - \beta\gamma\sqrt{D^2 + (\gamma x_0 + \frac{L}{\gamma})^2}$$

ت) چون میله با سرعت ثابت v حرکت می کند، داریم $dx_0/dt = v$ و در نتیجه پرسش این است که وقتی x_0 افزایش می یابد، آیا $\tilde{L}(x_0)$ افزایش می یابد یا کاهش. در شکل ۱۵۵ دو نمودار $\sqrt{D^2 + (\gamma x_0 \pm L/2)^2}$ برحسب γx_0 رسم شده است.



شکل ۱۵۵

اختلاف بین ریشه های مربعی «+» و «-» در عبارت $\tilde{L}(x_0)$ ظاهر می شود و این اختلاف به طور آشکار با افزایش x_0 ، کاهش می یابد. در نتیجه طول ظاهری میله در تمام زمان کاهش می یابد. بنا به دلایل تقارن، طول ظاهری میله روی عکس متقارن، برابر طول واقعی میله در حال حرکت است، زیرا نور از هر دو انتهای میله به طور هم زمان گسیل می شود و در یک لحظه به دوربین روزنه ای می رسد. به این ترتیب طول ظاهری میله برابر است با

$$\tilde{L} = \frac{L}{\gamma}$$

ج) مکان‌های نقطهٔ انتهایی ظاهری به صورت $\tilde{x}_- = -\tilde{x}_+$ هستند، یا

$$\begin{aligned} 0 &= \tilde{x}_+ + \tilde{x}_- = 2\gamma^2 x_0 - \beta\gamma\sqrt{D^2 + (\gamma x_0 + \frac{L}{2})^2} \\ &\quad - \beta\gamma\sqrt{D^2 + (\gamma x_0 - \frac{L}{2})^2} \end{aligned}$$

از طرفی

$$\begin{aligned} \frac{L}{\gamma} = \tilde{x}_+ - \tilde{x}_- &= \gamma L - \beta\gamma\sqrt{D^2 + (\gamma x_0 + \frac{L}{2})^2} \\ &\quad + \beta\gamma\sqrt{D^2 + (\gamma x_0 - \frac{L}{2})^2} \end{aligned}$$

در نتیجه از دو رابطهٔ اخیر خواهیم داشت

$$\sqrt{D^2 + (\gamma x_0 \pm \frac{L}{2})^2} = \frac{2\gamma^2 x_0 \pm (\gamma L - L/\gamma)}{2\beta\gamma} = \frac{\gamma x_0}{\beta} \pm \frac{\beta L}{2}$$

محاسبه نشان می‌دهد چه علامت مثبت را انتخاب کنیم و چه علامت منفی را، به یک پاسخ برای x_0 می‌رسیم.

$$x_0 = \beta\sqrt{D^2 + \left(\frac{L}{2\gamma}\right)^2}$$

ج) به این ترتیب تصویر وسط میله روی عکس متقارن در مکان زیر قرار دارد

$$\begin{aligned} \tilde{x}_0 &= \gamma^2 x_0 - \beta\gamma\sqrt{D^2 + (\gamma x_0)^2} \\ &= \beta\gamma\sqrt{(\gamma D)^2 + \left(\frac{L}{2}\right)^2} - \sqrt{(\gamma D)^2 + \left(\frac{\beta L}{2}\right)^2} \end{aligned}$$

که در فاصلهٔ $l = \tilde{x}_+ - \tilde{x}_0 = L/2\gamma - \tilde{x}_0$ از تصویر انتهایی جلویی میله است،

$$l = L/2\gamma - \beta\gamma\sqrt{(\gamma D)^2 + (L/2)^2} + \beta\gamma\sqrt{(\gamma D)^2 + (\beta L/2)^2}$$

یا

$$l = L/2\gamma \left[1 - \frac{\beta L/2}{\sqrt{(\gamma D)^2 + (L/2)^2} + \sqrt{(\gamma D)^2 + (\beta L/2)^2}} \right]$$

(ح) در اولین لحظه، مقدار منفی خیلی بزرگی برای x داریم، به این ترتیب طول ظاهری میله روی اولین عکس برابر است با

$$\tilde{L}_{\text{اولین}} = \tilde{L}(x_0 \rightarrow -\infty) = (1 + \beta)\gamma L = \sqrt{\frac{1 + \beta}{1 - \beta}} L$$

به طور مشابه، در آخرین لحظه، مقدار مثبت خیلی بزرگی برای x داریم، به این ترتیب طول ظاهری میله روی آخرین عکس برابر است با

$$\tilde{L}_{\text{آخرین}} = \tilde{L}(x_0 \rightarrow +\infty) = (1 - \beta)L = \sqrt{\frac{1 - \beta}{1 + \beta}} L$$

در نتیجه $\tilde{L}_{\text{اولین}} > \tilde{L}_{\text{آخرین}}$ ، و طول ظاهری در اولین عکس برابر 3 m و در آخرین عکس برابر 1 m است.

(خ) با توجه به رابطه‌های قسمت قبل داریم

$$\beta = \frac{\tilde{L}_{\text{اولین}} - \tilde{L}_{\text{آخرین}}}{\tilde{L}_{\text{اولین}} + \tilde{L}_{\text{آخرین}}} = \frac{3 - 1}{3 + 1} = \frac{1}{2}$$

در نتیجه سرعت میله برابر $v = c/2$ است.

(د) همچنین داریم

$$\gamma = \frac{\tilde{L}_{\text{اولین}} + \tilde{L}_{\text{آخرین}}}{2\sqrt{\tilde{L}_{\text{اولین}}\tilde{L}_{\text{آخرین}}}} = \frac{2}{\sqrt{3}} = 1,1547$$

$$L = \sqrt{\tilde{L}_{\text{اولین}}\tilde{L}_{\text{آخرین}}} = 1,73\text{ m}$$

(ذ) طول میله روی عکس متقارن به صورت زیر است

$$\tilde{L} = \frac{2\tilde{L}_{\text{اولین}}\tilde{L}_{\text{آخرین}}}{\tilde{L}_{\text{اولین}} + \tilde{L}_{\text{آخرین}}} = 1,50\text{ m}$$

حل مسئله ۳

دوربین دیجیتالی

(الف) دو عامل، تفکیک دوربین را به عنوان یک ابزار عکاسی محدود می‌کند: پراش توسط دهانه (دیاگرام) و اندازه پیکسل. برای پراش، تفکیک زاویه‌ای ذاتی θ_R برابر نسبت طول موج λ نور به قطر D دهانه دوربین است

$$\theta_R = 1,22\lambda/D$$

که عامل استاندارد ۱٫۲۲ ناشی از دایره‌ای شکل بودن دهانه است. وقتی عکسی می‌گیریم، شیء به‌طور معمول در فاصله نسبتاً دوری از عکاس قرار دارد و تصویر در صفحه کانونی دوربین، جایی که تراشه CCD قرار گرفته است، تشکیل می‌شود. آنگاه معیار پراش ریلی بیان می‌دارد که دو نقطه تصویری در صورتی می‌توانند تفکیک شوند که در فاصله‌ای بیش از Δx قرار گیرند.

$$\Delta x = f\theta_R = 1,22\lambda F\#$$

که به دست می‌دهد

$$\Delta x = 1,22\mu\text{m}$$

(ب) اگر بزرگ‌ترین دهانه ممکن را انتخاب کنیم (یا کوچک‌ترین مقدار $F\# = 2$) و طول موج نوعی نور روز را $\lambda = 500 \text{ nm}$ فرض کنیم، تفکیک دیجیتالی با فاصله l بین مرکز دو پیکسل مجاور داده می‌شود. برای دوربین 5 MPix این فاصله تقریباً برابر است با

$$l = \frac{L}{\sqrt{N_p}} = 15,65\mu\text{m}$$

در وضعیت آرمانی باید تفکیک دیجیتالی و نوری را بر هم انطباق دهیم تا هیچ‌یک از ویژگی‌های تصویر از دست نرود. با برابر قرار دادن تفکیک نوری معین با عبارت تفکیک دیجیتالی خواهیم داشت

$$N = (L/\Delta x)^2 \approx 823 \text{ MPix}$$

(پ) حال می‌خواهیم به ویژگی دهانه بهینه که نامعلوم است، توجه کنیم. می‌دانیم که باید داشته باشیم $l \geq \Delta x$ ، یعنی $F\# \leq F_0$

$$F_0 = \frac{L}{1,22\lambda\sqrt{N_0}} = 2\sqrt{\frac{N}{N_0}} = 14,34$$

از آنجایی که این مقدار $F\#$ موجود نیست نزدیک‌ترین مقدار به آن را که تفکیک نوری بزرگ‌تری دارد انتخاب می‌کنیم، یعنی $F_0 = 11$.

(ت) وقتی به تصویری در فاصله z از چشم نگاه می‌کنیم، زاویه v' دو نقطه مجاور برابر $\phi = l/z$ است که در آن l فاصله بین دو نقطه مجاور است. به این ترتیب

$$z = \frac{l}{\phi} = \frac{2,54 \times 10^{-2} / 30 \text{ dpi}}{5,82 \times 10^{-4} \text{ rad}} = 14,55 \text{ cm} \approx 15 \text{ cm}$$

تخم مرغ سفت

(ث) همه تخم مرغ باید به دمای بسته شدن برسد. این بدان معناست که افزایش دما برابر است با

$$\Delta T = T_c - T_0 = 65^\circ \text{ C} - 4^\circ \text{ C} = 61^\circ \text{ C}$$

به این ترتیب کمترین مقدار انرژی موردنیاز برای اینکه تخم مرغ به طور کامل بسته شود از رابطه $U = \mu VC\Delta T$ به دست می آید که $V = \frac{4}{3}\pi R^3$ حجم تخم مرغ است. در نتیجه خواهیم داشت

$$U = \mu \frac{4\pi R^3}{3} C(T_c - T_0) = 16768 \text{ J}$$

(ج) از معادله ساده شده جریان گرما می توانیم مقدار انرژی ای را که از طریق سطح تخم مرغ به درون آن بر واحد زمان جریان یافته است، حساب کنیم. برای به دست آوردن یک مقدار تقریبی برای زمان فرض می کنیم دمای اولیه مرکز تخم مرغ $T = 4^\circ \text{C}$ است. مقیاس طول نوعی $\Delta r = R$ است، و اختلاف دمای مربوط به آن برابر $\Delta T = T_1 - T_0$ است که $T_1 = 100^\circ \text{C}$ دمای آب جوشان است. به این ترتیب خواهیم داشت

$$J = k(T_1 - T_0)/R = 2458 \text{ Wm}^{-2}$$

(چ) گرما از آب جوشان، از طریق سطح تخم مرغ به آن منتقل شده است. در نتیجه

$$P = 4\pi R^2 J = 4\pi kR(T_1 - T_0) \approx 19.3 \text{ W}$$

(ح) برای به دست آوردن مدت زمان تقریبی τ که در آن تخم مرغ کاملاً سفت می شود باید مقدار گرمایی را که از همه راه ها به مرکز تخم مرغ جریان یافته است در نظر بگیریم. در این صورت داریم

$$\tau = \frac{U}{P} = \frac{\mu CR^2}{3k} \frac{T_c - T_0}{T_1 - T_0} = \frac{16768}{19.3} = 869 \text{ s} \approx 14.5 \text{ min}$$

آذرخش

(خ) مقدار کل بار آزاد شده Q برابر سطح زیر نمودار جریان-زمان شکل ۱۵۳ است. با توجه به مثلث شکل بودن این نمودار داریم

$$Q = I_0 \tau / 2 = 5 \text{ C}$$

(د) جریان میانگین موردنظر برابر است با

$$I = Q/\tau = I_0/2 = 5 \text{ kA}$$

(ذ) از آنجا که زیرابر دارای بار مثبت و زمین دارای بار منفی می شود، وضعیت، مشابه دو خازن موازی عظیم است. مقدار انرژی ذخیره شده در فضای بین صفحه های این خازن پیش از آذرخش برابر $Q^2 E_0 h / 2$ است که $E_0 h$ اختلاف پتانسیل (ولتاژ) بین زیرابر و زمین است، و در حین آذرخش

این انرژی آزاد می‌شود. به علاوه برای یک آذرخش، انرژی $7.5 \times 10^8 \text{ J} = Q E_0 h / 2$ را به دست می‌آوریم که با جریان آن می‌توانید به مدت زیر، یک لامپ 100 W را روشن نگه دارید

$$t = \frac{32 \times 10^6}{6.5 \times 10^9} \times \frac{7.5 \times 10^8 \text{ J}}{100 \text{ W}} \approx 10 \text{ h}$$

رگ‌های موین

(ر) با در نظر گرفتن همه رگ‌ها داریم

$$R_{\text{all}} = \Delta p / D = 10^7 \text{ Pa m}^{-3} \text{ s}$$

با توجه به فرض پرسش، همه رگ‌ها به طور موازی به هم متصل شده‌اند. شباهت بین قانون‌های

پوازی و اهم، مقاومت هیدرولیک R را برای یک لوله موین به صورت زیر به دست می‌دهد

$$\frac{1}{R_{\text{all}}} = \frac{N}{R}$$

در این صورت

$$N = \frac{R}{R_{\text{all}}}$$

حال به کمک قانون پوازی برای همه رگ‌های خونی در بدن انسان، R را حساب می‌کنیم

$$R = \frac{8\eta L}{\pi r^4} \approx 4.5 \times 10^{16} \text{ kgm}^{-4} \text{ s}^{-1}$$

در نتیجه داریم

$$N \approx \frac{4.5 \times 10^{16}}{10^7} = 4.5 \times 10^9$$

(ز) اگر سطح مقطع همه رگ‌های خونی بدن انسان را $S_{\text{all}} = N\pi r^2$ بگیریم، با توجه به رابطه

$$D = S_{\text{all}} v$$

$$v = \frac{D}{N\pi r^2} = \frac{r^2 \Delta p}{8\eta L} = 0.44 \text{ mms}^{-1}$$

آسمان‌خراش

(ژ) وقتی تیغه هوا در ارتفاع z بالای زمین است، فشار هوای درون تیغه $p(z)$ ، دما $t(z)$ و حجم آن

$V(z) = Ah(z)$ است که A مساحت سطح مقطع و $h(z)$ ضخامت تیغه هواست. با ترکیب

قانون گاز کامل (N تعداد مولکول‌ها در تیغه است)

$$pV = NkT$$

و قانون گازی دررو

$$pV^\gamma = \text{ثابت} \quad \text{یا} \quad (pV)^\gamma \propto p^{\gamma-1}$$

داریم

$$p^{\gamma-1} \propto T^\gamma$$

با مشتق‌گیری از این تناسب خواهیم داشت

$$(\gamma - 1)dp/p = \gamma dT/T$$

در نتیجه

$$dT/T = (1 - 1/\gamma)dp/p$$

س) از آنجا که تیغه شتابی ندارد، وزن آن باید با نیروی برآیند ناشی از اختلاف فشار در بالا و زیر تیغه به تعادل برسد. اگر نیروهای رو به پایین را مثبت بگیریم، داریم

$$\begin{aligned} 0 &= Nmg + A[p(z+h) - p(z)] \\ &= \frac{pV}{kT}mg + \frac{V}{h} \frac{dp}{dz}h \end{aligned}$$

به این ترتیب

$$\frac{dp}{dz} = -\frac{mg}{k} \frac{p}{T}$$

یا

$$dp = -\frac{mg}{k} \frac{p}{T} dz$$

ش) اگر عبارت‌هایی را که در دو قسمت اخیر به دست آوردیم بر یکدیگر تقسیم کنیم، خواهیم داشت

$$dT = -\left(1 - 1/\gamma\right) \frac{mg}{k} dz$$

در نتیجه

$$T_{\text{top}} = T_{\text{bot}} - \left(1 - 1/\gamma\right) \frac{mgh}{k}$$

برای ساختمانی به ارتفاع $H = 1 \text{ km}$ و دمای $T_{\text{bot}} = 30^\circ \text{ C}$ داریم $T_{\text{top}} = 20.16^\circ \text{ C}$.

سی و هشتمین المپیاد بین‌المللی فیزیک

اصفهان، ایران

مسابقه نظری - زمان ۵ ساعت

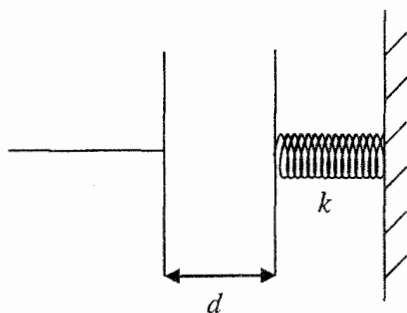
۲۰۰۷/۱۳۸۶

مسئله ۱ کیسه ایمنی هوا

در این مسئله به یک مدل ساده شده شتاب‌سنج‌هایی^۱ می‌پردازیم که برای فعال کردن کیسه‌های ایمنی هوا در اتومبیل‌ها در هنگام تصادف طراحی شده‌اند. می‌خواهیم یک دستگاه الکترومکانیکی را طوری بسازیم که وقتی شتاب از حد معینی تجاوز کرد، یکی از پارامترهای الکتریکی دستگاه مانند ولتاژ در نقطه معینی از مدار از آستانه‌ای تجاوز کند و در نتیجه کیسه هوا فعال شود. توجه: در این مسئله گرانی را نادیده بگیرید.

الف) خازنی با صفحه‌های موازی را مطابق شکل ۱۵۶ در نظر بگیرید. سطح هر صفحه این خازن A و فاصله آن‌ها از یکدیگر d است. فاصله بین دو صفحه بسیار کوچک‌تر از ابعاد صفحه‌هاست. یکی از این صفحه‌ها با فزنی با ثابت k در تماس با یک دیوار است، و صفحه دیگر ثابت است. وقتی فاصله بین صفحه‌ها d باشد. فنر نه متراکم است و نه کشیده، به بیان دیگر نیرویی به فنر وارد نمی‌شود. فرض کنید که گذردهی هوای بین صفحه‌ها، برابر گذردهی خلا^۲ ϵ_0 باشد. ظرفیت نظیر این فاصله بین صفحه‌های خازن $C_0 = \epsilon_0 A/d$ است. بارهای $+Q$ و $-Q$ را روی صفحه‌های

1. accelerometers



شکل ۱۵۶

خازن قرار می‌دهیم و می‌گذاریم تا دستگاه به تعادل مکانیکی برسد.

(i) نیروی الکتریکی، F_E ، را محاسبه کنید که صفحه‌ها به یکدیگر وارد می‌کنند.

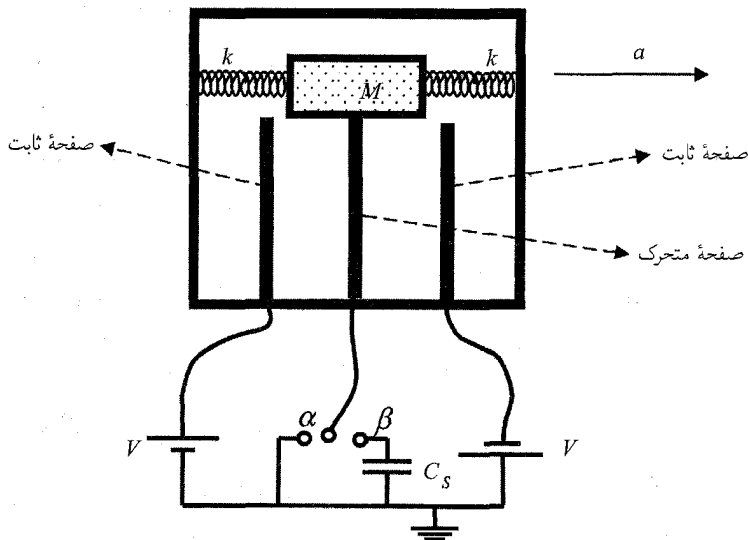
(ii) اگر جابه‌جایی صفحه متصل به فنر x باشد، x را پیدا کنید.

(iii) در این حالت، اختلاف پتانسیل الکتریکی V بین صفحه‌های خازن برحسب Q ، A ، d و k چقدر است؟

(iv) ظرفیت خازن را که نسبت بار به اختلاف پتانسیل تعریف می‌شود، C بگیرید. C/C_0 را برحسب Q ، A ، d و k به دست آورید.

(v) انرژی کل، U ، ذخیره شده در دستگاه برحسب Q ، A ، d و k چقدر است؟

شکل ۱۵۷، جرم M را نشان می‌دهد که به صفحه‌ای رسانا به جرم ناچیز و دو فنر مشابه با ثابت‌های فنر k متصل شده است. صفحه رسانا می‌تواند بین دو صفحه رسانای ثابت جلو و عقب برود. همه این صفحه‌ها مشابه و دارای مساحت یکسان A هستند. بنابراین، این سه صفحه دو خازن را تشکیل می‌دهند. همان‌طور که در شکل ۱۵۷ نشان داده شده است، صفحه‌های ثابت به پتانسیل‌های V و $-V$ متصل شده‌اند و صفحه وسطی با یک کلید دو حالت به زمین وصل شده است. سیم متصل به صفحه متحرک اختلالی در حرکت صفحه به وجود نمی‌آورد و این سه صفحه همواره موازی باقی می‌مانند. وقتی کل مجموعه شتاب نمی‌گیرد، فاصله هر صفحه ثابت از صفحه متحرک d و بسیار کوچک‌تر از ابعاد صفحه‌هاست. می‌توان ضخامت صفحه متحرک را نادیده گرفت. کلید می‌تواند در یکی از دو حالت α و β باشد. فرض کنید خازن مرکب همراه با اتومبیل شتاب می‌گیرد، و شتاب ثابت است. فرض کنید که در مدت این شتاب گرفتن ثابت فنر نوسان نکند و همه اجزای این خازن مرکب در وضعیت تعادل باشند، یعنی، نسبت به یکدیگر، و در نتیجه نسبت به اتومبیل حرکت نکنند. به علت شتاب گرفتن، صفحه متحرک به اندازه معین x از وسط دو صفحه ثابت جابه‌جا می‌شود.



شکل ۱۵۷

(ب) مداری را در نظر بگیرید که کلید در حالت α است، یعنی صفحه متحرک از طریق سیم به زمین متصل است، در این صورت

(i) بار روی هر خازن را برحسب x پیدا کنید.

(ii) نیروی الکتریکی خالص، F_E ، وارد بر صفحه متحرک را برحسب x بیابید.

(iii) فرض کنید $d \gg x$ و از جمله‌های از مرتبه x^2 در مقابل جمله‌های از مرتبه d^2 می‌توان چشم‌پوشی کرد. جواب بخش قبلی را ساده کنید.

(iv) نیروی کل (مجموع نیروهای الکتریکی و فنر) وارد بر صفحه متحرک را به صورت $-k_{\text{eff}}x$ بنویسید و شکل k_{eff} را به دست آورید.

(v) شتاب ثابت a را برحسب x بیان کنید.

(پ) اکنون فرض کنید که کلید در حالت β باشد، یعنی صفحه متحرک با خازنی که ظرفیت آن C_s است به زمین متصل شود. اگر صفحه متحرک به اندازه x از وضعیت مرکزی خود جابه‌جا شود،

(i) اختلاف پتانسیل الکتریکی، V_s ، دو سر خازن C_s را برحسب x پیدا کنید.

(ii) باز هم فرض کنید که $d \gg x$ و از جمله‌های از مرتبه x^2 در مقابل جمله‌های از مرتبه d^2 چشم‌پوشی کنید. پاسخ قسمت پیش را ساده کنید.

(ت) می‌خواهیم پارامترهای این مسئله را طوری تنظیم کنیم که کیسه هوا در ترمز کردن معمولی فعال نشود اما در هنگام تصادف به سرعت باز شود و مانع از برخورد سرنشینان با شیشه جلو یا فرمان

اتومبیل گردد. همان طور که در بخش «ب» دیدید، نیروی وارد از فنرها و بارهای الکتریکی به صفحه متحرک را می‌توان به صورت فنری با ثابت فنر مؤثر k_{eff} نشان داد. تمام خازن مرکب مثل یک دستگاه جرم و فنر به جرم M و ثابت فنر k_{eff} است که تحت تأثیر شتاب ثابت a قرار دارد، که در این مسئله شتاب اتومبیل است.

توجه: در این قسمت از مسئله، این فرض که جرم و فنر تحت شتاب ثابت در حال تعادل و در نتیجه نسبت به اتومبیل ثابت هستند، صادق نیست.

اصطکاک را نادیده بگیرید و برای پارامترهای مسئله از مقادیرهای عددی زیر استفاده کنید:

$$d = 1.0 \text{ cm}, \quad A = 2.5 \times 10^{-2} \text{ m}^2, \quad k = 4.2 \times 10^3 \text{ N/m}, \\ \epsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12} \text{ C}^2/\text{N} \cdot \text{m}^2, \quad V = 12 \text{ V}, \quad M = 0.15 \text{ kg}$$

(i) با بهره‌گیری از این داده‌ها نسبت نیروی الکتریکی که در بخش iii محاسبه کردید را به نیروی فنرها به دست آورید و نشان دهید که می‌توان از نیروهای الکتریکی در مقایسه با نیروهای فنر چشم‌پوشی کرد.

هر چند برای موردی که کلید در حالت β است نیروهای الکتریکی را محاسبه نکردیم. در این حالت، تقریباً به همان ترتیب، می‌توان نشان داد که نیروهای الکتریکی کوچکند و می‌توان آن‌ها را نادیده گرفت.

(ii) اگر اتومبیل در هنگام حرکت با سرعت ثابت، ناگهان با شتاب ثابت a ترمز کند، بیشینه جابه‌جایی صفحه متحرک چقدر است؟ پاسخ خود را به صورت پارامتری به دست آورید. فرض کنید کلید در حالت β و دستگاه به گونه‌ای طراحی شده باشد که وقتی ولتاژ الکتریکی دو سر خازن به $V_s = 0.15 \text{ V}$ می‌رسد، کیسه هوا فعال شود. می‌خواهیم در هنگام ترمز کردن معمولی که شتاب اتومبیل کمتر از شتاب گرانی $g = 9.8 \text{ m/s}^2$ می‌شود کیسه هوا فعال نشود ولی در غیر این صورت، دیگر فعال شود.

(iii) برای این منظور C_s چقدر باید باشد؟

در ادامه می‌خواهیم ببینیم آیا هرگاه کیسه هوا با سرعت کافی فعال می‌شود، مانع از برخورد سرنشینان به شیشه جلو یا فرمان اتومبیل می‌شود؟ فرض کنید در نتیجه تصادف، اتومبیل شتاب منفی برابر g به دست می‌آورد اما سرنشینان به حرکت خود با سرعت ثابت ادامه دهند. (iv) با برآورد فاصله بین سرنشینان و فرمان، زمان t_1 را که طول می‌کشد تا سرنشینان به فرمان برخورد حساب کنید.

(v) زمان t_2 پیش از فعال شدن کیسه هوا را پیدا کنید و آن را با t_1 مقایسه کنید. آیا کیسه هوا در این مدت فعال است؟ فرض کنید که کیسه هوا بلافاصله باز شود.

مسئله ۲ تحلیل ابعادی-سیاه چاله‌ها

در فیزیک، هرگاه یک رابطهٔ تساوی داشته باشیم، هر دو طرف معادله باید از یک نوع باشند، یعنی ابعاد یکسانی داشته باشند. برای مثال، نمی‌توان وضعیتی داشت که کمیت طرف راست معادله طول را نشان دهد و کمیت طرف راست نشانگر یک بازهٔ زمانی باشد. با استفاده از این واقعیت، گاهی می‌توان شکل رابطهٔ فیزیکی را بدون حل تحلیلی آن تقریباً به دست آورد. برای مثال، اگر از ما بخواهند که زمان سقوط یک جسم از ارتفاع h را تحت تأثیر شتاب گرانشی ثابت g به دست آوریم، می‌توان استدلال کرد که باید کمیتی را برای نشان دادن بازهٔ زمانی با استفاده از کمیت‌های g و h ساخت و تنها راه انجام این کار به صورت $T = a(h/g)^{1/2}$ است. توجه کنید که این جواب دارای یک ضریب تعیین نشدهٔ a بی بعد است که با این روش نمی‌توان آن را تعیین کرد. این ضریب می‌تواند عددی چون 1 ، $\frac{1}{2}$ ، $\sqrt{3}$ ، π ، یا هر عدد حقیقی دیگر باشد. این روش به دست آوردن رابطه‌های فیزیکی را تحلیل ابعادی می‌نامند.

در تحلیل ابعاد، ضریب‌های بی بعد اهمیت ندارند و لازم نیست آن‌ها را بنویسیم. خوشبختانه در اغلب مسئله‌های فیزیکی این ضریب‌ها از مرتبهٔ ۱ هستند و حذف آن‌ها مرتبهٔ اندازهٔ کمیت‌های فیزیکی را تغییر نمی‌دهد. به این ترتیب، با استفاده از تحلیل ابعادی برای مسئلهٔ بالا، $T = (h/g)^{1/2}$ به دست می‌آید.

معمولاً، ابعاد یک کمیت فیزیکی را برحسب ابعاد چهار کمیت اصلی می‌نویسند: M (جرم)، L (طول)، T (زمان)، و K (دما). ابعاد کمیت اختیاری x با $[x]$ نشان داده می‌شود. به عنوان مثال، ابعاد سرعت v ، انرژی جنبشی E_k و ظرفیت گرمایی C_V را به صورت زیر می‌نویسیم: $[v] = LT^{-1}$ ، $[E_k] = ML^2T^{-2}$ ، $[C_V] = ML^2T^{-2}K^{-1}$.

الف) ثابت‌های بنیادی و تحلیل ابعادی

(i) ابعاد ثابت‌های بنیادی زیر را برحسب ابعاد طول، جرم، زمان، و دما به دست آورید. ثابت پلانک h ، سرعت نور c ، ثابت گرانشی عمومی G ، و ثابت بولتزمن k_B .
قانون استفان-بولتزمن بیان می‌کند که توان گسیل شده از جسم سیاه برابر انرژی کلی است که از واحد سطح جسم سیاه در واحد زمان تابش می‌شود و برابر $\sigma\theta^4$ است که در آن σ ثابت استفان-بولتزمن و θ دمای مطلق جسم سیاه است.

(ii) ابعاد ثابت استفان-بولتزمن را برحسب ابعاد طول، جرم، زمان و دما تعیین کنید.
ثابت استفان-بولتزمن، یک ثابت بنیادی نیست و می‌توان آن را به صورت $\sigma = ah^\alpha c^\beta G^\gamma k_B^\delta$ برحسب ثابت‌های بنیادی نوشت. در این رابطه a پارامتری بدون بعد از مرتبهٔ ۱ است. همان‌طور که قبلاً گفتیم، مقدار دقیق a از این دیدگاه مهم نیست، بنابراین آن را مساوی ۱ می‌گیریم.

(iii) با استفاده از تحلیل ابعادی α ، β ، γ و δ را پیدا کنید.

(ب) فیزیک سیاه‌چاله‌ها

در این بخش از مسئله، می‌خواهیم برخی از ویژگی‌های سیاه‌چاله‌ها را با استفاده از تحلیل ابعادی به‌دست آوریم. طبق قضیه‌ای در فیزیک، که به قضیهٔ بدون مو معروف است، تمام ویژگی‌های سیاه‌چاله‌ها که در این مسئله در نظر می‌گیریم فقط به جرم سیاه‌چاله‌ها بستگی دارد. یک ویژگی سیاه‌چاله مساحت افق رویداد^۱ است. تقریباً می‌توان گفت که افق رویداد مرز سیاه‌چاله است. در محدودهٔ این مرز، گرانی به‌اندازه‌ای قوی است که حتی نور نمی‌تواند از ناحیه‌ای بگریزد که این مرز آن را محدود کرده است.

می‌خواهیم رابطهٔ بین جرم سیاه‌چاله، m ، و مساحت افق رویداد، A ، به‌دست آوریم. این مساحت به جرم سیاه‌چاله، سرعت نور، و ثابت گرانش عمومی بستگی دارد. مانند بخش الف-iii می‌نویسیم

$$A = G^\alpha c^\beta m^\gamma$$

(i) با استفاده از تحلیل ابعادی α ، β ، و γ را پیدا کنید.

از نتیجهٔ بند معلوم می‌شود که مساحت افق رویداد سیاه‌چاله با زیاد شدن جرم آن افزایش می‌یابد. از دیدگاه کلاسیک، هیچ چیزی از سیاه‌چاله‌ها خارج نمی‌شود و در نتیجه در تمام فرایندهای فیزیکی، مساحت افق رویداد تنها می‌تواند افزایش یابد. در مقایسه با قانون دوم ترمودینامیک، بکنشتاین^۲ پیشنهاد اختصاص آنترپی S متناسب با مساحت افق رویداد را به سیاه‌چاله مطرح کرد، یعنی $S = \eta A$. این فرض با استفاده از استدلال‌های دیگر منطقی‌تر می‌شود.

(ii) با استفاده از تعریف ترمودینامیکی آنترپی $dS = dQ/\theta$ ابعاد آن را بیابید. dQ گرمای مبادله شده و θ دمای مطلق دستگاه است.

(iii) مانند مورد الف-iii، ثابت بی بعد η را برحسب ثابت‌های بنیادی G ، c ، h و k_B بیان کنید. برای حل بقیهٔ مسئله از تحلیل ابعادی استفاده نکنید، اما می‌توانید از نتیجه‌های به‌دست آمده در بخش قبلی استفاده کنید.

(پ) تابش هاوکینگ^۳

به رهیافتی نیمه کوانتوم مکانیکی^۴، هاوکینگ استدلال کرد که برخلاف دیدگاه کلاسیک، سیاه‌چاله‌ها تابشی شبیه تابش جسم سیاه در دمایی موسوم به دمای هاوکینگ از خود گسیل می‌کنند.

(i) با استفاده از رابطهٔ $E = mc^2$ ، که انرژی سیاه‌چاله را برحسب جرمش به‌دست می‌دهد، و قانون دوم ترمودینامیک دمای هاوکینگ θ_H سیاه‌چاله را برحسب جرم آن و ثابت‌های بنیادی بیان کنید. فرض کنید که سیاه‌چاله روی محیط اطراف خود کار انجام نمی‌دهد.

(ii) جرم یک سیاه‌چالهٔ منزوی به علت تابش هاوکینگ تغییر می‌کند. با بهره‌گیری از قانون استفان-بولتزمن رابطهٔ این آهنگ تغییر دمای هاوکینگ، θ_H سیاه‌چاله را بیاید و آن را برحسب جرم سیاه‌چاله و ثابت‌های بنیادی بیان کنید.

(iii) زمان t^* لازم برای تبخیر کامل تمام جرم m یک سیاه‌چالهٔ منزوی، یعنی برای از دست دادن تمام جرمش را پیدا کنید.

از دیدگاه ترمودینامیک، سیاه‌چاله‌ها رفتارهای عجیب و غریبی از خود نشان می‌دهند. برای مثال، ظرفیت گرمایی یک سیاه‌چاله منفی است.

(iv) ظرفیت گرمایی سیاه‌چاله‌ای به جرم m را پیدا کنید.

ت سیاه‌چاله‌ها و تابش زمینهٔ کیهانی

سیاه‌چاله‌ای را در نظر بگیرید که در معرض تابش زمینهٔ کیهانی است. تابش زمینهٔ کیهانی، تابش جسم سیاه در دمای θ_B است که تمام عالم را پر می‌کند. جسمی با مساحت سطح کل A ، انرژی برابر $\sigma \theta_B^4 \times A$ را در زمان دریافت می‌کند. بنابراین، یک سیاه‌چاله، از طریق تابش هاوکینگ انرژی از دست می‌دهد و از تابش زمینهٔ کیهانی انرژی می‌گیرد.

(i) آهنگ تغییر جرم یک سیاه‌چاله را برحسب جرم سیاه‌چاله، دمای تابش زمینهٔ کیهانی، و ثابت‌های بنیادی به دست آورید.

(ii) در جرم معین، m^* ، این آهنگ تغییر صفر می‌شود. جرم m^* را بیاید و آن را برحسب θ_B و ثابت‌های بنیادی بیان کنید.

(iii) با استفاده از پاسخ قسمت ii برای قرار دادن θ_B در پاسخ قسمت i آهنگ تغییر جرم یک سیاه‌چاله را برحسب m ، m^* و ثابت‌های بنیادی بیان کنید.

(iv) دمای هاوکینگ یک سیاه‌چاله در تعادل گرمایی با تابش زمینهٔ کیهانی را پیدا کنید.

(v) تعادل پایدار است یا ناپایدار؟ چرا؟ (پاسخ خود را به صورت ریاضی بیان کنید).

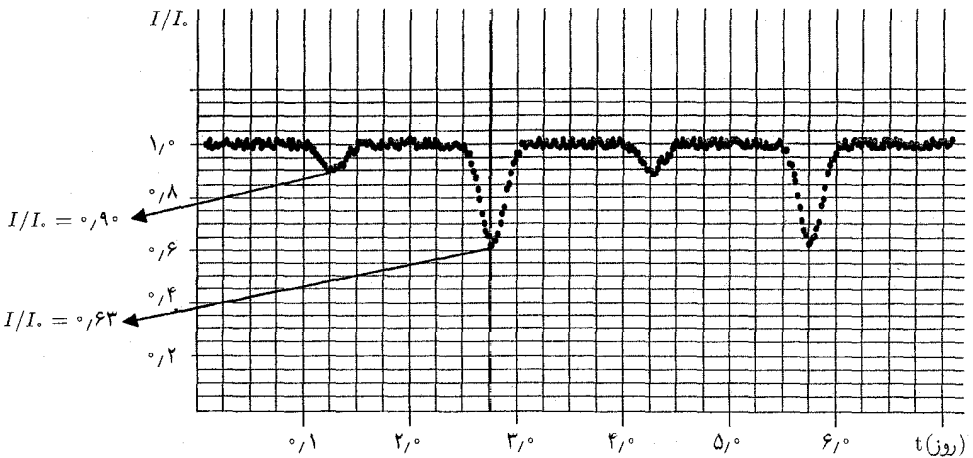
مسئلهٔ ۳ ستارگان دوتایی

دو ستاره که حول مرکز جرمشان می‌چرخند یک دستگاه ستارهٔ دوتایی را تشکیل می‌دهند. تقریباً نیمی از ستارگان کهکشان ما دستگاه‌های ستارهٔ دوتایی‌اند. تشخیص سرشت دوتایی اغلب این دستگاه‌ها از زمین راحت نیست، زیرا فاصلهٔ بین دو ستاره بسیار کمتر از فاصلهٔ آن‌ها از ماست و در نتیجه نمی‌توان ستارگان را با تلسکوپ از هم تفکیک کرد. بنابراین، برای مشاهدهٔ تغییرات شدت یا طیف یک ستارهٔ خاص و پی بردن به این‌که یک دستگاه دوتایی هست یا نه، باید از نورسنجی یا طیف‌سنجی استفاده کرد.

نورسنجی ستارگان دوتایی

اگر درست روی صفحه حرکت دو ستاره باشیم، و سپس یک ستاره، ستاره دیگر را در زمان‌های معینی استتار^۱ کند (از جلوی آن بگذرد) و شدت کل دستگاه از محل رصد ما برحسب زمان تغییر کند، این دستگاه‌های دوتایی را دوتایی‌های کسوفی^۲ می‌نامند.

الف) فرض کنید درست روی صفحه حرکت یک دستگاه دوتایی ایستاده‌ایم و دو ستاره در مدارهای دایره‌ای با سرعت زاویه‌ای ثابت ω دور مرکز جرمشان می‌چرخند. همین‌طور فرض کنید دمای سطح ستاره‌ها T_1 و T_2 ($T_1 > T_2$) و شعاع آن‌ها به ترتیب R_1 و R_2 ($R_1 > R_2$) باشد. در شکل ۱۵۸ شدت کل نور، که از زمین اندازه گرفته می‌شود، برحسب زمان رسم شده است. اندازه‌گیری‌های دقیق نشان می‌دهد که شدت کمینه نور این ستارگان به ترتیب نظیر با ۹۵ و ۶۳ درصد شدت بیشینه I_0 است که از دو ستاره دریافت می‌شود ($I_0 = 4.8 \times 10^{-9} \text{ W/m}^2$). در شکل ۱۵۸ محور عمودی، نسبت I/I_0 و محور افقی، زمان برحسب روز است.



شکل ۱۵۸ شدت نسبی دریافت شده از دستگاه ستاره دوتایی برحسب زمان. مقیاس محور عمودی $I_0 = 4.8 \times 10^{-9} \text{ W/m}^2$ است و زمان بر روی محور افقی برحسب روز است.

(i) دوره حرکت مداری را پیدا کنید. پاسخ خود را برحسب ثانیه و با دو رقم بامعنی بنویسید.

بسامد زاویه‌ای دستگاه برحسب رادیان بر ثانیه چقدر است؟

با تقریب خوب، تابش دریافتی از یک ستاره تابش جسم سیاه یکنواختی است که از قرصی تخت با شعاع مساوی ستاره گسیل می‌شود. در نتیجه، توان دریافتی از ستاره با AT^4 متناسب است که در آن A سطح قرص و T دمای سطح ستاره است.

(ii) با استفاده از نمودار شکل ۱۵۸ نسبت‌های T_1/T_2 و R_1/R_2 را پیدا کنید.

طیف‌سنجی دستگاه‌های دوتایی

در این بخش می‌خواهیم ویژگی‌های نجومی یک ستاره دوتایی را به کمک داده‌های طیف‌سنجی تجربی این دستگاه دوتایی حساب کنیم. اتم‌ها تابش را در طول موج‌های مشخص جذب یا گسیل می‌کنند. در نتیجه، طیف جذبی مشاهده شده یک ستاره حاوی خط‌های جذبی ناشی از اتم‌های جو ستاره است. سدیم یک خط زرد مشخصه (خط D_1) با طول موج $5895/9 \text{ \AA}$ دارد ($10^{\circ} \text{ \AA} = 1 \text{ nm}$). طیف جذبی سدیم اتمی در این طول موج را برای دستگاه دوتایی بخش پیش بررسی می‌کنیم. طیف نوری که از این ستاره دوتایی دریافت می‌کنیم به واسطه حرکت ستاره‌ها نسبت به ما انتقال دوپلری پیدا می‌کند. هر ستاره دارای اندازه سرعت متفاوت است. بنابراین، طول موج جذب هر ستاره دارای انتقال دوپلری متفاوت می‌شود. چون اندازه سرعت ستارگان بسیار کمتر از سرعت نور است برای مشاهده انتقال دوپلری، به اندازه‌گیری‌های بسیار دقیق طول موج نیاز داریم. در این مسئله اندازه سرعت مرکز جرم دستگاه دوتایی بسیار کمتر از سرعت‌های مداری ستارگان است. در نتیجه انتقال‌های دوپلری را فقط ناشی از سرعت مداری این ستارگان در نظر می‌گیریم. جدول ۲ طیف اندازه‌گیری شده ستارگان را در دستگاه دوتایی رصد شده نشان می‌دهد.

جدول ۲ طیف جذبی دستگاه ستاره دوتایی برای خط D_1 سدیم

t (روز)	۰٫۳	۰٫۶	۰٫۹	۱٫۲	۱٫۵	۱٫۸	۲٫۱	۲٫۴
$\lambda_1 (\text{\AA})$	۵۸۹۷٫۵	۵۸۹۷٫۷	۵۸۹۷٫۲	۵۸۹۶٫۲	۵۸۹۵٫۱	۵۸۹۴٫۳	۵۸۹۴٫۱	۵۸۹۴٫۶
$\lambda_2 (\text{\AA})$	۵۸۹۳٫۱	۵۸۹۲٫۸	۵۸۹۳٫۷	۵۸۹۶٫۲	۵۸۹۷٫۳	۵۸۹۸٫۷	۵۸۹۹٫۰	۵۸۹۸٫۱

t (روز)	۲٫۷	۳٫۰	۳٫۳	۳٫۶	۳٫۹	۴٫۲	۴٫۵	۴٫۸
$\lambda_1 (\text{\AA})$	۵۸۹۵٫۶	۵۸۹۶٫۷	۵۸۹۷٫۳	۵۸۹۷٫۷	۵۸۹۷٫۲	۵۸۹۶٫۲	۵۸۹۵٫۰	۵۸۹۴٫۳
$\lambda_2 (\text{\AA})$	۵۸۹۶٫۴	۵۸۹۴٫۵	۵۸۹۳٫۱	۵۸۹۲٫۸	۵۸۹۳٫۷	۵۸۹۶٫۲	۵۸۹۷٫۴	۵۸۹۸٫۷

(توجه: لازم نیست نموداری از داده‌های این جدول رسم کنید.)

ب) با استفاده از جدول ۲،

(i) سرعت مداری هر ستاره را v_1 و v_2 بگیرید. v_1 و v_2 را پیدا کنید.

سرعت نور $c = 3 \times 10^8 \text{ m/s}$ است و همه اثرهای نسبیتی را نادیده بگیرید.

(ii) نسبت جرم ستارگان m_1/m_2 را پیدا کنید.

(iii) فاصله هر ستاره را از مرکز جرمشان r_1 و r_2 بگیرید. r_1 و r_2 را پیدا کنید.

(iv) فاصله بین ستارگان را r بگیرید. r را پیدا کنید.

پ) نیروی گرانشی، تنها نیروی موجود بین این ستارگان است.

(i) جرم هر ستاره را با یک رقم بامعنی به دست آورید. ثابت گرانشی عمومی

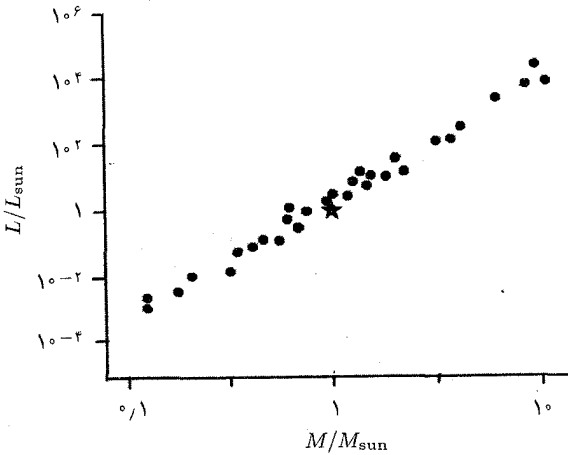
$$G = 6.7 \times 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2} \text{ است.}$$

ویژگی های کلی ستارگان

ت) سازوکار تولید انرژی در اغلب ستارگان یکسان است. به این دلیل، رابطه ای تجربی بین جرم M ، و درخشندگی L که توان تابشی کل ستاره است وجود دارد. این رابطه را می توان به صورت

$$L/L_{\text{sun}} = (M/M_{\text{sun}})^{\alpha}$$

نوشت. در اینجا، $M_{\text{sun}} = 2.0 \times 10^{30} \text{ kg}$ جرم خورشید و $L_{\text{sun}} = 3.9 \times 10^{26} \text{ W}$ درخشندگی خورشید است. این رابطه در شکل ۱۵۹ به صورت نموداری لگاریتمی نشان داده شده است.



شکل ۱۵۹ درخشندگی یک ستاره برحسب جرم آن به صورت نمایی تغییر می کند. این نمودار لگاریتمی است. نماد ستاره، خورشید را با جرم $2.0 \times 10^{30} \text{ kg}$ و درخشندگی $3.9 \times 10^{26} \text{ W}$ نشان می دهد.

(i) α را تا یک رقم بامعنی پیدا کنید.

(ii) درخشندگی ستارگان دستگاه دوتایی را که در بخش های پیش بررسی کردید L_1 و L_2 بگیرید.

L_1 و L_2 را پیدا کنید.

(iii) فاصله d دستگاه دوتایی از ما برحسب سال نوری چقدر است؟

برای یافتن فاصله می توانید از نمودار شکل ۱۵۸ استفاده کنید. هر سال نوری فاصله ای است

که نور در یک سال می پیماید.

(iv) بیشینه فاصله زاویه ای θ بین ستارگان از نقطه رصد ما چقدر است؟

(v) کوچک ترین اندازه روزنه تلسکوپ اپتیکی، D ، که می تواند این دو ستاره را از هم تفکیک کند

چقدر است؟

پاسخ تشریحی مسئله‌ها

حل مسئله ۱

(الف)

(i) ابتدا برای به دست آوردن میدان الکتریکی از قانون گاوس برای یک تک صفحه استفاده می‌کنیم

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

از طرفی چگالی بار سطحی برای صفحه‌ای با بار Q و مساحت A برابر $\sigma = Q/A$ است. چون میدان الکتریکی ناشی از دو صفحه موازی هم‌ارز است، سهم هر صفحه در میدان الکتریکی $\frac{1}{2}E$ است. بنابه تعریف نیروی میدان الکتریکی ضرب در بار است، پس داریم

$$\text{نیرو} = F = \frac{1}{2}EQ = \frac{Q^2}{2\epsilon_0 A}$$

(ii) قانون هوک برای یک فنر به صورت $F_m = -kx$ است. با توجه به نتیجه الف-۱ و شرط تعادل $F_m = F_e$ داریم

$$kx = \frac{Q^2}{2\epsilon_0 A} \Rightarrow x = \frac{Q^2}{2\epsilon_0 Ak}$$

(iii) چون میدان الکتریکی ثابت است، اختلاف پتانسیل V برابر است با

$$V = E(d - x)$$

(رهیافت‌های منطقی دیگر نیز قابل قبول است. مثلاً می‌توان از تعریف ظرفیت برای به دست آوردن V استفاده کرد.)

با قرار دادن میدان الکتریکی از قسمت پیش در معادله بالا به دست می‌آوریم

$$V = \frac{Qd}{\epsilon_0 A} \left(1 - \frac{Q^2}{2\epsilon_0 Akd} \right)$$

(iv) ظرفیت C به صورت نسبت بار به اختلاف پتانسیل تعریف می‌شود، یعنی $C = Q/V$. با توجه به نتیجه الف-iii داریم

$$\frac{C}{C_0} = \left(1 - \frac{Q^2}{2\epsilon_0 Akd} \right)$$

(v) توجه کنید که هم انرژی کشسانی فنر $U_m = \frac{1}{2}kx^2$ و هم انرژی الکتریکی $U_E = \frac{Q^2}{2C}$ در خازن ذخیره شده است. در نتیجه انرژی ذخیره شده کل در دستگاه برابر است با

$$U = \frac{Q^2 d}{2\epsilon_0 A} \left(1 - \frac{Q^2}{4\epsilon_0 A k d} \right)$$

(ب)

(i) برای مقدار معین x بار روی هر خازن برابر است با

$$Q_1 = VC_1 = \frac{\epsilon_0 AV}{d-x}, \quad Q_2 = VC_2 = \frac{\epsilon_0 AV}{d+x}$$

(ii) توجه کنید که دو خازن داریم. با استفاده از نتیجه الف-۱ برای هر خازن داریم

$$F_1 = \frac{Q_1^2}{2\epsilon_0 A}, \quad F_2 = \frac{Q_2^2}{2\epsilon_0 A}$$

چون این دو نیرو در جهت مخالف یکدیگرند، نیروی الکتریکی برآیند برابر است با

$$F_E = F_1 - F_2 \Rightarrow F_E = \frac{\epsilon_0 AV^2}{2} \left(\frac{1}{(d-x)^2} - \frac{1}{(d+x)^2} \right)$$

(iii) با نادیده گرفتن جمله‌های از مرتبه x^2 و بالاتر در پاسخ iii داریم

$$F_E = \frac{2\epsilon_0 AV^2}{d^3} x$$

(iv) در اینجا دو فنر با ثابت فنر یکسان، k ، به طور متوالی قرار گرفته‌اند. در نتیجه نیروی مکانیکی برابر است با

$$F_m = -2kx$$

با ترکیب این نتیجه با پاسخ ب-iv و با توجه به اینکه دو نیرو در جهت مخالف یکدیگرند، داریم

$$F = F_m + F_E = -2 \left(k - \frac{\epsilon_0 AV^2}{d^3} \right) x$$

از مقایسه رابطه اخیر با رابطه $F = -k_{\text{eff}}x$ خواهیم داشت

$$k_{\text{eff}} = 2 \left(k - \frac{\epsilon_0 AV^2}{d^3} \right)$$

(v) با توجه به قانون دوم نیوتون $F = ma$ و پاسخ ب-iv داریم

$$a = -\frac{\gamma}{m} \left(k - \frac{\epsilon_0 AV^2}{d^3} \right) x$$

(ب)

(i) با شروع از قانون‌های کیرشهوف برای دو مدار الکتریکی، داریم

$$\frac{Q_s}{C_s} + V - \frac{Q_2}{C_2} = 0, \quad -\frac{Q_s}{C_s} + V - \frac{Q_1}{C_1} = 0, \quad Q_2 - Q_1 + Q_s = 0$$

با توجه به اینکه $V_s = Q_s/C_s$ ، به دست می‌آوریم

$$V_s = V \frac{\gamma \epsilon_0 Ax / (d^2 - x^2)}{C_s + [\gamma \epsilon_0 Ad / (d^2 - x^2)]}$$

توجه: شاید دانش‌آموزان رابطه بالا را با استفاده از تقریب $x^2 \gg d^2$ ساده کنند. این موضوع در این بخش اشکالی ندارد.

(ii) با نادیده گرفتن جمله‌های از مرتبه x^2 و بالاتر در پاسخ ب-ا داریم

$$V_s = V \frac{\gamma \epsilon_0 Ax}{d^2 C_s + \gamma \epsilon_0 Ad}$$

(ت)

(i) نسبت نیروهای الکتریکی به نیروی مکانیکی فنر برابر است با

$$\frac{F_E}{F_m} = \frac{\epsilon_0 AV^2}{kd^3}$$

با قرار دادن مقادیر عددی داریم $F_E/F_m = 7/6 \times 10^{-9}$. از این نتیجه می‌توان دید که از نیروهای الکتریکی می‌توان در مقایسه با نیروهای کشسانی چشم‌پوشی کرد.

(ii) همان‌گونه که در بخش قبلی دیدیم می‌توان فرض کرد که تنها نیروی وارد بر صفحه متحرک

ناشی از فنرهاست، $F = 2kx$. بنابراین در تعادل مکانیکی، جابه‌جایی صفحه متحرک برابر است با $x = \frac{ma}{2k}$. مانند دستگاه جرم-فنر که جرم آن در میدان نیروی گرانشی سقوط می‌کند، بیشینه جابه‌جایی دو برابر این مقدار است. پس

$$x_{\max} = 2x = \frac{ma}{k}$$

(iii) در شتاب $a = g$ ، بیشینه جابه‌جایی برابر است با

$$x_{\max} = \frac{mg}{k}$$

علاوه بر این، از نتیجه پ-ii داریم

$$V_s = V \frac{\epsilon_0 A x_{\max}}{d^2 C_s + \epsilon_0 A d}$$

این باید همان مقداری باشد که در مسئله داده شده است (۰٫۱۵V)

$$\Rightarrow C_s = \frac{\epsilon_0 A}{d} \left(\frac{V x_{\max}}{V_s d} - 1 \right)$$

$$\Rightarrow C_s = 8,7 \times 10^{-11} \text{F}$$

(iv) اگر فاصله بین سر راننده و فرمان اتومبیل l باشد، مقدار آن را می‌توان حدود $0,4 \text{m}$ تا 1m برآورد کرد.

درست وقتی که اتومبیل شتاب می‌گیرد، سرعت سر راننده نسبت به اتومبیل صفر است، پس $\Delta v(t=0) = 0$

$$l = \frac{1}{2} g t_1^2 \Rightarrow t_1 = \sqrt{2l/g}$$

به این ترتیب $l = 0,4 \text{m} - 1 \text{m}$ داریم $t_1 = 0,3 \text{s} - 0,5 \text{s}$

(v) زمان t_2 نصف دوره نوسانگر هماهنگ است. پس

$$t_2 = \frac{T}{2}$$

از طرفی دوره یک نوسانگر هماهنگ ساده از رابطه $T = 2\pi \sqrt{m/2k}$ به دست می‌آید. در نتیجه $t_2 = 0,7013 \text{s}$ چون $t_1 > t_2$ است، پس کیسه هوا در زمان مناسب فعال می‌شود.

حل مسئله ۲

(الف)

(i) برای به دست آوردن ابعاد کمیت‌های مورد نظر از معادله‌های منطقی در هر مورد استفاده

می‌کنیم

(I) رابطه پلانک به صورت $hf = E$ است. بنابراین

$$[h][f] = [E] \Rightarrow [h] = [E][f]^{-1} = ML^2 T^{-1}$$

$$[c] = LT^{-1} \quad \text{(II)}$$

$$F = \frac{Gmm}{r^2} \Rightarrow [G] = [F][r^2][m]^{-2} = M^{-1} L^2 T^{-2} \quad \text{(III)}$$

$$E = K_B \theta \Rightarrow [K_B] = [\theta]^{-1}[E] = ML^2 T^{-2} K^{-1} \quad \text{(IV)}$$

(ii) با استفاده از قانون استفان-بولتزمن و یا هر رابطه مناسب دیگر داریم

$$\frac{\text{توان}}{\text{سطح}} = \sigma \theta^4 \Rightarrow [\sigma] = [E]L^{-2}T^{-1}K^{-4}$$

(iii) ثابت استفان-بولتزمن با در نظر گرفتن یک ضریب عددی، برابر است با

$$\sigma = h^\alpha c^\beta G^\gamma k_B^\delta$$

که $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ از تحلیل ابعادی به دست می‌آیند. پس

$$[\sigma] = [h]^\alpha [c]^\beta [G]^\gamma [k_B]^\delta$$

$$\begin{aligned} MT^{-3}K^{-4} &= (ML^2T^{-1})^\alpha (LT^{-1})^\beta (M^{-1}L^3T^{-2})^\gamma (ML^2T^{-2}K^{-1})^\delta \\ &= M^{\alpha-\gamma+\delta} L^{2\alpha+\beta+2\gamma+2\delta} T^{-\alpha-\beta-2\gamma-2\delta} K^{-\delta} \end{aligned}$$

بنابراین

$$\begin{cases} \alpha - \gamma + \delta = 1 \\ 2\alpha + \beta + 3\gamma + 2\delta = 0 \\ -\alpha - \beta - 2\gamma - 2\delta = -3 \\ -\delta = -4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = -3 \\ \beta = -2 \\ \gamma = 0 \\ \delta = 4 \end{cases} \Rightarrow \sigma = \frac{k_B^4}{c^2 h^3}$$

(ب)

(i) چون باید A ، مساحت افق رویداد برحسب M را با نظریه کلاسیک گرانی نسبیتی، یعنی همان نسبیت عام محاسبه کرد، پس ترکیبی از سرعت نور c مشخصه نسبیت خاص و ثابت گرانش عمومی G مشخصه گرانی است. توجه کنید که A مستقل از ثابت پلانک h است که مشخصه پدیده‌های کوانتوم مکانیکی است.

$$A = G^\alpha c^\beta m^\gamma$$

با بهره‌گیری از تحلیل ابعادی داریم

$$[A] = [G]^\alpha [c]^\beta [m]^\gamma \Rightarrow L^2 = (M^{-1}L^3T^{-2})^\alpha (LT^{-1})^\beta M^\gamma$$

تساوی بالا وقتی برقرار است که

$$L^2 = M^{-\alpha+\gamma} L^{-3\alpha+\beta} L^{-2\alpha-\beta} \Rightarrow \alpha = 2, \beta = -4, \gamma = 2$$

$$A = \frac{m^2 G^2}{c^4}$$

(ii) از تعریف آنتروپی داریم

$$dS = \frac{dQ}{\theta} \xrightarrow{\text{پس به دست می آوریم}} [S] = [E][\theta]^{-1} = ML^2 T^{-2} K^{-1}$$

(iii) با توجه به $\eta = S/A$ داریم

$$\begin{cases} [\eta] = [S][A]^{-1} = MT^{-2} K^{-1} \\ [\eta] = [G]^\alpha [h]^\beta [k_B]^\delta = M^{-\alpha+\beta+\delta} L^{2\alpha+2\beta+\gamma+2\delta} T^{-2\alpha-\beta-\gamma-2\delta} K^{-\delta} \end{cases}$$

از دستگاه دو معادله‌ای بالا خواهیم داشت

$$\alpha = -1, \quad \beta = -1, \quad \gamma = 2, \quad \delta = 1 \Rightarrow \eta = \frac{c^2 k_B}{Gh}$$

(ب)

(i) قانون اول ترمودینامیک $dE = dQ + dW$ است. با فرض $dW = 0$ و تعریف آنتروپی $dS = dQ/\theta$ به دست می آوریم

$$dE = \theta_H dS + 0$$

با استفاده از $E = mc^2$ و $S = \frac{Gk_B}{ch} m^2$ خواهیم داشت

$$\theta_H = \frac{dE}{dS} = \left(\frac{dS}{dE} \right)^{-1} = c^2 \left(\frac{dS}{dm} \right)^{-1} = \left(\frac{1}{2} \right) \frac{c^2 h}{Gk_B m}$$

(ii) قانون استفان-بولتزمن، آهنگ تابش انرژی به ازای واحد سطح را به دست می دهد. با توجه به $E = mc^2$ داریم

$$dE/dt = -\sigma \theta_H^4 A$$

با قرار دادن $\sigma = \frac{k_B^4}{c^2 h^3}$ ، $A = \frac{m^2 G^2}{c^4}$ و $E = mc^2$ در رابطه بالا داریم

$$\begin{aligned} c^2 \frac{dm}{dt} &= -\frac{k_B^4}{c^2 h^3} \left(\frac{c^2 h}{2 G k_B m} \right)^4 \frac{m^2 G^2}{c^4} \\ \frac{dm}{dt} &= -\frac{1}{16} \frac{c^2 h}{G^2 m^2} \end{aligned}$$

(iii) با انتگرال‌گیری از رابطه‌ای که پیش از این به دست آورده‌ایم خواهیم داشت

$$\int m^{\nu} dm = - \int \frac{c^{\nu} h}{\sqrt{6} G^{\nu}} dt$$

$$m^{\nu}(t) - m^{\nu}(0) = - \frac{\sqrt{3} c^{\nu} h}{\sqrt{6} G^{\nu}} t$$

در $t = t^*$ سیاه‌چاله کاملاً تبخیر می‌شود. پس

$$m(t^*) = 0 \Rightarrow t^* = \frac{\sqrt{6} G^{\nu}}{\sqrt{3} c^{\nu} h} m^{\nu}$$

(iv) ظرفیت گرمایی C_V تغییر انرژی E نسبت به تغییرات دماست. پس

$$C_V = \frac{dE}{d\theta}, \quad E = mc^{\nu}, \quad \theta = \frac{c^{\nu} h}{\sqrt{2} G k_B m} \Rightarrow C_V = - \frac{\sqrt{2} G k_B}{ch} m^{\nu}$$

(ت)

(i) باز هم قانون استفان-بولتزمن آهنگ از دست دادن انرژی به ازای واحد سطح را به دست می‌دهد. از رابطه مشابهی می‌توان برای افزایش انرژی سیاه‌چاله بر اثر تابش زمینه کیهانی استفاده کرد. برای توجیه آن، توجه کنید که در تعادل گرمایی تغییر کل در انرژی صفر است. تابش سیاه‌چاله از قانون استفان-بولتزمن به دست می‌آید. در نتیجه آهنگ افزایش انرژی سیاه‌چاله نیز از رابطه مشابهی به دست می‌آید.

$$\begin{cases} \frac{dE}{dt} = -\sigma\theta^{\nu} A + \sigma\theta_B^{\nu} A \\ E = mc^{\nu} \end{cases} \Rightarrow \frac{dm}{dt} = - \frac{hc^{\nu}}{\sqrt{6} G^{\nu}} \frac{1}{m^{\nu}} + \frac{G^{\nu}}{c^{\nu} h^{\nu}} (k_B \theta_B)^{\nu} m^{\nu}$$

(ii) با قرار دادن $\frac{dm}{dt} = 0$ داریم

$$- \frac{hc^{\nu}}{\sqrt{6} G^{\nu}} \frac{1}{m^{*\nu}} + \frac{G^{\nu}}{c^{\nu} h^{\nu}} (k_B \theta_B)^{\nu} m^{*\nu} = 0$$

در نتیجه

$$m^* = \frac{c^{\nu} h}{\sqrt{2} G k_B \theta_B}$$

(iii)

$$\theta_B = \frac{c^{\nu} h}{\sqrt{2} G k_B m^*} \Rightarrow \frac{dm}{dt} = - \frac{hc^{\nu}}{\sqrt{6} G^{\nu}} \frac{1}{m^{\nu}} \left(1 - \frac{m^{\nu}}{m^{*\nu}} \right)$$

(iv) با استفاده از جواب‌های ت-ii و پ-۱ داریم

$$\theta^* = \frac{c^2 h}{2Gk_B m^*} = \theta_B$$

همین‌طور می‌توان استدلال کرد که m^* نظیر تعادل گرمایی است. در نتیجه به‌ازای $m = m^*$ دمای سیاه‌چاله برابر θ_B است.

راه‌حل دیگر: از رابطه $\frac{dE}{dt} = -\sigma(\theta^{*f} - \theta_B^f)A = 0$ داریم $\theta^* = \theta_B$.

(v) با در نظر گرفتن جواب ت-iii، می‌توان نشان داد که از تعادل دور می‌شود.

$$\frac{dm}{dt} = -\frac{hc^f}{G^2 m^2} \left(1 - \frac{m^f}{m^{*f}} \right) \Rightarrow \begin{cases} m > m^* \Rightarrow \frac{dm}{dt} > 0 \\ m < m^* \Rightarrow \frac{dm}{dt} < 0 \end{cases}$$

حل مسئله ۳

(الف)

(i) دوره حرکت مداری برابر ۳ روز یا $10^5 \times 2,6$ است. پس بسامد زاویه‌ای دستگاه برابر است

با

$$\omega = 2\pi/T = 2,4 \times 10^{-5} \text{ rad s}^{-1}$$

(ii) از کمینه‌های نمودار شکل ۱,۵۸، $\alpha = 0,90$ و $\beta = 0,63$ ، $I_2/I_0 = \beta$ و $I_1/I_0 = \alpha$ پس

داریم

$$\frac{I_0}{I_1} = 1 + \left(\frac{R_2}{R_1} \right)^2 \left(\frac{T_2}{T_1} \right)^4 = \frac{1}{\alpha}$$

$$\frac{I_2}{I_1} = 1 - \left(\frac{R_2}{R_1} \right)^2 \left[1 - \left(\frac{T_2}{T_1} \right)^4 \right] = \frac{\beta}{\alpha}$$

از اینجا به‌دست می‌آوریم

$$\frac{R_1}{R_2} = \sqrt{\frac{\alpha}{1-\beta}} = 1,6, \quad \frac{T_1}{T_2} = \sqrt{\frac{1-\beta}{1-\alpha}} = 1,4$$

(ب)

(i) از فرمول انتقال دوپلر $\frac{\Delta\lambda}{\lambda_0} \cong \frac{v}{c}$ ، بیشینه و کمینه طول موج‌ها برابر است با

$$\lambda_{1,\max} = 5897,7 \text{ \AA}, \quad \lambda_{1,\min} = 5894,1 \text{ \AA}$$

$$\lambda_{2,\max} = 5899,0 \text{ \AA}, \quad \lambda_{2,\min} = 5892,8 \text{ \AA}$$

تفاوت بیشینه و کمینه طول موج‌ها برابر است با

$$\Delta\lambda_1 = 3,6\text{\AA}, \quad \Delta\lambda_2 = 6,2\text{\AA}$$

با استفاده از رابطهٔ دوپلر و توجه به اینکه انتقال ناشی از دو برابر اندازهٔ سرعت مداری است، داریم

$$v_1 = c \frac{\Delta\lambda_1}{2\lambda_0} = 9,2 \times 10^4 \text{ m/s}$$

$$v_2 = c \frac{\Delta\lambda_2}{2\lambda_0} = 1,6 \times 10^5 \text{ m/s}$$

دانش‌آموزان می‌توانند از طول موج خط مرکزی و طول موج‌های بیشینه (یا کمینه) استفاده کنند. طرح علامت‌گذاری در هر فایل Excel داده شده است.

(ii) چون مرکز جرم دستگاه ستارهٔ دوتایی نسبت به ما حرکت نمی‌کند، داریم

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{v_2}{v_1} = 1,7$$

(iii) با نوشتن $r_i = \frac{v_i}{\omega}$ به‌ازای $i = 1, 2$ خواهیم داشت

$$r_1 = 3,8 \times 10^9 \text{ m}, \quad r_2 = 6,5 \times 10^9 \text{ m}$$

$$r = r_1 + r_2 = 1,0 \times 10^{10} \text{ m} \quad (\text{iv})$$

(پ)

(i) نیروی گرانشی برابر با جرم در شتاب مرکزگراست. یعنی

$$G \frac{m_1 m_2}{r^2} = m_1 \frac{v_1^2}{r_1} = m_2 \frac{v_2^2}{r_2}$$

در نتیجه

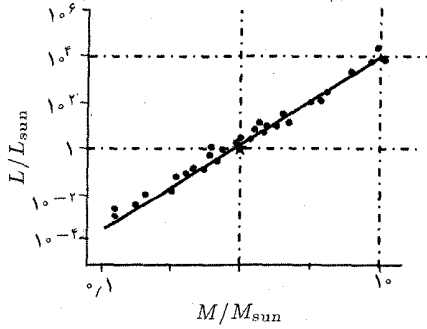
$$m_1 = \frac{r^2 v_2^2}{G r_2}, \quad m_2 = \frac{r^2 v_1^2}{G r_1} \Rightarrow m_1 = 6 \times 10^3 \text{ kg}, \quad m_2 = 3 \times 10^3 \text{ kg}$$

(ت)

(i) همان‌طور که از روی نمودار شکل ۱۶۰ دیده می‌شود، تا یک رقم بامعنی $\alpha = 4$ است.

(ii) همان‌طور که در قسمت پیش به‌دست آوردیم $L_i = L_{\text{sun}} (M_i/M_{\text{sun}})^4$. پس

$$L_1 = 3 \times 10^{28} \text{ W}, \quad L_2 = 4 \times 10^{27} \text{ W}$$



شکل ۱۶۰

(iii) برای ایجاد I_0 ، توان کل دستگاه روی کره‌ای به شعاع d توزیع شده است، که برابر است با

$$I_0 = \frac{L_1 + L_2}{4\pi d^2} \Rightarrow d = \sqrt{\frac{L_1 + L_2}{4\pi I_0}} = 1 \times 10^{18} \text{ m}$$

که تقریباً برابر ۱۰۰ سال نوری است.

$$\theta \cong \tan \theta = \frac{r}{d} = 1 \times 10^{-8} \text{ rad} \quad (\text{iv})$$

(v) اگر طول موج نور را λ_0 بگیریم، با استفاده از رابطه عدم قطعیت داریم

$$D = \frac{d\lambda_0}{r} \cong 50 \text{ m}$$

پیوست الف

سرفصل‌هایی که براساس آن‌ها مسئله‌های المپیادهای بین‌المللی فیزیک طراحی می‌شوند.

بخش نظری

۱. مکانیک

- سینماتیک (بردارها، سرعت و شتاب)
- قانون‌های نیوتون، دستگاه‌های لخت
- مسائلی که در آن‌ها جرم متغیر است، می‌تواند پرسیده شود.
- دستگاه‌های باز و بسته، تکانه و انرژی، کار، توان
- پایستگی انرژی، پایستگی تکانه خطی، ضربه
- نیروهای کشسان، نیروهای مالشی، قانون گرانش، انرژی پتانسیل و کار در میدان گرانشی
- شتاب مرکزگرا، قانون‌های کپلر

۲. مکانیک جسم صلب

- ایستاشناسی، مرکز جرم، گشتاور
- شرایط تعادل اجسام
- حرکت اجسام صلب، انتقال، چرخش، سرعت و شتاب زاویه‌ای، پایستگی تکانه زاویه‌ای
- نیروهای داخلی و خارجی، معادله حرکت جسم صلب حول محور ثابت، گشتاور لختی، انرژی جنبشی جسم در حال چرخش، قضیه محورها موازی، جمع‌پذیری گشتاور لختی
- دستگاه‌های مقایسه شتابدار-نیروهای لخت
- دانستن رابطه نیروی کوریولیس ضرورتی ندارد.

۳. هیدرودینامیک

دانش آموزان لازم است در این قسمت، مفاهیم فشار، شناوری و قانون پیوستگی را بدانند.

۴. ترمودینامیک و فیزیک مولکولی

- انرژی داخلی، کار و گرما، قانون اول ترمودینامیک، تعادل گرمایی، کمیت‌های وابسته به حالت و کمیت‌های وابسته به فرایندها
- مدل گاز کامل، فشار و انرژی جنبشی مولکولی، عدد آووگادرو، معادله حالت گاز کامل، دمای مطلق
- کار انجام شده در فرایندهای همدمای بی‌دررو
- دانستن اثبات معادله فرایند بی‌دررو ضرورتی ندارد.
- چرخه کارنو، بازده ترمودینامیکی، فرایندهای برگشت پذیر و برگشت ناپذیر، انتروپی، ضریب بولتزمان
- - انتروپی مستقل از تابع و به‌طور کیفی، تغییر انتروپی و برگشت پذیری، فرایندهای شبه ایستا

۵. نوسان و موج

- نوسان‌های هماهنگ، معادله نوسان هماهنگ
- - حل معادله حرکت نوسانی هماهنگ، تشدید به‌طور کیفی
- امواج هماهنگ، انتشار امواج، امواج طولی و عرضی، قطبش خطی، اثر کلاسیکی دوپلر، امواج صوتی
- - اثر دوپلر فقط در یک بعد، اندازه‌گیری سرعت صوت و نور، انتشار امواج در محیط‌های همگن و همسانگرد، تابش و بازتاب موج، اصل فرما
- اصل برهم‌نهی امواج هماهنگ، امواج همدوس، تداخل، امواج ایستاده
- - شدت با مجذور دامنه متناسب است، دانستن تحلیل فوریه لازم نیست ولی دانش آموز باید درباره اینکه امواج پیچیده، حاصل برهم‌نهی امواج ساده سینوسی است به‌طور کیفی اطلاعاتی داشته باشد. تداخل ناشی از فیلم‌های نازک و دستگاه‌های ساده دیگر (نیاز به دانستن رابطه‌های آن‌ها نیست)، پراش

۶. بار الکتریکی و میدان الکتریکی

- بقای بار، قانون کولن
- میدان الکتریکی، پتانسیل الکتریکی، قانون گاوس
- - قانون گاوس برای حالت ساده و متقارن مانند کره و استوانه، دوقطبی الکتریکی
- خازن، ظرفیت، ثابت دی‌الکتریک، چگالی انرژی میدان الکتریکی

۷. جریان و میدان مغناطیسی

- جریان، مقاومت، مقاومت داخلی باتری، قانون اهم، قوانین کیرشهف، کار و توان الکتریکی در جریان‌های مستقیم و متناوب، قانون ژول

- حالت‌های ساده‌ای از مدارهای الکتریکی شامل قطعه‌های غیراومی.

- میدان مغناطیسی ناشی از جریان، جریان در میدان مغناطیسی، نیروی لورنتس، بار در میدان مغناطیسی، کاربردهای ساده‌ای از سیکلوترون، گشتاور دوقطبی مغناطیسی
- قانون آمپر
- میدان مغناطیسی دستگاه متقارن ساده شبیه سیم مستقیم، حلقه دایره‌ای و سیملوله
- قانون القای الکترومغناطیسی، شار مغناطیسی، قانون لنز، خودالقایی، القاگر، گذردهی، چگالی انرژی مغناطیسی
- جریان متناوب، RLC در جریان متناوب، ولتاژ و جریان در مدارهای متوالی و موازی، تشدید - مدارهای ساده ac، ثابت زمانی

۸. امواج الکترومغناطیسی

- مدار نوسانی، بسامد نوسان
- نور موجی، پراش از یک و دو شکاف، نقش پراش، بازتاب براگ
- طیف، پاشندگی و پراش، خطوط طیفی گازها
- امواج الکترومغناطیسی عرضی
- اصل برهم‌نهی امواج قطبیده، قطبش توسط بازتاب، قطبشگرها
- توان تفکیک
- جسم سیاه، قانون استفان - بولتزمن
- دانستن رابطه پلانک ضرورتی ندارد.

۹. فیزیک کوانتومی

- اثر فوتوالکتریک، انرژی و برخورد فوتون
- دانستن رابطه اینشتین لازم است.
- طول موج دو بروی، اصل عدم قطعیت هایزنبرگ

۱۰. نسبیت

- اصل نسبیت، جمع سرعت‌ها، پدیده دوپلر نسبیتی
- معادله نسبیتی حرکت، تکانه، انرژی، رابطه بین جرم و انرژی، پایستگی انرژی و تکانه

۱۱. ماده

- کاربردهای ساده‌ای از معادله براگ
- ترازهای انرژی اتم‌ها و مولکول‌ها (به‌طور کیفی)، گسیل، جذب، طیف اتم‌های هیدروژن
- ترازهای انرژی هسته (به‌طور کیفی)، واپاشی‌های α ، β ، γ ، جذب تابش، نیمه عمر و واپاشی نمایی، اجزای هسته، واکنش‌های هسته‌ای

بخش تجربی

قسمت نظری مواد درسی مبنایی جهت تمام مسائل تجربی است. مسائل تجربی که در مسابقه تجربی داده می‌شوند، باید شامل اندازه‌گیری باشد.

نیازمندی‌های اضافی

- داوطلبان باید از اثر دستگاه‌ها در اندازه‌گیری آگاه باشند.
- اطلاع از روش‌های عادی تجربی برای اندازه‌گیری کمیت‌های فیزیکی.
- آشنایی با دستگاه‌های متداول و ساده آزمایشگاهی و وسایلی مانند کولیس، ریزسنج، دماسنج، ولت‌سنج، آمپرسنج، اهم‌سنج، پتانسیومتر، دیود، ترانزیستور، وسایل اپتیکی ساده و غیره.
- توانایی استفاده از دستگاه‌های پیشرفته و وسایلی مانند اسیلوسکوپ دو باریکه‌ای، شمارنده، زمان‌سنج، مولدهای سیگنال و تابع.
- - مبدل آنالوگ به دیجیتال که به یک کامپیوتر وصل است، تقویت‌کننده، انتگرال‌گیر، دیفرانسیل‌گیر، منبع تغذیه، ولت‌سنج، اهم‌سنج و آمپرسنج دیجیتال.
- مشخص کردن صحیح منابع خطا، تخمین تأثیر آن‌ها بر نتیجه (یا نتایج) نهایی.
- خطاهای مطلق و نسبی، دقت دستگاه‌های اندازه‌گیری، خطای یک اندازه‌گیری، خطای یک رشته اندازه‌گیری، خطای کمیتی که تابع کمیت‌های اندازه‌گیری شده است.
- تبدیل یک وابستگی به صورت خطی با انتخاب مناسب متغیرها و گذراندن یک خط مستقیم مناسب توسط نقاط تجربی حاصل از آزمایش.
- استفاده مناسب از کاغذ رسم با مقیاس‌های مختلف (مانند کاغذهای قطبی و لگاریتمی)
- گرد کردن صحیح و اعلام نتیجه (یا نتایج) نهایی و خطا (یا خطاها) با عدد صحیح و اعشار با معنا.
- آگاهی استاندارد از ایمنی در کار آزمایشگاهی (با وجود این، اگر انجام آزمایشی شامل خطراتی باشد، هشدار مناسب باید در متن مسئله داده شود).

پیوست ب

امتیاز مسئله‌ها

نمره هر مسئله توسط کشور برگزارکننده تعیین می‌شود، ولی تعداد کل امتیاز مسئله‌های نظری باید ۳۰ و برای مسئله‌های تجربی ۲۰ باشد.

نحوه رتبه‌بندی

بالاترین نمره دریافتی توسط بهترین شرکت‌کننده مسابقه ۱۰۰ در نظر گرفته می‌شود.

- افرادی که بیش از ۹۰ درصد نمره اول را گرفته‌اند رتبه اول را کسب می‌کنند و مدال طلا، جایزه خاص و دیپلم می‌گیرند.
- افرادی که امتیاز آن‌ها از ۷۸ درصد تا ۸۹ درصد امتیاز نفر اول باشد، رتبه دوم را کسب می‌کنند و به آن‌ها مدال نقره، جایزه خاص و دیپلم تقدیم می‌شود.
- افرادی که امتیاز آن‌ها ۶۵ درصد تا ۷۷ درصد امتیاز نفر اول باشد رتبه سوم را کسب می‌کنند و به آن‌ها مدال برنز، جایزه خاص و دیپلم تقدیم می‌شود.
- به افرادی که امتیاز آن‌ها ۵۰ درصد تا ۶۴ درصد امتیاز نفر اول باشد، تقدیرنامه داده می‌شود.
- افرادی که امتیاز آن‌ها از ۵۰ درصد امتیاز نفر اول کمتر است، گواهی شرکت در مسابقه دریافت می‌کنند.
- به افرادی که در حل مسائل بهترین روش را به‌کار برده‌اند دیپلم خاص داده می‌شود.

توضیح: نمرات حاصل از ۹۰ درصد، ۷۸ درصد، ۶۵ درصد و ۵۰ درصد پس از گرد کردن نمره به نزدیک‌ترین عدد صحیح کوچک‌تر منظور می‌شوند.

پیوست پ

ایران در المپیاد جهانی فیزیک

تعداد مدال‌های تیم ایران				مقام ایران	تعداد شرکت‌کنندگان ایرانی		تعداد کشورهای شرکت‌کننده	محل برگزاری	سال برگزاری	دوره
طلا	نقره	برنز	دیپلم افتخار		پسر	دختر				
۱	۲	-	-	۴۴	۵	-	۳۰	لهستان	۱۳۶۸	ام ۲۰
	۱	-	-	۱۴	۵	-	۳۲	هلند	۱۳۶۹	ام ۲۱
۱	۳	-	-	۱۲	۵	-	۳۵	کوبا	۱۳۷۰	ام ۲۲
۲	-	-	-	۲۱	۵	-	۳۷	فنلاند	۱۳۷۱	ام ۲۳
۳	۱	-	۱	-	۵	-	۳۷	آمریکا	۱۳۷۲	ام ۲۴
۳	۲	-	-	۵	۴	۱	۴۷	چین	۱۳۷۳	ام ۲۵
-	-	۳	۲	۳	۴	۱	۵۱	استرالیا	۱۳۷۴	ام ۲۶
-	-	۴	۱	۴	۵	-	۵۵	نروژ	۱۳۷۵	ام ۲۷
-	۱	۳	۱	۳	۵	-	۵۶	کانادا	۱۳۷۶	ام ۲۸
-	۱	۳	۱	۳	۵	-	۵۶	ایسلند	۱۳۷۷	ام ۲۹
-	-	-	۵	۲	۵	-	۶۲	ایتالیا	۱۳۷۸	ام ۳۰
-	۲	۳	-	۴	۴	۱	۶۲	انگلستان	۱۳۷۹	ام ۳۱
-	۳	۱	۳	۵	۵	-	۶۴	ترکیه	۱۳۸۰	ام ۳۲
-	-	-	۵	۲	۵	-	۷۰	اندونزی	۱۳۸۱	ام ۳۳
-	-	۳	۲	۴	۵	-	۵۴	تایوان	۱۳۸۲	ام ۳۴
-	۱	۱	۳	۲	۵	-	۷۳	کره جنوبی	۱۳۸۳	ام ۳۵
-	۲	۱	۲	۶	۵	-	۷۳	اسپانیا	۱۳۸۴	ام ۳۶
-	-	۴	۱	۸	۵	-	۸۶	سنگاپور	۱۳۸۵	ام ۳۷
-	۱	۲	۲	۷	۵	-	۷۶	ایران	۱۳۸۶	ام ۳۸

پیوست ت

کشورهای برگزارکننده المپیاد جهانی فیزیک در گذشته و آینده

سال برگزاری	نام شهر (نام کشور)	دوره
۱۳۴۶/۱۹۶۷	ورشو (لهستان)	ام ۱
۱۳۴۷/۱۹۶۸	بوداپست (مجارستان)	ام ۲
۱۳۴۸/۱۹۶۹	برنو (چک و اسلواکی)	ام ۳
۱۳۴۹/۱۹۷۰	مسکو (شوروی سابق)	ام ۴
۱۳۵۰/۱۹۷۱	صوفیا (بلغارستان)	ام ۵
۱۳۵۱/۱۹۷۲	بخارست (رومانی)	ام ۶
۱۳۵۳/۱۹۷۴	ورشو (لهستان)	ام ۷
۱۳۵۴/۱۹۷۵	گاسترو (آلمان شرقی سابق)	ام ۸
۱۳۵۵/۱۹۷۶	بوداپست (مجارستان)	ام ۹
۱۳۵۶/۱۹۷۷	هراد کرالف (چک و اسلواکی)	ام ۱۰
۱۳۵۸/۱۹۷۹	مسکو (شوروی سابق)	ام ۱۱
۱۳۶۰/۱۹۸۱	وارنا (بلغارستان)	ام ۱۲
۱۳۶۱/۱۹۸۲	مالنته (آلمان غربی سابق)	ام ۱۳
۱۳۶۲/۱۹۸۳	بخارست (رومانی)	ام ۱۴
۱۳۶۳/۱۹۸۴	سیگتونا (سوئد)	ام ۱۵
۱۳۶۴/۱۹۸۵	پورتوروز (یوگسلاوی)	ام ۱۶
۱۳۶۵/۱۹۸۶	لندن (انگلیس)	ام ۱۷
۱۳۶۶/۱۹۸۷	ژنا (آلمان شرقی سابق)	ام ۱۸
۱۳۶۷/۱۹۸۸	بداسچی (اتریش)	ام ۱۹
۱۳۶۸/۱۹۸۹	ورشو (لهستان)	ام ۲۰
۱۳۶۹/۱۹۹۰	گرونینگن (هلند)	ام ۲۱

سال برگزاری	نام شهر (نام کشور)	دوره
۱۳۷۰/۱۹۹۱	هاوانا (کوبا)	۱۲۲م
۱۳۷۱/۱۹۹۲	هلسینکی (فنلاند)	۱۲۳م
۱۳۷۲/۱۹۹۳	ویلیامسبورگ (آمریکا)	۱۲۴م
۱۳۷۳/۱۹۹۴	پکن (چین)	۱۲۵م
۱۳۷۴/۱۹۹۵	کانبرا (استرالیا)	۱۲۶م
۱۳۷۵/۱۹۹۶	اسلو (نروژ)	۱۲۷م
۱۳۷۶/۱۹۹۷	سادباری (کانادا)	۱۲۸م
۱۳۷۷/۱۹۹۸	ریکیاویک (ایسلند)	۱۲۹م
۱۳۷۸/۱۹۹۹	پادوا (ایتالیا)	۱۳۰م
۱۳۷۹/۲۰۰۰	لیستر (انگلیس)	۱۳۱م
۱۳۸۰/۲۰۰۱	آنتالیا (ترکیه)	۱۳۲م
۱۳۸۱/۲۰۰۲	بالی (اندونزی)	۱۳۳م
۱۳۸۲/۲۰۰۳	تایپه (تایوان)	۱۳۴م
۱۳۸۳/۲۰۰۴	پانگ (کره جنوبی)	۱۳۵م
۱۳۸۴/۲۰۰۵	سالامانکا (اسپانیا)	۱۳۶م
۱۳۸۵/۲۰۰۶	سنگاپور (سنگاپور)	۱۳۷م
۱۳۸۶/۲۰۰۷	اصفهان (ایران)	۱۳۸م
۱۳۸۷/۲۰۰۸	هانوی (ویتنام)	۱۳۹م
۱۳۸۹/۲۰۰۹	مریدا (مکزیک)	۱۴۰م
۱۳۹۰/۲۰۱۰	* (کراوسی)	۱۴۱م
۱۳۹۱/۲۰۱۱	* (بلژیک)	۱۴۲م
۱۳۹۲/۲۰۱۲	* (استونی)	۱۴۳م
۱۳۹۳/۲۰۱۳	* (دانمارک)	۱۴۴م
۱۳۹۴/۲۰۱۴	* (اسلوانی)	۱۴۵م
۱۳۹۵/۲۰۱۵	دوبلین (ایرلند)	۱۴۶م
۱۳۹۶/۲۰۱۶	سوئیس (لیختنشتاین)	۱۴۷م
۱۳۹۷/۲۰۱۷	* (مولداوی)	۱۴۸م
۱۳۹۸/۲۰۱۸	* (پرتقال)	۱۴۹م
۱۳۹۹/۲۰۱۹	* (اسرائیل)	۱۵۰م