معادله دیفرانسیل

یک معادله دیفرانسیل تابعی ضمنی از متغیر یا متغیرهای مستقل ـ متغیر یا متغیرهای تابع و مشتق های متغیر یا متغیرهای تابع نسبت به متغیر یا متغیرهای مستقل داشت، مشروط بر آنکه حداقل یک مشتق ساده یا جزئی در آن حضور داشته باشد. بنابراین اگر فقط یک متغیر مستقل و یک متغیر تابع در نظر گرفته شوند، معادله دیفرانسیل به صورت $F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$ نمایش داده می شوند که در آن x متغیر مستقل، y متغیر تابع، $y', y'', \dots, y^{(n)}$ مشتقات مرتبه اول تا nام y نسبت به x می باشند.

مرتبه معادله دیفرانسیل: بزرگترین مرتبه مشتق یا مشتقات ظاهر شده در عبارت معادله دیفرانسیل را مرتبه معادله دیفرانسیل می گویند.

درجه معادله دیفرانسیل: بزرگترین توان مشتق در عبارت معادله دیفرانسیل را درجه معادله دیفرانسیل می گویند.

معادلات خطی و غیرخطی: یک معادله دیفرانسیل معمولی را یک معادله دیفرانسیل خطی در همه متغیرهای تابعی اش گوییم هرگاه در هر یک از جملات معادله که حاوی متغیر یا متغیرهای تابع یا مشتقات ساده آن ها باشد

الف) متغیر یا متغیرهای تابع از توان ۱ باشند

ب) " " " و مشتقات ضرب متغیرهای تابعی و مشتقات آن ها نباشد

ج) خود متغیر تابعی غیرخطی نباشد

[redacted]

مثال: مرتبه و درجه خطی و غیرخطی بودن معادلات دیفرانسیل زیر را بدست آورید

$x^3y'' + (y')^4 - \sin x^2 = 0$ مرتبه ۲ ـ غیرخطی

$xyy' + (\ln x)y = x^2$ مرتبه ۱ ـ غیرخطی

$y'' + 2xy = xe^{y'}$ مرتبه ۲ ـ غیرخطی

$\frac{d^3y}{dx^3} + x^2y = 3x^2+1$ مرتبه ۳ ـ خطی

① معادله دیفرانسیل جداشدنی: هر معادله دیفرانسیل به صورت $f(x)dx = g(y)dy$ را یک معادله دیفرانسیل جداشدنی می‌گویند برای حل آن کافی است از طرفین انتگرال بگیریم. اگر یکی از طرفین جوابی برحسب لگاریتم طبیعی داشته باشد، ثابت انتگرال‌گیری را در همان طرف به صورت $\ln c$ در نظر می‌گیریم.

مثال: $\frac{dy}{(1+y^2)\sqrt{\ln x}} = \frac{\tan^{-1}y}{x}dx$ ، $\frac{dy}{(1+y^2)} = \frac{\sqrt{\ln x}\,\tan^{-1}y}{x}dx$

$\frac{dy}{(1+y^2)\tan^{-1}y} = \frac{\sqrt{\ln x}}{x}dx$ ① $= \frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}(\ln x)^{\frac{3}{2}}$

$\int \frac{dy}{(1+y^2)\tan^{-1}y} = \int \frac{\sqrt{\ln x}}{x}dx$

$\int \frac{dy}{(1+y^2)\tan^{-1}y}$ $\begin{cases} \tan^{-1}y = u \\ \frac{1}{1+y^2}dy = du \end{cases}$

$\int \frac{du}{u} = \ln u + \ln c = \ln \tan^{-1}y + \ln c$

$\int \frac{\sqrt{\ln x}}{x}dx$ $\begin{cases} \ln x = u \\ \frac{1}{x}dx = du \end{cases}$

$\int \sqrt{u}\,du = \int u^{\frac{1}{2}}du$

[redacted]

$(x(y+1))dx = ((x+y)^2+1)dy$

تمرین تحویلی:

① $(xy+x)\,dx = (x^2y^2+x^2+y^2+1)\,dy$

② $3e^x \tan y \, dx + (1-e^x)\sec^2 y \, dy = 0$

①

$\int x\,dx + (y+1)\,dx = \int (x+y)^2\,dy + \int dy$

$\int x\,dx + \int (y+1)\,dx = \int x^2y^2\,dy + \int x^2\,dy + \int y^2\,dy + \int dy$

$\frac{1}{2}x^2 + xy + x = \frac{1}{3}x^2y^3 + 0 + \frac{1}{3}y^3 + y$

② $3e^x\,dx + \frac{(1-e^x)\sec^2 y}{\tan y}\,dy = 0$

$\frac{\cos}{\sin} \times \frac{\cos}{\sin}$

$-3e^x\,dx = \frac{(1-e^x)\sec^2 y}{\tan y}\,dy$

$\frac{\sin}{\cos}$

$\frac{-3e^x\,dx}{1-e^x} = \frac{\sec^2 y}{\tan y}\,dy$

$1-e^x = u$

$-e^x = du$

$3\int \frac{du}{u} = \int \left(\frac{\cos y}{\sin y}\right)^3 dy$

$3\ln u = \int (\cot y)^3\,dy$

$\frac{\cos^3 y}{\sin^3 y}$

$3\sin^2 y\cos^2 y$

$\left(\frac{\cos y}{\sin y}\right)^3$

$\frac{\cos}{\sin} \cdot \frac{\cos}{\sin}$

$\frac{\cot y^4}{4}$

$\int (\cot y)^3\,dy$

$\frac{\sin}{\cos}$

$3\cot^2 y$

$1+\tan^2$

$-(1+\cot^2$

[redacted]

معادلات دیفرانسیل همگن

تابع همگن: تابع $f(x)$ را همگن می‌گویند هرگاه $\lambda > 0$ موجود باشد طوری که

$$f(\lambda x) = \lambda^n f(x)$$

مثال) $f(x) = x^2$

$$f(\lambda x) = (\lambda x)^2 = \lambda^2 x^2 = \lambda^2 f(x)$$

لذا تابع فوق همگن و از درجه ۲ می‌باشد

مثال) $f(x,y) = xy + y^2$ ، $f(\lambda x, \lambda y) = (\lambda x)(\lambda y) + (\lambda y)^2$

$$= \lambda^2 xy + \lambda^2 y^2 = \lambda^2 (xy + y^2) = \lambda^2 f(x,y)$$

لذا تابع فوق همگن و از درجه ۲ می‌باشد

$f(x) = x^3$

$$f(\lambda x) = \lambda^3 f(x)$$

تعریف: معادله دیفرانسیل $M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0$ را همگن می‌گویند هرگاه M و N توابعی همگن و از یک درجه باشند برای حل آن کافیست از تغییر متغیر $y = ux$ استفاده کنیم.

[redacted]

مثال: $(x-y)\,dx+(x+y)\,dy=0$

$$y=ux \rightarrow y'=u'x+u$$

$$(x-y)+(x+y)\frac{dy}{dx}=0$$

$$(x-ux)+(x+ux)(u'x+u)=0$$

$$x-ux+u'x^2+ux+u'ux^2+u^2x=0$$

$$1+u'x+u'ux+u^2=0$$

$$u'(x+ux)=-1-u^2$$

$$u'x(1+u)=-1-u^2$$

$$u'x=\frac{-1-u^2}{1+u}$$

$$\frac{du}{dx}x=\frac{-1-u^2}{1+u}$$

$$du\,x=\left(\frac{-1-u^2}{1+u}\right)\frac{dx}{x}$$

$$\int\frac{1+u}{-1-u^2}\,du=\int\frac{dx}{x}$$

$\int\frac{du}{x}$ $\int\frac{du}{u}$

$$\int\frac{1+u}{-1-u^2}\,du=\ln x+\ln c$$

تمرین

تحلیل

$$\int\frac{1+u}{-1-u^2}\,du$$

$1+u^2=X$

$2u=dX$

$$\int\frac{1+u}{-(1+u^2)}$$

[redacted]

تمرین تحویلی: ابتدا ثابت کنید معادله دیفرانسیل زیر همگن می‌باشد سپس آن را حل کنید.

$$y^2dx+(x\sqrt{y^2-x^2}-xy)dy=0$$

$$y^2+(x\sqrt{y^2-x^2}-xy)\frac{dy}{dx}=0$$

$$f(\lambda x,\lambda y)=\lambda^2y^2+(\lambda x\sqrt{\lambda^2(y^2-x^2)}-\lambda^2xy)\frac{dy}{dx}=0$$

$$\lambda^2y^2+\lambda^2x\sqrt{y^2-x^2}-\lambda^2xy)\frac{dy}{dx}=0$$

$$\lambda^2(y^2+x\sqrt{y^2-x^2}-xy)\frac{dy}{dx}=0\to\lambda^2 f(x,y)$$ همگن

$$y=ux\to y'=u'x+u$$

$$(ux)^2+(x\sqrt{x^2(u^2-1)}-x^2u)\frac{dy}{dx}=0$$

$$x=\frac{-3u^2}{\sqrt{u^2-1}-u}$$

$$u^2x^2+(x^2\sqrt{u^2-1}-x^2u)\frac{dy}{dx}=0$$

$$-u^2x^2=\frac{1}{3}x^3(\sqrt{u^2-1}-u)\to -u^2=\frac{1}{3}x(\sqrt{u^2-1}-u)$$

$$x^2(\sqrt{u^2-1}-u)\frac{dy}{dx}=0$$

معادلات دیفرانسیل به صورت $y'=F\left(\frac{a_1x+b_1y+c_1}{a_2x+b_2y+c_2}\right)$

الف) اگر دو خط $L_1: a_1x+b_1y+c_1$ ، $L_2: a_2x+b_2y+c_2$

$$\frac{1}{3}x^3(\sqrt{u^2-1}-u)$$

بر هم منطبق باشند یعنی $\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}=\frac{c_1}{c_2}$

در این صورت $y'=F(K)$ و با انتگرال گیری به راحتی می‌توان y را بدست آورد

[redacted]

مثال: $y' = \tan\left(\frac{x-4y+3}{4x-16y+12}\right)$

$\frac{1}{4} = \frac{-4}{-16} = \frac{3}{12}$

$y' = \tan\left(\frac{(x-4y+3)}{4(x-4y+3)}\right)$

$y' = \tan(1/4) \to y = \tan(1/4)x + C$

ب) اگر دو خط ۱ و ۲ موازی باشند یعنی $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$

آنگاه با تغییر متغیر $u = a_1x + b_1y$ یا $u = a_2x + b_2y$ معادله قابل حل می‌باشد

مثال: $(2x-4y+5)dy + (x-2y+3)dx = 0$

حل $\Rightarrow (2x-4y+5)\frac{dy}{dx} + (x-2y+3) = 0$

$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{-x+2y-3}{2x-4y+5} \Rightarrow \frac{-1}{2} = \frac{2}{-4} \neq \frac{-3}{5}$

$y' = \frac{-(x-2y)-3}{2(x-2y)+5} \Rightarrow u = x-2y \to u' = 1-2y' \to \frac{u'-1}{-2} = y'$

$\frac{u'-1}{-2} = \frac{-u-3}{2u+5} \to u'-1 = \frac{2u+6}{2u+5} \to u' = \frac{2u+6}{2u+5}+1$

$u' = \frac{2u+6+2u+5}{2u+5} \to u' = \frac{4u+11}{2u+5} \to \frac{du}{dx} = \frac{4u+11}{2u+5} \to du = \frac{4u+11}{2u+5}dx$

[redacted]

$$\frac{2u+5}{4u+11} = du = dx$$

$\frac{a_1}{a_2} \neq$

ج) اگر دو خط L_1 و L_2 متقاطع باشند آنگاه با تغییر متغیر

$$\begin{cases} x = X + x^* \\ y = Y + y^* \end{cases}$$

به حل معادله دیفرانسیل می پردازیم که در آن (x^*, y^*) نقطه تقاطع دو خط می باشند

مثال)

$$(3x+y-2)dy - (2x+2y+1)dx = 0$$

$$(3x+y-2)\frac{dy}{dx} = 2x+2y+1$$

$$\Rightarrow y' = \frac{2x+2y+1}{3x+y-2}$$

$\frac{2}{3} \neq \frac{2}{1} \to$ متقاطع

$$\begin{cases} 2x+2y+1=0 \\ 3x+y-2=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x+2y+1=0 \\ -6x-2y+4=0 \end{cases}$$

$$-4x+5=0$$

$$x^* = \frac{5}{4}$$

$$2x+2y+1=0 \Rightarrow 2\left(\frac{5}{4}\right)+2y+1=0$$

$$\Rightarrow \frac{5}{2}+2y+1=0$$

$$\Rightarrow 2y = \frac{-5}{2} - 1$$

$$\Rightarrow y^* = \frac{-7}{4}$$

$$\begin{cases} x = X + \frac{5}{4} \\ y = Y - \frac{7}{4} \end{cases}$$

$$\begin{cases} dx = dX \\ dy = dY \end{cases}$$

$$\frac{dY}{dX} = \frac{dy}{dx} = y' = \frac{2\left(X+\frac{5}{4}\right)+2\left(Y-\frac{7}{4}\right)+1}{3\left(X+\frac{5}{4}\right)+\left(Y-\frac{7}{4}\right)-2}$$

$$\frac{dY}{dX} = \frac{2X+\frac{10}{4}+2Y-\frac{14}{4}+1}{3X+\frac{15}{4}+Y-\frac{7}{4}+2}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2X+2Y}{3X+Y}$$ → معادله دیفرانسیل همگن

حل

تمرین تحویلی

[redacted]

معادله دیفرانسیل کامل

معادله دیفرانسیل به صورت $M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0$ را کامل می‌گویند هرگاه تابع $u(x,y)$ چنان موجود باشد به طوریکه

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = M \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = N \end{cases}$$

قضیه: شرط لازم و کافی برای اینکه معادله دیفرانسیل فوق کامل باشد این است که

رند

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

$$\int 2x\,dx = x^2$$

$$\int (x^2)'\,dx = x^2$$

مثال ۱: معادله دیفرانسیل زیر را حل کنید

$$\underbrace{(2+ye^{xy})}_{M}dx + \underbrace{(xe^{xy}-2y)}_{N}dy = 0$$

هدف پیدا کردن u می‌باشد که با انتخاب یکی از روابط

$$\frac{\partial M}{\partial y} = e^{xy} + y(xe^{xy})$$

$$\Rightarrow \text{کامل}$$

$$\frac{\partial N}{\partial x} = e^{xy} + x(ye^{xy})$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = M \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = N \end{cases}$$

u را پیدا و در نهایت جواب را به صورت $u = c$ معرفی می‌کنیم

$$\frac{\partial u}{\partial x} = M = 2 + ye^{xy}$$

$$\int \frac{\partial u}{\partial x}\,dx = \int (2+ye^{xy})\,dx \Rightarrow \boxed{u = 2x + e^{xy} + \varphi(y)}$$

مجهول

$$xe^{xy} - 2y = N = \frac{\partial u}{\partial y} = xe^{xy} + \varphi'(y)$$

$$-2y = \varphi'(y) \Rightarrow -y^2 + c = \varphi(y)$$

[redacted]

معادلات دیفرانسیل غیرکامل قابل تبدیل به کامل

معادله دیفرانسیل غیرکامل

$$M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0$$

را در نظر بگیرید $\mu(x,y)$ را یک فاکتور و انتگرال برای معادله دیفرانسیل فوق می‌گوییم هرگاه با ضرب آن در طرفین معادله، معادله کامل شود برای بدست آوردن μ حالات زیر را داریم:

۱) اگر $\dfrac{\dfrac{\partial N}{\partial x} - \dfrac{\partial M}{\partial y}}{-N} = f(x)$ آنگاه $\mu = e^{\int f(x)dx}$

۲) اگر $\dfrac{\dfrac{\partial N}{\partial x} - \dfrac{\partial M}{\partial y}}{M} = f(y)$ آنگاه $\mu = e^{\int f(y)dy}$

۳) اگر $\dfrac{\dfrac{\partial N}{\partial x} - \dfrac{\partial M}{\partial y}}{xM - yN} = f(xy)$ آنگاه $\mu = e^{\int f(xy)}$

۴) اگر $y(Kx^a y^b + Lx^c y^d)dx + x(Mx^a y^b + Nx^c y^d)dy = 0$ آنگاه معادله دارای فاکتوری به صورت $\mu = x^\alpha y^\beta$ است که با ضرب کردن آن در طرفین معادله و برقراری شرط کامل بودن α و β را

بدست می‌آوریم.

مثال:

$$\underbrace{(4xy+3y^2-x)}_{M}dx+\underbrace{(x^2+2xy)}_{N}dy=0$$

$$\frac{\partial M}{\partial y}=4x+6y$$

$\Rightarrow$ کامل نمی‌باشد

$$\frac{\partial N}{\partial x}=2x+2y$$

$$\frac{\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial M}{\partial y}}{-x^2-2xy}=\frac{2x+2y-4x-6y}{-x^2-2xy}$$

$$\frac{-2x-4y}{-x^2-2xy}=\frac{2(x+2y)}{x(x+2y)}=\frac{2}{x}$$

$$\mu=e^{\int\frac{2}{x}dx}=e^{2\ln x}=e^{\ln x^2}=x^2$$

$$x^2(4xy+3y^2-x)dx+x^2(x^2+2xy)dy=0$$

$$(4x^3y+3x^2y^2-x^3)dx+(x^4+2x^3y)dy=0$$

$$\frac{\partial M}{\partial y}=4x^3+6x^2y$$

$$\frac{\partial N}{\partial x}=4x^3+6x^2y$$

مثال: $y\cos x\,dx + 3\sin x\,dy = 0$

$$\underbrace{y\cos\,dx}_{M} + \underbrace{3\sin x\,dy}_{N} = 0$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \cos x \quad \Longrightarrow \quad \text{غیر کامل}$$

$$\frac{\partial N}{\partial x} = 3\cos x$$

$$\frac{\dfrac{\partial N}{\partial x} - \dfrac{\partial M}{\partial y}}{M} = \frac{3\cos x - \cos x}{y\cos x} = \frac{2}{y}$$

$$\mu = e^{\int \frac{2}{y}dy} = e^{2\ln y} = y^2$$

تمرین تحویلی

$$y^2(y\cos x)dx + 3y^2\sin x\,dx$$

$$(2ye^{x^2y^2} + 2y^2)\,dx + (2xe^{x^2y^2} + 2xy)\,dy = 0$$

$$(x + y^2)dx + \left(\frac{x^2}{y^4} - 1\right)dy = 0$$

[redacted]

معادله دیفرانسیل خطی

هر معادله دیفرانسیل به صورت

$$y' + P(x)y = q(x)$$

$$x' + P(y)x = q(y)$$

را یک معادله دیفرانسیل خطی می‌گویند برای حل آن داریم:

$$y = e^{-\int P(x)\,dx}\left[\int q(x)\cdot e^{\int P(x)\,dx}\,dx\right]$$

$$x = e^{-\int P(y)\,dy}\left[\int q(y)\, e^{\int P(y)\,dy}\,dy\right]$$

مثال:

$$y' + \tan x\, y = 2\cos^2 x$$

$$P(x) = \tan x$$

$$q(x) = 2\cos^2 x$$

$$y = e^{-\int \tan x\,dx}\int 2\cos^2 x\, e^{\int \tan x\,dx}\,dx$$

$$y = e^{\ln\cos x}\int 2\cos^2 x\, e^{-\ln\cos x}$$

$$y = \cos x\int 2\cos^2 x \times \frac{1}{\cos x}\,dx$$

$$= 2\cos x\int \cos x\,dx$$

$$= 2\cos x\,(\sin x + C)$$

معادله دیفرانسیل برنولی:

هر معادله دیفرانسیل به صورت

$$y' + P(x)y = q(x)y^n$$

$$x' + P(y)x = q(y)x^n$$

را یک معادله دیفرانسیل برنولی می‌گویند برای حل آن کافیست از تغییر متغیر $\begin{cases} u = y^{1-n} \\ u = x^{1-n} \end{cases}$

$$y' = \frac{1}{x + \cos y}$$

مثال ۱: $y' + y = \frac{x}{y}$

$$y' + y = xy^{-1}$$

$P(x) = 1$, $q(x) = x$ $\Longrightarrow$ $u = y^{1-(-1)} = y^2$, $u' = 2y'y$

$n = -1$

$$2y(y' + y) = 2y\,xy^{-1}$$

$$2yy' + 2y^2 = 2x$$

$$u' + 2u = 2x$$

$$u = e^{-\int 2dx}\int 2xe^{\int 2dx}\,dx$$

$$u = e^{-2x}\int 2xe^{2x}\,dx$$

$$y^2 = e^{-2x}\int 2xe^{2x}$$

[redacted]

معادله دیفرانسیل کلرو

هر معادله دیفرانسیل به صورت $y = xy' + f(y')$ را یک معادله دیفرانسیل کلرو می‌گویند

برای حل آن کافیست $y' = P$ قرار دهید و از طرفین معادله مشتق بگیریم.

$$y = xP + f(P)$$

$$y' = P + xP' + P'f'(P)$$

$$P = P + xP' + P'f'(P)$$

$$0 = P'(x + f'(P))$$

$$P' = 0 \rightarrow P = C$$

$$\begin{cases} x + f'(P) = 0 \\ y = xP + f(P) \end{cases}$$ پارامتری بدست می‌آید

مثال) $y = xy' + \sqrt{1-y'^2} - y'\cos^{-1}P$

$$y' = P \Rightarrow y = xP + \sqrt{1-P^2} - P\cos^{-1}P \Rightarrow y' = P + xP' + \frac{-2PP'}{2\sqrt{1-P^2}} - P'\cos^{-1}P$$

$$-P\left(\frac{-P'}{\sqrt{1-P^2}}\right) \Rightarrow P = P + xP' - P'\cos^{-1}P \Rightarrow 0 = P'(x - \cos^{-1}P) \Rightarrow P' = 0 \rightarrow P = C$$

$$y = xC + \sqrt{1-C^2} - C\cos^{-1}C$$

$$\begin{cases} x - \cos^{-1}P = 0 \\ y = xP + \sqrt{1-P^2} - P\cos^{-1}P \end{cases}$$

$$x - \cos^{-1}P = 0 \rightarrow x = \cos^{-1}P \Rightarrow \cos x = \cos(\cos^{-1}P) \Rightarrow \cos x = P$$

$$y = x\cos x + \sqrt{\sin^2 x}$$

$$y = \sin x$$

$$y' = \frac{y}{x^3y^2\ln y - x}$$

[redacted]

معادله دیفرانسیل ریکاتی :

هر معادله دیفرانسیل به صورت $y' + f(x)y = f(x)y^2 + r(x)$

را یک معادله دیفرانسیل ریکاتی می گویند. با پیدا کردن یک جواب خصوصی مانند y_1

و با تغییر متغیر $y = y_1 + \frac{1}{u}$ می توان معادله دیفرانسیل ریکاتی را حل نمود.

مثال ۱: $y' = \frac{-1}{x^2} - \frac{1}{x}y + y^2$

$y_1 = \frac{1}{x}$

حل $\Rightarrow y = y_1 + \frac{1}{u} = \frac{1}{x} + \frac{1}{u}$

$y' = \frac{-1}{x^2} + \frac{-u'}{u^2} \quad , \quad \cancel{\frac{-1}{x^2}} - \frac{u'}{u^2} = \cancel{\frac{-1}{x^2}} - \frac{1}{x}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{u}\right) + \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{u}\right)^2$

$-\frac{u'}{u^2} = \frac{-1}{x^2} - \frac{1}{ux} + \frac{1}{x^2} + \frac{2}{xu} + \frac{1}{u^2}$

$-\frac{u'}{u^2} = \frac{-1}{ux} + \frac{2}{xu} + \frac{1}{u^2}$

$-\frac{u'}{u^2} = \frac{1}{ux} + \frac{1}{u^2}$

$u' = \frac{-u^2}{ux} - \frac{u^2}{u^2}$

$u' = \frac{-u}{x} - 1 \Rightarrow \boxed{u' + \frac{u}{x} = 1}$

$y' + P(x)y = q(x)$
$x' + P(y)x = q(y)$

$u = e^{-\int \frac{1}{x}dx} \int 1 \times e^{\int \frac{1}{x}dx} dx = e^{-\ln x} \int e^{\ln x} dx$

$= \frac{1}{x}\int x\,dx = \frac{1}{x}\left(\frac{x^2}{2} + c\right)$

[redacted]

معادله دیفرانسیل لاگرانژ:

هر معادله دیفرانسیل بصورت $y = f(x)y' + g(y')$

را یک معادله دیفرانسیل لاگرانژ می گویند

برای حل آن $y' = P$ قرار می دهیم، از طرفین نسبت به x مشتق می گیریم و با تبدیل کردن

$\frac{dP}{dx}$ به $\frac{dx}{dP}$ و معادله را حل می کنیم.

مثال: $y = \frac{1}{2}xy' + y'^{2}$

$$y' = P \to y = \frac{1}{2}xP + P^2 \Rightarrow y' = \frac{1}{2}P + \frac{1}{2}xP' + 2P'P$$

$$\Rightarrow P = \frac{1}{2}P + \frac{1}{2}xP' + 2P'P \Rightarrow P - \frac{1}{2}P = \frac{1}{2}xP' + 2P'P$$

$$\Rightarrow \frac{P}{2} = \frac{1}{2}xP' + 2P'P \Rightarrow P = xP' + 4P'P \Rightarrow P = P'(x+4P)$$

$$\Rightarrow P = \frac{dP}{dx}(x+4P)$$

$$\frac{P}{x+4P} = \frac{dP}{dx} \Rightarrow \frac{x+4P}{P} = \frac{dx}{dP} \to \frac{x}{P} + 4 = \frac{dx}{dP} \to$$ خطی

$$Pdx = (x+4P)\,dP \Rightarrow$$ همچنین کامل

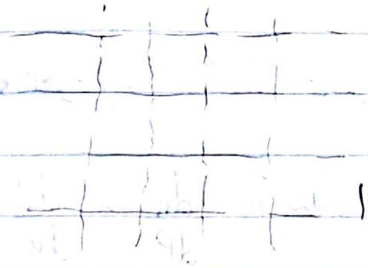
[redacted]

مسیرهای قائم یک دسته منحنی: دو دسته منحنی را مسیرهای قائم می گویند هرگاه هر کدام از منحنی های

دسته اول بر کلیه منحنی های دسته دوم عمود باشد

مثال: $\psi(x,y,c)=0$ به $\varphi(x,y,c)=0$ عمود می گویند.

مثال: $x=c$ به $y=d$



برای یافتن مسیرهای قائم دسته منحنی های $\varphi(x,y,c)=0$ ابتدا

از آن نسبت به x مشتق می گیریم سپس با حذف پارامتر c، y' را به $-\frac{1}{y'}$

تبدیل کرده معادله دیفرانسیل حاصل را به یکی از روش های شناخته شده حل می کنیم.

مثال: مسیرهای قائم $x^2-y^2=c$ را بدست آورید.

$$2x-2yy'=0 \Rightarrow x-y'y=0 \Rightarrow x-\frac{1}{-y'}y=0 \Rightarrow x+\frac{y}{y'}=0$$

$$\Rightarrow x+\frac{y}{\frac{dy}{dx}}=0 \Rightarrow x+y\frac{dx}{dy}=0 \Rightarrow x\,dy+y\,dx$$

$$x\,dy=-y\,dx \Rightarrow \frac{dy}{y}=-\frac{dx}{x} \Rightarrow \ln y=-\ln x+\ln c$$

$$\ln y=\ln\frac{c}{x} \Rightarrow y=\frac{c}{x}$$

[redacted]

تمرین: مسیرهای قائم؟

$$x^2+y^2+2cx=0$$

$$2x+2yy'+\cancel{2c}=0 \qquad y' \Rightarrow \frac{-1}{y'}$$

$$x+yy'=0 \longrightarrow x-\frac{y}{y'}=0 \longrightarrow x-\frac{y}{\frac{dy}{dx}}=0 \longrightarrow$$

$$x-y\frac{dx}{dy}=0 \longrightarrow \frac{x\,dy-y\,dx}{dy}=0$$

$$x\,dy=y\,dx \longrightarrow \frac{dy}{y}=\frac{dx}{x} \longrightarrow \ln y=\ln x+\ln c$$

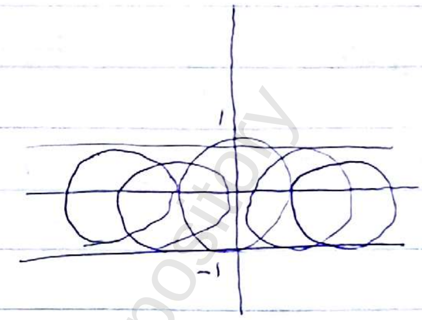
$$\ln y=\ln cx \longrightarrow y=cx$$

[redacted]

پوش دسته‌منحنی: پوش دسته منحنی، منحنی ای می باشد که بر تمام دسته منحنی های مفروض نقطه مماس باشد، برای بدست آوردن آن با مشتق گیری نسبت به c و جایگذاری آن می توان منحنی را بدست آورد.

مثال: $(x-c)^2+y^2=1$ را بدست آورید

$$2(-1)(x-c)+0=0$$



$$-2(x-c)=0$$

$$-2x+2c=0$$

$$-2x=-2c \Rightarrow x=c \Rightarrow (c-c)^2+y^2=1 \Rightarrow y^2=1 \Rightarrow y=\pm 1$$

[redacted]

فصل دوم: معادلات دیفرانسیل مرتبه دوم با ضرایب ثابت هر معادله دیفرانسیل بصورت

$$y'' + Py' + qy = 0$$

را یک معادله دیفرانسیل مرتبه دوم همگن با ضرایب ثابت می‌گویند، برای حل آن بایستی معادله مشخصه را بدست آوریم

$$m^2 + Pm + q = 0$$

حالت اول: اگر $\Delta > 0$ آنگاه معادله دارای دو ریشه حقیقی $m_1 \neq m_2$ می‌باشد لذا

$$y_h = C_1 e^{m_1 x} + C_2 e^{m_2 x}$$

حالت دوم: اگر $\Delta = 0$ آنگاه $m_1 = m_2$ لذا

$$y_h = C_1 e^{m_1 x} + C_2 x e^{m_1 x}$$

حالت اگر $\Delta < 0$ آنگاه $m_1, m_2 = \alpha \pm \beta i$

$$y_h = e^{\alpha x}\left[A \cos\beta x + B \sin\beta x\right]$$

مثال: $y'' + 5y' + 6y = 0$

$$5m^2 + 5m + 6 = 0 \Rightarrow (m+2)(m+3) = 0 \to m = -2, -3$$

$$y_h = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{-3x}$$

[redacted]

مثال: $y'' - 4y' + 4y = 0$

$$m^2 - 4m + 4 = 0 \Rightarrow (m-2)^2 = 0 \rightarrow m = 2, 2$$

$$y_h = C_1 e^{2x} + C_2 x e^{2x}$$

مثال: $y'' + y' + 3y = 0$

$$\Delta = 1 - 12 = -11$$

$$\frac{-1 \pm \sqrt{-11}}{2} = \underbrace{\left(-\frac{1}{2}\right)}_{\alpha} \pm \underbrace{\frac{\sqrt{11}}{2}}_{\beta} i$$

$$y_h = e^{-\frac{1}{2}x}\left[A\cos\frac{\sqrt{11}}{2}x + B\sin\frac{\sqrt{11}}{2}x\right]$$

نکته: برای معادله دیفرانسیل با مرتبه بالاتر نیز می‌توان این قاعده را تعمیم داد

مثال: $y''' - 3y'' + 3y' - y = 0$

$$m^3 - 3m^2 + 3m - 1 = 0$$

$$(m-1)^3 = 0 \rightarrow m = 1,1,1 \Rightarrow y_h = C_1 e^{x} + C_2 x e^{x} + C_3 x^2 e^{x}$$

مثال: $y''' - y'' = 0 \qquad m^3 - m^2 = 0 \Rightarrow m^2(m-1) = 0 \Rightarrow m = 0,0,1$

$$y_h = C_1 e^{0x} + C_2 x e^{0x} + C_3 e^{x}$$

[redacted]

مثال: $y''' - 6y'' + 11y' - 6y = 0$

$m^3 - 6m^2 + 11m - 6 = 0$

$(m-1)(m^2 - 5m + 6) = 0 \Rightarrow m = 1, 2, 3$

$y_h = c_1 e^{x} + c_2 e^{2x} + c_3 e^{3x}$

معادلات دیفرانسیل غیرهمگن با ضرایب ثابت

هر معادله دیفرانسیل بصورت $y'' + py' + qy = R(x)$

را یک معادله دیفرانسیل غیرهمگن با ضرایب ثابت می گویند.

برای حل آن ابتدا معادله همگن وابسته آن را حل می کنیم

معادله همگن و $R(x)$ به تعیین جواب غیرهمگن y_p می پردازیم

لذا برای آن حالات زیر را داریم:

۱) اگر $R(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_m x^m$ آنگاه $y_p = x^r (A_0 + \dots + A_m x^m)$

که در آن r تکرار عدد صفر در ریشه های معادلات مشخصه است

مثال $y^{(4)} - y'' = x^2$

$m^4 - m^2 = 0 \Rightarrow m^2(m^2 - 1) = 0 \Rightarrow m = 0, 0, 1, 1$

$y_h = c_1 e^{0x} + c_2 x e^{0x} + c_3 e^{x} + c_4 x e^{x}$

$y_p = x^2 (A_0 + A_1 x + A_2 x^2)$

[redacted]

۲) اگر $R_{(x)} = ke^{\alpha x}$ آنگاه $y_p = x^r e^{\alpha x}$ که در آن r تکرار عدد α

در ریشه‌های معادلات خطی

مثال) $y'' + 5y' + 6y = e^{-2x}$

$$m^2 + 5m + 6 = 0 \Rightarrow (m+2)(m+3) = 0 \to m = -2, -3$$

$$y_h = ?$$

$$y_p = x e^{-2x}$$

۳) اگر $R_{(x)} = \begin{cases} k_1 \cos \beta x \\ k_2 \sin \beta x \\ k_1 \cos \beta x + k_2 \sin \beta x \end{cases}$ آنگاه $y_p = x^r [A \cos \beta x + B \sin \beta x]$ که در آن r تکرار عدد $\pm\beta$ در ریشه‌های معادله شاخص است

مثال) $y'' + y = \sin x$

$$m^2 + 1 = 0 \Rightarrow m = \pm i$$

$$y_h = ?$$

$$y_p = x [A \cos x + B \sin x]$$

۴) اگر $R_{(x)} = e^{\alpha x}(a_0 + \dots + a_m x^m)$ آنگاه $y_p = x^r e^{\alpha x}[A_0 + \dots + A_m x^m]$

که در آن r تکرار عدد α در ریشه‌های معادله شاخص است

مثال) $y'' + 5y' + 6y = x e^{-3x}$

$$m^2 + 5m + 6 = 0 \Rightarrow m = -2, -3$$

$$y_h = ?$$

$$y_p = x e^{-3x} [A_0 + A_1 x]$$

[redacted]

۵) اگر $R_{(x)} = \begin{cases} e^{\alpha x}\cos\beta x \\ e^{\alpha x}\sin\beta x \end{cases}$ آنگاه $y_p = x^r e^{\alpha x}\left[A\cos\beta x + B\sin\beta x\right]$

که در آن r تکرار عدد $\alpha \pm \beta i$ در ریشه‌های معادله شاخص است

$$y'' + 10y' + 21y = e^{2x}\cos 3x \qquad m^2 + 10m + 21 = 0 \Rightarrow m = 3, 7$$

$2 \pm 3i$

$$y_h = \dots \qquad y_p = x^0 e^{2x}\left[A\cos 3x + B\sin 3x\right]$$

۶) اگر $R_{(x)} = \begin{cases} (a_0 + a_1 x + \dots + a_m x^m)\cos\beta x \\ (b_0 + b_1 x + \dots + b_m x^m)\sin\beta x \end{cases}$ آنگاه

$y_p = x^r\left[(A_0 + \dots + A_m x^m)\cos\beta x + (B_0 + \dots + B_m x^m)\sin\beta x\right]$ که در آن r تکرار عدد $\pm\beta i$ از ریشه‌های معادله شاخص است

مثال:
$$y'' - y' - 6y = x\cos 3x$$

$$m^2 - m - 6 = 0 \Rightarrow (m-3)(m+2) = 0 \Rightarrow m = 3, -2 \qquad y_h = \dots$$

$$y_p = x^0\left[(A_0 + A_1 x)\cos 3x + (B_0 + B_1 x)\sin 3x\right]$$

[redacted]

نکته: دو تابع y_1 و y_2 که وابسته خطی نباشند را مستقل خطی می گویند

قضیه: شرط لازم و کافی برای این که دو تابع y_1 و y_2 وابسته خطی باشند آن است که

$$W(y_1, y_2) = 0$$

قضیه: معادله دیفرانسیل غیرهمگن با ضرایب متغیر ثابت

$$y'' + P(x)y' + q(x)y = R(x)$$

را در نظر بگیرید.

اگر توابع $P(x)$ و $q(x)$ و $R(x)$ در فاصله (a,b) پیوسته باشند

آنگاه یک و فقط یک تابع $y = \varphi(x)$ با شرایط اولیه $y(x_0) = y_0$ ، $y'(x_0) = y_0'$

در معادله همگن فوق صدق می کند

[redacted]

معادله دیفرانسیل همگن مرتبه دوم با ضرایب غیرثابت: هر معادله دیفرانسیل به صورت

$$y'' + P(x)y' + q(x)y = 0$$

را یک معادله دیفرانسیل همگن مرتبه دو با ضرایب غیرثابت می گویند.

تعریف: اگر y_1 و y_2 جواب های معادله فوق باشند آنگاه هر ترکیب خطی از این دو نیز جوابی از معادله می باشد که $y_h = c_1y_1 + c_2y_2$ نمایش می دهیم

تعریف: دو تابع y_1 و y_2 را وابسته خطی می گویند هرگاه ثابت k حقیقی موجود باشد به طوری که $y_1 = ky_2$

تعریف: رونسکین y_1 و y_2 را با نماد $W(y_1, y_2)$ نشان می دهیم و به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}$$

اگر مسئله y_1 را نداده باشد باید y_1 را حدس زد سپس از فرمول آبل y_2 را بدست آوریم.

نکته: شرایطی برای بدست آوردن y_1

۱) اگر $P(x) + xq(x) = 0$ آنگاه $y_1 = x$

۲) اگر $1 + P(x) + q(x) = 0$ آنگاه $y_1 = e^x$

۳) اگر $1 - P(x) + q(x) = 0$ آنگاه $y_1 = e^{-x}$

۴) اگر $2 + 2xP(x) + x^2q(x) = 0$ آنگاه $y_1 = x^2$

[redacted]

$y_1 = \ln x$ ، $x P(x) + x^2 q(x) \ln x = 1$.۵

مثال، $x^2 y'' - x y' + y = 0$

$$y'' - \frac{1}{x} y' + \frac{1}{x^2} y = 0$$

$$P(x) = -\frac{1}{x}$$

$$q(x) = \frac{1}{x^2} \longrightarrow P(x) + x q(x) = 0$$

$$-\frac{1}{x} + \frac{x}{x^2} = 0 \Longrightarrow y_1 = x$$

$$y_2 = x \int \frac{1}{x^2} e^{-\int -\frac{1}{x} dx} dx$$

$$= x \int \frac{1}{x^2} e^{\ln x} dx = x \int \frac{x}{x^2} dx = x(\ln x + c)$$

$$y_2 = y_1 \int \frac{1}{y_1^2} e^{-\int P(x) dx} dx \qquad y_h = c_1 y_1 + c_2 y_2$$

[redacted]

معادله دیفرانسیل غیرهمگن با ضرایب غیرثابت:

$$y'' + P(x)y' + q(x)y = R(x)$$

ابتدا y_1 و y_2 را بدست آوریم و جواب عمومی $y_h = c_1y_1 + c_2y_2$ را معرفی می‌کنیم

سپس برای قسمت غیرهمگن y_p را بصورت زیر بدست می‌آوریم

$$y_p = y_1\int \frac{-y_2 R(x)}{W(y_1,y_2)}dx + y_2\int \frac{y_1 R(x)}{W(y_1,y_2)}dx$$

مثال: $y'' - \frac{2}{x}y' + (1+\frac{2}{x^2})y = xe^x$

$$y_1 = x\cos x \,,\; y_2 = y_1\int \frac{1}{y_1^2} e^{-\int P(x)dx}dx$$

$$= x\cos x\int \frac{1}{x^2\cos^2 x} e^{-\int -\frac{2}{x}dx}dx = x\cos x\int \frac{1}{x^2\cos^2 x} e^{2\ln x}$$

$$= x\cos x\int \frac{1}{x^2\cos^2 x} x^2 dx = x\cos x\int \frac{1}{\cos^2 x}dx$$

$$= x\cos x \, tg\, x$$

$$= x\sin x$$

$$y_h = c_1 x\cos x + c_2 x\sin x$$

$$W(y_1,y_2) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x\cos x & x\sin x \\ \cos x - x\sin x & \sin x + x\cos x \end{vmatrix}$$

$$= x\cos x(\sin x + x\cos x) - x\sin x(\cos x - x\sin x)$$

$$= \cancel{x\cos x\sin x} + x^2\cos^2 x - \cancel{x\sin x\cos x} + x^2\sin^2 x$$

$$x^2(\cos^2 x + \sin^2 x) = x^2$$

$$y_p = -x\cos x\int \frac{-x\sin x(xe^x)}{x^2}dx + x\sin x\int \frac{x\cos x(xe^x)}{x^2}$$

$$= -x\cos x\int e^x\sin x\,dx + x\sin x\int e^x\cos x\,dx$$

[redacted]

فصل ۳

تبدیل لاپلاس:

تبدیل لاپلاس تابع $f(t)$ را با نماد $\mathcal{L}\,f(t)$ و یا $F(s)$ نشان می‌دهند و به صورت زیر تعریف می‌کنند:

$$\mathcal{L}\,f(t) = \int_0^\infty e^{-st} \cdot f(t)\,dt$$

مثال: $f(t) = e^t$

$$\mathcal{L}(e^t) = \int_0^\infty e^{-st} \cdot e^t\,dt = \int_0^\infty e^{(1-s)t}\,dt = \frac{1}{1-s} e^{(1-s)t}\Big]_0^\infty$$

$$= \frac{1}{1-s} e^{(1-s)\infty} - \frac{1}{1-s} e^0$$

$$s > 1 \rightarrow e^{-\infty} = 0$$

$$0 - \frac{1}{1-s} = \frac{1}{s-1}$$

مثال: $f(t) = e^{at}$

$$\mathcal{L}(e^{at}) = \int_0^\infty e^{-st} \cdot e^{at}\,dt = \int_0^\infty e^{(a-s)t}\,dt = \frac{1}{a-s} e^{(a-s)t}\Big]_0^\infty$$

$$\frac{1}{a-s} e^{(a-s)\infty} - \frac{1}{a-s} e^0 \qquad s > a \rightarrow e^{-\infty} = 0$$

$$= 0 - \frac{1}{a-s} = \frac{1}{s-a}$$

$$\mathcal{L}(e^{at}) = \frac{1}{s-a}$$

[redacted]

تمرین تحویلی: تبدیل لاپلاس برخی از توابع

$$\mathcal{L}(e^{at}) = \frac{1}{s-a}$$

$$\mathcal{L}(\sin at) = \frac{a}{s^2-a^2}$$

$$\mathcal{L}(\cos at) = \frac{s}{s^2+a^2}$$

$$\mathcal{L}(\sinh at) = \frac{a}{s^2-a^2}$$

$$\mathcal{L}(\cosh at) = \frac{s}{s^2-a^2}$$

$$\mathcal{L}(t^n) = \frac{n!}{s^{n+1}}$$

$$\mathcal{L}(t^\alpha) = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{s^{\alpha+1}}$$

یادآوری:

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty e^{-t}\, t^{\alpha-1}\, dt$$

$$\Gamma(\alpha+1) = \alpha\Gamma(\alpha)$$

$$\Gamma(n+1) = n!$$

$$\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$$

$$\Gamma(4) = \Gamma(3+1) = 3!$$

$$\Gamma(3/2) = \Gamma(1/2+1) = 1/2\,\Gamma(1/2) = 1/2\sqrt{\pi}$$

مثال:

$$\mathcal{L}(e^{-3t}) = \frac{1}{s+3}$$

مثال:

$$\mathcal{L}(e^{2t}\sin 3t) = \mathcal{L}(\sin 3t)\Big|_{s\to s-2} = \frac{3}{s^2+9}\Big|_{s\to s-2} = \frac{3}{(s-2)^2+9}$$

$$\mathcal{L}(\sin 2t) = \frac{2}{s^2+4}$$

$$\mathcal{L}(\cos 3t) = \frac{s}{s^2+9}$$

$$\mathcal{L}(\sinh t) = \frac{1}{s^2-1}$$

$$\mathcal{L}(\cosh 2t) = \frac{s}{s^2-4}$$

$$\mathcal{L}(t^3) = \frac{3!}{s^4}$$

$$\mathcal{L}(t^{\frac{1}{2}}) = \frac{\Gamma(\frac{3}{2})}{s^{\frac{3}{2}}}$$

مثال:

$$\mathcal{L}(e^{-t}\cosh 2t) = \frac{s}{s^2-4}\Big| = \frac{s+1}{(s+1)^2-4}$$

$$s \to s+1$$

[redacted]

قضایای تبدیل لاپلاس:

قضیه مقدار اولیه و نهایی:

$$\lim_{t\to 0} f(t) = \lim_{s\to\infty} sF(s)$$

$$\lim_{t\to\infty} f(t) = \lim_{s\to 0} sF(s)$$

مثال) اگر $F(s)=\frac{2s^2+7}{s^3+5s+4}$ باشد آنگاه $\lim_{t\to 0} f(t)$ را بدست آورید

$$\lim_{t\to 0} f(t) = \lim_{s\to\infty} sF(s) = \lim_{s\to\infty}\frac{2s^3+7s}{s^3+5s+4} = 2$$

قضیه اول انتقال:

$$\mathcal{L}(e^{at}\cdot f(t)) = \mathcal{L}(f(t))\Big|_{s\to s-a} = F(s-a)$$

مثال) $\mathcal{L}(e$

$$f*g=\int_0^t f(r)\,g(t-r)\,dr$$

$$\mathcal{L}(f*g)=\mathcal{L}\left(\int_0^t f(r)\,g(t-r)\,dr\right.$$

مثال) $\mathcal{L}\left(\int_0^t e^{2r}\cdot e^{t-r}\,dr\right)$

$f(r)=e^{2r}$ $\to F(s)=\frac{1}{s-2}$

$g(t-r)=e^{t-r}$

$$g(t-r)=e^{t-r}\to g(t)=e^{t}\to G(s)=\frac{1}{s-1}$$

چون $T=2\pi$ لذا

$$\mathcal{L}(f(t))=\frac{1}{1-e^{-2\pi s}}\int_0^{2\pi} e^{-st} f(t)\,dt$$

$$=\frac{1}{1-e^{-2\pi s}}\int_{\pi}^{2\pi} -e^{-st}\sin t$$

قضیه مشتق تبدیل لاپلاس:

$$\mathcal{L}(t \cdot f(t)) = -\mathcal{L}(f(t))' = -F'(s)$$

$$\mathcal{L}(t^2 \cdot f(t)) = \mathcal{L}(f(t))'' = F''(s)$$

$$\mathcal{L}(t^3 \cdot f(t)) = -\mathcal{L}(f(t))''' = -F'''(s)$$

$$\mathcal{L}(f'(t)) = s\mathcal{L}(f(t)) - f(0)$$

$$\mathcal{L}(f''(t)) = s^2\mathcal{L}(f(t)) - sf(0) - f'(0)$$

مثال) $\mathcal{L}(t\sin 2t) = -\mathcal{L}(\sin 2t)' = -\left(\frac{2}{s^2+4}\right)'$

مثال) $\mathcal{L}(t^2\cos 3t) = \mathcal{L}(\cos 3t)'' = \left(\frac{s}{s^2+9}\right)''$

قضیه تبدیل لاپلاس انتگرال:

$$\mathcal{L}\left(\int_0^t f(r)\,dr\right) = \frac{\mathcal{L}(f(r))}{s} = \frac{F(s)}{s}$$

مثال) $\mathcal{L}\left(\int_0^t \underbrace{\sin 3r}_{fr}\,dr\right) = \frac{\mathcal{L}(\sin 3r)}{s}$

مثال) $\mathcal{L}\left(\int_0^t e^{2r}\cos 3r\,dr\right) = \frac{\mathcal{L}(e^{2r}\cos 3r)}{s} = \frac{\frac{s-2}{(s-2)^2+9}}{s}$

مثال) $\mathcal{L}\left(\int_0^t re^{2r}\sin 3r\,dr\right)$.

[redacted]

قضیه تبدیل لاپلاس تابع متناوب:

اگر $f(t)$ به ازای $t\geq 0$ یک تابع متناوب با دوره تناوب T باشد آنگاه

$$\mathcal{L}(f(t)) = \frac{1}{1-e^{-sT}} \int_0^T e^{-st} f(t)\, dt$$

مثال: تبدیل لاپلاس تابع
$$f(t) = \begin{cases} 0 & 0\leq t < \pi \\ -\sin t & \pi < t < 2\pi \end{cases}$$

چون $T=2\pi$ لذا

$$\mathcal{L}(f(t)) = \frac{1}{1-e^{-2\pi s}} \int_0^{2\pi} e^{-st} f(t)\, dt = \frac{1}{1-e^{-2\pi s}} \int_{\pi}^{2\pi} -e^{-st} \sin t$$

[redacted]

~~قضیه دوم انتقال~~ نکته: لاپلاس یک عملگر خطی است

$$\mathcal{L}(af(t)+bg(t)) = a\mathcal{L}(f(t)) + b\mathcal{L}(g(t))$$

مثال: $\mathcal{L}(2\sqrt{t} + 3\cos 2t) =$

$$= 2\mathcal{L}(\sqrt{t}) + 3\mathcal{L}(\cos 2t)$$

$$= \frac{2\Gamma(\frac{3}{2})}{s^{\frac{3}{2}}} + 3\frac{s}{s^2+4}$$

قضیه دوم انتقال: $\mathcal{L}(u(t-a)f(t-a)) = e^{-as}F(s)$

مثال: $\mathcal{L}(u(t-1)t^2) = ?$

$$a=1 \,,\ f(t-1)=t^2 \longrightarrow f(t)=(t+1)^2$$

$$f(x)=(x+1)^2$$

$$\mathcal{L}(u(t-1)t^2) = e^{-s}F(s)$$

$$f(t)=t^2+2t+1$$

$$F(s)=\frac{2!}{s^3}+\frac{2}{s^2}+\frac{1}{s}$$

[redacted]

تمرین تحویلی :

$\mathcal{L}(t e^{2t}\cos 3t) = -\mathcal{L}(e^{2t}\cos 3t)' = -\left(\frac{s-2}{(s-2)^2+9}\right)'$

$\mathcal{L}\left(\int_0^t r e^{2r}\sinh 3r\right) = \frac{\mathcal{L}(r e^{2r}\sinh 3r)}{s} = \frac{-\left(\mathcal{L}(e^{2r}\sinh 3r)\right)'}{s} = \frac{-\left(\frac{3}{(s-2)^2+9}\right)'}{s}$

$\mathcal{L}(t^2 e^{2t}),\quad \mathcal{L}(t^2 e^{2t}\cosh 2t)$

$\mathcal{L}(e^{2t} t^2),\quad \mathcal{L}\left(\int_0^t r e^{-3r}\,dr\right)$

$\mathcal{L}(t^{\frac{5}{2}})$

$\mathcal{L}\left(\int_0^t \cos 3r \sin(2t-3r)\,dr\right.$

$\mathcal{L}(u(t-2)\,t^3) = 9.$

$\mathcal{L}\left(\int_0^t y(r)\cos(t-r)\,dr\right)$

تبدیل معکوس لاپلاس:

$$\mathcal{L}(f(t)) = F(s)$$

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}(F(s))$$

$$\mathcal{L}(f(t)) = F(s)$$

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}(F(s))$$

$$F_s = \frac{s}{s^2+4}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s}{s^2+4}\right) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^2+1}\right) = \sin t$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^2+4}\right) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{2}{2(s^2+4)}\right) = \frac{1}{2}\sin 2t$$

قضیه اول انتگرال:

$$\mathcal{L}(e^{at}f(t)) = F(s-a)$$

$$e^{at}f(t) = \mathcal{L}^{-1}(F(s-a))$$

مثال:

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s-1}{(s-1)^2+4}\right) = e^{t}\cos t$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s-1}{s^2-2s+5}\right) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s-1}{s^2-2s+1+4}\right)$$

$$\mathcal{L}(t.f(t)) = -F'(s) \Rightarrow -t.f(t) = -\mathcal{L}^{-1}(F'(s))$$

$$\mathcal{L}^{-1}(\tan^{-1}s) \Rightarrow F(s) = \tan^{-1}s \rightarrow f(t) = ?$$

$$F'(s) = \frac{1}{s^2+1} \Rightarrow -t.f(t) = \mathcal{L}^{-1}(F'(s)) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^2+1}\right) = \sin t$$

$$f(t) = \frac{\sin t}{t}$$

[redacted]

تمرین: $\mathcal{L}^{-1}\left(\ln \frac{1}{s}\right)$, $\mathcal{L}^{-1}\left(\tan^{-1} \frac{1}{s}\right)$

$\mathcal{L}^{-1}\left(\cot^{-1} s\right)$

قضیه انتگرال: $$\mathcal{L}\left(\int_0^t f(r)\,dr\right) = \frac{F(s)}{s}$$

$$\int_0^t f(r)\,dr = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{F(s)}{s}\right)$$

مثال: $$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^2-s}\right) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s(s-1)}\right) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{\frac{1}{s-1}}{s}\right) = \int_0^t e^r\,dr = e^r\Big]_0^t$$

$$= e^t - e^0$$

کانولوشن: $$\mathcal{L}\left(\int_0^t f(r)g(t-r)\,dr\right) = F(s)\cdot G(s)$$

$$\int_0^t f(r)g(t-r)\,dr = \mathcal{L}^{-1}\left(F(s)\,G(s)\right)$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^2+5s+6}\right) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{(s+2)(s+3)}\right)$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\underbrace{\frac{1}{s+2}}_{F_s} \times \underbrace{\frac{1}{s+3}}_{G_s}\right)$$

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}(F(s)) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s+2}\right) = e^{-2t}$$

$$g(t) = \mathcal{L}^{-1}(G(s)) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s+3}\right) = e^{-3t}$$

$$\Rightarrow \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^2+5s+6}\right) = \int_0^t e^{-2r}\cdot e^{-3(t-r)}\,dr = \int_0^t e^{-2r-3t+3r}\,dr$$

$$= \int_0^t e^{r}\cdot e^{-3t}\,dr = e^{-3t}e^{r}\Big]_0^t = e^{-3t}e^{t} - e^{-3t}e^{0}$$

$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{(s^2+9)^2}\right)$ تمرین

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{F(s)}{s}\right) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s} \times F(s)\right)$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^2-s}\right) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s} \times \frac{1}{s-1}\right)$$

متغیر در انتقال

$$\mathcal{L}\left(u(t-a)\, f(t-a)\right) = e^{-as} F(s)$$

$$u(t-a)\, f(t-a) = \mathcal{L}^{-1}\left(e^{-as} F(s)\right)$$

مثال:

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{e^{-\pi s}}{s^2+1}\right) = u(t-\pi)\, f(t-\pi)$$

$$F(s) = \frac{1}{s^2+1} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} f(t) = \sin t$$

$$f(t-\pi) = \sin(t-\pi)$$

حل معادله دیفرانسیل به کمک تبدیل لاپلاس:

$$\mathcal{L}(f'(t)) = s\mathcal{L}(f(t)) - f(0)$$

$$\mathcal{L}(f''(t)) = s^2\mathcal{L}(f(t)) - sf(0) - f'(0)$$

مثال: معادله دیفرانسیل $y' + 2y = 0$

$y(0) = 1$

را به کمک تبدیل لاپلاس حل کنید

$$\mathcal{L}(y') + 2\mathcal{L}(y) = 0$$

$$s\mathcal{L}(y) - y(0) + 2\mathcal{L}(y) = 0$$

$$s\mathcal{L}(y) - 1 + 2\mathcal{L}(y) = 0$$

$$\mathcal{L}(y)(s+2) = 1 \Rightarrow \mathcal{L}(y) = \frac{1}{s+2}$$

$$y = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s+2}\right) \Rightarrow y = e^{-2t}$$

تمرین تحویلی: معادلات دیفرانسیل زیر را به کمک تبدیل لاپلاس حل کنید

$y'' + 2y' - 3y = 0$, $y'(0) = 0$, $y(0) = 1$

$y'' + y' + 3y = e^{2t}$, $y(0) = y'(0) = 0$

$y'' + y' - y = e^{t}\sin 2t$

$y(0) = y'(0) = 0$

[illegible]

$f(t)$ را بدست آورید

$$f(t) = te^{-t} + \int_0^t r\, f(t-r)\, e^{-r}\, dr$$

$$\begin{cases} xy'' + y' + xy = 0 \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$$

مهم

دستگاه معادل دیفرانسیل

از حل همزمان دو معادله دیفرانسیل با شرایط اولیه و به کمک تبدیل لاپلاس می‌توان دستگاه معادله دیفرانسیل را حل کرد. برای این منظور کافیست از طرفین هر دو معادله دیفرانسیل دستگاه تبدیل لاپلاس بگیریم

مثال،

$$\begin{cases} \dot{x} + 2\dot{y} = 1 \\ \dot{x} + \dot{y} = e^{t} \end{cases}$$

$$x(0) = y(0) = 0 \qquad \Rightarrow \dot{x} = \frac{dx}{dt}$$

$x(t) =$ تابع برحسب t

$y(t) =$ تابع برحسب t

$$\begin{cases} \mathcal{L}(\dot{x}) + 2\mathcal{L}(\dot{y}) = \mathcal{L}(1) \\ \mathcal{L}(\dot{x}) + \mathcal{L}(\dot{y}) = \mathcal{L}(e^{t}) \end{cases}$$

$$\begin{cases} s\mathcal{L}(x) - x(0) + 2s\mathcal{L}(y) - 2y(0) = \frac{1}{s} \\ s\mathcal{L}(x) - x(0) + s\mathcal{L}(y) - y(0) = \frac{1}{s-1} \end{cases}$$

[redacted]

$$-\begin{cases} s\mathcal{L}(x) + 2\mathcal{L}(y) = \frac{1}{s} \\ s\mathcal{L}(x) + s\mathcal{L}(y) = \frac{1}{s-1} \end{cases}$$

$$\begin{cases} s\mathcal{L}(x) + 2\mathcal{L}(y) = \frac{1}{s} \\ -s\mathcal{L}(x) - s\mathcal{L}(y) = \frac{-1}{s-1} \end{cases}$$

$$-s\mathcal{L}(y) + 2\mathcal{L}(y) = \frac{1}{s} - \frac{1}{s-1}$$

$$\mathcal{L}(y)(2-s) = \frac{-1}{s(s-1)}$$

$$\mathcal{L}(y) = \frac{\frac{-1}{s(s-1)}}{2-s} = \frac{-1}{(2-s)s(s-1)}$$

$$\mathcal{L}(y) = \frac{1}{(s-2)s(s-1)} \Longrightarrow y = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s(s-1)(s-2)}\right)$$

$$\frac{1}{s(s-1)(s-2)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s-1} + \frac{C}{s-2} = \frac{A(s-1)(s-2) + Bs(s-2) + Cs(s-1)}{\text{مخرج}}$$

$$= \frac{A(s^2-3s+2) + B(s^2-2s) + C(s^2-s)}{\text{مخرج}}$$

$$= \frac{(A+B+C)s^2 + (-3A-2B-C)s + 2A}{\text{مخرج}}$$

$$\begin{cases} A+B+C = 0 \\ -3A-2B-C = 0 \\ 2A = 1 \rightarrow A = \frac{1}{2} \end{cases} \qquad \frac{1}{2} - 1 + C = 0 \rightarrow C = \frac{1}{2}$$

$$\begin{cases} B+C = -\frac{1}{2} \\ -2B-C = \frac{3}{2} \end{cases}$$

$$-B = 1 \rightarrow B = -1$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s(s-1)(s-2)}\right) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{\frac{1}{2}}{s} + \frac{-1}{s-1} + \frac{\frac{1}{2}}{s-2}\right)$$

$$\frac{1}{2}\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s}\right) + \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{-1}{s-1}\right) + \frac{1}{2}\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s-2}\right)$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 1 - e^{t} + \frac{1}{2}e^{2t}$$

فصل سوم: حل معادله دیفرانسیل به کمک سری ها

تعریف: تابع $f(x)$ را در نقطه $x = x_0$ تحلیلی می‌گویند، هرگاه که $f(x)$ در نقطه $x = x_0$ دارای سری تیلور با $R>0$ باشد یعنی

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n}{n!}$$

$$0 < |x - x_0| < R$$

تعریف: یک سری توان از $(x - x_0)$ به صورت زیر را یک سری تیلور می گویند

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$$

نکته: اگر $x_0 = 0$ آنگاه $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ داریم

تعریف: شعاع بازه همگرایی سری توان را می توان از آزمون های زیر بدست آورد

$$\frac{1}{R} = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$$

$$\frac{1}{R} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$$

تمرین تحویلی: سری تیلور توابع زیر را حول نقطه $x=0$ بدست آورید

$$f(x) = e^x$$

$$f(x) = \sin x$$

$$f(x) = \cos x$$

[redacted]

تعریف: معادله دیفرانسیل $y''+P(x)y'+q(x)y=0$ را در نظر بگیرید اگر $P(x)$ و $q(x)$ در نقطه $x=x_0$ تحلیلی باشند آنگاه هر جوابی از معادله دیفرانسیل در این نقطه تحلیلی است

تعریف: معادله دیفرانسیل $y''+P(x)y'+q(x)y=0$ را در نظر بگیرید در این صورت نقطه $x=x_0$ یک نقطه عادی معادله دیفرانسیل فوق است هرگاه

$\lim_{x\to x_0} P(x)$ و $\lim_{x\to x_0} q(x)$ در غیر این صورت نقطه $x=x_0$ را یک نقطه غیرعادی می گویند

به عبارت دیگر نقطه $x=x_0$ یک نقطه عادی معادله دیفرانسیل

$$f_1(x)y''+f_2(x)y'+f_3(x)y=0$$

است هرگاه $f_1(x)\neq 0$ باشد در غیر این صورت نقطه $x=x_0$ را یک نقطه غیرعادی می گویند.

تعریف: نقطه غیرعادی $x=x_0$ را یک نقطه غیرعادی منظم می گویند هرگاه هر دو حد

$$\lim_{x\to x_0}(x-x_0)^2 q(x) \quad , \quad \lim_{x\to x_0}(x-x_0)P(x)$$

موجود باشند در غیر این صورت نقطه $x=x_0$ را غیر عادی نامنظم می گویند

مثال امتحانی

مثال: نقاط عادی و غیرعادی معادله دیفرانسیل زیر را بدست آورید

$$(x-1)x^2 y'' - y\sin x = 0$$

$x=0\ ,\ x=1$ نقاط غیرعادی معادله دیفرانسیل فوق می باشند

$$\lim_{x\to 0}(x-0)P(x)=0 \Rightarrow x=0$$

$$\lim_{x\to 0}(x-0)^2 Q(x)=\lim_{x\to 0}\frac{x^2(-\sin x)}{(x-1)x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{-\sin x}{x-1}=0$$

لذا $x=0$ نقطه غیرعادی منظم است.

$$\lim (x-1)P(x)=0 \Rightarrow x=1$$

$$\lim_{x\to 1}(x-1)^2 Q(x)=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)^2(-\sin x)}{(x-1)x^2}=\lim_{x\to 1}-\frac{(x-1)\sin x}{x^2}=0$$

تفسیر: معادله دیفرانسیل $y''+P(x)y'+Q(x)y=0$ را در نظر بگیرید اگر $x=x_0$ یک نقطه عادی برای معادله دیفرانسیل فوق باشد آنگاه جوابی به صورت

$y=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n$ خواهد داشت.

[redacted]

مثال ۲:

$$x^2 y'' - x y' + y = 0$$

$$y' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$$

$$y'' = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} - x \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} - \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} - \sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) a_{n+2} x^n - \sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left[(n+2)(n+1) a_{n+2} - n a_n + a_n \right] x^n = 0$$

$$(n+2)(n+1) a_{n+2} + (1-n) a_n = 0$$

$$a_{n+2} = \frac{n-1}{(n+1)(n+2)} a_n$$

$$n=0 \longrightarrow a_2 = \frac{-1}{1\times 2} a_0$$

$$n=1 \longrightarrow a_3 = 0$$

$$n=2 \longrightarrow a_4 = \frac{1}{3\times 4} a_2 = \frac{1}{3\times 4} \times \frac{-1}{1\times 2} a_0$$

$$n=3 \longrightarrow a_5 = \frac{2}{4\times 5} a_3 = 0$$

$$n=4 \longrightarrow a_6 = \frac{3}{5\times 6} a_4$$

معادله دیفرانسیل به روش فروبنیوس:

اگر x_0 یک نقطه غیرعادی منتظم برای معادله دیفرانسیل $y''+P(x)y'+Q(x)y=0$ باشد آنگاه

برای حل آن به روش زیر موسوم به روش فروبنیوس عمل می کنیم

ابتدا معادله مشخصه یا شاخص $r^2+(A-1)r+B=0$ را تشکیل می دهیم که داریم:

$$A=\lim_{x\to x_0}(x-x_0)P(x)$$

$$B=\lim_{x\to x_0}(x-x_0)^2Q(x)$$

با توجه به ریشه های بدست آمده برای این معادله دیفرانسیل حالات زیر را داریم:

حالت اول: اگر $r_1-r_2\notin \mathbb{Z}$ آنگاه دو جواب معادله دیفرانسیل بصورت زیر می باشد

$$y_1=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^{n+r_1}\ ,\quad y_2=\sum_{n=0}^{\infty}b_n(x-x_0)^{n+r_2}$$

حالت دوم: اگر $r_1-r_2\in\mathbb{Z}$ آنگاه

$$y_1=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^{n+r_1}$$

$$y_2=Ky\ln(x-x_0)+\sum_{n=0}^{\infty}b_n(x-x_0)^{n+r_2}$$

حالت سوم: اگر $r_1=r_2$ آنگاه $y_1=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^{n+r_1}$

$$y_2=y_1\ln(x-x_0)+\sum_{n=0}^{\infty}b_n(x-x_0)^{n+r_2}$$

مثال: معادله دیفرانسیل زیر را حول $x=0$ حل کنید. $2x^2y''-xy'+(x+1)y=0$

چون $x=0$ یک نقطه غیرعادی است از روش فروبنیوس داریم

$$A=\lim_{x\to 0}xP(x)=\lim_{x\to 0}x\left(\frac{-1}{2x}\right)=-\frac{1}{2}$$

$$B=\lim_{x\to 0}x^2Q(x)=\lim_{x\to 0}x^2\left(\frac{x+1}{2x^2}\right)=\frac{1}{2}$$

$$r^2+\left(-\frac{1}{2}-1\right)r+\frac{1}{2}=0\ \Big\langle\ \begin{matrix} r=1 \rightarrow r_1-r_2\notin\mathbb{Z} \\ r=\frac{1}{2}\end{matrix}$$

[redacted]

معادله دیفرانسیل لژاندر: هر معادله دیفرانسیل به صورت $(1-x^2)y'' - 2xy' + m(m+1)y = 0$

را یک معادله دیفرانسیل لژاندر می‌گویند چون $x=0$ یک نقطه عادی این معادله دیفرانسیل

است. لذا دارای جواب به صورت $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ که جواب آن پس از حل به صورت

$$y = a_0 h_m + a_1 q_m$$

h_m: سری توان نامتناهی شامل توان های زوج x

q_m: " " " " فرد x

حالت اول: برای m های غیرصحیح هر دو باید دارای تعداد جملات نامتناهی هستند

حالت دوم: اگر m زوج باشد باید h_m تبدیل به یک چندجمله‌ای از درجه m با تعداد جملات محدود می‌شود تعداد جملات با توان فرد نامحدود می‌شود.

حالت سوم: اگر m فرد باشد باید q_m تبدیل به یک چندجمله‌ای از درجه m با تعداد جملات محدود می‌شود و تعداد جملات با توان زوج نامحدود

نکته: در حالت دوم و سوم به آن باید از جواب که دارای تعداد جملات محدود است چندجمله‌ای لژاندر می‌گویند و با P_m نشان می‌دهند

[redacted]

تعامد مهم

$$\int_{-1}^{1} P_m(x) P_n(x)\,dx = \begin{cases} 0 & m \neq n \\ \dfrac{2}{2m+1} & m = n \end{cases}$$

$$P_n(1) = 1$$

$$P_n(-1) = (-1)^n$$

$$P_n(-x) = (-1)^n P_n(x)$$

فرمول رادیگس $\quad P_m(x) = \dfrac{1}{2^m\, m!} \dfrac{d^m}{dx^m}(x^2-1)^m$

معادلات دیفرانسیل بسل

هر معادله دیفرانسیل به صورت $x^2y'' + xy' + (x^2 - V^2)y = 0$ را یک معادله دیفرانسیل بسل می گویند

چون $x=0$ یک نقطه غیرعادی منظم برای این معادله دیفرانسیل است لذا از روش فروبنیوس

داریم $\quad r^2 + (A-1)r + B = 0$

$$A = 1 \qquad B = -V^2 \implies r = \pm V$$

$$r^2 + 0 - V^2 = 0$$

لذا دارای جوابی به صورت $y = C J_V(x) + k J_{-V}(x)$

جواب فوق توصیف کننده جواب بسل می باشد چرا؟

چون $\quad J_{-V}(x) = (-1)^n J_V(x)$

[redacted]

لذا جواب دوم معادله دیفرانسیل را به صورت زیر داریم

$$y(x) = CJ_v(x) + KY_v(x)$$

$J_v(x)$: تابع نوع ۱ بسل از مرتبه v

$Y_v(x)$: تابع نوع ۲ بسل از مرتبه v

نکات مهم:

$$\left(x^{-v}J_v(x)\right)' = x^{-v}J_{v-1}(x)$$

$$\left(x^{v}J_v(x)\right)' = x^{v}J_{v-1}(x)$$

$$J_{\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sin x$$

$$J_{-\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos x$$

$P_1(x)\ ,\ P_2(x) = ?$

$$P_m(x) = \frac{1}{2^m m!}\frac{d^m(x^2-1)^m}{dx^m}$$

$$P_2(x) = \frac{1}{2^2\times 2!}\frac{d^2((x^2-1)^2)}{dx^2} = \frac{1}{8}(x^4-2x^2+1)''$$

$$P_0(x) = \frac{1}{2^0\times 0!}(x^2-1)^0 \Rightarrow P_0(x) = 1$$

مثال:

$$\int_{-1/2}^{1/2} \underbrace{P_{2k+1}(x)}_{\text{فرد}} \times \underbrace{(x^4+\cos x)}_{\text{زوج}}\,dx$$

فرد

$$\int_{-L}^{L} f(x)\,dx = 0$$

$$\int_{-1}^{1}(x+1)P_0(x)\,dx = \int_{-1}^{1}(x+1)\,dx = \frac{x^2}{2}+x\Big]_{-1}^{1} = \left(\frac{1}{2}+1\right)-\left(\frac{1}{2}-1\right)=2$$

مثال:

$$\int x^4 J_1(x)\,dx$$

$$I = \int x^2 \cdot x^2 J_1(x)\,dx$$

$$x^2 = u \rightarrow 2x\,dx = du$$

$$x^2 J_1(x)\,dx = dV \Rightarrow x^2 J_2(x) = V$$

$$I = UV - \int V\,dU = x^2\left(x^2 J_2(x)\right) - \int x^2 J_2(x)(2x)\,dx$$

$$= x^4 J_2(x) - 2\int x^3 J_2(x)\,dx = x^4 J_2(x) - 2\left(x^3 J_3(x)\right)$$

مثال: $\dfrac{d}{dx}\left(J_{\alpha}(x)\right) = ?$

چون $\dfrac{d}{dx}\left(x^{\alpha} J_{\alpha}(x)\right) = x^{\alpha} J_{\alpha-1}(x)$

$$\frac{d}{dx}\left(x^{\alpha} J_{\alpha}(x)\right) = \alpha x^{\alpha-1} J_{\alpha}(x)$$

$$+ x^{\alpha}\frac{d}{dx}\left(J_{\alpha}(x)\right) = x^{\alpha} J_{\alpha-1}(x)$$

$$\Rightarrow \alpha x^{\alpha-1} J_{\alpha}(x) + x$$