۱۰۱

$A = 1/4\bar{5} = 1 + 0/45 + 0/0045 + 0/000045 + \dots = 1 + \dfrac{0/45}{1-\frac{1}{100}} = 1 + \dfrac{45}{99} = \dfrac{144}{99} \to \dfrac{1}{A} = \dfrac{99}{144} = \dfrac{11}{16}$

$110 \div 16 = 0/6875$

$110 - 96 = 14$, $140 - 128 = 12$, $120 - 112 = 8$, $80 - 80 = 0$

چهار رقم اعشار

گزینه ۱

۱۰۲

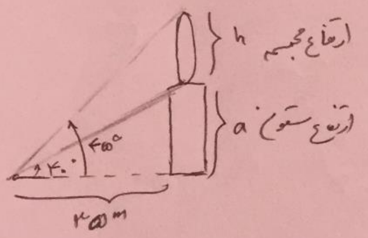
$A(-1,0) \in y \to 0 = \log_{1/2}(-a+b) \to \boxed{-a+b=1}$ (I)

$B(1,-1) \in y \to -1 = \log_{1/2}(a+b) \to \boxed{a+b=2}$ (II)

(II), (I) $\to b = \dfrac{3}{2}$

گزینه ۲

۱۰۳



$\tan 45^\circ = \dfrac{h+a}{35}$

$\to 1 = \dfrac{h+a}{35} \to \boxed{h+a=35}$ (I)

$\tan 40 = \dfrac{a}{35} \to 0/8 = \dfrac{a}{35}$

$\to a = 0/8 \times 35 = 28\,m$

گزینه ۴

(I), $h + 28 = 35 \to h = 7^m$

۱۰۴

$4 \times \boxed{3 \mid 4 \mid 5 \mid 4} = 4 \times 240 = 960$

گزینه ۴

۱۰۵

$a_n = 2 + (n-1)\times 5 \to a_n = 5n-3$

$a_{n'} = 8 + (n'-1)\times 3 \to a_{n'} = 3n'+5$

$99 < 5n-3 < 1000$

$\to 102 < 5n < 1003 \to n \in \{21, \dots, 200\}$

$99 < 3n'+5 < 1000$

$\to 94 < 3n' < 995 \to n' \in \{32, \dots, 331\}$

$\left[\dfrac{997}{15}\right] = 66$

$\left[\dfrac{998}{15}\right] = 66$

$\left[\dfrac{101}{15}\right] = 6$

$\left[\dfrac{102}{15}\right] = 6$

$66 - 6 = 60$

گزینه ۳

۱۰۶

گزینه ۴

$x^4 + ax^2 - bx + 4 \Big|_{x=1} = 0$

$\to (1)^4 + a(1)^2 - b(1) + 4 = 0$

$\to \boxed{a-b=-5}$ (I)

$4x^3 + 2ax - b \Big|_{x=1} = 0$

$\to 4(1)^3 + 2a(1) - b = 0$

$\to \boxed{2a-b=-4}$ (II)

(II), (I) $\to \begin{cases} a = 1 \\ \boxed{b=6} \end{cases}$

۱۰۷ — گزینه ۲

$A(6,0)\in f$

$B(-\frac{1}{4},0)\in f$

$fog(x)=f(g(x))$

نقاط تقاطع fog با محور x ها $C(a,0)\in fog \longrightarrow f(g(a))=0$

$\longrightarrow f(a-\sqrt{a})=0 \longrightarrow a-\sqrt{a}=6 \longrightarrow \boxed{a=9}$

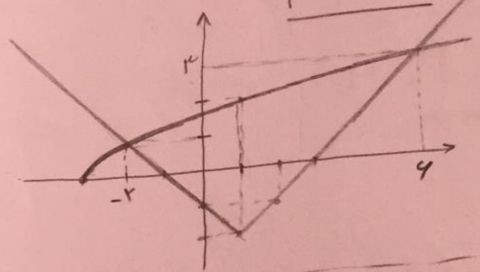
$\searrow a-\sqrt{a}=-\frac{1}{4} \longrightarrow \boxed{a=\frac{1}{4}}$

۱۰۸

$\sqrt{x+3} > |x-1|-2 \longrightarrow x\in(\underset{a}{-2},\underset{b}{6})$

$\boxed{b-a=8}$

گزینه ۳



۱۰۹

$\frac{1-\tan x}{1+\tan x}=\tan(\frac{\pi}{4}-x)$

$\tan(\frac{\pi}{4}-x)=\tan 3x$ — گزینه ۲

$\longrightarrow 3x=k\pi+\frac{\pi}{4}-x$

$\longrightarrow 4x=k\pi+\frac{\pi}{4} \longrightarrow \boxed{x=\frac{k\pi}{4}+\frac{\pi}{16}}$

۱۱۰ — گزینه ۱

مجانب افقی: $\lim\limits_{x\to\infty} y=a \longrightarrow y=a$

$\lim\limits_{x\to\infty} \tan^{-1}(u(x))<0 \longrightarrow -\frac{\pi}{2}<\lim\limits_{x\to\infty} u(x)<0 \Longrightarrow$ گزینه ۳ و ۴ حذف می‌گردد

بازم به شکل: $\lim\limits_{x\to1^-} y>0$

بررسی گزینه ۱: $\lim\limits_{x\to1^-} \tan^{-1}(\frac{1+x}{1-x})=\lim\limits_{x\to1^-} \tan^{-1}(+\infty)=\frac{\pi}{2}>0$ ✓

بررسی گزینه ۲: $\lim\limits_{x\to1^-} \tan^{-1}(\frac{1-x}{1+x})=\lim\limits_{x\to1^-} \tan^{-1}(0)=0$ X

۱۱۱ — گزینه ۲

$\alpha=\cos^{-1}(\frac{3}{5})$

$\beta=\cos^{-1}(-\frac{4}{5})$

$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$

$=\sqrt{1-(\frac{3}{5})^2}\times(-\frac{4}{5})+(\frac{3}{5})\times\sqrt{1-(-\frac{4}{5})^2}$

$=\frac{4}{5}\times(-\frac{4}{5})+(\frac{3}{5})\times(\frac{3}{5})=-\frac{16}{25}+\frac{9}{25}=\boxed{-\frac{7}{25}}$

۱۱۲

$$\lim_{x\to 3^+}\frac{1-\sqrt{x-\sqrt{x+1}}}{x-3}\times\frac{\left(1+\sqrt{x-\sqrt{x+1}}\right)}{\left(1+\sqrt{x-\sqrt{x+1}}\right)}=\lim_{x\to 3^+}\frac{1-\left(x-\sqrt{x+1}\right)}{(x-3)\left(1+\sqrt{x-\sqrt{x+1}}\right)}$$

$$=\lim_{x\to 3^+}\frac{\left((1-x)+\sqrt{x+1}\right)\times\left((1-x)-\sqrt{x+1}\right)}{(x-3)\underbrace{\left(1+\sqrt{x-\sqrt{x+1}}\right)\times\left((1-x)-\sqrt{x+1}\right)}_{A}}=\lim_{x\to 3^+}\frac{(1-x)^2-(x+1)}{(x-3)\times A}$$

گزینه ۴

$$=\lim_{x\to 3^+}\frac{1-2x+x^2-x-1}{(x-3)\times A}=\lim_{x\to 3^+}\frac{x^2-3x}{(x-3)\times A}=\lim_{x\to 3^+}\frac{x\cancel{(x-3)}}{\cancel{(x-3)}\times A}=\frac{3}{-8}$$

$$\lim_{x\to 3^-} ax-3a-\frac{3}{8}=-\frac{3}{8}$$

پس به ازای هر مقدار a حد چپ و راست باهم برابر است.

۱۱۳

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\log(n+1)-\log n\right)=\lim_{n\to\infty} n\log\frac{n+1}{n}=\lim_{n\to\infty}\log\left(\frac{n+1}{n}\right)^n$$

$$=\log\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\log e$$

گزینه ۳

۱۱۴

در حوالی $x=0$: $|\sin x|<|x| \longrightarrow \lim_{x\to 0}\left[\frac{\sin x}{x}\right]=\lim_{x\to 0}[1-\varepsilon]=0$ مطلق

ε: یک مقدار بسیار کوچک

گزینه ۲

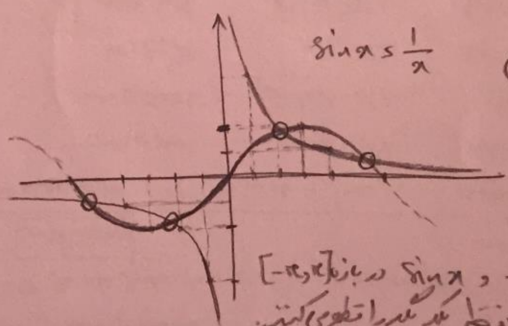
$\lim_{x\to 0}\cot x=\infty$ ولی $\lim_{x\to 0}\left[\frac{\sin x}{x}\right]\cot x=$ (صفر مطلق) $\times$ (بینهایت حد) $=0$

۱۱۵

$$x\sin x-1=0$$

$$\sin x=\frac{1}{x}$$

گزینه ۲



دو نمودار $\frac{1}{x}$ و $\sin x$ در بازه $[-2\pi,2\pi]$ در چهار نقطه یکدیگر را قطع می‌کنند.

۱۱۶

مجانب قائم: $\begin{cases}x=1\\ x=-1\end{cases}$

$y=x$ ، $y=-x$

مجانب مایل: $y=ax+b$

$$a=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}=\begin{cases}1\\-1\end{cases}$$

$$b=\lim_{x\to+\infty}\left(f(x)-ax\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2}{\sqrt{x^2-1}}-x\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2-x\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^2-1}}\right)=0$$

$$b=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x^2}{\sqrt{x^2-1}}+x\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x^2+x\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^2-1}}\right)=0$$

$A(1,1)$

$B(-1,1)$

$$AB=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}=\sqrt{(2)^2+(0)^2}=$$

گزینه ۲

۱۱۷

$$f'_+(\pi) = \lim_{x\to\pi^+} \frac{[2+\cos\frac{x}{2}]\sin 2x - [2+\cos\frac{\pi}{2}]\sin 2\pi}{x-\pi}$$

$$= \lim_{x\to\pi^+}\frac{[2+\cos\frac{x}{2}]\sin 2x}{x-\pi} = \lim_{x\to\pi^+}\frac{(2+(-1))\sin 2x}{x-\pi} \overset{H}{=} \lim_{x\to\pi^+}\frac{2\cos 2x}{1} = 2$$

$$f'_-(\pi) = \lim_{x\to\pi^-}\frac{[2+\cos\frac{x}{2}]\sin 2x}{x-\pi} = \lim_{x\to\pi^-}\frac{(2+0)\sin 2x}{x-\pi} \overset{H}{=} \lim_{x\to\pi^-}\frac{2\times 2\cos 2x}{1} = 4$$

$m=2$, $m'=4$

$$\tan\theta = \left|\frac{m-m'}{1+mm'}\right| = \left|\frac{2-4}{1+2\times 4}\right| = \frac{2}{9}$$

گزینه ۳

۱۱۸

$$x^2y+y^2+3=0 \xrightarrow{\text{مشتق}} 2xy+x^2y'+2yy'=0 \quad \text{(I)}$$

$$\xrightarrow{\text{مشتق}} 2y+2xy'+2xy'+x^2y''+2y'^2+2yy''=0 \quad \text{(II)}$$

گزینه ۱

$$\text{(I)},\ (2,-1) \longrightarrow 2(2)(-1)+(2)^2y'+2(-1)y'=0 \longrightarrow y'|_{(2,-1)}=2$$

$$\text{(II)} \longrightarrow 2(-1)+2(2)(2)+2(2)(2)+(2)^2y''+2(2)^2+2(-1)y''=0 \longrightarrow \boxed{y''|_{(2,-1)}=-11}$$

۱۱۹

$$A(a,0)\in f^{-1} \longrightarrow A'(0,a)\in f \longrightarrow a=0+e^0 \longrightarrow \boxed{a=1}$$

گزینه ۴

شیب مماس بر f^{-1} در: $(f^{-1})'(1) = \frac{1}{f'(0)} = \frac{1}{1+e^x|_{x=0}} = \frac{1}{2}$ $\xrightarrow[\text{معکوس و قرینه}]{\text{شیب خط قائم}}$ $m'=-2$

که در گزینه ها فقط شیب خط داده شده در گزینه ۴ برابر ۲- است پس گزینه ۴ صحیح است.

۱۲۰

$$y=\begin{cases} x\ln x & x>0 \\ x\ln(-x) & x<0 \end{cases} \longrightarrow y'=\begin{cases} \ln x + x\times\frac{1}{x} = \ln x+1 & x>0 \\ \ln(-x)+x\times(\frac{-1}{-x}) = \ln(-x)+1 & x<0 \end{cases}$$

$$\ln(-x)+1=0 \longrightarrow \ln(-x)=-1 \longrightarrow x=-\frac{1}{e}$$

$$\ln x+1=0 \longrightarrow \ln x=-1 \longrightarrow x=\frac{1}{e}$$

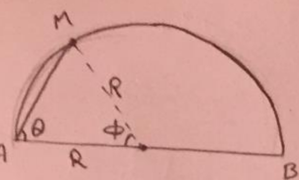
$$\longrightarrow y''=\begin{cases} \frac{1}{x} & x>0 \\ \frac{-1}{-x}=\frac{1}{x} & x<0 \end{cases}$$

	$-\infty$	$-\frac{1}{e}$	0	$\frac{1}{e}$	$+\infty$
y'	$+$	0 $-$	تن $-$	0 $+$	
y''	$-$	$-$	تن $+$	$+$	

$x\in(-\frac{1}{e},0)$

گزینه ۲

۱۲۱



قضیه کسینوس‌ها: $MA^2 = R^2 + R^2 - 2R\times R\cos\varphi$

$2\theta = 180 - \varphi \longrightarrow MA^2 = 2R^2 - 2R^2\cos(180-2\theta)$

$MA = x \longrightarrow x^2 = 2R^2 + 2R^2\cos 2\theta = 2R^2(1+\cos 2\theta)$

$\longrightarrow x^2 = 2R^2\times(2\cos^2\theta) \longrightarrow x^2 = 4R^2\cos^2\theta \longrightarrow x = 2R\cos\theta$

گزینه ۱

$\longrightarrow x = AB\cos\theta$

$MA = 6 \longrightarrow 6 = 10\cos\theta \longrightarrow \boxed{\cos\theta = \frac{3}{5}}$

$\longrightarrow x = 10\cos\theta$

$\frac{dx}{dt} = 10\left\{-\sin\theta\times\frac{d\theta}{dt}\right\} \longrightarrow 0/2 = -\cancel{10}\times\frac{4}{\cancel{5}}\times\frac{d\theta}{dt} \longrightarrow \boxed{\frac{d\theta}{dt} = -\frac{0/2}{8} = -0/025}$

۱۲۲

$f(x) = x^4 - x^3 + ax^2 + bx \longrightarrow f'(x) = 4x^3 - 3x^2 + 2ax + b$

گزینه ۱

$f''(x) = 12x^2 - 6x + 2a$

با توجه به شکل در $x=-1$ عطف افقی :

$f'(-1) = 0 \longrightarrow 4(-1)^3 - 3(-1)^2 + 2a(-1) + b = 0 \longrightarrow -2a + b = 7$ (I)

$f''(-1) = 0 \longrightarrow 12(-1)^2 - 6(-1) + 2a = 0 \longrightarrow \boxed{a = -9}$

(I) $\longrightarrow -2(-9) + b = 7 \longrightarrow \boxed{b = -11}$

۱۲۳

طبق قضیه مقدار میانگین : $(4-1)f(c) = \int_1^4 f(x)\,dx \longrightarrow 3f(c) = \frac{8}{3} \longrightarrow \boxed{f(c) = \frac{8}{9}}$

گزینه ۳

$\int_1^4 \frac{x-1}{\sqrt{x}}\,dx = \frac{2}{3}x\sqrt{x} - 2\sqrt{x}\Big|_1^4 = \left(\frac{16}{3}-4\right) - \left(\frac{2}{3}-2\right) = \frac{8}{3}$

۱۲۴

$\int_0^2 \frac{x^2-[x]}{x+1}\,dx = \int_0^1 \frac{x^2}{x+1}\,dx + \int_1^2 \frac{x^2-1}{x+1}\,dx = -\frac{1}{2} + \ln 2 + \frac{1}{2} = \ln 2$

گزینه ۱

$\int_0^1 \frac{x^2+2x+1-2x-1}{x+1}\,dx = \int_0^1 \frac{(x+1)^2-2x-2+1}{x+1}\,dx = \int_0^1 \left(\overbrace{x+1-2}^{x-1} + \frac{1}{x+1}\right)dx$

$= \frac{x^2}{2} - x + \ln(x+1)\Big|_0^1 = -\frac{1}{2} + \ln 2$

$\int_1^2 \frac{x^2-1}{x+1}\,dx = \int_1^2 (x-1)\,dx = \frac{x^2}{2} - x\Big|_1^2 = \frac{1}{2}$

Email: ali.a.esmaeili@gmail.com

پاسخ به سوالات: مهندس اسمعیلی