تعداد درخت های برچسب دار

حسین نادری

۲۱ اسفند ۱۳۹۴

رابطه کایلی

درخت ها دسته ای از گراف های همبند هستند که دور ندارند. اگر به هر راس از یک درخت یک برچسب نسبت دهیم، تعداد درخت های برچسب دار با n راس، T_n، چقدر است؟ رابطه کایلی پاسخ سوال بالا است.

$$T_n = n^{n-۲}$$

در ادامه به دو روش رابطه کایلی را اثبات می‌کنیم.

این رابطه را ابتدا کارل ویلهلم برشارت، ریاضی دام آلمانی، کشف و به کمک دترمینان محاسبه کرد. بعدتر کایلی در یک یادداشت کوتاه، رابطه را گسترش داد. با وجود این که او در نوشته ی خود به مقاله برشارت ارجاع داده بود، این رابطه امروز به نام کایلی شناخته می شود.

۱ کد پروفر

کد پروفر دنباله ای از اعداد ۱ تا n به طول $n-۲$ است. پروفر کد را اولین بار هینز پروفر برای اثبات فرمول کیلی استفاده کرد. تعداد کد های پروفر $n^{n-۲}$ است. اگر یک تناظر یک به یک میان کد پروفر و درخت های برچسب دار پیدا کنیم، رابطه کایلی را اثبات کرده ایم.

یک الگوریتم برای تناظر دادن هر درخت برچسب دار با یک پروفر کد ارائه می دهیم:

۱. یک درخت دلخواه که راس هایش با اعداد ۱ تا n به هر ترتیبی شماره گذاری شده اند را در نظر بگیر.

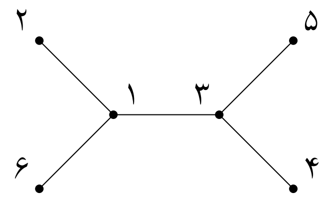
۲. برگ با کوچکترین عدد متناظر را از درخت حذف کن [1] و شماره راس همسایه آن را در انتهای یک پشته بنویسید.

۳. آن قدر گام ۲ را انجام بده که از درخت تنها یک راس باقی بماند.

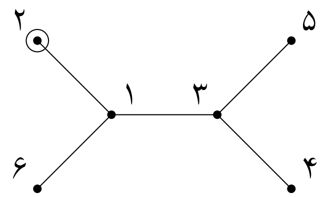
این الگوریتم یک رشته به طول $n-۱$ ارائه می دهد، اما همواره آخرین عدد نوشته شده، n است. چون اگر راس n برگ باشد، همواره یک برگ با شماره کوچکتر برای حذف از گراف وجود دارد، و اگر هم برگ نباشد و در مرحله ای برگ شود، پس از آن تا قبل از گام آخر نوشته نمی شود. حال که می دانیم عضو آخر یکتا معلوم می شود، عضو آخر را حذف می کنیم و یک دنباله $n-۲$ تایی برای پروفر کد در نظر می گیریم.

یک مثال برای ساخت پروفر کد از یک درخت می زنیم.

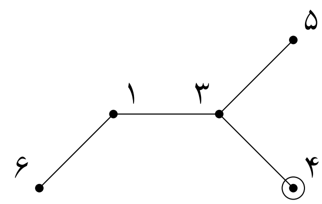
[1] هر درخت دست کم دو برگ دارد و با حذف برگ، گراف همچنان درخت می ماند.



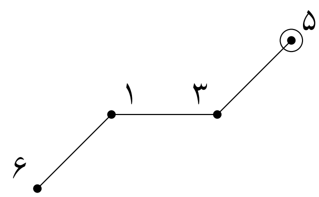
$P :$



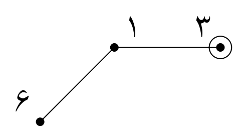
$P :$ ۱



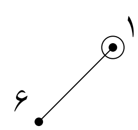
$P :$ ۱, ۳



$P :$ ۱, ۳, ۳



$P :$ ۱, ۳, ۳, ۱



$P :$ ۱, ۳, ۳, ۱, ۶

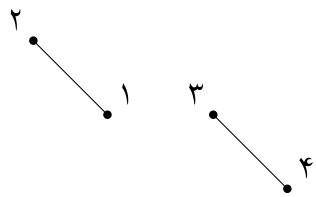
در اولین نگاه متوجه می شویم که برگ ها در P نیستند. با کمی دقت بیشتر به این نتیجه می رسیم که راس با درجه d در دنباله دقیقا $d - ۱$ بار تکرار می شود. اکنون یک تناظر از درخت های برچسب دار به پروفر کد ها داریم، اما هنوز ثابت نکرده ایم برای هر پروفر کد دقیقا یک درخت متناظر وجود دارد. حال یک الگوریتم هم برای شمردن درخت های بر چسب دار با پروفر کد ها ارائه می دهیم.

۱. کوچکترین عددی که در P نیست و تا به حال به عنوان کوجکترین عددی که در P نیست، رسم نشده را در نظر بگیر و یک یال از راس با این شماره به راس متناظر با اولین شماره P رسم کن.

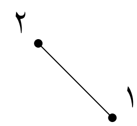
۲. اولین عدد P را از دنباله حذف کن.

۳. رویه بالا را آن قدر انجام بده که هیچ عددی در P باقی نماند. دقت داشته باشید راس n به آخرین شماره P وصل می شود.

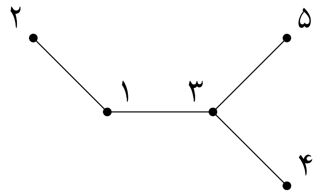
به عنوان مثال الگوریتم بالا را روی دنباله ۱، ۳، ۳، ۱ اجرا می کنیم تا درخت متناظرش را به دست آوریم.



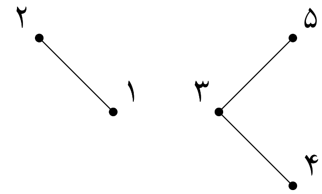
$P:$ ۳, ۳, ۱



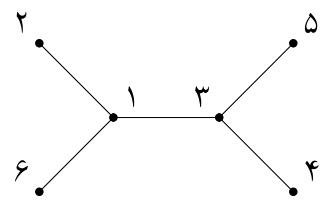
$P:$ ۱, ۳, ۳, ۱



$P:$ ۱



$P:$ ۳, ۱



$P:$

اثبات این که هر درخت به یک و فقط یک پروفر کد متناظر می شود، آسان است. اثبات این هم که هر کد پروفر به دقیقا یک درخت نسبت داده می شود با استقرا روی طول کد پروفر به دست می آید که شرح آن در این حاشیه نمی گنجد.

طبق دو الگوریتمی که آمد، یک بار برای هر درخت یک پروف کد و یک بار برای هر پروف کد یک درخت نسبت دادیم. پس تعداد درخت های برچسب دار با تعداد کد های پروفر یکسان است. اگر f کدگذاری درخت ها با پروف کد باشد، به طور خلاصه کار زیر را انجام دادیم:

$$f: T_n \longrightarrow P_n, \quad f^{-1}: P_n \longrightarrow T_n, \quad \text{and} \quad f^{-1} \circ f = Id.$$

چون یک تناظر یک به یک پیدا کردیم، مساله به تعداد پروفر کد ها تبدیل شد؛ که به آسانی به دست می آید درنتیجه تعداد درخت های برچسب دار با n راس برابر n^{n-2} است.

۲ جنگلی از درخت ها

یکی از روش های رایج در ریاضیات برای اثبات قضایا، ثابت کردن حالت عمومی تر مساله یا به عبارت دیگر «قوی تر کردن مساله» است. در ادامه برای یک ارائه یک راه حل دیگر برای اثبات رابطه کایلی مساله را قوی تر می کنیم. ابتدا جنگل را تعریف می کنیم. یک جنگل گرافی است که دور ندارد ولی لزوما همبند نیست. شکل ظاهری آن مجموعه ی چند درخت است.

$T_{n,k}$ برابر تعداد جنگل های برچسب دار n راسی[۲] که اجتماع k درخت اند، است. برای شمارش تعداد اعضای $T_{n,k}$ از راس با برچسب ۱ شروع می کنیم.
راس ۱، i همسایه دارد و $k-1$ درخت دیگر هستند که مسیری به ۱ ندارند. اگر راس ۱ را از گراف حذف کنیم جنگلی با $n-1$ راس باقی می ماند که $i+(k-1)$ درخت دارد. (توجه داشته باشید که هیچ یک ار i همسایه ی راس ۱ با یک دیگر همسایه نیستند.) اکنون اگر تعداد جنگل های ممکن پس از حذف راس ۱ با مقادیر مختلف i را جمع کنیم، $T_{n,k}$ را حساب کرده ایم. به بیان ریاضی:

$$T_{n,k} = \sum_{i=0}^{n-k} \binom{n-k}{i} T_{n-1,(k-1)+i} \tag{1}$$

از بسط دو جمله ای برای حساب کردن مجموع بالا کمک می گیریم. برای حالت های پایه ی این رابطه بازگشتی تعریف می کنیم $T_{0,0} = 1$ و $T_{n,0} = 0$ برای $n > 0$. $T_{n,n}$ را نیز مانند $T_{0,0}$ برابر ۱ تعریف می کنیم.

قضیه ۱

$$T_{n,k} = kn^{n-k-1}$$

اثبات. از تساوی (۱) و استقرا روی n برای اثبات استفاده می کنیم.

$$\begin{aligned}
T_{n,k} &= \sum_{i=0}^{n-k} \binom{n-k}{i} T_{n-1,(k-1)+i} && (2)\\
&= \sum_{i=0}^{n-k} \binom{n-k}{i} (k-1+i)(n-1)^{(n-1-k-i)} && (3)\\
&= \sum_{i=0}^{n-k} \binom{n-k}{i} (n-1-i)(n-1)^{(i-1)} && (4)\\
&= \sum_{i=0}^{n-k} \binom{n-k}{i} (n-1)^{i} + \sum_{i=1}^{n-k} \binom{n-k}{i} i(n-1)^{i-1} && (5)\\
&= n^{n-k} - (n-k) \sum_{i=1}^{n-k} \binom{n-1-k}{i-1} (n-1)^{i-1} && (6)\\
&= n^{n-k} - (n-k) \sum_{i=0}^{n-1-k} \binom{n-1-k}{i} (n-1)^{i} && (7)\\
&= n^{n-k} - (n-k) n^{n-1-k} && (8)\\
&= kn^{n-k-1} && (9)
\end{aligned}$$

◇

[۲] با برچسب های از ۱ تا n

در (۳) از فرض استقرا استفاده شده است. اگر جمع بندی (۳) را باز کنید مشاهده می کنید که ضریب جمله iام با $n-k-i$ام یکسان است. در تساوی سوم اثبات i با $n-k-i$ جایگزین شده است. مجموع را در (۵) به دو جمع بندی تفکیک کرده ایم. در (۶) و (۸) بسط دوجمله ای، به فرم بسته نوشته شده است. واضح است که $T_{n,۱}$ جواب مساله ای است که می خواستیم حل کنیم و درسطر آخر حکم ثابت شده است.

در واقع یک مساله قوی را حل کردیم تا از نتیجه ی آن یک حالت خاص را به دست آوریم.

$$T_{n,k} = kn^{n-k-۱} \Longrightarrow T_{n,۱} = n^{n-۲}$$

حسین نادری
دانشجوی علوم کامپیوتر شریف
hnaderi268@gmail.com
hnaderi268.blog.ir