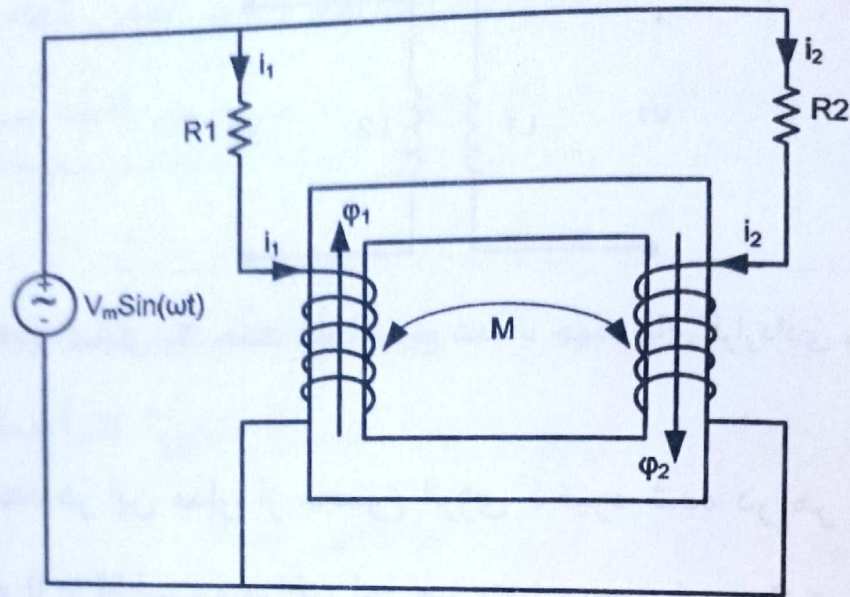


مثال ۱- معادلات مش را برای سیستم در حال تزویج شکل ۶-۶ بنویسید؟



شکل ۶-۶- مدار دارای دو سیم پیچ با تزویج مغناطیسی و $M > 0$

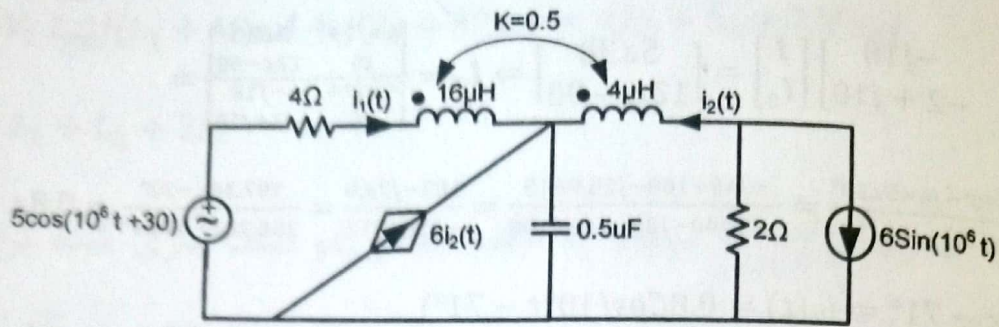
حل: با توجه به قانون دست راست، شارهای ϕ_1 ناشی از جریان i_1 و ϕ_2 ناشی از جریان i_2 اثر تقویت‌کنندگی بر یکدیگر داشته و تزویج مثبت و $M > 0$ است. (ولتاژ القاء شده در سیم پیچ در اثر تزویج با ولتاژ خودی سیم پیچ هم علامت است).
با انتقال مدار به حوزه فازوری و نوشتن KVL در هر یک از مشها داریم:

$$\text{KVL1: } -V \angle 0 + R_1 I_1 + jL_1 \omega I_1 + jM \omega I_2 = 0$$

$$\text{KVL2: } R_2 I_2 + jL_2 \omega I_2 + jM \omega I_1 - jL_1 \omega I_1 - jM \omega I_2 - R_1 I_1 = 0$$

۶-۳-۲- **قاعده نقطه‌گذاری:** مشکل روش قبل این است که برای مشخص کردن تأثیر متقابل دو سیم‌پیچ بر یکدیگر، نیاز به رسم دقیق سیم‌پیچها با جهت پیچش آنها بوده که معمولاً این سیم‌پیچها روی هسته مغناطیسی قرار می‌گیرند. در درس مدارهای الکتریکی

مثال ۱۰- در مدار شکل ۶-۱۸، جریان $i_2(t)$ را در حوزه زمان به دست آورید؟



شکل ۶-۱۸- مدار مورد نظر مثال ۱۰

حل: با توجه به جهت در نظر گرفته شده برای جریانهای $i_1(t)$ و $i_2(t)$ علامت M منفی

بوده و داریم:

$$M = -k \times \sqrt{L_1 \cdot L_2} = -0.5 \times \sqrt{16 \times 4} = -4 \mu H$$

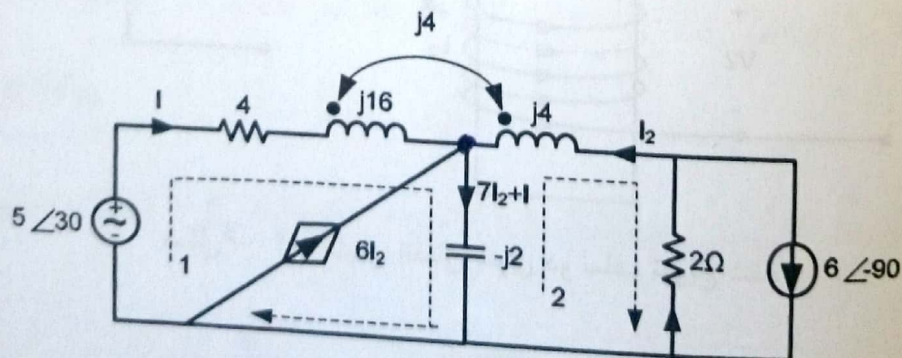
$$X_1 = jL_1\omega = j16 \times 10^{-6} \times 10^6 = j16 \Omega$$

$$X_2 = jL_2\omega = j4 \times 10^{-6} \times 10^6 = j4 \Omega$$

$$X_C = \frac{-j}{C\omega} = \frac{-j}{0.5 \times 10^{-6} \times 10^6} = -j2 \Omega$$

$$X_M = jM\omega = j \times (-4 \times 10^{-6}) \times 10^6 = -j4 \Omega$$

بنابراین مدار در حوزه فازوری به شکل ۶-۱۹ خواهد بود.



شکل ۶-۱۹- مدار مورد نظر مثال ۱۰ در حوزه فازوری

$$KVL1: -5\angle 30^\circ + 4I + j16I - j4I_2 - j2(7I_2 + I) = 0 \Rightarrow (4 + j14)I - j18I_2 = 5\angle 30^\circ$$

$$KVL2: j2(7I_2 + I) - j4I_2 + j4I - 2(I_2 + 6\angle -90^\circ) = 0 \Rightarrow j6I + (-2 + j10)I_2 = 12\angle -90^\circ$$

از دستگاه دومعادله و دو مجهول فوق داریم:

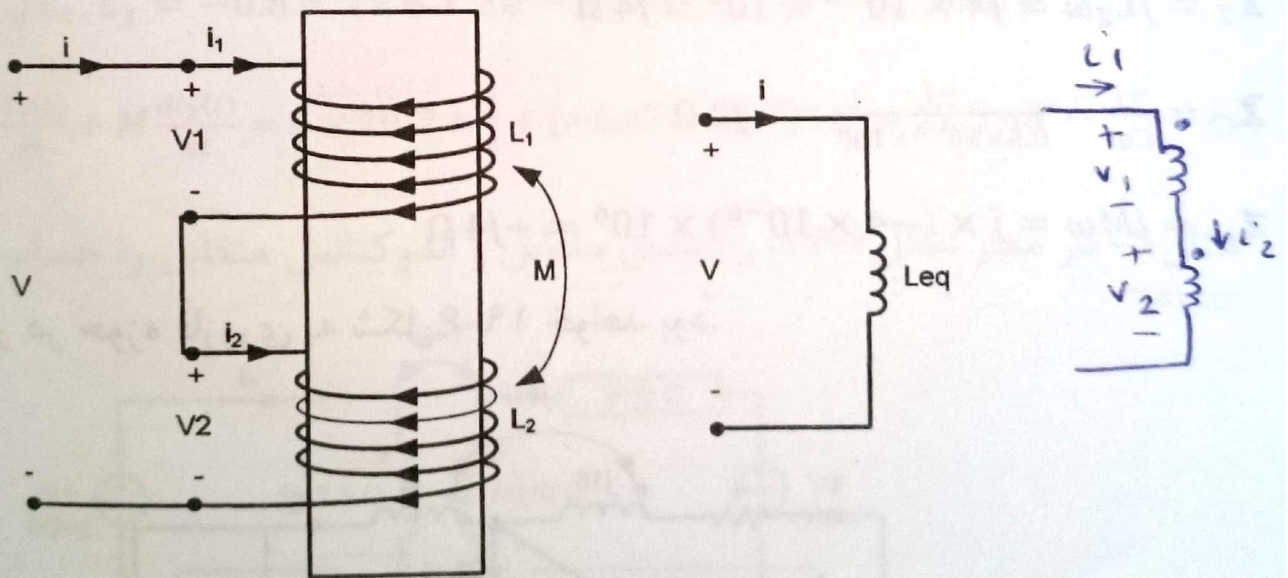
$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 4+j14 & -j18 \\ j6 & -2+j10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5\angle 30 \\ 12\angle -90 \end{bmatrix} \Rightarrow I_2 = \frac{\begin{bmatrix} 4+j14 & 5\angle 30 \\ j6 & 12\angle -90 \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} 4+j14 & -j18 \\ j6 & -2+j10 \end{bmatrix}} =$$

$$\frac{(4+j14) \times 12\angle -90^\circ - j6 \times 5\angle 30^\circ}{(4+j14) \times (-2+j10) + j6 \times j18} = \frac{-j48 + 168 - j25.9 + 15}{-8 + j40 - j28 - 140 - 108} = \frac{183 - j73.9}{-256 + j12} = \frac{197.36\angle -22^\circ}{256.28\angle -92.68^\circ} = 0.8\angle -71^\circ$$

$$\Rightarrow I_2 = 0.8\angle -71^\circ \Rightarrow i_2(t) = 0.8\cos(10^6 t - 71^\circ)$$

۵-۶- اتصال سری دو سلف تزویج شده

در این قسمت می‌خواهیم سلف معادل اتصال سری دو سلف تزویج شده را بدست آوریم. به این منظور مدار شکل ۶-۲۰ را که شامل دو سلف سری تزویج شده است در نظر بگیرید. برای هر کدام از سلفها با توجه به جهت قراردادی یک ولتاژ و جریان در نظر می‌گیریم. با توجه به شکل ۶-۲۰ داریم:



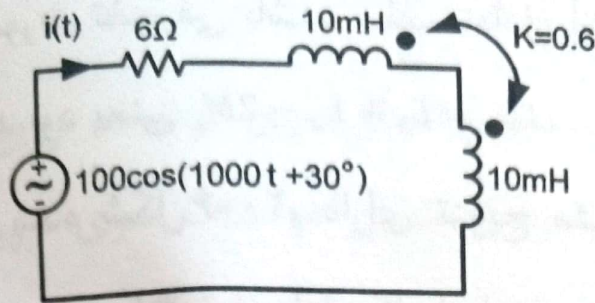
شکل ۶-۲۰- نمایش اتصال سری دو سلف تزویج شده

$$KCL: i = i_1 = i_2$$

$$KVL: V = V_1 + V_2$$

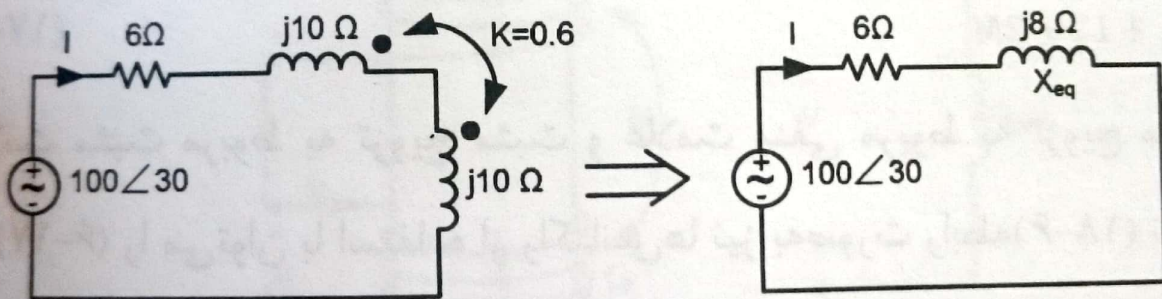
$$V_1 = jL_1\omega I_1 + jM\omega I_2 = jL_1\omega I + jM\omega I = j(L_1 + M)\omega I$$

مثال ۱۲- در مدار شکل ۶-۲۲، معادله زمانی $i(t)$ را به کمک آنالیز فازوری بیابید؟



شکل ۶-۲۲- مدار مورد نظر مثال ۱۲

حل: ابتدا مدار را مطابق شکل ۶-۲۳ به حوزه فازوری منتقل نموده و سپس با توجه به این که تزویج منفی است مسئله را حل می کنیم:



سحل ۶-۱۱- مدار مورد نظر مثال ۱۱ در حوزه فازوری

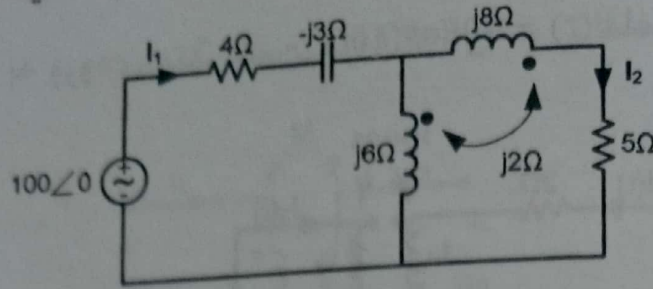
$$|X_M| = k \times \sqrt{X_1 \cdot X_2} = 0.6 \times \sqrt{10 \times 10} = 6 \Omega$$

$$X_{eq} = X_1 + X_2 - 2X_M = 10 + 10 - 12 = 8 \Omega$$

$$KVL: -100\angle 30^\circ + 6I + j8I = 0 \Rightarrow (6 + j8)I = 100\angle 30^\circ \Rightarrow I = \frac{100\angle 30^\circ}{6 + j8} = \frac{100\angle 30^\circ}{10\angle 53^\circ}$$

$$\Rightarrow I = 10\angle -23^\circ \Rightarrow i(t) = 10\cos(1000t - 23^\circ)$$

مثال ۱۸- اندازه فازور جریان I_2 را در مدار شکل ۶-۳۰ محاسبه کنید؟



شکل ۶-۳۰- مدار مورد نظر مثال ۱۸

حل: معادله KVL را در حلقه های سمت چپ و راست با در نظر گرفتن اثر تزویج

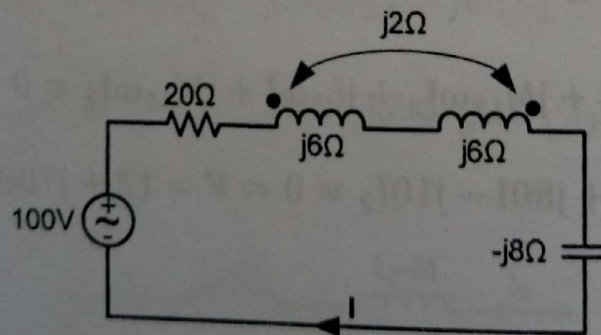
می نویسیم:

$$\begin{cases} KVL_1: -100\angle 0^\circ + 4I_1 - j3I_1 + j6(I_1 - I_2) - j2I_2 = 0 \\ KVL_2: -j6(I_1 - I_2) + j2I_2 + j8I_2 - j2(I_1 - I_2) + 5I_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} (4 + j3)I_1 - j8I_2 = 100\angle 0^\circ \\ -j8I_1 + (5 + j18)I_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow I_2 = \frac{\begin{vmatrix} 4+j3 & 100 \\ -j8 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 4+j3 & -j8 \\ -j8 & 5+j18 \end{vmatrix}} = \frac{j800}{30+j87} \Rightarrow |I_2| = \frac{|j800|}{|30+j87|} = \frac{800}{92} = 8.7 \text{ A}$$

مثال ۱۹- جریان I در مدار شکل ۶-۳۱ چند آمپر است؟ (کنکور سراسری ۹۲ کارشناسی)



شکل ۶-۳۱- مدار مورد نظر مثال ۱۹

الف- ۲/۵ آمپر

ب- ۳ آمپر

ج- ۴/۵ آمپر

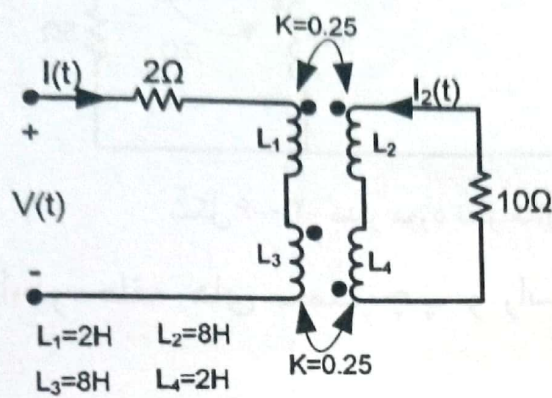
د- ۵ آمپر

$$Z = 20 + j6 + j6 - 2 \times j2 - j8 = 20 \Omega$$

حل:

$$I = \frac{V}{Z} = \frac{100\angle 0^\circ}{20} = 5\angle 0^\circ \text{ A} \Rightarrow \text{بنابر این گزینه د درست است}$$

مثال ۲۰- در مدار شکل ۳۲-۶ و در فرکانس $\omega = 10 \text{ rad/sec}$ اولاً امپدانس ورودی مدار را پیدا کنید. ثانیاً اگر به ورودی مدار منبع $v(t) = 10 \cos(10t)$ اعمال شود جریان ورودی $i(t)$ را بیابید.



شکل ۳۲-۶- مدار مورد نظر مثال ۲۰

حل: با توجه به جهت نشان داده شده برای جریان سلفها در شکل ۳۲-۶، فلوهای دو سیم پیچ L_1 و L_2 همدیگر را تقویت و فلوهای دو سیم پیچ L_3 و L_4 همدیگر را تضعیف می کنند و داریم:

$$M_{12} = +k\sqrt{L_1 \cdot L_2} = +0.25 \times \sqrt{2 \times 8} = +1H$$

$$M_{34} = -k\sqrt{L_3 \cdot L_4} = -0.25 \times \sqrt{8 \times 2} = -1H$$

اولاً: اگر یک KVL در ورودی مدار فوق در حوزه فازوری بنویسیم داریم:

$$KVL_1: -V + 2I + jL_1\omega I + jM_{12}\omega I_2 + jL_3\omega I + jM_{34}\omega I_2 = 0 \Rightarrow$$

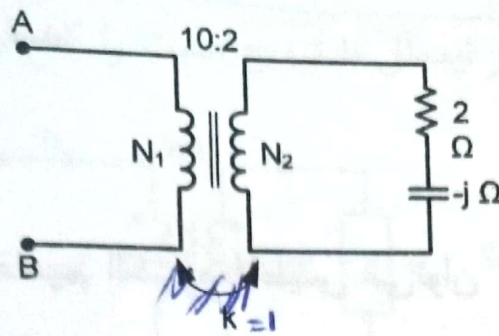
$$-V + 2I + j20I + j10I_2 + j80I - j10I_2 = 0 \Rightarrow V = (2 + j100)I \Rightarrow$$

$$Z_{in} = \frac{V}{I} = 2 + j100$$

ثانیاً: اگر یک KVL در ورودی بنویسیم داریم:

$$I = \frac{V}{Z_{in}} = \frac{10\angle 0^\circ}{2 + j100} = \frac{10\angle 0^\circ}{100\angle 88.9^\circ} = 0.02\angle -88.9^\circ \Rightarrow i(t) = 0.02\cos(10t - 88.9^\circ)$$

مثال ۲۴ - در مدار شکل ۶-۴۸، امپدانس دیده شده از دو سر A و B را بدست آورید؟

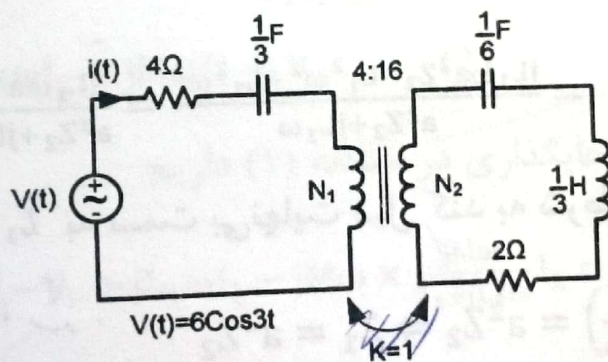


شکل ۶-۴۸- مدار مورد نظر مثال ۲۴

حل:

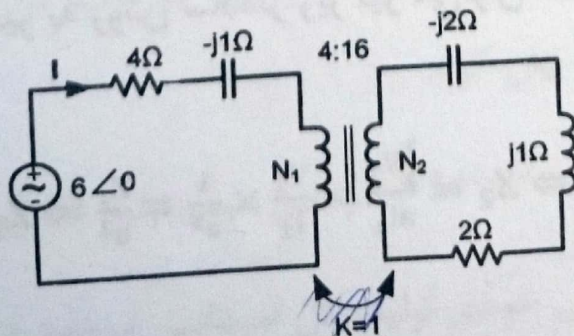
$$Z_1 = a^2 Z_2 = \left(\frac{10}{2}\right)^2 \times (2 - j1) = (50 - j25) \Omega$$

مثال ۲۵ - جریان $i(t)$ در مدار شکل ۶-۴۹ را بیابید؟



شکل ۶-۴۹- مدار مورد نظر مثال ۲۵

حل: اگر مدار را به حوزه فرکانس منتقل کنیم، مطابق شکل ۶-۵۰ داریم:



شکل ۶-۵۰- مدار مورد نظر مثال ۲۵ در حوزه فازوری

$$Z_{in} = Z_1 = (4 - j1) + \left(\frac{4}{16}\right)^2 \times (2 - j1) = 4.25 \angle -14.4^\circ \Omega$$

$$I = \frac{V}{Z_2} = \frac{6 \angle 0^\circ}{4.25 \angle -14.4^\circ} = 1.4 \angle 14.4^\circ \Rightarrow i(t) = 1.4 \cos(3t + 14.4^\circ)$$

تذکر: همانگونه که قبلاً توضیح داده شد، در انتقال اندوکتانس یک سلف از ثانویه به اولیه

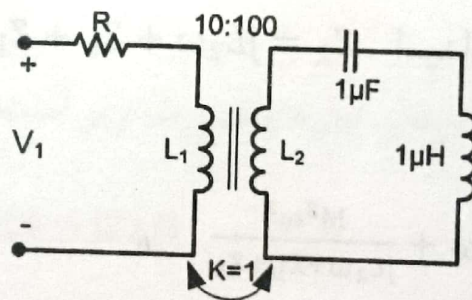
از رابطه $L_1 = a^2 \cdot L_2$ استفاده می‌کنیم. به سادگی می‌توان ثابت نمود که رابطه انتقال

ظرفیت یک خازن از ثانویه به اولیه به صورت رابطه (۳۲-۶) است:

$$C_1 = C_2 \left(\frac{N_2}{N_1}\right)^2 = \frac{1}{a^2} C_2 \quad (۳۲-۶)$$

مثال ۲۶- مقادیر ظرفیت خازن و اندوکتانس سلف مدار شکل ۶-۵۱ را از دیدگاه اولیه

بیابید؟



شکل ۶-۵۱- مدار مورد نظر مثال ۲۶

حل:

$$\text{خازن دیده شده از اولیه} = C_1 = C_2 \left(\frac{N_2}{N_1}\right)^2 = 1 \times \left(\frac{100}{10}\right)^2 = 100 \mu F$$

$$\text{سلف دیده شده از اولیه} = L_1 = L_2 \left(\frac{N_1}{N_2}\right)^2 = 1 \times \left(\frac{10}{100}\right)^2 = 0.01 \mu H$$

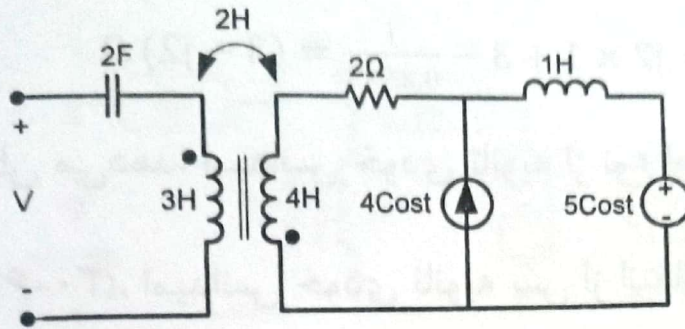
تذکر: چنانکه در رابطه (۲۹-۶) دیدیم در انتقال یک امپدانس از ثانویه به اولیه (یا

بالعکس)، جهت پیچش سیم‌پیچها (علامت M) تأثیری ندارد چرا که در این رابطه از

مجذور (توان دوم) M استفاده می‌شود.

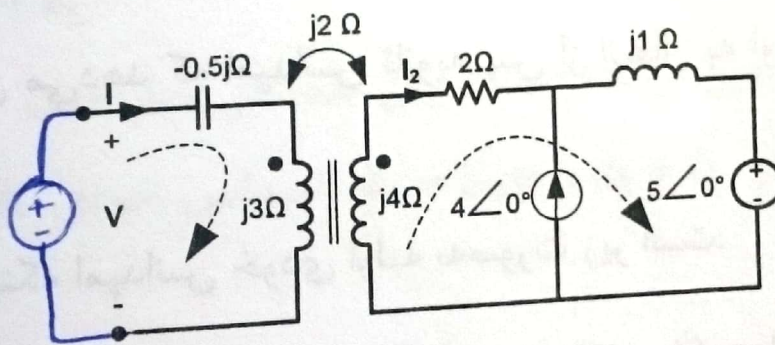
مثال ۲۸- در مدار شکل ۶-۵۴، ولتاژ تولید شده در اولیه را که در اثر منابع موجود در

ثانویه ایجاد می شود بدست آورید؟



شکل ۶-۵۴- مدار مورد نظر مثال ۲۸

حل: اگر مدار فوق را در حوزه فازوری ترسیم کنیم، مدار شکل ۶-۵۵ حاصل می شود:



شکل ۶-۵۵- مدار مورد نظر مثال ۲۸ در حوزه فازوری

$$\left\{ \begin{array}{l} KVL_1: -V - j0.5I + j3I - j2I_2 = 0 \\ KVL_2: j4I_2 - j2I + 2I_2 + j1(I_2 + 4\angle 0^\circ) + 5\angle 0^\circ = 0 \end{array} \right. \Rightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{l} I_2 = \frac{-V + j2.5I}{j2} \\ (j5 + 2)I_2 - j2I + 4\angle 90^\circ + 5\angle 0^\circ = 0 \end{array} \right.$$

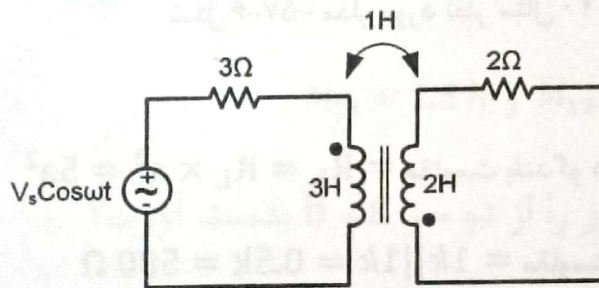
$$\Rightarrow (j5 + 2) \times \frac{-V + j2.5I}{j2} - j2I + 5 + j4 = 0 \Rightarrow$$

$$(-2.5 + j)V + (2.5 + j4.25)I + 5 + j4 = 0 \Rightarrow V = \frac{-5 - j4}{-2.5 + j} - \frac{2.5 + j4.25}{-2.5 + j} I \Rightarrow$$

$$V = \frac{8.5 + j15}{7.25} - \frac{-2 - j13.125}{7.25} I \Rightarrow V = (1.17 + j2.07) + (0.276 + j1.81)I$$

رابطه اخیر نشان می دهد که ولتاژ تولید شده در اولیه شامل دو مؤلفه است. مؤلفه اول به صورت $(1.17 + j2.07)$ است که مربوط به ولتاژ تولید شده در اولیه بر اثر منابع موجود در ثانویه است و مؤلفه دوم که به صورت $(0.276 + j1.81)I$ است مربوط به مجموع امپدانسهای اولیه و ثانویه از دیدگاه اولیه است. بنابراین اثر منبع جریان و منبع ولتاژ موجود در ثانویه به صورت ولتاژی و با جمله $(1.17 + j2.07)$ در اولیه ظاهر می گردد.

مثال ۲۹- آیا در مدار شکل ۶-۵۶، امکان برقراری تشدید وجود دارد؟ اگر پاسخ مثبت است فرکانس تشدید مدار را بدست آورید؟



شکل ۶-۵۶- مدار مورد نظر مثال ۲۹

حل: امپدانس خودی مدار ثانویه سلفی است که در انتقال به اولیه خازنی خواهد شد.

بنابراین امکان وقوع تشدید وجود دارد. با توجه به رابطه (۶-۳۰) داریم:

$$Z_{in} = Z_1 + \frac{M^2 \omega^2}{Z_2} = (3 + j3\omega) + \frac{1^2 \times \omega^2}{2 + j2\omega} = (3 + j3\omega) + \frac{\omega^2 \times (2 - j2\omega)}{(2 + j2\omega) \times (2 - j2\omega)} \Rightarrow$$

$$Z_{in} = (3 + j3\omega) + \frac{2\omega^2}{(4 + 4\omega^2)} + \frac{-j2\omega^3}{(4 + 4\omega^2)}$$

برای آنکه در مدار فوق تشدید حاصل شود لازم است بخش موهومی امپدانس ورودی

مدار برابر صفر شود لذا داریم:

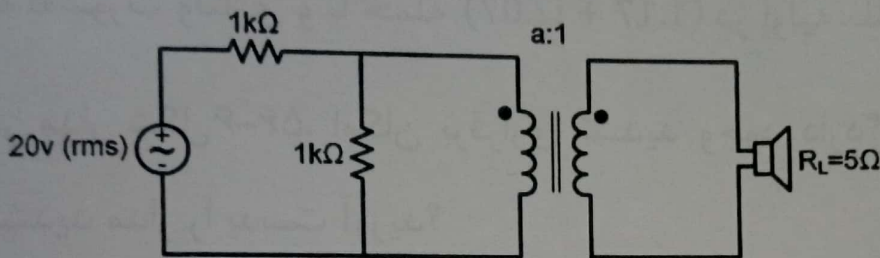
$$\text{Im}(Z_{in}) = 0 \Rightarrow 3\omega - \frac{2\omega^3}{(4 + 4\omega^2)} = 0 \Rightarrow 3 = \frac{2\omega^2}{(4 + 4\omega^2)} \Rightarrow 12 + 12\omega^2 = 2\omega^2 \Rightarrow$$

$$10\omega^2 = -12 \Rightarrow \omega = \pm j\sqrt{1.2} \text{ rad/sec} ; \omega = 0$$

لا حقیقی و مثبت نیست پس در این تشدید مدار

تذکره: یکی از کاربردهای مهم ترانسفورماتور با کوپلاژ مغناطیسی ایده‌آل، در تطبیق امپدانس است که در مدارهای الکترونیکی کاربرد زیادی دارد.

مثال ۳۰ - در مدار شکل ۶-۵۷، نسبت تبدیل a را چنان تعیین کنید که بیشترین توان ممکن به بلندگوی 5Ω اهمی ثانویه برسد؟



شکل ۶-۵۷- مدار مورد نظر مثال ۳۰

حل:

$$R_L = 5 \Omega \Rightarrow \text{مقاومت بلندگو در انتقال به اولیه} = R'_L = R_L \times a^2 = 5a^2$$

$$\text{مقاومت معادل تونن ازدوسر } R'_L \text{ در اولیه} = 1k || 1k = 0.5k = 500 \Omega$$

جهت انتقال توان ماکزیمم به بلندگو لازم است مقاومت بلندگو در سمت اولیه برابر مقاومت تونن فوق باشد لذا:

$$R'_L = R_{th} \Rightarrow 5a^2 = 500 \Rightarrow a = 10$$

تذکره: همانگونه که ملاحظه شد، تحلیل مدارهای شامل سلفهای تزویج شده بسیار مشابه تحلیل مدارهای دائمی سینوسی در حوزه فازور است. فقط کافی است به این نکته توجه کنیم که ولتاژ و جریان هر شاخه تزویج، به ولتاژ و جریان سایر شاخه های تزویج وابسته است که با در نظر گرفتن تزویج مثبت یا منفی به راحتی می توان تحلیل را انجام داد.