

بِسْمِ اللّٰهِ الرَّحْمٰنِ الرَّحِیْمِ

ریاضیات تکمیلی

ویژه مدارس استعدادی درخشان

پایه نهم، دوره اول متوسط



مرکز تحقیق و پژوهش استعدادهای درخشان
دانش پژوهان جوان



مرکز ملی پژوهش و توسعه استعدادهای درخشان
دانش پژوهان جوان

این کتاب، به منظور فراهم کردن مواد آموزشی تکمیلی مورد نیاز مدارس استعدادهای درخشان، توسط مرکز ملی پژوهش استعدادهای درخشان و دانش پژوهان جوان و دفتر تألیف کتاب‌های درسی ابتدایی و متوسطه نظری طراحی و تألیف شده است.

شورای راهبری: محمود امانی طهرانی، محمد نستوه، کورش امیری‌نیا، سیده‌طاهره آقامیری، رضا گلشن مهرجردی، عباسعلی مظفری و ناصر جعفری

نام کتاب: ریاضیات تکمیلی ویژه مدارس استعدادهای درخشان
پایه هفتم دوره اول متوسطه - ۱۰۳/۱

مؤلفان: محمد حسین احمدی، نرگس اخلاقی‌نیا، عبدالرضا زارع شحنه، علی قصاب و سعید صدری

نظارت: گروه تحقیق، توسعه و آموزش ریاضی دفتر تألیف کتاب‌های درسی ابتدایی و متوسطه نظری

ویراستار علمی: عاطفه کشاورزی زفرقندی

ویراستار ادبی: سیدعلی اکبر میرجعفری

نظارت بر چاپ و توزیع: اداره کل نظارت بر نشر و توزیع مواد آموزشی

طراح گرافیک، طراح جلد و صفحه‌آرا: حامد مشفق آرانی

ناشر: اداره کل نظارت بر نشر و توزیع مواد آموزشی
تهران: خیابان ایرانشهر شمالی - ساختمان شماره ۴ آموزش و پرورش (شهید موسوی)
تلفن: ۹-۸۸۸۳۱۱۶۱ دورنگار: ۸۸۳۰۹۲۶۶ کد پستی: ۱۵۸۴۷۴۷۳۵۹

وبسایت: www.chap.sch.ir

چاپخانه: شرکت افست (سهامی عام)

سال انتشار و نوبت چاپ: چاپ اول، ۱۳۹۳

حق چاپ محفوظ است.



بنیان‌گذار کبیر جمهوری اسلامی، حضرت امام خمینی (رحمة الله علیه)

ما در شرایط جنگ و محاصره توانسته‌ایم آن همه هنرآفرینی و اختراعات و پیشرفت‌ها داشته باشیم. ان شاء الله در شرایط بهتر، زمینه کافی برای رشد استعداد و تحقیقات را در همه امور فراهم می‌سازیم. مبارزه علمی برای جوانان زنده کردن روح جستجو و کشف واقعیت‌ها و حقیقت‌هاست.

رهبر معظم انقلاب اسلامی، حضرت آیت‌الله خامنه‌ای (مد ظله العالی)

عدالت به معنای این نیست که ما با همه استعدادها با یک شیوه برخورد کنیم. نه؛ استعدادها بالأخره متفاوت است. نباید بگذاریم استعدادی ضایع بشود و برای پرورش استعدادها باید تدبیری بیندیشیم. در این تردیدی نیست. اما ملاک باید استعدادها باشد، لاغیر. عدالت این است.

این صفحه خالی است!

به نام خداوند جان آفرین

پیشگفتار

ریاضیات (که در زبان پارسی قدیم «انگارش» خوانده می شد) را بیشتر دانش بررسی کمیت‌ها، ساختارها، فضا و دگرگونی تعریف می‌کنند.

دیدگاه دیگری ریاضی را دانشی می‌داند که در آن با استدلال منطقی از اصول و تعریف‌ها به نتایج دقیق و جدیدی می‌رسیم. با اینکه ریاضیات از علوم طبیعی به شمار نمی‌رود ولی ساختارهای ویژه‌ای که ریاضی‌دانان می‌پژوهند، بیشتر از دانش‌های طبیعی به ویژه فیزیک سرچشمه می‌گیرند و در فضایی جدا از طبیعت و محض‌گونه گسترش پیدا می‌کنند به طوری که علوم طبیعی برای حل مسائل خود به ریاضی باز می‌گردند تا جواب‌هایشان را با آن مقایسه و بررسی کنند.

علوم طبیعی، مهندسی، اقتصاد و پزشکی بسیار به ریاضیات تکیه دارد ولی ریاضی‌دانان گاه به دلایل صرفاً ریاضی (و نه کاربردی) به تعریف و بررسی برخی ساختارها می‌پردازند.^۱

این کتاب که در جهت اجرای بخشی از سند تحول بنیادین آموزش و پرورش و ویژه دانش‌آموزان مستعد و تیزهوش ایرانی نگاشته شده است، به تعمیق بخش‌هایی از کتاب درسی ریاضی پایه هفتم می‌پردازد. این کتاب حاصل فرایندی مطالعاتی با بیش از پنج سال است؛ با این همه تیزبینی صاحب‌نظران هنگام تدریس در نقد منصفانه این کتاب بسیار ضروری است؛ زیرا بی‌نقصی این کتاب هیچ‌گاه در تصور نبوده است.

فصل‌های کتاب متناظر فصل‌های کتاب درسی ریاضی است و مشخصاً دبیر ریاضی مجرب درخواهد یافت که تدریس هر بخش را چه زمانی آغاز کند. با این همه کلید واژه‌های بخش‌های کتاب به صورت فهرست‌وار بدین شرح است.



تمرین‌ها: تمرین‌های این کتاب با پیش‌فرض استعداد برتر و نیاز مخاطبان نگاشته شده است. یک معلم خلاق می‌تواند مخاطبان خود را هنگام تدریس با بخشی از تمرین‌ها به چالش مفهومی بکشانند. تفکر درباره همه تمرین‌ها در سال آموزشی لازم تلقی می‌شود، و این موضوع شاید در تضاد با معرفی کتاب‌های دیگر باشد. خلاقیت خود را با تدریس «این کتاب» به تصویر بکشید.

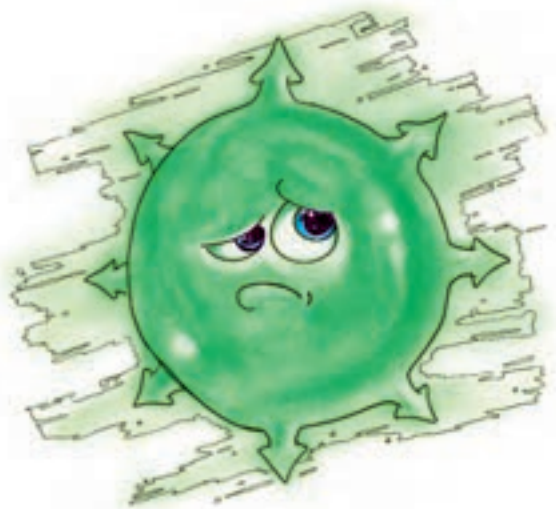
کارگاه بازی: دیر زمانی است که مقوله کارگاه بازی در فرایند تدریس نقش آفرینی می‌کند و

^۱ برگرفته از ویکی‌پدیا، دانش‌نامه آزاد

کتاب پیش رو نیز متناسب با موضوع، با کارگاه‌های آموزشی غنی شده است. توصیه می‌شود به اندازه یک یا دو جلسه زمان برای اجرای هر یک از آنها در نظر بگیرید؛ و مکانی را که می‌تواند فضایی به جز فضای مرسوم کلاسی باشد، به این کار اختصاص دهید.

گفت‌وگوها: تغییرات فرهنگ آموزشی نیز مد نظر قرار گرفته‌اند. برای تغییر نسل، باید نخست دیدگاه خود را تغییر مناسب داد. برای این منظور، بخشی به نام گفت‌وگو در این کتاب گشوده شده است، تا عیاری برای سنجش نظام تفکر تدریس معلمان در اختیار قرار داده شود. این گفت‌وگوها آیین‌های است برای نمود ساخت ارزش‌های رو به رشد، تا یک معلم ایستایی و پویایی خود را مشاهده کند.

نماد تمرین‌های ویژه: کنار برخی از مسائل کتاب نماد  آمده است. برای حل این مسائل دانش‌آموز باید نهایت دقت و تمرکز خود را به کار بگیرد تا دچار اشتباه نشود. برخی دیگر از مسائل کتاب با نماد  مشخص شده‌اند. این نماد برای اعلام نیاز زمان بیشتری برای تفکر است. معلم باید هنگام حل این مسائل زمان شایسته‌ای برای تفهیم روش حل و توصیف ایده‌ها و راهکارهای آن ارائه دهد؛ تا در طول یک سال آموزشی دانش‌آموزان منفعل، در کنار صدها مسئله مهارتی، با حل چند مسئله چالش برانگیز هم آشنا شوند.



هنر تدریس، هنر همیاری در کشف کردن است.

مارک ون دورن

فهرست مطالب

۱	فصل صفر- سرآغاز
۲	ترتیب چهار عمل اصلی در محاسبات
۴	کارگاه بازی- مثلث هم‌رنگ
۵	فصل ۱- راهبردهای حل مسئله
۶	گفت‌وگو
۹	مسئله‌ها
۱۹	فصل ۲- عددهای صحیح
۲۰	معرفی عددهای علامت‌دار
۲۲	جمع و تفریق اعداد صحیح
۲۶	کارگاه بازی- دوز با اعداد صحیح
۲۷	ضرب و تقسیم اعداد صحیح
۲۹	گفت‌وگو
۳۱	فصل ۳- جبر و معادله
۳۲	الگوهای عددی
۳۳	جانگهدار
۳۴	عبارت جبری
۳۷	مقدار عددی یک عبارت جبری
۳۸	معادله
۳۸	حل معادله
۴۰	تعداد جواب‌های یک معادله
۴۱	روش حل معادله
۴۳	تمرین‌های تکمیلی

۴۷	فصل ۴- هندسه و استدلال
۴۸	گفت‌وگو
۴۹	روابط بین پاره‌خط‌ها
۵۱	روابط بین زاویه‌ها
۵۵	تبدیل‌های هندسی و هم‌نهشتی
۵۹	فصل ۵- شمارنده‌ها و اعداد اول
۶۰	گفت‌وگو
۶۱	عدد اول
۶۳	کارگاه بازی- شمارنده و هُپ
۶۴	شمارنده
۶۶	مسابقهٔ تیراندازی
۶۷	شمارندهٔ اول
۶۹	بزرگ‌ترین شمارندهٔ مشترک
۷۰	کوچک‌ترین مضرب مشترک
۷۳	کارگاه بازی- نقطه بذار- شلیک کن!
۷۶	ارتباط ب.م.م و ک.م.م
۷۷	تمرین‌های تکمیلی
۸۱	فصل ۶- سطح و حجم
۸۲	ریاضیات سیب‌زمینی!
۸۳	مکعب
۸۶	چهار وجهی منتظم
۸۷	شهود فضایی
۸۹	محاسبهٔ حجم‌های منشوری
۹۱	مساحت جانبی و کل
۹۲	حجم و سطح
۹۶	کارگاه ساخت حجم- دوازده وجهی منتظم
۹۷	فصل ۷- توان و جذر
۹۸	تعریف توان
۱۰۰	محاسبهٔ یک عبارت توان‌دار
۱۰۱	ساده کردن عبارت‌های توان‌دار
۱۰۲	تمرین‌های تکمیلی
۱۰۵	جذر و ریشه

۱۰۷

فصل ۸- بردار و مختصات

۱۰۸

کارگاه بازی- نبرد دریایی

۱۱۱

دریچه‌ای به روبوکاپ

۱۱۴

مختصات و تبدیل‌های هندسی

۱۱۷

فصل ۹- آمار و احتمال

۱۱۸

جمع‌آوری و نمایش داده‌ها

۱۱۹

نمودارها و تفسیر نتیجه‌ها

۱۲۳

احتمال یا اندازه‌گیری شانس

۱۲۶

احتمال و تجربه

۱۲۹

کتاب‌نامه

این صفحه خالی است!

فصل صفر

سر آغاز

نام پرویز شهریاری با ریاضیات در ایران گره خورده است. او در تمام سال‌های زندگی‌اش در حال نوشتن ریاضیات و آموزش دانش‌آموزان و دانشجویان ایرانی بود. زمانی که منابع بسیار محدودی برای مطالعه ریاضیات در ایران وجود داشت، او کتاب‌های زیادی را به فارسی ترجمه کرد و بسیاری را با ریاضیات روز دنیا آشنا کرد و شاید سهم او در پیشرفت ریاضیات معاصر ایران کمتر از دانشگاه‌ها نباشد.

ترتیب چهار عمل اصلی در محاسبات

یک عبارت ریاضی، شامل اعداد و نمادهایی از جمله پرانتز و چهار عمل اصلی است. برای محاسبه عبارت‌های ریاضی، نمادها را به ترتیب زیر به کار می‌بریم.

۱. پرانتز ۲. ضرب یا تقسیم ۳. جمع یا تفریق

اگر در یک عبارت، دو نماد دارای ترتیب مساوی بودند (مثلاً ضرب یا تقسیم)، ابتدا نمادی را به کار می‌بریم که در سمت چپ قرار دارد. به مثال‌های زیر توجه کنید.

$$\bullet \quad 12 - \overbrace{6 \div 2}^3 = 12 - 3 = 9$$

$$\bullet \quad 7 - \underbrace{1 \times 2}_4 + 3 - 5 = \underbrace{7 - 2}_5 + 3 - 5 = \underbrace{5 + 3}_8 - 5 = 8 - 5 = 3$$

$$\bullet \quad 3 \times (13 + 7) \div (8 - 2) = 3 \times 20 \div 6 = 60 \div 6 = 10$$

۱. عبارت‌های برابر دو ستون را به هم وصل کنید (یک مورد اضافی است).

- | | |
|--|--------------------|
| $\bullet \quad 6 \div 2(1 + 2)$ | $\bullet \quad 19$ |
| $\bullet \quad 3(4 + 8) \div 3$ | $\bullet \quad 6$ |
| $\bullet \quad 12 \div 4 + 2(3 + 5)$ | $\bullet \quad 9$ |
| $\bullet \quad 4 + 2 \times 3 - 8 \div 4 \times 2$ | $\bullet \quad 1$ |
| | $\bullet \quad 12$ |

۲. حاصل عبارت‌های زیر را به دست آورید.

الف) $34 - 18 + 2$

ج) $12 - 8 \div 2 + 1$

ه) $7 + 9 \times (3 + 8)$

ز) $12 \times 6 \div 3 - 2 \times 4$

ط) $55 \div 11 + 7 \times (2 + 14)$

ک) $12 + 6 \div 3 \times (18 + 3 \times 2)$

ب) $8 \div 4 \div 2$

د) $10 - 4 \times 2 + 3$

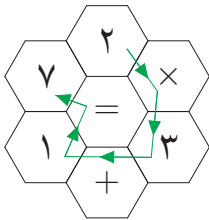
و) $63 \div (10 - 3) \times 3$

ح) $21 \div (3 + 4) \times 3 - 8$

ی) $27 \div (3 + 6) \times 5 - 12$

ل) $280 - 40 \times (12 - 10 \div 2)$

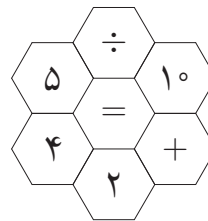
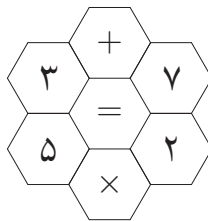
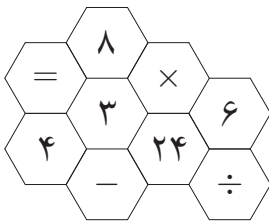
سر آغاز



۳. در شکل روبه‌رو، از عدد ۲ شروع به حرکت کرده‌ایم و در هر گام به یکی از خانه‌های همسایه رفته‌ایم. اگر به‌ترتیب ورود به هر خانه، عددها و عمل‌ها را پشت سرهم بنویسیم، یک رابطه‌ی تساوی به‌دست می‌آید:

$$2 \times 3 + 1 = 7.$$

الف) در هریک از شکل‌های زیر، مسیری بیابید تا یک رابطه‌ی تساوی به‌دست آید.



ب) در مثال بالا، مسیر آبی‌رنگ خاصیتی عجیبی دارد!

روی مسیر آبی‌رنگ اعداد و نمادها به‌ترتیب «۲»، «×»، «۳»، «+»، «۱»، «=»، «۷» هستند. اگر در جهت عکس مسیر آبی‌رنگ اعداد و نمادها را به‌ترتیب بنویسیم «۷»، «=»، «۱»، «+»، «۳»، «×»، «۲» و دوباره یک رابطه‌ی تساوی خواهیم داشت.

$$(7 = 1 + 3 \times 2)$$

آیا مسیرهایی که در شکل‌های بالا پیدا کرده‌اید، این خاصیت عجیب را دارند؟

۴. در زیر، عبارت $2 \times 3 + 1$ را طوری پرانتزگذاری کرده‌ایم که حاصل عبارت برابر ۸ شود.

$$2 \times (3 + 1) = 8$$

هریک از عبارت‌های زیر را طوری پرانتزگذاری کنید که تساوی برقرار شود.

الف) $28 \div 2 \times 3 + 1 = 4$

ب) $24 + 6 \div 3 + 2 = 6$

ج) $18 + 3 \times 25 \div 15 - 3 = 20$

د) $3 \times 40 \div 8 + 12 \div 6 = 1$

۵	×	۲	-	۶	=	۴
+		+		×		+
۲	×	۸	÷	۴	=	۴
-		÷		÷		÷
۳	+	۵	-	۶	=	۲
=		=		=		=
۴	×	۲	-	۴	=	۴

۵. جدول روبه‌رو را با اعداد قرمز رنگ طوری پر کرده‌ایم که در هر سطر و ستون تساوی‌ها برقرار باشند. معنای خانه‌های خاکستری رنگ این است که اعداد و نمادهای داخل این خانه‌ها در پرانتز قرار دارند. برای مثال، در ستون سوم (از سمت چپ)، رابطه این‌گونه است:

$$(2 + 8) \div 5 = 2.$$



با قانون گفته شده، هریک از جدول‌های زیر را با اعداد یک رقمی پر کنید.^۱

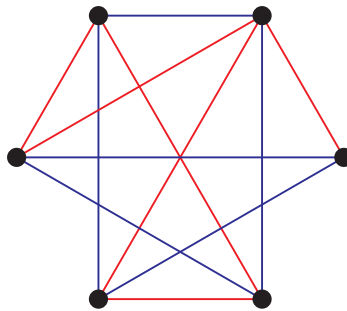
	÷		×		=	۶
+	■	-	■	×	■	+
	+		-	۴	=	
÷	■	+	■	-	■	÷
	×	۳	-		=	
=	■	=	■	=	■	=
	÷		+		=	

	×		-		=	۹
+	■	+	■	-	■	-
	-		×	۴	=	
-	■	-	■	×	■	×
	-	۵	+		=	
=	■	=	■	=	■	=
۱	×		÷		=	

کارگاه بازی - مثلث هم‌رنگ

شش نقطه روی یک صفحه قرار داده شده است. دو نفر با دو خودکار، با رنگ‌های آبی و قرمز بازی را شروع می‌کنند. نفر اول دو نقطه را انتخاب می‌کند و با یک پاره‌خط این دو نقطه را به هم وصل می‌کند. نفر دوم نیز، دو نقطه را انتخاب و به هم وصل می‌کند. هرکس که اولین مثلث هم‌رنگ را بسازد باخته است. مثلث هم‌رنگ مثالی است که سه ضلعش یک رنگ دارد و رأس‌های آن یکی از شش نقطه داده شده باشد.

برای مثال، در شکل زیر هنوز هیچ مثلث هم‌رنگی ساخته نشده است. آیا اگر نوبت آبی باشد، بازنده است؟ اگر نوبت قرمز باشد چطور؟



با یکی از دوستان یا اعضای خانواده این بازی را انجام دهید و سعی کنید روشی پیدا کنید که همیشه برنده باشید.

^۱P.J. Carter, *Advanced IQ tests*, Kogan page, London, 2008, page 8.

فصل ۱

راهبردهای حل مسئله



Save Water ... Save Life

کمبود آب از مهم‌ترین مشکلات حال ایران و جهان است. برخی این مسئله را یک بحران نامیده‌اند. برای حل این مسئله راهبردهای گوناگونی پیشنهاد شده است؛ اما این راهبردها تا به حال نتوانسته‌اند بحران کم‌آبی را برطرف کنند. آیا شما برای حل این مسئله راهبردی در نظر دارید؟

گفت‌وگو

- معلم ۱: واقعاً اینجا مدرسه تیزهوشان است؟!
 معلم ۲: اتفاقی افتاده است؟
 معلم ۱: خیلی از بچه‌ها باهوش هستند ولی با بچه‌هایی که ریاضی نمی‌فهمند، چه کنم؟
 معلم ۲: مدارا!
 معلم ۱: من اصلاً شوخی نمی‌کنم. می‌خواهم همه دانش‌آموزانم ریاضی‌دان شوند؟! نمی‌دانم می‌توانم از پس این کار برآیم یا نه؟
 معلم ۳: [درحالی که از جا برمی‌خاست و جمع را ترک می‌کرد] آقا مگر ما ریاضی‌دانیم که بتوانیم ریاضی‌دان تربیت کنیم؟! ریاضی‌دان خودش ساخته می‌شود. مثل گیاه وحشی! نهایت هنر ما پرورش گیاهان گل‌خانه‌ای است!
 معلم ۲: مشکل چیست؟ درس ریاضی را نمی‌فهمند؟
 معلم ۱: بعضی از دانش‌آموزان بلد نیستند مسئله‌ها را حل کنند. وقتی مسئله را می‌بینند، انگار هیپنوتیزم می‌شوند؛ زل می‌زنند و هیچ حرکتی نمی‌کنند!
 معلم ۲: به نظر شما چه کار باید بکنند؟
 معلم ۱: باید از روش‌های حل مسئله فصل اول استفاده کنند.
 معلم ۲: پس نظر شما این است که اگر فصل اول خوب درس داده شود، همه بچه‌ها می‌توانند به خوبی مسائل ریاضی را حل کنند.
 معلم ۱: بله. دقیقاً.
 معلم ۲: درست است که خیلی از مسئله‌ها با این روش‌ها حل می‌شوند؛ ولی اگر منظور شما این است که دانش‌آموز باید این روش‌ها را بیاموزد تا حداقل روش فکر کردن را یاد بگیرد، بنده با شما موافقم؛ نمی‌خواهم از بچه‌های تنبل کلاس دفاع کنم، ولی سؤالی دارم.
 معلم ۱: بفرمایید!

- معلم ۲: می‌دانید هدف از آموزش «روش حل مسئله» چیست؟
- معلم ۱: اینکه به بچه‌ها فکر کردن را آموزش دهیم.
- معلم ۲: این مطلب را فرموده بودید؛ بنده نیز قبول دارم؛ دیگر چه؟
- معلم ۱: اینکه دانش‌آموزان بیاموزند همهٔ مسائل را حل کنند.
- معلم ۲: در این موضوع با شما موافق نیستم!
- معلم ۱: چرا؟
- معلم ۲: نمی‌توان همهٔ روش‌های حل مسئله را یاد داد!
- معلم ۱: چرا؟ هر مسئله جواب دارد. جوابش را می‌توان یاد داد. البته اگر مخاطب عاقل باشد!
- معلم ۲: بله. اگر بتوان مسئله را حل کرد و مخاطب باهوش باشد، می‌توان گفت آن مسئله چگونه حل شده است؛ ولی آیا می‌توان روش‌هایی را معرفی کرد تا به کمک آنها همهٔ مسائل حل شوند؟
- معلم ۱: بله... به نظر بنده می‌توان این کار را انجام داد.
- معلم ۲: به نظر من نه! به نظر همهٔ ریاضی‌دان‌ها هم نه!
- معلم ۱: چرا؟ پس فصل اول کتاب درسی کلاً ناکارآمد است؟
- معلم ۲: اشتباه شما اینجاست که از این فصل استفاده نادرست می‌کنید. فصل اول روش فکر کردن به بعضی از مسائل را یاد می‌دهد؛ نه همهٔ مسائل را. این فصل برای دانش‌آموزان باهوش نیست. دانش‌آموز خیلی باهوش خودش می‌تواند روش حل مسئله را پیدا کند. این فصل برای دانش‌آموزان متوسط یا ضعیف نوشته شده است. آنها باید در حل مسائل از دانش‌آموزان باهوش‌تر تقلید کنند.
- معلم ۱: چرا آنها باید تقلید کنند؟
- معلم ۲: مثل خیلی از کارهای دیگر بشر. مثلاً وقتی کسی خوب فوتبال بازی می‌کند، بقیه از او تقلید می‌کنند تا بتوانند خوب فوتبال بازی کنند. وقتی کسی خوب حرف می‌زند، بقیه از او تقلید می‌کنند تا بتوانند خوب حرف بزنند. انسان‌ها علاقه‌مندند که از کارهای خوب دیگران، تقلید کنند. مانند آنها حرف بزنند، مانند آنها زندگی کنند و مانند آنها فکر کنند.

معلم ۱: این حرف شما را قبول دارم؛ اما شما یک اشتباه کوچک دارید. درست است که انسان‌های باهوش راه‌حل‌های جالب ریاضی را کشف کرده‌اند؛ اما الان بقیه انسان‌ها آموخته‌اند که با آن راه‌حل‌ها مسائل ریاضی را حل کنند. بنده هم به‌عنوان یک معلم ریاضی، وظیفه دارم آن روش‌ها را به دانش‌آموزانم یاد بدهم. وظیفه دارم که شاگردانم را ریاضی‌دان کنم.

معلم ۲: البته وظیفه یک معلم ریاضی، یاد دادن مفاهیم ریاضی و روش‌های حل مسائل ریاضی است؛ اما یک معلم نمی‌تواند همه روش‌های حل مسائل را یاد بدهد.

معلم ۱: منظور شما چیست؟ یک ماه زمان صرف می‌کنیم و همه روش‌ها را یاد می‌دهیم. اگر نشد، دو ماه. اگر نشد یک سال!

معلم ۲: نه، درست نیست! هیچ‌وقت نمی‌توانیم این کار را انجام دهیم. چون هیچ‌وقت همه روش‌های حل مسئله کشف نمی‌شوند. همیشه یک ریاضی‌دان جدید پیدا می‌شود که روش جدیدی را خلق می‌کند. روش‌های زیادی هستند که هنوز کشف نشده‌اند!

معلم ۱: از کجا می‌دانید؟

معلم ۲: از آنجایی که هنوز مسائل حل نشده زیادی در ریاضیات وجود دارد.

معلم ۱: واقعاً؟

معلم ۲: یعنی شما به‌عنوان یک معلم ریاضی که می‌خواهید ریاضی‌دان تربیت کنید، نمی‌دانید چه مسائل جالبی هنوز حل نشده‌اند؟! کافی است در اینترنت جست‌وجو کنید: «Unsolved problem in math».

معلم ۱: اینترنت؟!!!

هر مسئله، ضرب‌آهنگ خاص خودش را دارد،

درست مثل یک قطعه موسیقی.

هر وقت آن ضرب‌آهنگ را بگیری،

کلیت مفهوم آن مسئله را می‌فهمی.

یوکو اوگاوا، خدمتکار و پروفیسور، ترجمه کیهان بهمنی.

مسئله‌ها

۱. مسئله و راه‌حل زیر از کتاب «خلاقیت ریاضی»^۱ انتخاب شده است.

مسئله: دهفانی چند مرغ و چند خرگوش خانگی دارد. این مرغ‌ها و خرگوش‌ها روی هر، ۵۰ سر و ۱۴۰ پا دارند. این دهفان چند مرغ و چند خرگوش دارد؟



راه‌حل: دهفان، جانوران خود را مجبور می‌کند، در وضع غریبی قرار بگیرند: هر مرغ روی یک پا ایستاده است و هر خرگوش روی دویای عقبی خود. با این تصور غریب، درست نصف همه پاها، یعنی ۷۰ عدد، شرکت خواهند داشت. عدد ۷۰ را می‌توان به‌عنوان سرها در نظر گرفت، به‌شرطی که هر مرغ یک‌بار و هر خرگوش را دوبار به‌حساب بیاوریم. بنابراین، اگر از عدد ۷۰ تعداد کل مرغ‌ها و خرگوش‌ها، یعنی ۵۰ را کم کنیم، تعداد خرگوش‌ها به‌دست می‌آید؛ یعنی تعداد خرگوش‌ها، برابر است با:

$$70 - 50 = 20$$

و البته، ۳۰ مرغ.

بعد از خواندن راه‌حل بالا، سعی کنید راه‌حل دیگری برای این مسئله ارائه دهید.

۲. به چهار روش می‌توان عدد ۴ را به‌صورت مجموع اعداد طبیعی کوچک‌تر از آن نوشت:

$$4 = 1 + 1 + 1 + 1,$$

$$4 = 1 + 1 + 2,$$

$$4 = 1 + 3,$$

$$4 = 2 + 2.$$

هریک از اعداد ۳، ۵ و ۶ را به چند روش می‌توان به‌صورت مجموع اعداد طبیعی کوچک‌تر از خودشان نوشت؟ همه حالت‌های ممکن را بنویسید.

^۱ جرج پولیا، خلاقیت ریاضی، ترجمه پرویز شهریاری، انتشارات فاطمی، صفحه ۶۰.

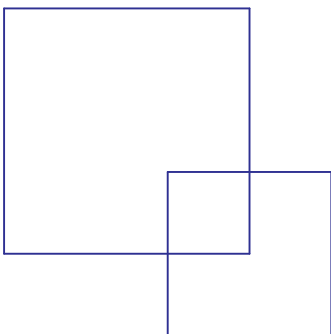
۳. قانون الگوی زیر را کشف کنید.

۱, ۱۱, ۲۱, ۱۲۱۱, ۱۱۱۲۲۱, ۳۱۲۲۱۱, ۱۳۱۱۲۲۲۱, ...



اگر موفق به کشف این قانون نشدید، نگران نشوید! ریاضی‌دان معروف انگلیسی معاصر (تصویر روبه‌رو)، به نام جان کانوی (John Conway)، وقتی برای اولین بار با این الگو برخورد کرد، بعد از ساعت‌ها تفکر نتوانست آن را حل کند؛ اما بعد از اینکه یکی از دوستانش قانون الگو را به او گفت، کانوی پی برد اطلاعات لازم برای کشف قانون الگو این است که: «یک نفر فقط بلد باشد تا عدد ۳ بشمارد!»

۴. با ۲ مربع، حداکثر ۳ مربع می‌توان ساخت. شکل زیر را ببینید.



با ۳ مربع، حداکثر چند مربع می‌توان ساخت؟ شکل مربوطه را رسم کنید.



۵. مسابقات سه‌گانه از سه بخش شنا، دوچرخه‌سواری و دو تشکیل شده است. در المپیک ورزشکاران این رشته، ابتدا $\frac{3}{4}$ مسیر را شنا می‌کنند. سپس $\frac{4}{5}$ باقی‌مانده راه را رکاب می‌زنند و بعد ۱۰ کیلومتر می‌دوند تا به خط پایان برسند. طول مسیر مسابقات سه‌گانه در المپیک چند کیلومتر است؟



۶. گلی شنبه شب $\frac{1}{4}$ کتاب قصه را برای عروسک‌هایش خواند. یکشنبه شب نیز $\frac{1}{4}$ از باقی‌مانده کتاب را خواند. و دوشنبه شب $\frac{1}{4}$ از باقی‌مانده کتاب را برای عروسک‌ها خواند. سه‌شنبه شب $\frac{1}{5}$ باقی‌مانده را خواند. گلی چه کسری از کتاب را برای عروسک‌هایش نخوانده است؟



۷. به الگوی زیر توجه کنید.



الف) شکل پنجم این الگو را رسم کنید.

ب) در شکل بیستم این الگو، چند دایره توپر وجود دارد؟

۸. به الگوی زیر توجه کنید.



الف) شکل پنجم این الگو را رسم کنید.

ب) در شکل بیستم این الگو، چند دایره توپر وجود دارد؟ این تعداد با عددی که در قسمت «ب» مسئله قبل به دست آوردید، چه رابطه‌ای دارد؟

ج) با توجه به شکل‌های بالا و شکل‌های مسئله قبل، حاصل عبارت زیر را به دست آورید.

$$1 + 2 + 3 + \dots + 51$$

۹. می‌دانیم که سن مونا برابر با تعداد شمع‌هایی است که در آخرین جشن تولدش روی کیک قرار داده است. اگر او مجموعاً به ۶۶ شمع روی کیک‌های تولدش فوت کرده باشد، اکنون چند سال سن دارد؟





۱۰. در هندوستان، رانندگان عاشق بوق زدن هستند! فرض کنید پشت چراغ قرمز، رسم بر این باشد که نفر اول ۱ بار بوق بزند. بعد نفر دوم هر چند بار که خواست بوق بزند. نفر سوم به تعداد مجموع بوق‌های نفر اول و دوم بوق بزند. نفر چهارم به تعداد مجموع بوق‌های نفر اول و دوم و سوم بوق بزند و نفر پنجم به تعداد مجموع بوق‌های چهار نفر قبلی بوق بزند و ...

(الف) اگر پشت یک چراغ، نفر دوم ۲ بار بوق بزند و ۵ نفر بعدی با قانون بالا بوق بزنند، نفر آخر چند بار بوق زده است؟

(ب) اگر پشت یک چراغ، نفر دوم ۶ بار بوق زده باشد و ۵۶ بار صدای بوق شنیده شده باشد، چند راننده بوق زده‌اند؟

(ج) ۶ نفر مجموعاً ۱۶ بار بوق زده‌اند. نفر دوم چند بار بوق زده است؟

۱۱. (الف) در جام جهانی ۲۰۱۴، ۳۲ تیم حاضر بودند. این تیم‌ها در مرحله اول به ۸ گروه ۴ تیم تقسیم شدند و در هر گروه هر تیم یک‌بازی با سه تیم دیگر انجام داد. در مرحله اول جام جهانی ۲۰۱۴، چند بازی انجام شد؟

(ب) در سال ۱۳۹۳، ۱۶ تیم در لیگ برتر فوتبال ایران (جام خلیج فارس) حاضرند. هر تیم باید دو بازی با تیم‌های دیگر انجام دهد. در این لیگ چند بازی انجام می‌شود؟

(ج) کشوری ۲۰ شهر دارد که میان هر دو شهر یک خط هوایی دایره‌ای است. چند خط هوایی در این کشور وجود دارد؟

(د) چه ارتباطی بین قسمت‌های «الف»، «ب» و «ج» وجود دارد؟



۱۲. در بازی «مثلث هم‌رنگ» که در فصل قبل با آن آشنا شدید،

(الف) اگر هر نقطه را به پنج نقطه دیگر وصل کنیم، چند پاره خط رسم کرده ایم؟

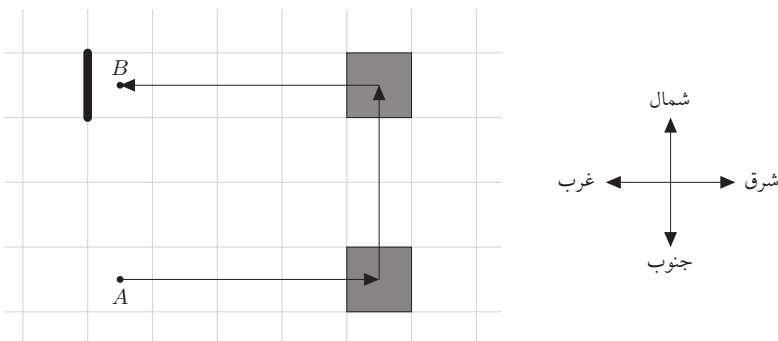
(ب) چرا همیشه یک نفر بازنده است؟ به عبارت دیگر چرا این بازی نمی‌تواند نتیجه مساوی داشته باشد؟



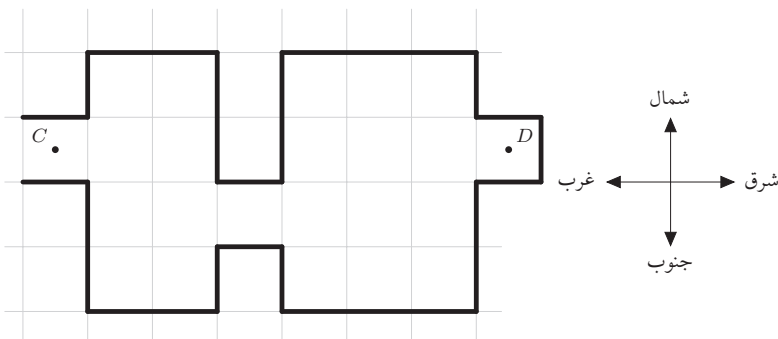
۱۳. تعدادی کبوتر و هشت‌پا روی هم 60° سر و 210° پا دارند. چند هشت‌پا داریم؟

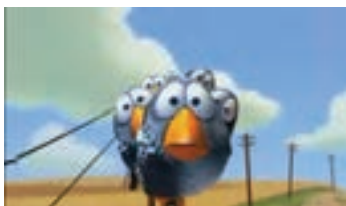


۱۴. روباتی داریم که فقط به سمت جلو حرکت می‌کند و هنگامی که به یک کاشی تیره می‌رسد، 90° به سمت چپ خودش می‌چرخد. برای مثال، اگر روبات را در زمینی به شکل زیر در نقطه A رو به سمت شرق بگذاریم، به نقطه B می‌رسد. چون در نقطه B به دیوار برخورد کرده است، دیگر نمی‌تواند جلو برود و متوقف می‌شود.



در زمینی به شکل زیر روبات را در نقطه C رو به سمت شرق گذاشته‌ایم. می‌خواهیم روبات به نقطه D برسد. کدام یک از کاشی‌ها را باید تیره کنیم؟





۱۵. ۲۴ پرنده روی دو کابل برق نشسته بودند. وقتی ۶ پرنده از کابل دوم به کابل اول و ۹ پرنده از کابل اول به کابل دوم پریدند، تعداد پرنده‌های کابل اول نصف پرنده‌های کابل دوم شد. در ابتدا چند پرنده روی کابل دوم نشسته بودند؟



۱۶. دهکده‌ای ۱۰۰ خانه دارد. روی هر ۳ خانه حداقل ۲ آنتن وجود دارد و روی هر ۲ آنتن حداقل ۳ کلاغ نشسته است. این دهکده حداقل چند کلاغ آنتن‌نشین دارد؟



۱۷. در یک مهد کودک تعدادی نیمکت وجود دارد. وقتی روی هر نیمکت یک نفر می‌نشینند، یک نفر مجبور است روی زمین بنشیند! اما اگر روی هر نیمکت ۲ نفر بنشینند، ۱ نیمکت خالی می‌ماند. این مهد کودک چند نیمکت دارد؟



۱۸. قیمت یک گلابی ۲۰۰ تومان، قیمت یک پرتقال ۳۰۰ تومان، و قیمت یک توت فرنگی ۴۰۰ تومان است. اگر ۸ عدد از این میوه‌ها را ۲۳۰۰ تومان خریده باشیم، بیشترین تعداد توت فرنگی که ممکن است خریده باشیم، چندتا است؟



۱۹. عاطفه تعدادی پسته داشت که نتوانست آنها را به طور مساوی بین ۶ نفر از دوستانش تقسیم کند. او سراغ بهمن آقا پسته‌چی رفت و ماجرا را برای او توضیح داد. بهمن آقا پسته‌چی گفت: «اگه ۸ تا پسته از من بخری مشکلات حل می‌شه.» هر پسته ۱۰۰ تومان بود، ولی عاطفه فقط ۳۰۰ تومان پول داشت. آیا می‌توانید به عاطفه کمک کنید؟

۲۰. می‌خواهیم چند دایره بکشیم که همدیگر را قطع نکنند. برای مثال، با کمک دو دایره فقط به دو شیوه می‌توانیم این کار را انجام دهیم. هر کدام از این دو راه، در شکل‌های زیر رسم شده است.

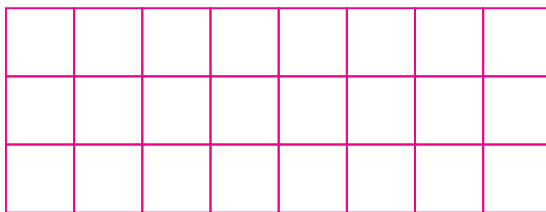


توجه کنید که دو حالت زیر با آنکه ظاهراً متفاوت‌اند، ولی آنها را یکی در نظر می‌گیریم.



اگر چهار دایره داشته باشیم، به چند شیوه گوناگون می‌توانیم آنها را رسم کنیم به گونه‌ای که همدیگر را قطع نکنند؟ همه حالت‌ها را رسم کنید.

۲۱. می‌خواهیم برخی از خانه‌های جدول زیر را رنگ کنیم به طوری که هر خانه یا خودش رنگ شده باشد یا همسایه‌اش رنگی باشد. حداقل چند خانه رنگی می‌شوند؟ آنها را رنگ کنید. (دو خانه همسایه‌اند هرگاه یک ضلع مشترک داشته باشند.)



۲۲. در جعبه‌ای ۱۰۰ مهره به رنگ‌های سفید، قرمز و آبی وجود دارد. در تاریکی، چند مهره از جعبه بیرون بیاوریم که در بین آنها حداقل ۱۰ مهره هم‌رنگ وجود داشته باشد؟

۲۳. نرگس تعداد زیادی مکعب مستطیل با ابعاد $1 \times 2 \times 3$ دارد. او می‌خواهد با چسباندن تعدادی از این مکعب مستطیل‌ها به هم، یک مکعب توپُر بسازد. کمترین تعداد مکعب مستطیل‌هایی که نیاز دارد، چندتا است؟

۲۴. در کنار جاده‌ای، تیرهای سیمانی به فاصله‌های برابر قرار دارند. حامد از تیر اول آغاز به حرکت کرد و بعد از ۶ دقیقه از کنار تیر ششم گذشت. اگر حامد با همین سرعت ادامه دهد، پس از چند دقیقه از کنار تیر بیست و ششم می‌گذرد؟



۲۵. مجله Notices که انجمن ریاضی آمریکا آن را چاپ می‌کند، در یکی از شماره‌هایش، یک الگوی عددی معروف را به عنوان تصویر روی جلد انتخاب کرده است.



الف) ابتدا الگوی عددی بالا را به دقت مشاهده و قانون آن را کشف کنید. سپس با توجه به قانون الگو، سه ستون به سمت چپ آن اضافه کنید.

ب) نام چه ریاضی‌دان‌هایی را روی این الگوی عددی گذاشته‌اند؟ برای یافتن پاسخ این پرسش، عبارت «مثلث عددی» را در گوگل جست‌وجو کنید.

۲۶. در الگوهای عددی زیر به جای علامت ؟ عددهای مناسب قرار دهید.

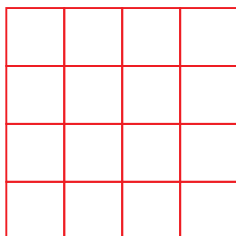
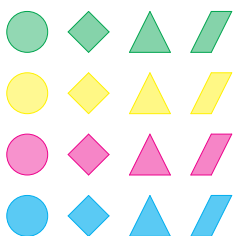
الف) ۱۹، ۲۰، ۲۱، ؟، ؟، ۲۶، ۲۸، ۳۲، ۳۳، ۴۰ ب) ۱۰، ۵۰، ۱۳، ۴۵، ۱۸، ۳۸، ؟، ؟

۲۷. حاصل عبارت زیر را به دست آورید.

$$\left(1 - \frac{1}{2}\right) \times \left(1 - \frac{1}{3}\right) \times \left(1 - \frac{1}{4}\right) \times \dots \times \left(1 - \frac{1}{99}\right) \times \left(1 - \frac{1}{100}\right)$$

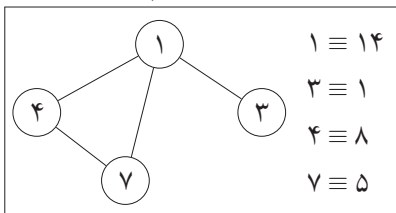
راهنمادهای حل مسئله

۲۸. شکل‌ها را طوری در جدول 4×4 زیر بچینید که در هر سطر و هر ستون، هر رنگ و هر شکل یک‌بار دیده شود.



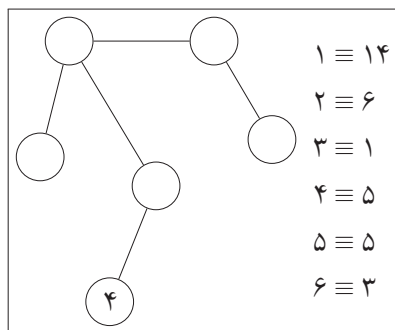
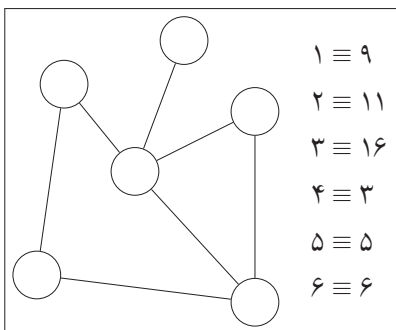
راهنمایی: عبارت «Orthogonal latin squares» را گوگل کنید.

۲۹. در کادر زیر، اعداد سمت چپ علامت \equiv را طوری داخل دایره‌ها قرار داده‌ایم که مجموع عددهایی که به هر دایره متصل‌اند، برابر عدد سمت راست علامت \equiv باشد.



برای مثال، عدد ۱ به عددهای ۴، ۷ و ۳ متصل است. پس $1 \equiv (4 + 7 + 3)$ یا $1 \equiv 14$ عدد ۳ فقط به ۱ وصل است. بنابراین $3 \equiv 1$ عدد ۴ به ۱ و ۷ وصل شده، پس $4 \equiv (1 + 7)$ یا $4 \equiv 8$ و ...

باتوجه به قانون گفته شده، دایره‌های خالی را با اعداد مناسب پر کنید.



۳۰. دستمزد سالانه یک بازیکن فوتبال در سال ۱۳۶۸ حدود سیصد هزار تومان بود. در سال ۱۳۹۲ هر فوتبالیست تقریباً یک میلیارد تومان درآمد سالانه داشته است. در این مدت دستمزد سالانه فوتبالیست‌ها چند درصد افزایش یافته است؟

خواندنی

الف، ب، ج، د. احتمالاً این ترتیب از حروف الفبا را دیده‌اید. آیا تا به حال پرسیده‌اید: این دیگر چه ترتیبی است؟

در میان شاعران ایرانی نوعی عدد نویسی بر اساس حرف‌های الفبا معمول است که به آن «حساب جمله‌ها» یا «ماده تاریخ» می‌گویند. در این شیوه، ترتیب حروف الفبا به شکل زیر است:

أبجد، هوز، حطی، کلیمن، سَعَفَص، قُرِشَت، ثَخَد، ضَطَّع.
البته هیچ یک از این کلمات معنای خاصی ندارند! رابطه حرف‌ها با اعداد به شکل زیر است:

الف	ب	ج	د	هـ	و	ز	ح	ط	ی	ک	ل	م	ن	س	ع
۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	۲۰	۳۰	۴۰	۵۰	۶۰	۷۰

هر عدد به حرفی که در بالای آن نوشته شده مربوط است. هریک از حروف دیگر به شکل زیر به یک عدد مربوط‌اند:

ف	س	ق	ر	ش	ت	ث	خ	ذ	ض	ظ	غ
۸۰	۹۰	۱۰۰	۲۰۰	۳۰۰	۴۰۰	۵۰۰	۶۰۰	۷۰۰	۸۰۰	۹۰۰	۱۰۰۰

با استفاده از اعداد و حروف بالا، می‌توان یک عدد را با یک جمله یا یک عبارت بیان کرد. برای مثال، حافظ، تاریخ کشته شدن شاه شیخ ابواسحاق شیرازی را در بیت:
بلبل و سرو و سمن و یاسمن و لاله و گل
هست تاریخ وفات شه مُشکین کاکُل
آورده است. با حساب جمله‌ها داریم:

$$\begin{aligned} \text{بلبل} &= ۶۴ & \text{سرو} &= ۲۶۶ & \text{سمن} &= ۱۵۰ \\ \text{یاسمن} &= ۱۶۱ & \text{لاله} &= ۶۶ & \text{گل} &= ۵۰ \end{aligned}$$

مجموع این اعداد برابر است با ۷۵۷ که سال کشته شدن ابواسحاق است.
مظفرالدین شاه قاجار (تصویر زیر) در سال ۱۳۲۴ هجری قمری با مشروطه موافقت کرد. این کار به «عدل مظفر» معروف شد. با حساب جمله‌ها «عدل مظفر» برابر با عدد ۱۳۲۴ است.



یک عبارت برای سال تولد خود بسازید.

فصل ۲

عدهای صحیح



مبدأ تاریخ در کشور ما هجرت رسول اکرم از مکه به مدینه است. در شکل بالا تاریخ برخی از رویدادهای مختلف را مشاهده می‌کنید. برخی از این واقعه‌ها پیش از هجرت و برخی دیگر پس از هجرت پیامبر روی داده‌اند. شما هم با جستجو می‌توانید نمودارهای مشابهی را پیدا کنید که تاریخ رویدادهای مختلف را به ترتیب وقوع نشان داده است.

معرفی عددهای علامت‌دار

۱. برگ وسط یک روزنامه را برداشته‌ایم. این برگ چهار صفحه دارد که شماره آنها ۲۳، ۲۴، ۲۵ و ۲۶ است. این روزنامه چند صفحه دارد؟
۲. از یک روزنامه فقط یک برگ آن در دست است که شماره صفحه‌های ۱۱، ۱۲، ۲۹ و ۳۰ روی آن دیده می‌شود.
الف) این روزنامه چند صفحه دارد؟
ب) صفحه‌های برگ وسط، چه شماره‌هایی دارند؟
۳. نصرت‌آقا نقاش روی پله وسط نردبانش ایستاده است. او سه پله بالا می‌رود و سپس هشت پله پایین می‌آید. بعد چهار پله بالا می‌رود. اکنون اگر نصرت‌آقا هفت پله بالا برود، روی آخرین پله نردبانش می‌ایستد. نردبان نصرت‌آقا چند پله دارد؟
۴. اگر روی ساعت ویندوز کلیک کنید و «Change date and time settings...» را انتخاب کنید، پنجره «Date and Time» ظاهر می‌شود. با انتخاب گزینه «Additional Clocks» می‌توانید اختلاف ساعت شهرهای مهم جهان را با ساعت مبدأ (گرینویچ) ببینید.



- برای پاسخ دادن به پرسش‌های زیر از رایانه خود کمک بگیرید.
- الف) تفاوت ساعت چه شهرهایی با گرینویچ ۳:۳۰' است؟
ب) در آمریکا چند ساعت رسمی وجود دارد؟

- ج) اگر یک تاجر فرش ایرانی بخواهد به ساعت ۱۰ صبح پاریس، با شریک تجاری‌اش با تلفن گفت‌وگو کند، چه ساعتی در ایران باید به او تلفن بزند؟
۵. الف) کدام یک از اعداد ۴۸- یا ۵۵-، به ۵۱- نزدیک‌تر است؟
 ب) کدام یک از اعداد ۳ یا ۳-، از قرینه ۱۰- کوچک‌تر است؟
 ج) درست یا نادرست؟
 پنج عدد صحیح بزرگ‌تر از ۵- وجود دارد.
۶. الف) روی محور اعداد صحیح، بین $1/2$ - و $11/6$ - چند عدد صحیح وجود دارد؟
 ب) روی محور اعداد صحیح، بین $12/9$ و $341/8$ - چند عدد حسابی و چند عدد صحیح وجود دارد؟
۷. متن زیر را از کتاب تاریخ ریاضیات^۱ انتخاب کرده‌ایم.

روایت می‌کنند، وقتی ارشمیدس (۲۸۷-۲۱۲ پیش از میلاد) به ریاضیات می‌پرداخت، حتی گرسنگی را از یاد می‌برد. در این باره، همیشه مستخدم به او یادآوری می‌کرد. برای نمونه، یک بار در وان حمام نشسته بود و بی‌توجه به زمان و مکان با رسم شکل‌های هندسی به کمک آب صابون، روی مسئله‌ای می‌اندیشید. ناگهان مستخدم آمد و همه شکل‌های هندسی را از بین برد.

الف) با توجه به متن بالا، سال تولد ارشمیدس چه سالی است؟

- ب) مریم میرزاخانی (تصویر زیر)، ریاضی‌دان ایرانی و برنده مدال فیلدز^۲ سال ۲۰۱۴ میلادی است. او در سیزدهم اردیبهشت ۱۳۵۶ هجری شمسی در تهران به دنیا آمد. مریم میرزاخانی چند سال بعد از فوت ارشمیدس به دنیا آمده است؟



^۱ پرویز شهریاری، تاریخ ریاضیات، انتشارات مدرسه، تهران، چاپ پنجم، ۱۳۸۷، صفحه ۷۲.
^۲ فیلدز مهم‌ترین جایزه بین‌المللی ریاضیات است که هر چهار سال یکبار به ریاضی‌دانان زیر ۴۰ سال اهدا می‌شود.

جمع و تفریق اعداد صحیح

۱. یک محور اعداد صحیح رسم کنید و یک پرگار در دست بگیرید!
- الف) سوزن پرگار را روی نقطه ۲ بگذارید و دایره‌ای به شعاع ۵ رسم کنید. این دایره در چه نقاطی، محور اعداد را قطع می‌کند؟
- ب) ابتدا سوزن پرگار را روی نقطه ۳- قرار دهید و دایره‌ای به شعاع ۲ رسم کنید. دایره در دو نقطه محور را قطع می‌کند؛ نقطه سمت چپ را A و نقطه سمت راست را B بنامید. سپس سوزن پرگار را روی نقطه A قرار دهید و به شعاع ۴ دایره‌ای رسم کنید؛ نقطه سمت راست محل تقاطع دایره با محور را C بنامید. اکنون سوزن پرگار را روی نقطه C بگذارید و دهانه پرگار را به اندازه فاصله A تا B ، باز کرده، دایره‌ای رسم کنید. نقطه سمت چپ محل تقاطع این دایره با محور چه عددی است؟
۲. حاصل عبارت‌های زیر را به دست آورید.
- الف) $۲ - ۳ + ۴ - ۵ + ۳ - ۴$ ب) $-۱۲ + ۱۸ - ۱۵ - ۱۷ + ۱۱$
 ج) $-۲۳ + ۱۰ - ۱۴ + ۷ - ۹۲ + ۲۳$ د) $۱۱ - ۱۲ + ۳۵ - ۹ - ۲۵$
 ه) $۱۲۳۴ - ۵۶۷۸ + ۹۱۳۲ - ۴۵۹۱ + ۱۲۰۳ - ۹۷۴$
 و) $۳۷۸۲۴ - ۵۱۲۴۵ + ۱۵۳ - ۹۸۴۶۱ + ۷۵۳۴۱ - ۲۷۵۴۹ + ۴۹۰۸$
۳. برای هر یک از قانون‌های زیر، یک الگوی عددی بسازید.
- الف) از ۱۱- شروع کنید و هر عدد را با اضافه کردن عدد ۴ به عدد قبلی بسازید.
 ب) از ۵ شروع کنید و در هر مرحله ۲ را از عدد قبلی کم کنید.
 ج) از ۲- و ۴- شروع کنید. هر عدد مجموع دو عدد قبل از آن است.
۴. جاهای خالی را با علامت‌های «+» و «-» طوری پر کنید که
- $۱۵۸ \bigcirc (-۱۴۱۸) \bigcirc ۱۲۷ \bigcirc (-۹۸۳)$
- الف) حاصل کمترین مقدار ممکن باشد.
 ب) حاصل بیشترین مقدار ممکن باشد.

عدهای صحیح

۵. عبارت زیر را طوری پرانتز گذاری کنید تا تساوی برقرار شود.

$$18 + (-13) - (-3) - 7 + 4 = 11$$

۶. الف) آیا می‌توانید خانه‌های خالی جدول زیر را با عددهای طبیعی طوری پر کنید که مجموع هر سطر برابر صفر شود؟ با عددهای صحیح چطور؟

	-۳
۵	

ب) آیا می‌توانید جدول زیر را با چهار عدد صحیح متفاوت طوری پر کنید که مجموع هر سطر و هر ستون برابر صفر شود؟

ج) آیا می‌توانید جدول زیر را با اعداد $\{-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$ طوری پر کنید که مجموع سطرها و ستون‌ها برابر باشند؟ (تکرار اعداد مجاز نیست.)



د) آیا می‌توانید جدول بالا را با اعداد صحیح طوری پر کنید که مجموع هر سطر برابر ۱ و مجموع هر ستون برابر ۱- شود؟



۷. فرض کنید در آسانسور ساختمانی که ۵۰ طبقه دارد، ایستاده‌اید. روی کلیدهای این آسانسور اعداد ۱ تا ۴۰، صفر و ۱- تا ۹- نوشته شده است.

الف) بیشترین مسافتی که این آسانسور طی می‌کند، چند طبقه است؟

ب) اگر در طبقه ۳- باشید و کلید طبقه ۳۴ را فشار دهید، چند طبقه بالا می‌روید؟

ج) اگر در طبقه ۲۳ باشید و کلید طبقه ۹- را فشار دهید، چند طبقه پایین می‌آیید؟

د) اگر در طبقه ۵- باشید و ۱۸ طبقه بالا بروید، به طبقه چندم می‌رسید؟

ه) اگر ۳۹ طبقه پایین آمده باشید و در طبقه ۷- متوقف شوید، ابتدا در طبقه چندم بوده‌اید؟

۸. جدول زیر، رده‌بندی تیم‌های لیگ برتر فوتبال ایران (جام خلیج فارس) در پایان نیم‌فصل سال ۱۳۹۱ است.

رتبه	تیم‌ها	گل زده	گل خورده	تفاضل گل	امتیاز
۱	سپاهان	۲۸	۱۸	۱۰	۳۱
۲	استقلال	۱۸		۷	۳۱
۳	فولاد	۲۹	۱۹	۱۰	۲۹
۴	ملوان	۲۰	۱۷	۳	۲۹
۵	راه آهن	۱۷	۱۴	۳	۲۹
۶	تراکتورسازی	۲۷	۱۷	۱۰	۲۸
۷	سایپا	۱۸	۱۴	۴	۲۶
۸	فجر سپاسی	۲۱	۱۳	۸	۲۴
۹	مس	۱۲	۱۱	۱	۲۴
۱۰	نفت تهران	۲۰	۱۸	۲	۲۲
۱۱	داماش گیلان	۱۷	۲۲		۲۲
۱۲	پرسپولیس		۱۷	۳	۲۱
۱۳	صبای قم	۱۷	۱۶	۱	۲۱
۱۴	پیکان	۱۶		-۱۶	۲۰
۱۵	آلومنیوم		۱۵	-۳	۱۷
۱۶	ذوب آهن	۱۶	۲۷	-۱۱	۱۳
۱۷	نفت آبادان	۱۶	۲۸		۱۱
۱۸	گهر دورود		۲۶	-۱۵	۹

الف) با توجه به گل زده، گل خورده و تفاضل گل هر تیم، خانه‌های خالی جدول بالا را پر کنید.

ب) مجموع تفاضل گل همه تیم‌ها را بیابید.

۹. الف) جاهای خالی را با علامت‌های «+» و «-» طوری پر کنید که حاصل عبارت زیر برابر ۱ باشد.

$$۱۰ \bigcirc ۹ \bigcirc ۸ \bigcirc ۷ \bigcirc ۶ \bigcirc ۵ \bigcirc ۴ \bigcirc ۳ \bigcirc ۲ \bigcirc ۱$$

ب) چرا نمی‌توان جاهای خالی را با علامت‌های «+» و «-» طوری پر کرد که حاصل عبارت بالا برابر صفر باشد؟

۱۰. در فصل اول با یک مثلث عددی مشهور آشنا شدید. اگر اعداد هر سطر این مثلث را یکی در میان قرینه کنیم، الگوی زیر ساخته می‌شود.



عدهای صحیح

		-۱	۱	
	-۱	۲	-۱	
-۱	۳	-۳	۱	
-۱	۴	-۶	۴	-۱

الف) سطر پنجم و ششم مثلث روبه‌رو را بنویسید.
 ب) مجموع اعداد سطر ششم و هفتم این مثلث را به دست آورید.
 ج) آیا می‌توانید مجموع اعداد سطر هزارم این مثلث را حدس بزنید؟ سطر هزار و یکم را چطور؟

۱۱. جای خالی را طوری پر کنید که مجموع اعداد دو سطر با هم برابر شوند.

۱	۲	۳	۴	۵	۶	۹۷۰
-۱	-۲	-۳	-۴	-۵	-۶	

۱۲. الف) در جدول زیر، در سطر اول عدد صفر را در خانه وسط قرار داده‌ایم و اعداد صحیح دیگر را به ترتیب قبل و بعد از آن نوشته‌ایم. در سطر دوم عدد ۲ را در خانه وسط قرار داده‌ایم. اعداد صحیح را به ترتیب قبل و بعد از ۲ قرار دهید. عددی که در خانه پایین عدد ۳- نوشته‌اید، چیست؟

-۳	-۲	-۱	۰	۱	۲	۳
			۲			

ب) اگر جدول بالا را از چپ و راست با قانون گفته شده ادامه دهیم، عددی که در خانه پایین ۱۰۰ قرار می‌گیرد چیست؟ چه عددی در خانه بالای ۸۸- قرار خواهد داشت؟

ج) خانه‌های خالی جدول زیر را با قانون قسمت «الف» پر کنید.

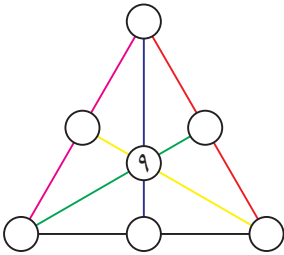
			...	-۲	-۱	۰	۱	۲	...		۹۱	
		-۲۳۷		-۹	

د) در جدول بالا در هر ستون دو عدد وجود دارد. تفاضل هر دو عدد را در زیر آن دو عدد بنویسید. اعدادی که در ردیف سوم نوشته‌اید، چه رابطه‌ای با یکدیگر دارند؟

۱۳. در زیر، شش پاره‌خط (با رنگ‌های متفاوت) رسم کرده‌ایم و سپس روی هر یک سه دایره قرار داده‌ایم. آیا می‌توانید دایره‌های خالی را با اعداد صحیح طوری پر کنید که مجموع



سه عدد روی هر پاره‌خط برابر صفر شود؟



کارگاه بازی - دوز با اعداد صحیح

در جدول زیر، دسته‌های سه‌تایی عددها را به صورت افقی، عمودی یا مورب در نظر بگیرید. می‌توان بین برخی از این دسته‌های سه‌تایی با استفاده از علامت‌های «+» یا «-»، یک رابطه تساوی برقرار کرد.

-۳	-۱	-۳	۲	۶	-۴	۳	۱	۵	۱
-۳	۲	-۴	-۱	۵	-۳	۴	۲	-۱	۳
-۲	۲	-۴	۳	۱	۰	-۵	۷	۰	۴
۴	-۱	-۲	۶	۷	۰	-۳	۳	-۴	-۲
-۱	-۳	-۵	۲	۳	-۱	۱	۱	۰	۳
-۲	۷	-۵	۱	۰	-۴	۴	-۲	-۳	۱
-۳	۱	۳	۴	۵	۶	-۶	۰	۵	۷
-۷	-۱	۶	-۸	۱	-۶	-۵	۲	۲	۶
۲	-۵	-۶	-۳	-۱	۱	۳	۲	-۵	۲
-۱	-۴	۳	۰	-۳	-۱	-۲	۵	-۲	-۳

برای مثال در جدول بالا، سه‌تایی ۱، ۳ و ۲- باهم این تساوی را می‌سازند:

$$۱ - ۳ = -۲$$

عددهای صحیح

و سه تایی -۵ ، ۲ ، ۷ این تساوی را:

$$۷ + (-۵) = ۲.$$

مرحله اول. با یکی از دوستان خود بازی کنید و در هر نوبت یک تساوی بنویسید. هرکس نتواند در کمتر از ۳۰ ثانیه یک تساوی بیابد، نوبتش را از دست می دهد. امتیاز هر بازیکن تعداد تساوی های درستی است که نوشته است.

مرحله دوم. هر بازیکن جدول ذیل را با عددهای -۵ ، -۴ ، -۳ ، -۲ ، -۱ ، ۱ ، ۲ ، ۳ ، ۴ و ۵ در مدت چهار دقیقه پر کند به گونه ای که عددهای همسایه های هر خانه متفاوت باشند. برای مثال، در جدول زیر، عددهای همسایه خانه ۱ متفاوت اند.

-۳	-۱	-۲
۲	۱	-۵
۴	۳	۵

هر بازیکن جدول زیر را با قانون گفته شده پر کند.

سپس آن را به حریفش بدهد تا او مانند مرحله اول تساوی ها را پیدا کند و پایین جدول بنویسد. بازیکنی که در جدول حریفش تساوی های بیشتری پیدا کند، برنده است.

ضرب و تقسیم اعداد صحیح

۱. الف) جاهای خالی را با دو عدد پر کنید به طوری که تساوی برقرار باشد.

$$(\bigcirc \times ۳) - (\bigcirc \times (-۲)) = ۸$$

ب) برای «الف» جوابی دیگر بیابید.

۲. تمام جفت عددهای صحیحی را پیدا کنید که حاصل ضرب آنها ۱۸ باشد.

۳. حاصل هریک از عبارتهای زیر را به دست آورید.

الف) $(-9) \div (-63) \times (-42 \div 6) \times (3 \div -21) + 7$

ب) $(-8 - 4) + (-8 \div 4) \times 4 \times (-8) \times (-4 + 8)$

ج) $(-5) - (2 - (-5)) \div (5 - (-2)) - (5 \times (-2)) + 5 - 2$

د) $(-18) - 15 \div (12 \times (-5)) - (2 \times -24) \div (16 \times 3)$

ه) $(-3 - 16) \div (16 - (-3)) - (16 \times 3) \times (3 \div 16) \times 3 \div -16$

و) $18 \times 7 \times (21 \div (-3)) \div 42 + (-91) \div 13 - (3 \times (-17))$

ز) $512 \div (-2) \div (-2) \div (-2) \div (-2) \div (-2)$

ح) $8 \times (-3) \div (-6) \times (-2) \div (-4) + 11$

۴. هریک از عبارتهای زیر را طوری پرانتزگذاری کنید که تساوی برقرار شود.

الف) $6 - 5 \times 1 - 2 \times 3 - 4 = -9$

ب) $200 \div 2 \times 5 - (-10) \div (-3) \times 17 = -10$

ج) $18 \div (-9) \times (-20) \times 20 \div (-10) - (-30) \div 5 = -28$

۵. در یک آزمون تستی، برای هر پاسخ درست ۴ نمره مثبت و برای هر پاسخ نادرست، ۲ نمره منفی در نظر می‌گیرند. دانش‌آموزی از ۷۰ پرسش آزمون، به ۵۶ پرسش پاسخ درست داده و به ۵ پرسش جواب نداده است. نمره نهایی این دانش‌آموز چند می‌شود؟ این نمره چقدر از نمره کامل کمتر است؟

۶. اختلاف دمای دو جسم ۸ درجه است. اگر مجموع دمای این دو جسم $20^\circ -$ درجه باشد، دمای هریک چند درجه است؟

۷. ابتدا جدول ضرب زیر را کامل کنید. سپس اعداد روی مسیر قرمز رنگ را به ترتیب جمع بزنید. حاصل جمع چه خواهد شد؟

\times	-3	-2	-1	0	1	2	3
-3							
-2							
-1							
0							
1							
2							
3							



گفت‌وگو

- معلم ۲: من فکر می‌کنم این جلسه، آخرین جلسه تدریس این فصل است.
- معلم ۱: چه فایده‌ای دارد که این قدر زود این فصل را تمام می‌کنید؟!
- معلم ۲: نه! زود نیست! ترجیح می‌دهم وقت کلاس را ذخیره کنم تا در فصل بعدی چند مسئله چالش برانگیز مطرح کنم.
- معلم ۱: تمرین بیشتر! راز موفقیت دانش‌آموزان من، تمرین بیشتر است!
- معلم ۲: شما واقعاً در این تمرین‌های بیشتر، مفهوم جدیدی را به دانش‌آموزان یاد می‌دهید؟
- معلم ۱: نه! مفهوم جدیدی در کار نیست! من بر خلاف شما که بیست تا تمرین می‌دهید، معتقدم باید دویست تا تمرین داد!
- معلم ۲: چرا؟
- معلم ۱: تا مطلب برای دانش‌آموزانم به‌طور کامل جا بیفتد.
- معلم ۲: یعنی شما معتقدید که دویست تا تمرین لازم است تا یک مهارت جا بیفتد؟
- معلم ۱: بله؛ دویست تا؛ حتی بیشتر، سیصد تا.
- معلم ۲: بنده شنیده‌ام هر آدمی که بخواهد یک توانایی جدید به‌دست بیاورد، در ابتدا نیاز به تمرین دارد. هم نیاز به تمرین دارد و هم نیاز به راهنمایی. بعدش کم‌کم آن مهارت را می‌آموزد. بعد می‌فهمد که می‌تواند آن کار را انجام دهد؛ اما هنوز شک دارد. بعد شکش برطرف می‌شود و می‌فهمد که یاد گرفته است. ذهنش می‌گوید: «تو دیگر یاد گرفته‌ای». انگار مغزش هشدار می‌دهد که یاد گرفته‌ای. آن وقت است که اگر به او بگوییم باز هم تمرین کن، مغزش جواب می‌دهد: «دیگر کافی است! بس است!»
- معلم ۱: شما فکر می‌کنید با بیست تا تمرین یاد می‌گیرند؟

- معلم ۲:** اصلاً چنین فکری نمی‌کنم. من چند تا تمرین مطرح می‌کنم. اگر یاد گرفتند، می‌گویم کافی است. اگر نه، باید بیشتر تمرین حل کنند. معمولاً دانش‌آموزان باهوش با ده تا تمرین مهارت مورد نظر را می‌آموزند. برای دانش‌آموزان متوسط حدود بیست-سی تا تمرین کافی است؛ البته باید به ضعیف‌ها نیز توجه داشت. باید به آنها تمرین‌های بیشتری داد؛ ولی در کنار این تمرین‌های اضافه باید به آنها اشتباهات گذشته‌شان را نیز یادآوری کرد تا دیگر اشتباه قبلی را تکرار نکنند.
- معلم ۱:** اما وقتی من تمرین زیاد می‌دهم، اطمینان بیشتری دارم که دانش‌آموزانم یاد بگیرند.
- معلم ۲:** خدمت شما عرض کردم. اگر کسی مهارتی را یاد گرفته باشد و از او دوباره و دوباره و دوباره، همان مهارت را بخواهند تمرین کند، فریاد اعتراض بلند می‌شود.
- معلم ۱:** من که تا به حال چیزی به نام اعتراض در کلاس نشنیده‌ام.
- معلم ۲:** شاید آنها در مغزشان اعتراض می‌کنند.
- معلم ۱:** حتی اگر این‌طور باشد، من بازهم کوتاه نمی‌آیم. ریاضی یعنی تمرین زیاد؛ آن‌قدر که من معلم مطمئن باشم همه یاد گرفته‌اند.
- معلم ۲:** به نظرم تمرین‌های تکراری و بیهوده برای بعضی‌ها مُخرَبِ خلاقیت است. متوجه می‌شوید؟!
- معلم ۱:** [در حالی که سرش را می‌خاراند] بالاخره من معلم باید با زور هم که شده به دانش‌آموزانم مهارت‌های لازم را یاد بدهم.
- معلم ۲:** [در حالی که لبخند می‌زد] شما بودید که می‌خواستید ریاضی‌دان تربیت کنید؟!

یکی از ویژگی‌های پروفسور که باعث می‌شد معلّمی نمونه باشد، این بود که هیچ‌وقت از گفتن «نمی‌دانم» ابایی نداشت. برای پروفسور پذیرش اینکه سؤالی را نمی‌داند، به هیچ‌وجه مایه شرمساری نبود و در عوض این موضوع گامی به سوی رسیدن به حقیقت بود. برای پروفسور یاد دادن اینکه چه چیزهایی هنوز معلوم نبود یا ناشناخته بود، همان‌قدر ضروری می‌نمود که آموزش مطالب معلوم و ثابت شده. یوکو اوگاوا، خدمتکار و پروفسور، ترجمهٔ کیهان بهمنی.

کتاب الخوارزمی

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ
بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ
بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

- في بيده لا تسرد ذنوبه وخطاياها العبد المعترف
- الى الله العلي به خطاب من محمد بن علي
- ابن جيب بن علي بن محمد بن علي بن احمد بن
- خنجر بن الحسين بن يحيى بن ابراهيم بن محمد بن
- ابراهيم بن احمد بن المفضل بن عمران بن ابراهيم بن
- الوليد بن عتبة بن سعد بن عبد شمس بن

عند مناف

• نعمة الله بالعلم والعمل

• الصالحين

• وحسنا الله ونعم الوكيل

• واذ لمنزل الحمد صلوات الله عليهم
• عندهم في الدنيا والآخرة
• ولهم في الدنيا والآخرة

• في بيده لا تسرد ذنوبه وخطاياها العبد المعترف
• الى الله العلي به خطاب من محمد بن علي
• ابن جيب بن علي بن محمد بن علي بن احمد بن
• خنجر بن الحسين بن يحيى بن ابراهيم بن محمد بن
• ابراهيم بن احمد بن المفضل بن عمران بن ابراهيم بن
• الوليد بن عتبة بن سعد بن عبد شمس بن

ALGÈBRE ۳ فصل

7 جبر و

معادله

N. BOURBAKI
ÉLÉMENTS DE
MATHÉMATIQUE

MASSON

Α. Γ. ΚΥΡΟΣ

ЛЕКЦИИ
ПО ОБЩЕ
АЛГЕБР

Introduction to
Commutative Algebra

H. Cartan
J. C. McGovern

L'ALGÈBRE
OPERA

DI RAFAEL BOURBACI de Bologna
Diritti in tutto il Libero.

Con la quale edizione si separa e viene in profeta

محمد خوارزمی را در همه جای دنیا به عنوان پدر جبر می شناسند. خوارزمی کتابی تألیف کرد با عنوان «الجبر و المقابله» که واژه جبر یا algebra نیز از آن برداشت شده است. ترجمه این کتاب در اروپا باعث شد اروپاییان شیوه نوشتن عددها را که رومی بود، کنار بگذارند و به شیوه فعلی که هندی-عربی نامیده می شود، روی بیاورند. خوارزمی با متمایز ساختن جبر از حساب گام بزرگی را در تجرید ریاضیات برداشت.

IN BOLOGNA,
Per Giovanni Rossi, MDLXXIX.
Con licenza de' superiori.

972

الگوهای عددی

۱. شکل‌های زیر، دو الگوی چوب‌کبریتی را نشان می‌دهند. الگوی اول را مکعبی و الگوی دوم را مربعی می‌نامیم.



(۱)



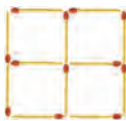
(۲)



(۳)



(۱)



(۲)



(۳)

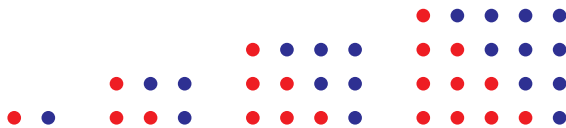
الف) برای هریک از دو الگوی بالا، باتوجه به چوب‌کبریت‌های شکل‌های (۱)، (۲) و (۳)، شکل (۴) و شکل (۵) را رسم کنید.

ب) تعداد چوب‌کبریت‌های شکل n ام هر الگو را برحسب n بیابید.

ج) باتوجه به رابطه‌هایی که در قسمت قبل به دست آوردید، تعداد چوب‌کبریت‌های شکل (۲۰) هریک از الگوها را پیدا کنید.

د) آیا می‌توانید شکلی از الگوی مکعبی بیابید که تعداد چوب‌کبریت‌های آن با تعداد چوب‌کبریت‌های یک شکل از الگوی مربعی برابر باشد؟

۲. در زیر، چهار شکل از یک الگو را مشاهده می‌کنید.



الف) شکل پنجم و ششم این الگو را رسم کنید.

ب) در شکل n ام این الگو چند دایره توپر قرمز وجود دارد؟

۳. جمله هزارم هریک از الگوهای زیر را بیابید.



(الف) $\frac{1}{2}, \frac{1}{6}, \frac{1}{12}, \frac{1}{20}, \frac{1}{30}, \frac{1}{42}, \dots$

(ب) ۱, ۳, ۵, ۷, ۹, ۱۱, ...

(ج) ۱, ۴, ۷, ۱۰, ۱۳, ۱۶, ...

(د) ۳, ۸, ۱۳, ۱۸, ۲۳, ۲۸, ...

(ه) -۷, -۳, ۱, ۵, ۹, ۱۳, ...

(و) ۷, ۸, ۱۳, ۱۴, ۱۹, ۲۰, ۲۵, ۲۶, ...

۴. جدول‌های زیر را به دقت ببینید. همهٔ عددهای نوشته شده جدول سمت راست نتیجهٔ قانونی است که روی عددهای جدول سمت چپ اعمال شده است.



-۵	-۸	۷	۴	۹
۶	۳	۴	-۷	۰

۳۰	۲۴	-۲۸	۲۸	۰
۱۱	۱۱	-۳	-۱۱	-۹

با کشف و اعمال این قانون روی عددهای جدول سمت چپ زیر، خانه‌های خالی را پر کنید.

۱	۲	-۳	۵	-۸
۲	-۲	۲	۴	-۱

جانگهدار

می‌خواهیم مفهومی را تعریف کنیم به نام «جانگهدار».

جانگهدار موجودی است که جا نگه می‌دارد!! این تعریف ساده‌تر از آن است که بخواهیم آن را شرح دهیم. در ادامه یک مثال از جانگهدار می‌آوریم.

داریوش کاپیتان تیم فوتسال کلاس، باید یک تیم برای شرکت در مسابقات فوتسال به مسئولان مدرسه معرفی کند. ولی او در انتخاب دروازه‌بان دچار مشکل شده است. داریوش برای پست دروازه‌بانی باید یک نفر را معرفی کند؛ ولی تعداد کسانی که می‌توانند دروازه‌بان باشند زیاد است. او باید از بین سه‌نند، هومن، سروش و محمد یکی را انتخاب کند. مسئولان مدرسه هم گفته‌اند داریوش سریع‌تر تیم خود را معرفی کند. بنابراین داریوش تیم را بدون دروازه‌بان معرفی کرد و از مسئولان مدرسه درخواست کرد که بعداً دروازه‌بان را معرفی کند.

دروازه‌بان	مدافع	هافبک	هافبک	مهاجم	ذخیره	ذخیره
X	داریوش	بردیا	احسان	علیرضا	فرشاد	محسن

در اینجا X جانگهدار است. کسانی که می‌توانند در جای X قرار بگیرند، عبارت‌اند از سه‌نند،

هومن، سروش و محمد؛ بنابراین X یک جانگهدار اسمی است؛ یعنی موجوداتی که می‌توانند به جای X قرار بگیرند اسمی دانش‌آموزان هستند.

در ریاضیات معمولاً جانگهدارها با حروف انگلیسی نشان داده می‌شوند. به این جانگهدارها «متغیر» می‌گویند.



عبارت جبری

۱. کدامیک از جملات زیر متشابه‌اند؟

$6x$, $6x \cdot y$, $8x$, 3 , $4x \cdot y \cdot y$, $-2xy$, -10° , $15y \cdot x \cdot y$, $3x \cdot x \cdot y$, $19x$, $-x \cdot y$, $9y$,
 $2y$, $16x \cdot y$, 0 .

۲. عبارت‌های جبری زیر را ساده کنید.

الف) $18x + 10y - 8x + y - 3x$ ب) $\frac{3}{5}x - \frac{3}{5}y - \frac{2}{8}x + \frac{1}{8}y$
 ج) $94x + 13x \cdot y - 44x - 9x \cdot y + 8y$ د) $8(a - 2y) + 4(4y - 2a)$
 ه) $3(x - 2z) - (8x - 4z) - 3(x - 2z)$
 و) $9(x - x \cdot x + 1) + 6x(2x - 4) + 16$

۳. جاهای خالی را با عبارت‌های جبری مناسب پر کنید.

الف) $12m + \dots - 3k + \dots = 3m + 3k$
 ب) $6(2x + \dots) - 2(\dots + 3y) = 6x + 6y$

۴. می‌خواهیم با استفاده از خاصیت پخشی بررسی کنیم که چرا حاصل ضرب هر دو عدد منفی، عددی مثبت است. ابتدا با یک مثال، حاصل ضرب یک عدد مثبت در عددی منفی را بررسی می‌کنیم.

$$\left. \begin{aligned} \text{الف) با پر کردن جاهای خالی با عددهای مناسب نشان دهید: } 2 \times (-6) = -12 \\ 2 \times (-6 + 6) = 2 \times \dots + 2 \times \dots \\ 2 \times (-6 + 6) = 2 \times \dots = \dots \end{aligned} \right\} \Rightarrow 2 \times \dots + 2 \times \dots = \dots$$

$$\Rightarrow 2 \times (-6) = -12.$$

$$\left. \begin{aligned} \text{ب) با پر کردن جاهای خالی با عددهای مناسب نشان دهید: } -2 \times (-6) = 12 \\ -2 \times (-6 + 6) = -2 \times \dots + (-2) \times \dots \\ -2 \times (-6 + 6) = -2 \times \dots = \dots \end{aligned} \right\} \Rightarrow -2 \times \dots + (-2) \times \dots = \dots$$

$$\Rightarrow -2 \times (-6) = 12.$$

ج) اگر a و b دو عدد مثبت باشند، نشان دهید $(-a)(-b) = ab$.

۵. یک عدد در نظر بگیرید. ۱۱ واحد به آن اضافه کنید. مجموع را در ۲ ضرب کنید و از حاصل ضرب ۲۰ واحد کم کنید. آنچه را که به دست آمده در ۵ ضرب کنید و از حاصل ضرب، ۱۰ برابر عددی که در ابتدا در نظر گرفته بودید، کم کنید. حاصل برابر ۱۰ خواهد شد.

با استفاده از رابطه‌های جبری توضیح دهید که چرا همیشه به عدد ۱۰ می‌رسید.

۶. سه رقم انتخاب کنید به طوری که همگی مخالف صفر باشند. با این سه رقم شش عدد دو رقمی مختلف درست کنید. مجموع این عددهای دو رقمی را بر مجموع سه رقم انتخابی تقسیم کنید. حاصل برابر ۲۲ خواهد شد.

با استفاده از رابطه‌های جبری توضیح دهید که چرا همیشه به عدد ۲۲ می‌رسید.

۷. از مدرسه حلی تا شهرک بهار ۱۲۰۰ متر، از مدرسه علامه تا شهرک بهار ۹۰۰ متر و از مدرسه حلی تا مدرسه علامه ۶۰۰ متر است.

الف) اگر صبح‌ها a دانش‌آموز از شهرک بهار به مدرسه حلی و b دانش‌آموز از شهرک بهار به مدرسه علامه بروند، در مجموع در یک صبح چند متر پیاده‌روی توسط همه دانش‌آموزان صورت می‌گیرد؟

ب) اگر در عصر $\frac{1}{3}$ دانش‌آموزان حلی به سمت علامه بروند و از آنجا به شهرک برگردند و بقیه دانش‌آموزان حلی به شهرک برگردند و همچنین تمام دانش‌آموزان علامه به شهرک برگردند، در مجموع همه دانش‌آموزان در یک بعدازظهر چند متر پیاده‌روی انجام می‌دهند؟

۸. در پارکینگ لاله، تعداد دوچرخه‌ها را x ، تعداد سه‌چرخه‌ها را y و تعداد ماشین‌ها را z در نظر می‌گیرند.

الف) تعداد وسائل نقلیه‌ای که در پارکینگ لاله موجود است را با یک عبارت جبری نشان دهید.

ب) اگر در پارکینگ لادن ۳ برابر پارکینگ لاله دوچرخه، ۲ برابر پارکینگ لاله سه‌چرخه و نصف پارکینگ لاله ماشین موجود باشد، تعداد وسایل نقلیه‌ای را که در هر دو پارکینگ موجود است، با یک عبارت جبری نشان دهید.

ج) در هر دو پارکینگ چند چرخ موجود است؟



۹. در شهر عجایب قیمت هر میوه x ، هر غذا y و هر نوشیدنی z است. جدول زیر نشان می‌دهد که آقای شکمو در سه روز گذشته چه خوراکی‌هایی خورده است. ابتدا جدول را کامل کنید و سپس بگویید که آقای شکمو در این ۳ روز چقدر پول بابت شکم خرج خود کرده است.

قیمت	تعداد دفعات مصرف	نوع خوراکی
	۴ بار	سیب
	۲ بار	چلوکباب
	۶ بار	شربت
	۹ بار	نوشابه
	۱۳ بار	پیتزا
	۱ بار	گلابی
	۱۸ بار	خیار
	۳ بار	آب‌پرتقال
	۵ بار	موز
	۱۵ بار	املت



مقدار عددی یک عبارت جبری

۱. در هر یک از قسمت‌های زیر، باتوجه به ستون اول، جاهای خالی را با اعداد مناسب پر کنید.

(الف)

x	۰	۱	۲	۳	۴	...	۱۲	۱۳
$۲x - ۱$								

(ب)

x	۳	۴	۵	۶	۷	...	۲۳	۲۴
$x(x - ۱)$								

(ج)

x	۱	۲	۳	۴	۵	...	۹	۱۰
$۴x.x + ۲$								

(د)

x	۲	۳	۴	۵	۶	...	۱۲	۱۳
$x.x + x$								

۲. در هر یک از قسمت‌های زیر مشخص کنید مساحت هر شکل برحسب چه متغیرهایی نوشته شده است و هر متغیر نشان‌دهنده چیست؟

(الف) مساحت مستطیل: xy

(ب) مساحت متوازی‌الاضلاع: ah

(ج) مساحت لوزی: $\frac{ab}{۲}$

(د) مساحت دوزنقه: $\frac{۱}{۲}(a + b)h$

۳. برای مقادیر داده شده در هر قسمت، مساحت خواسته شده را به دست آورید.

(الف) مساحت مستطیلی به طول ۵ و عرض ۳.

(ب) مساحت متوازی‌الاضلاعی با طول قاعده ۲ و ارتفاع ۵.

(ج) مساحت یک لوزی با طول قطرهای $\frac{۱}{۲}$ و $\frac{۵}{۴}$.

(د) مساحت دوزنقه‌ای با طول قاعده‌های ۱۲ و ۴، و ارتفاع ۳.

معادله

هرگاه یک عبارت جبری مساوی یک عبارت جبری دیگر یا یک عدد شود، معادله تشکیل می‌شود. هریک از تساوی‌های زیر یک معادله است.

الف) $۱۵x - ۴ = ۵$

ب) $۱۸x.x - ۳x.y = ۱۲x - ۴y.x$

ج) $z = ۱۸x.x.x.x - ۴t$

د) $v = ۲k + t$

معادله یعنی «معادل شدن» یک عبارت جبری با یک عبارت جبری دیگر (و یا یک عدد)

در قسمت «الف»، عبارت جبری $۱۵x - ۴$ معادل است با ۵ . این معادله دارای یک متغیر x است. در قسمت «ب»، عبارت جبری $۱۸x.x - ۳x.y$ معادل است با عبارت جبری $۱۲x - ۴y.x$. این معادله دارای دو متغیر x و y است. تمرین. در کدام یک از موارد زیر معادله نمی‌بینید؟ در مواردی که معادله هستند، تعیین کنید چه چیزی معادل چه چیزی است. همچنین تعیین کنید هر معادله چند متغیر دارد.

الف) $۱۱x.x + x = ۸x - ۳x.x.x$

ب) $۱۲x - ۹y = ۰$

ج) $۱۳x - ۴x.x$

د) $۸x - ۴ = ۲x + ۶$

ه) $۴x - ۲ = ۲x + ۴z = ۵x + ۲y$

و) $۱۳۹۳ = ۱۳۹۳$

ز) $۵x + ۴y - z = ۲۰m - ۲x + ۴y = ۲t - ۵k = x$

حل معادله

از اینجا به بعد درباره معادله‌هایی سخن می‌گوییم که فقط یک متغیر دارند. تساوی زیر را در نظر بگیرید.

$$۲x.x + ۵x = x.x.x - ۱۲$$

می‌دانیم این تساوی یک معادله است. در این معادله عبارت جبری $۲x.x + ۵x$ معادل شده است با عبارت جبری $x.x.x - ۱۲$. در این معادله x یک متغیر عددی است. یعنی به جای x باید یک عدد قرار بگیرد. به نظر شما آیا در تساوی یا معادله بالا به جای x می‌توان هر عددی را قرار داد؟ به‌عنوان نمونه در معادله بالا مقدار x را برابر ۲ قرار می‌دهیم. در این صورت آیا تساوی

بین دو عبارت جبری $2x.x + 5x$ و $x.x.x - 12$ برقرار می‌ماند؟

$$\begin{aligned} 2x.x + 5x = x.x.x - 12 &\stackrel{x=2}{\implies} 2 \times 2 \times 2 + 5 \times 2 \stackrel{?}{=} 2 \times 2 \times 2 - 12 \\ &\implies 8 + 5 \times 2 \stackrel{?}{=} 8 - 12 \\ &\implies 18 \stackrel{?}{=} -4. \end{aligned}$$

آیا تساوی به دست آمده برقرار خواهد بود؟!

واضح است که $-4 \neq 18$ ؛ یعنی ۱۸ مساوی ۴- نیست. پس ما مجاز نیستیم به جای x مقدار ۲ را قرار دهیم؛ یعنی عدد ۲ نمی‌تواند به جای x قرار بگیرد. حال این پرسش مطرح می‌شود:

به جای x چه عدد (یا اعدادی) را می‌توانیم قرار دهیم؟

تمرین. همانند نمونه حل شده بالا ($x = 2$)، به جای x در معادله

$$2x.x + 5x = x.x.x - 12$$

هریک از مقادیرهای زیر را قرار دهید و بررسی کنید: آیا تساوی به دست آمده درست است یا نه؟

الف) $x = 0$

ب) $x = 1$

ج) $x = 3$

د) $x = \frac{1}{2}$

ه) $x = -2$

و) $x = 4$

اگر تمرین قبل را کامل انجام دهید، ملاحظه خواهید کرد که تساوی

$$2x.x + 5x = x.x.x - 12$$

برای $x = 4$ برقرار خواهد بود. یعنی اگر به جای x عدد ۴ را قرار دهیم، توانسته‌ایم بین دو عبارت $2x.x + 5x$ و $x.x.x - 12$ ایجاد تعادل کنیم.

حل معادله یعنی «ایجاد تعادل». ایجاد تعادل بین سمت چپ و سمت راست تساوی.

مثال. می‌خواهیم معادله $x.x.x - 6x.x = 6 - 11x$ را حل کنیم؛ یعنی باید عددی را پیدا کنیم که اگر آن عددها را به جای x قرار دهیم، تساوی بین دو عبارت جبری $(x.x.x - 6x.x)$ و $(6 - 11x)$ برقرار بماند.

ابتدا به جای x مقدار ۱- قرار می‌دهیم.

$$x = -1 \implies (-1)(-1)(-1) - 6 \times (-1)(-1) \stackrel{?}{=} 6 - 11 \times (-1) \implies -7 \neq 17$$

بنابراین $x = -1$ بین دو عبارت جبری $x.x.x - 6x.x$ و $6 - 11x$ ایجاد تعادل نمی‌کند؛ بنابراین $x = -1$ نمی‌تواند جواب معادله $x.x.x - 6x.x = 6 - 11x$ باشد.

به جای x مقدار ۰ را قرار می‌دهیم.

$$x = 0 \implies 0 \times 0 \times 0 - 6 \times 0 \times 0 \stackrel{?}{=} 6 - 11 \times 0 \implies 0 \neq 6$$

$x = 0$ هم نمی‌تواند جواب معادله باشد.

به جای x ، مقدار ۱ قرار می‌دهیم.

$$x = 1 \Rightarrow 1 \times 1 \times 1 - 6 \times 1 \times 1 \stackrel{?}{=} 6 - 11 \times 1 \Rightarrow -5 = -5$$

اگر $x = 1$ باشد، بین دو عبارت جبری $x.x.x - 6x.x$ و $6 - 11x$ تعادل ایجاد شده است. پس $x = 1$ یک جواب برای معادله $x.x.x - 6x.x = 6 - 11x$ است.

به جای x مقدار ۲ قرار می‌دهیم.

$$x = 2 \Rightarrow 2 \times 2 \times 2 - 6 \times 2 \times 2 \stackrel{?}{=} 6 - 11 \times 2 \Rightarrow -16 = -16$$

$x = 2$ هم یک جواب برای معادله $x.x.x - 6x.x = 6 - 11x$ است.

آیا می‌توانید باز هم برای این معادله جواب پیدا کنید؟ به نظر شما معادله $x.x.x - 6x.x = 6 - 11x$ چند جواب دارد؟

تعداد جواب‌های یک معادله

برای بعضی از معادله‌ها نمی‌توان جواب پیدا کرد. برای مثال معادله زیر از این نوع است.

$$x + 4 = x - 2$$

بعضی از معادله‌ها فقط یک جواب دارند. معادله‌های زیر از این نوع‌اند.

- $-2x - 4 = x + 6$
- $3x - 2 = 7$
- $x.x + 6x - 4 = x.x + 5x + 6$
- $(x - 1)(x - 1) = 0$

بعضی از معادله‌ها فقط دو جواب دارند:

$$(x - 1)(x - 2) = 0$$

بعضی از معادله‌ها فقط سه جواب دارند. بعضی از معادله‌ها فقط چهار جواب دارند و ...

بعضی از معادله‌ها بی‌نهایت جواب دارند. معادله‌های زیر از این نوع‌اند:

- $x(x - 1) + x = x.x$
- $3x + 4 - x = 5x - 2 - 3x + 6$

پس تکلیف ما چیست؟ از کجا بفهمیم که یک معادله چند جواب دارد؟ جواب‌های یک معادله را چگونه باید پیدا کنیم؟ اینها سؤالاتی است که به همه آنها نمی‌توان امسال پاسخ داد. چند سال برای جواب دادن به این پرسش‌ها وقت لازم است. کمی صبور باشید!

معادله‌هایی که امسال باید با آنها آشنا شوید و راه‌حل آنها را بیاموزید، معادله‌هایی‌اند که فقط یک متغیر دارند. در زیر، چند نمونه از این معادله‌ها را مشاهده می‌کنید.

$$\bullet \quad 3x = 18$$

$$\bullet \quad 6x + 5x = 11$$

$$\bullet \quad 2x - 6 = 5$$

$$\bullet \quad 12y - 9 = 3y - 6$$

آیا می‌توانید چند نمونه از این معادله‌ها را خودتان بسازید؟

روش حل معادله

برای حل یک معادله ابتدا باید عبارتهای جبری سمت چپ و سمت راست تساوی را ساده کرد. سپس از خواص تساوی باید به‌گونه‌ای استفاده شود تا پس از به‌کار بردن آن، در یک طرف تساوی فقط عدد داشته باشیم و در سمت دیگر یک جمله که دارای متغیر است. در نهایت باز هم با استفاده از خاصیت تساوی می‌توانیم به جواب معادله برسیم. با این همه در این بخش تنها به روش حل معادلاتی که پس از ساده شدن در آنها تنها یک نماد متغیر ظاهر می‌شوند، توضیح داده می‌شود. همچنین خواهید دید که این معادلات تنها یک جواب دارند. در زیر ۲ معادله را حل می‌کنیم.

مثال ۱.

$$5x + 2 = 3x + 14 - x.$$

باید به دنبال عددی باشیم که اگر آن عدد را به‌جای متغیر x قرار دهیم، تعادل بین سمت و چپ و سمت راست تساوی برقرار بماند. اولین کاری که باید انجام دهیم، این است که عبارات جبری سمت چپ و سمت راست تساوی را ساده کنیم.

$$5x + 2 = 2x + 14.$$

در تساوی بالا می‌خواهیم عدد ۲ را از سمت چپ حذف کنیم. پس دو طرف تساوی را منهای ۲ می‌کنیم.

$$5x + 2 = 2x + 14 \implies 5x + 2 - 2 = 2x + 14 - 2$$

$$\implies 5x = 2x + 12.$$

حال می‌خواهیم جمله $2x$ را از سمت راست حذف کنیم. برای این کار دو طرف تساوی را منهای $2x$ می‌کنیم.

$$5x = 2x + 12 \implies 5x - 2x = 2x + 12 - 2x$$

$$\implies 3x = 12.$$

حالا به یک تساوی رسیده‌ایم که در یک طرف آن فقط عدد داریم و در طرف دیگر یک جمله که دارای یک متغیر است. اکنون اگر دو طرف تساوی را به عدد ۳ تقسیم کنیم، جواب معادله به دست می‌آید. جواب معادله، یعنی عددی که مجازیم در معادله به جای متغیر قرار دهیم.

$$3x = 12 \Rightarrow \frac{3x}{3} = \frac{12}{3}$$

$$\Rightarrow x = 4.$$

پس در معادله $5x + 2 = 3x + 14 - x$ اگر به جای x عدد ۴ را قرار دهیم، تساوی برقرار خواهد ماند.

$$5 \times 4 + 2 \stackrel{?}{=} 3 \times 4 + 14 - 4 \Rightarrow 20 + 2 \stackrel{?}{=} 12 + 14 - 4$$

$$\Rightarrow 22 = 22.$$

مثال ۲.

$$\frac{3x + 5}{4} + 2 = x - 3.$$

ابتدا هر دو طرف تساوی را در عدد ۴ ضرب می‌کنیم تا مخرج کسر از بین برود و سپس دو طرف تساوی را ساده می‌کنیم.

$$4 \left(\frac{3x + 5}{4} + 2 \right) = 4(x - 3) \Rightarrow 3x + 5 + 8 = 4x - 12$$

$$\Rightarrow 3x + 13 = 4x - 12.$$

سپس برای اینکه عدد ۱۲ را از سمت راست تساوی از بین ببریم، هر دو طرف تساوی را با عدد ۱۲ جمع می‌کنیم.

$$3x + 13 = 4x - 12 \Rightarrow 3x + 13 + 12 = 4x - 12 + 12$$

$$\Rightarrow 3x + 25 = 4x.$$

بعد از آن، از دو طرف تساوی $3x$ را کم می‌کنیم تا در سمت چپ تساوی $3x$ از بین برود.

$$3x + 25 = 4x \Rightarrow 3x + 25 - 3x = 4x - 3x$$

$$\Rightarrow 25 = x.$$

همان‌طور که می‌بینید، مقدار x به دست آمد. اگر در معادله به جای x مقدار ۲۵ را قرار دهیم، تساوی برقرار خواهد ماند.

$$\frac{3 \times 25 + 5}{4} + 2 \stackrel{?}{=} 25 - 3 \Rightarrow \frac{80}{4} + 2 \stackrel{?}{=} 22$$

$$\Rightarrow 22 = 22.$$

تمرین‌های تکمیلی

۱. هریک از معادله‌های زیر را حل کنید.

الف) $5t - 4 = 16$

ب) $-3m - 2 = 13$

ج) $-12x + 13 = 1$

د) $12 = 6 - 2x$

ه) $2b = 8b - 18$

و) $5z + 2 = 3z - 5$

ز) $3g + 4 - g + 1 = 3 - 4g$

ح) $\frac{2k-2}{6} = k - 3$

ط) $\frac{8y-3}{5} = \frac{6y+1}{4}$

ی) $\frac{4a-6}{2} + 3a = 11 - 2a$

ک) $x + 2x + 3x + \dots + 10x + 11 = 66$

۲. سگی به دنبال خرگوشی که با آن 15° متر فاصله دارد، شروع به دویدن می‌کند. خرگوش در هر ثانیه ۲ متر و سگ در هر ثانیه ۴ متر می‌دود. بعد از چند ثانیه سگ به خرگوش می‌رسد؟



۳. اگر عدد ۷۲ به سه قسمت متناسب با عددهای ۲، ۴ و ۶ تقسیم شود، کوچک‌ترین قسمت برابر چه عددی خواهد شد؟

۴. فرض کنید $4 - yz = x$ باشد. اگر $z = 8$ باشد، آنگاه $x = 20$ خواهد بود. اگر $z = 10$ باشد، آنگاه x برابر چه عددی خواهد شد؟

۵. در یک بازی، جریمه هر خطا سه برابر جریمه خطای قبلی است. اگر یک بازیکن چهار بار خطا کند و در کل ۴۰۰۰۰ تومان جریمه شود، جریمه اولین خطا چقدر بوده است؟



۶. نینا، مینا و مینو سه خواهرند که یک بسته شکلات را تا آخر خورده‌اند. تعداد شکلات‌هایی که نینا خورده است، یکی بیشتر از دو برابر تعداد شکلات‌هایی است که مینا خورده است. تعداد شکلات‌هایی که مینو خورده است، پنج عدد کمتر از سه برابر تعداد شکلات‌هایی است که مینا خورده است. اگر مینو و نینا به تعداد مساوی شکلات خورده باشند، مینا چند شکلات خورده است؟ مینو و نینا چند شکلات خورده‌اند؟



۷. دو خودرو هم‌زمان از تهران به سمت زاهدان حرکت کردند. اگر خودرو اول با سرعت ۱۰۰ کیلومتر بر ساعت و خودرو دوم با سرعت ۱۱۵ کیلومتر بر ساعت حرکت کنند، بعد از چند ساعت فاصله این دو خودرو از هم ۱۳۵ کیلومتر خواهد شد؟



۸. علی و رضا در مغازه پدرشان سبدهای حصیری درست می‌کنند. علی پسر بزرگ‌تر، روزی ۵ سبد بیشتر از رضا می‌سازد. اگر علی ۳ روز و رضا ۶ روز کار کند، روی هم ۶۰ عدد سبد تولید می‌بافند. تعیین کنید هر کدام روزی چند سبد می‌بافند.
۹. یک نفر تعدادی جعبه دارد و در آن جعبه‌ها می‌خواهد کتاب‌هایش را قرار دهد. اگر در هر جعبه ۴۰ کتاب قرار دهد، ۱۸۰ کتاب روی زمین می‌ماند. اگر در هر جعبه ۶۰ کتاب قرار دهد، ۳ جعبه خالی برایش باقی می‌ماند. تعیین کنید او چند جعبه و چند کتاب دارد.
۱۰. عدد ۱۰ را به دو قسمت چنان تقسیم کنید که تفاوت آنها برابر ۵ باشد.^۱
۱۱. این مسئله را ببینید.

فاطمه قصد دارد با جمع کردن پول خود یک چادر ملی که آن را بنیاد ملی مُد و لباس اسلامی-ایرانی معرفی کرده است، خریداری کند. قیمت این چادر $s + 5d$ است که در آن d قیمت یک متر چادر و s هزینه دوخت چادر است. اگر (پارچه) چادر را متری ۱۰۰۰۰ تومان خریده باشد و هزینه دوخت آن ۲۰۰۰۰ تومان باشد، پول چادر فاطمه چقدر می‌شود؟

در این مسئله قیمت چادر این‌طور محاسبه می‌شود: پنج برابر قیمت یک متر پارچه به‌علاوه هزینه دوخت چادر.

فاطمه می‌توانست هر جنس پارچه‌ای را که دوست داشت، سفارش دهد. در این صورت قیمت پارچه ممکن بود گران‌تر یا ارزان‌تر شود. هزینه دوخت را هم خیاط تعیین می‌کرد. خیاط می‌توانست هر مقدار ثابتی که می‌خواست اعلام کند.

^۱ این مسئله منتسب به شیخ بهایی است. مزار او در کنار صحن آزادی حرم امام رضا (ع) واقع است.

الف) عدد ۵ در این مسئله نشان دهنده چیست؟

ب) دستمزد خیاط با بالا رفتن d زیاد می شود یا با بالا رفتن s ؟

ج) اگر کیفیت دوخت خیاط متنوع باشد، چگونه می توان این تنوع را در رابطه قیمت چادر وارد کرد؟

د) اگر قیمت چادر در یک خیاطی به صورت $5d + sr$ محاسبه شود، به نظر شما r نشانگر چیست؟

ه) اگر قیمت چادر در یک خیاطی به صورت $cd + s$ محاسبه شود، به نظر شما c نشانگر چیست؟

و) قیمت یک چادر در یک تولیدی چادر به صورت $t - \frac{1}{10}t$ یا $(5d + s)t$ محاسبه می شود. به نظر شما در این رابطه t بیانگر چیست؟ علامت «-» نشان از چه اتفاقی در محاسبه قیمت چادر می دهد؟

ز) به عنوان یک خیاط خلاق، رابطه ای برای قیمت چادر ارائه دهید که هم شما و هم مشتری هایتان راضی باشند.

۱۲. دختر دانشجوی ۱۸ ساله ای از من پرسید: دیروز، در جشن تولد چهلمین سال شما، سه دختر پیرامون شما را گرفته بودند، آنان چه کسانی بودند؟

گفتم: آنان دختران من بودند.

گفت: آنان چند ساله اند؟

گفتم: بگذار آن را به صورت یک مسئله در بیاورم: حاصل ضرب سن آنها مانند حاصل ضرب سن من و شماست، و مجموع عمرشان به اندازه تفاوت سن من با سن خواهر کوچک شماست.

دختر دانشجو، در حالی که به مسئله می اندیشید، رفت و پرسش کنان بازگشت.

گفتم: آرام باش، من می دانم میان دو پاسخ سرگردان و حیران هستی، ولی بدان در میان دخترانم دوقلو نیستند.

گفت: بنابراین، در میان دختران شما کسی همسن و سال من نیست.

خب، حالا بگوئید سن دختران من چقدر است؟ و سن خواهر کوچک دختر دانشجو چقدر است؟^۱

^۱ احمد سلیم سعدان، لذت اندیشه ریاضی، ترجمه ستار عودی، انتشارات علمی و فرهنگی، تهران، ۱۳۸۳، صفحه ۶۰.

جایزه نوبل و جایزه فیلدز

هر ساله یکی از خبرهای مهم علمی مربوط به اهدای جایزه‌های نوبل است. شش جایزه که چهار جایزه آن مربوط به علوم فیزیک، شیمی، پزشکی و اقتصاد است و دو جایزه دیگر برای صلح و ادبیات. آلفرد نوبل (Alfred Nobel)، شیمی‌دان سوئدی، با اختراع دینامیت ثروت زیادی به دست آورد که البته بیشتر از راه فروش اسلحه به دست آمده بود. نوبل وصیت کرد که ثروتش وقف جایزه‌هایی شود که وقف صلح شوند. با شروع قرن بیستم، اهدای جایزه نوبل شروع شد؛ ولی با نگاهی به قرن بیستم و جنگ‌های جهانی می‌توان نتیجه گرفت که مبلغی که بنیاد نوبل خرج صلح کرد خیلی کمتر از مخارج جنگ است.

شاید سؤال کنید: چرا جایزه نوبل به ریاضیات اختصاص نمی‌یابد؟ این سوال پایه داستان‌ها و روایت‌های فراوانی شده است که معروف‌ترین آنها روایتی عاشقانه است! می‌گویند آلفرد نوبل عاشق دختری می‌شود، ولی ازدواج آن دختر با یک ریاضی‌دان، کینه‌ای بزرگ نسبت به ریاضیات در دل نوبل پدید می‌آورد! البته بیشتر مورخان این داستان را یک شایعه بی‌اساس می‌دانند و به نظر آنها تنها دلیلی که نوبل جایزه‌ای به ریاضیات اختصاص نداده، این است که در زمان او ریاضیات نقش مستقیمی در علم شیمی نداشته و شیمی علمی بوده کاملاً تجربی و بیگانه با فرمول‌های ریاضیات.

اواخر قرن نوزدهم میلادی فلیکس کلاین (Felix Klein) و جرج کانتور (Georg Cantor) ریاضی‌دانان بزرگ آلمانی طرحی ریختند تا هر چند وقت یک‌بار ریاضی‌دانان سراسر جهان گرد هم آیند و به تبادل نظر بپردازند. اولین این گردهمایی در سال ۱۹۸۷ برگزار شد و پس از آن در سال ۱۹۰۰ هر چهار سال یک‌بار (به جز در زمان جنگ‌های جهانی) این گردهمایی که «کنگره بین‌المللی ریاضی» نام دارد برگزار می‌شود و بزرگ‌ترین و مهم‌ترین گردهمایی ریاضی‌دانان سراسر جهان است.

در سال ۱۹۲۴ کنگره بین‌المللی ریاضی در تورنتو کانادا برگزار شد. در این کنگره ریاضی‌دانان تصمیم گرفتند به دستاوردهای برجسته ریاضیات دو مدال طلا اهدا شود. دبیر این کنگره جان فیلدز (John Fields)، بودجه لازم را برای بنیان نهادن این جایزه اهدا کرد و برای نخستین بار در سال ۱۹۳۶ این جایزه به دو ریاضی‌دان داده شد.

اما فیلدز با آنکه از نظر همه ریاضی‌دانان معتبرترین نشان ریاضی به حساب می‌آید، هیچ‌گاه شهرت جایزه نوبل را کسب نکرد. برای همین و برای اینکه اهمیت این جایزه را در ریاضی نشان دهند، از آن با عنوان «نوبل ریاضیات» نیز نام برده می‌شود. البته این دو جایزه تفاوت‌های زیادی باهم دارند. مبلغ مادی جایزه فیلدز اصلاً قابل مقایسه با جایزه بیش از یک میلیون دلاری نوبل نیست و شرط سنی زیر چهل سال، رسیدن به جایزه فیلدز را خیلی دشوار می‌سازد.

مریم میرزاخانی، ریاضی‌دان معروف ایرانی، اولین زنی است که موفق به دریافت جایزه فیلدز شده است.



فصل ۴
هندسه و
استدلال

طبیعت بهترین کتاب برای مطالعه و دیدن شکل‌های مختلف هندسی است. آیا تا به حال به تارهای عنکبوت دقت کرده‌اید؟ چه شکل‌های هندسی را در تار عنکبوت می‌توانید نام ببرید. آیا به این اندیشیده‌اید که عنکبوت چگونه می‌تواند تارهایش را با این نظم و دقت درست کند؟

گفت و گو

- معلم معلم‌ها: با اینکه هنوز برای آموزش روش تدریس کتاب جدید کار داریم، ولی برای امروز تا همین جا کافیه. خسته نباشید.
- معلم: می‌تونم یه سؤال جانبی مطرح کنم؟
- معلم معلم‌ها: بفرمایید. امیدوارم خیلی حاشیه‌ای نباشه.
- معلم: می‌خواستم بدونم چرا تو هندسه اثبات می‌کنی.
- معلم معلم‌ها: اوه! زدی تو خال! این یه سؤال واقعاً مهمه. فکر می‌کنی چرا؟
- معلم: این سؤالیه که دانش‌آموزام ازم می‌پرسن. منم یه جواب‌هایی به اونها می‌دم.
- معلم معلم‌ها: مثلاً چی می‌گی؟
- معلم: می‌گم اثبات می‌کنیم تا مطمئن بشیم.
- معلم معلم‌ها: آگه من دانش‌آموز شما باشم می‌گم: «مگه با خط‌کش نمی‌شه مطمئن شد؟» شما چی جواب می‌دید؟
- معلم: موقع اندازه‌گیری با خط‌کش دچار خطا می‌شیم. تازه هر خط‌کشی یه درجه‌بندی داره. مثلاً با خط‌کشی که برحسب میلی‌متر درجه‌بندی شده نمی‌شه ۴/۵۲ میلی‌متر رو اندازه گرفت.
- معلم معلم‌ها: من در نقش همون دانش‌آموز می‌گم: «از پرگار استفاده می‌کنیم. سوزن پرگار و نوک پرگار رو می‌ذاریم دو سر پاره‌خط و با پرگار دوتا پاره‌خط رو باهم مقایسه می‌کنیم. نیازی هم به اثبات نداریم!»
- معلم: آگه پاره‌خط خیلی بزرگ بود چی؟ مثلاً اندازه زمین والیبال بود چی؟
- معلم معلم‌ها: از طناب استفاده می‌کنیم.
- معلم: آگه اندازه زمین فوتبال بود چی؟ یا خیلی بزرگ‌تر؟
- معلم معلم‌ها: از GPS کمک می‌گیریم. بالاخره حتی آگه به اندازه فاصله دوتا شهر هم باشه، GPS جواب می‌ده!!

معلم: آگه یه سر پاره خط اینجا بود و یه سرش توی یه کهکشانش دیگه چی؟
معلم معلم ها: آفرین! این دیگه جواب نداره! هیچ روش اندازه گیری مستقیم و درست و حسابی وجود نداره تا تو اون فاصله بتونیم ازش کمک بگیریم. باید از اثبات عقلی کمک بگیریم تا خواص اشکال هندسی رو نشون بدیم. به هر حال جایی هست که هیچ ابزاری کار نمی کنه و فقط عقل کار می کنه!

معلم: استاد واقعاً نیازه تا تو کهکشانش بالا بریم؟ آگه این طور باشه، تو ابعاد زمینی، نیازی به اثبات هندسی نیست!!

همین هنگام صدایی از ته کلاس شنیده شد که معلمی می گفت: استاد خسته نباشید. صدای دیگری گفت: استاد آگه دانش آموزی ازم بپرسه چرا تو هندسه اثبات می کنیم و این قدر پرس و جو کنه از کلاس می ندازمش بیرون! صدای دیگری گفت: استاد ما اعصاب معصاب نداریم. آگه کسی این سؤال رو بپرسه، همون اول می ندازیمش بیرون!

خیلی ها خندیدند.

معلم معلم ها: [در حالی که نگاهش در چشمان معلم بود و از کلاس بیرون می رفت] لازم نیست تا ابعاد کهکشانش بالا بریم! اصل عدم قطعیت هایزنبرگ رو یه نگاه بنداز. اون موقع می فهمی که هیچ وقت بشر نمی تونه هیچ اندازه گیری دقیقی انجام بده!!

روابط بین پاره خطها

۱. همه پاره خطهای موجود در شکل زیر را نام ببرید.



۲. چند مثلث با محیط ۷ واحد می توان رسم کرد به طوری که طول ضلع های آنها عددهای صحیح باشند؟ هریک از مثلث ها را رسم کنید.

۳. روی محور زیر، چند نقطه، مانند D ، وجود دارد به طوری که $\overline{AB} = \overline{CD}$ ؟



۴. با توجه به اعداد و نمادهای به کار رفته در شکل‌های زیر، چرا در هر شکل $\overline{PR} = \overline{QS}$ ؟ آیا استدلالی وجود دارد که برای هر سه شکل درست باشد؟



۵. نقاط P, Q, R, S روی یک خط قرار دارند به طوری که S بین R, Q و Q بین P و R قرار دارد.

الف) با توجه به توضیحات بالا، شکل مناسبی رسم کنید.

ب) اگر $\overline{PS} = \overline{RQ}$ ، ثابت کنید $\overline{RS} = \overline{PQ}$.

در مسئله قبل، شکلی رسم نشده است؛ به نظر شما چند شکل برای شرایط گفته شده می‌توان رسم کرد؟

واضح است که با ابزار اندازه‌گیری نمی‌توانیم همه پاره‌خط‌هایی که شرایط گفته شده را دارند، بررسی کنیم؛ اما راه‌حلی وجود دارد که ما را از برابری \overline{PQ} و \overline{RS} (در همه حالات‌های ممکن) مطمئن می‌کند! به این‌گونه راه‌حل‌ها اثبات‌های هندسی می‌گویند.

کارایی یک اثبات هندسی لزوماً برای یک شکل نیست؛ بلکه برای تمامی شکل‌هایی است که همه ویژگی‌های شکل داده شده را داشته باشند. در واقع در اثبات‌های هندسی از متغیرها استفاده می‌شود تا اثبات (لزوماً) برای یک شکل خاص نباشد.

۶. نقاط A, B, C, D روی یک خط قرار دارند به طوری که $\overline{AB} = x$ و $\overline{AC} = \overline{BD} = y$. در هریک از قسمت‌های زیر، ابتدا شکل مناسبی رسم کنید و سپس عبارت جبری خواسته شده را به دست آورید.

الف) اگر نقطه C بین دو نقطه A و D ، و نقطه D بین دو نقطه B و C باشد، آنگاه \overline{CD} را برحسب متغیرهای x و y بنویسید.

ب) اگر نقطه A بین دو نقطه C و D ، و نقطه D بین دو نقطه A و B باشد، آنگاه \overline{CD} را به صورت یک عبارت جبری با متغیرهای x و y بنویسید.

ج) اگر نقطه A بین دو نقطه C و D ، و نقطه B بین دو نقطه A و D باشد، آنگاه \overline{CD} را برحسب x و y به دست آورید.

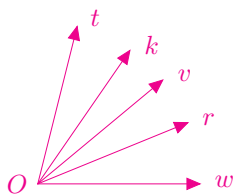
۷. دو پاره‌خط AB و CD روی یک خط راست قرار دارند و نقطه O وسط هر دو پاره‌خط است. ابتدا شکل (شکل‌های) مناسبی رسم کنید. سپس،

الف) ثابت کنید $\overline{AC} = \overline{BD}$.

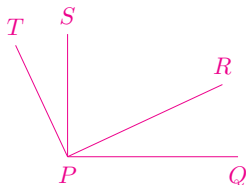
ب) ثابت کنید $\overline{AD} = \overline{BC}$.

روابط بین زاویه‌ها

۱. همهٔ زاویه‌های حاده موجود در شکل زیر را نام ببرید.



۲. در شکل زیر، $T\hat{P}R = S\hat{P}Q = 90^\circ$. ثابت کنید $T\hat{P}S = R\hat{P}Q$.



۳. الف) متمم زاویهٔ 28° درجه را به دست آورید.

ب) اختلاف مکمل و متمم زاویهٔ 28° درجه چقدر است؟

ج) اختلاف مکمل و متمم زاویهٔ 77° درجه را به دست آورید.

د) آیا اختلاف مکمل و متمم هر زاویه عددی ثابت است؟ چرا؟

۴. الف) دو پاره‌خط AB و CD یکدیگر را در نقطهٔ O قطع کرده‌اند به طوری که $\hat{AOC} = 7^\circ$. هریک از زاویه‌های \hat{AOD} ، \hat{BOC} و \hat{BOD} چند درجه است؟

ب) دو پاره‌خط AB و CD یکدیگر را در نقطهٔ O قطع کرده‌اند به طوری که $\hat{AOC} = x$. هریک از زاویه‌های \hat{AOD} ، \hat{BOC} و \hat{BOD} را برحسب x به دست آورید.

۵. الف) اگر زاویه‌ای 45° درجه باشد، زاویهٔ مکمل آن چند درجه است؟

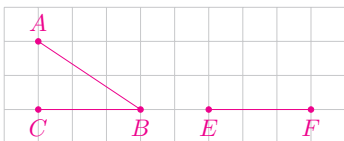
ب) اگر زاویه‌ای x درجه باشد، زاویهٔ مکمل آن برحسب x چقدر است؟

ج) مجموع دو زاویه (به اندازه‌های a و b) 75° درجه است. مجموع مکمل‌های این دو زاویه چند درجه است؟

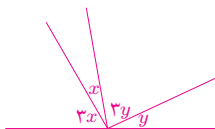
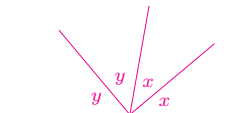
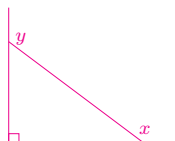
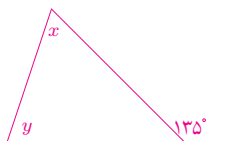


۶. در طول شبانه‌روز، چند بار زاویه بین عقربه‌های ساعت‌شمار و دقیقه‌شمار 90° درجه می‌شود؟

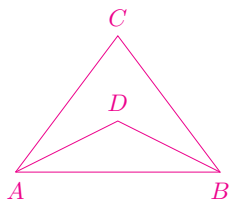
۷. در شکل زیر، نقطه D را چنان بیابید که $\overline{AB} = \overline{ED}$ و دو زاویه ABC و DEF مکمل باشند.



۸. در هریک از شکل‌های زیر، $x + y$ چقدر است؟



۹. در شکل زیر، $D\hat{A}B = D\hat{B}A$ و $C\hat{A}B = C\hat{B}A$ ثابت کنید $C\hat{B}D = C\hat{A}D$. آیا می‌توان از این تمرین نتیجه گرفت AD و BD به ترتیب نیم‌ساز زاویه‌های A و B هستند؟



۱۰. دو زاویه AOB و BOC مکمل‌اند. اگر Ox نیم‌ساز زاویه AOB و Oy نیم‌ساز زاویه BOC باشد، ثابت کنید $x\hat{O}y$ قائمه است.

۱۱. سه پاره‌خط LK ، ZW و XY در نقطه O هم‌رس‌اند. نیم‌خط OK نیم‌ساز $Z\hat{O}Y$ و $L\hat{O}W = 40^\circ$ است.

(الف) باتوجه به اطلاعات داده شده، شکل مناسبی رسم کنید.

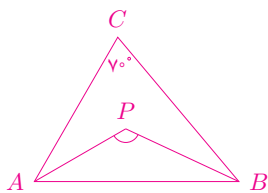
(ب) در شکلی که رسم کرده‌اید، چند زاویه متقابل به رأس وجود دارد. هریک از آنها را

نام ببرید.

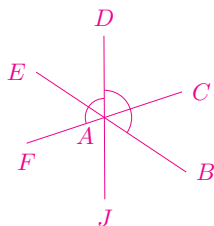
ج) اندازه زاویه‌های ZOX ، XOL و ZOY را به دست آورید.

۱۲. اندازه یک زاویه مثلثی از زاویه دوم ۲۵ درجه بیشتر و اندازه زاویه سوم ۹ واحد کمتر از دو برابر زاویه دوم است. اندازه هریک از سه زاویه این مثلث را بیابید.

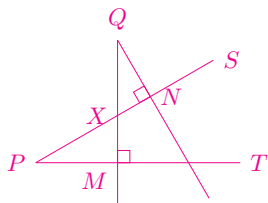
۱۳. در شکل روبه‌رو، $\hat{C} = 70^\circ$ ، AP نیم‌ساز زاویه A و BP نیم‌ساز زاویه B است.
الف) مقدار $\hat{PAB} + \hat{PBA}$ چقدر است؟
ب) زاویه APB چند درجه است؟



۱۴. سه پاره‌خط BE ، CF و DJ در نقطه A هم‌رس‌اند. اگر $\hat{BAD} = 124^\circ$ و $\hat{DAF} = 108^\circ$ باشد، اندازه زاویه \hat{EAF} چقدر است؟



۱۵. در شکل زیر، PS بر QN و PT عمود است. ثابت کنید زاویه‌های Q و P هم‌اندازه‌اند.



۱۶. اگر زاویه‌های مثلثی به صورت زیر باشند، اندازه زاویه سوم چقدر است؟

الف) 134° و 26° .

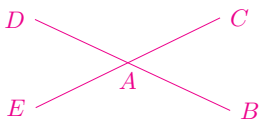
ب) 90° و n .

ج) $60^\circ + a$ و $60^\circ - a$.

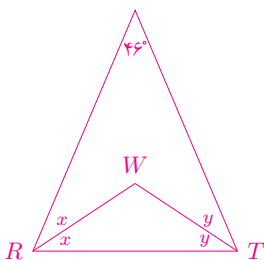
د) u و v .

۱۷. در مثلث ABC ، اندازه زاویه A سه برابر اندازه زاویه B و نصف اندازه زاویه C است. اندازه زاویه A چقدر است؟

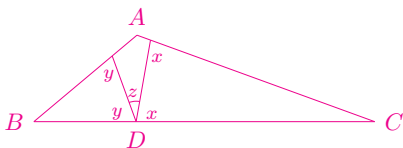
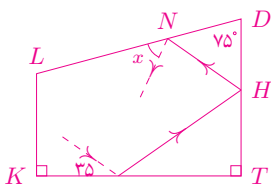
۱۸. در شکل زیر، اگر $E\hat{A}D = 3x - 15^\circ$ و $B\hat{A}C = 2x + 5^\circ$ ، آنگاه اندازه زاویه CAD چقدر است؟



۱۹. در شکل زیر، $R\hat{W}T$ چند درجه است؟

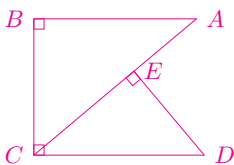


۲۰. در شکل، مسیر توپ بیلیاردی را نشان داده‌ایم که با زاویه 35° به یکی از دیواره‌های میز بیلیارد می‌خورد و مسیرش را ادامه می‌دهد. اگر زاویه برخورد توپ به میز با زاویه دور شدن توپ از میز برابر باشد، x را بیابید.

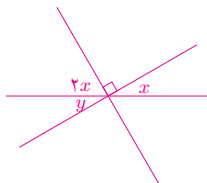
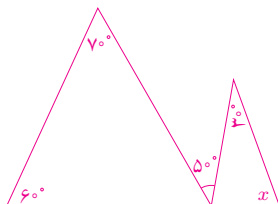
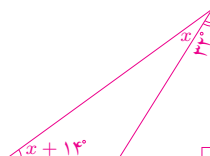
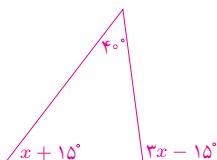
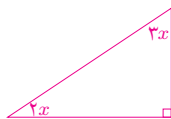
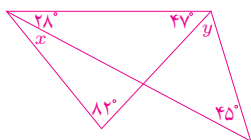


۲۱. در شکل روبه‌رو، $\hat{A} = 11^\circ$.
الف) مقدار $x + y$ را بیابید.
ب) مقدار z چقدر است؟

۲۲. در شکل زیر، $\hat{B} = \hat{BCD} = \hat{DEC} = 90^\circ$. ثابت کنید $\hat{ACB} = \hat{EDC}$.



۲۳. در هریک از شکل‌های زیر، مقدار x و y را بیابید.



تبدیل‌های هندسی و هم‌نهشتی

نکته. دو نام‌گذاری $ABCD$ و $CADB$ شکل‌های یکسانی را نشان نمی‌دهند! در چهارضلعی $ABCD$ ، دو رأس A و C روی یک ضلع نیستند درحالی‌که در چهارضلعی $CADB$ دو رأس A و C روی یک ضلع قرار دارند. شکل‌های زیر این مطلب را روشن می‌کنند.



در نام چندضلعی‌ها هر دو حرف کنارهم نشان‌دهنده دو رأس روی یک ضلع‌اند. توجه کنید که شکل سمت راست بالا را می‌توان به صورت‌های $ADBC$ ، $DBCA$ یا $CBDA$ نیز نام‌گذاری کرد.

۱. در کدام قسمت‌ها، دو چهارضلعی داده شده یکسان نیستند؟

الف) $ABCD$ و $CDAB$ ب) $BCDA$ و $BADC$.

۲. در کدام قسمت، دو پنج‌ضلعی داده شده یکسان نیستند؟

- (الف) $ABCDE$ و $ABCED$ (ب) $DEABC$ و $CDEAB$
 (ج) $CAEDB$ و $DBCAC$ (د) $ECDBA$ و $CADBE$

۳. در چهارضلعی $ABCD$ دو مثلث ABD و BCD هم‌نهشت‌اند.



(الف) با ذکر دلیل مشخص کنید کدام یک از رابطه‌های زیر همواره درست است؟

- $\widehat{BAD} = \widehat{BCD}$ ● $\widehat{ABD} = \widehat{CDB}$ ● $\overline{AB} = \overline{CD}$

(ب) اگر $\widehat{ABD} = \widehat{CDB}$ ، آنگاه کدام یک از رابطه‌های زیر همواره درست است؟

- $\overline{AB} = \overline{CD}$ ● $\overline{AB} = \overline{BC}$ ● $\overline{AD} = \overline{BC}$

(ج) اگر $\overline{AB} = \overline{CD}$ ، آنگاه کدام یک از رابطه‌های زیر همواره درست است؟

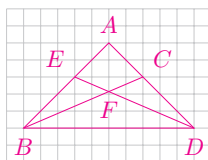
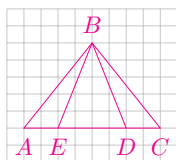
- $\widehat{ADB} = \widehat{CBD}$ ● $\widehat{ABD} = \widehat{CDB}$

۴. در چهارضلعی $IRAN$ دو مثلث IRA و INA هم‌نهشت‌اند.

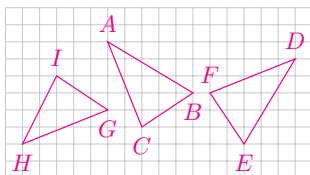
(الف) اگر بدانیم $\overline{IR} = \overline{AN}$ ، آنگاه چه تبدیلی‌هایی مثلث IRA را به مثلث INA تبدیل می‌کند؟

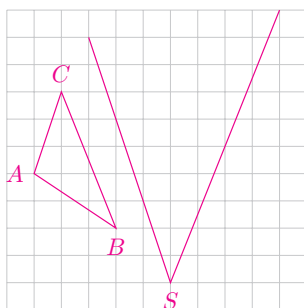
(ب) اگر بدانیم $\overline{IR} = \overline{IN}$ ، آنگاه چه تبدیلی‌هایی مثلث IRA را به مثلث INA تبدیل می‌کند؟

۵. در هریک از شکل‌های زیر، دو جفت مثلث هم‌نهشت وجود دارد. آن مثلث‌ها را نام ببرید و مشخص کنید با چه تبدیلی‌هایی به یکدیگر تبدیل می‌شوند. سپس اجزای برابر آنها را مشخص کنید.

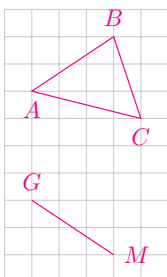


۶. در شکل زیر کدام مثلث‌ها هم‌نهشت‌اند؟ تبدیلی‌هایی که آنها را به یکدیگر تبدیل می‌کند، بیابید. سپس اجزای برابر دو مثلث هم‌نهشت را مشخص کنید.

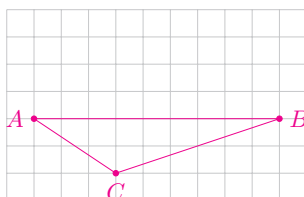




۷. در شکل روبه‌رو، دو نقطه P و Q را روی اضلاع زاویه S طوری بیابید که دو مثلث PQS و ABC هم‌نهشت شوند. تبدیل‌هایی که دو مثلث را به یکدیگر تبدیل می‌کند، بیابید و سپس اجزای برابر را مشخص کنید.



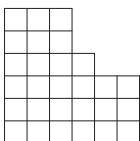
۸. در شکل روبه‌رو، نقطه N را طوری بیابید که دو مثلث ABC و GMN برابر باشند. تبدیل‌هایی که دو مثلث را به یکدیگر تبدیل می‌کند، بیابید و سپس اجزای برابر را مشخص کنید.



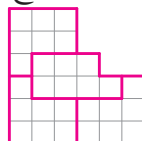
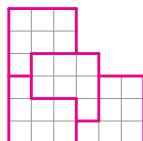
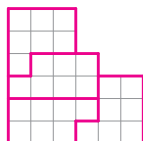
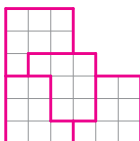
۹. در شکل روبه‌رو، چند نقطه مانند D می‌توان یافت به طوری که دو مثلث ABC و ABD هم‌نهشت باشند؟ در هر حالت تبدیل‌ها را مشخص کنید و اجزای برابر را بیابید.



۱۰. در یک آزمون مسئله زیر مطرح شده بود. شکل زیر را به چهار شکل هم‌نهشت تقسیم کنید.

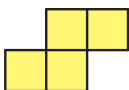


شکل‌های زیر، پاسخ چهار نفر از دانش‌آموزان را نشان می‌دهد.



کدام پاسخ درست و کدام نادرست است؟ دربارهٔ پاسخ‌های درست، مشخص کنید چه تبدیل‌هایی شکل‌های هم‌نهشت را به یکدیگر تبدیل می‌کنند.

۱۱. به شکل‌هایی که از به هم چسباندن یک (یا چند) ضلع مربع‌های واحد به یکدیگر ساخته می‌شوند، چندخونه‌ای می‌گویند. برای مثال، شکل‌های زیر چندخونه‌ای (۴-خونه‌ای) است.

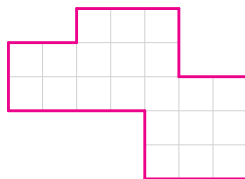
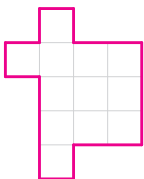


الف) چند ۴-خونه‌ای غیر هم‌نهشت وجود دارد؟

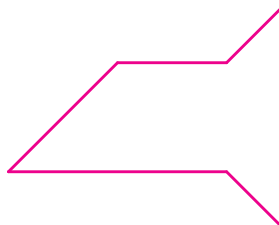
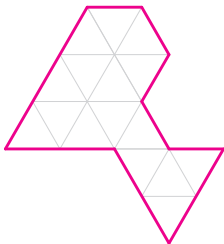
ب) چند ۵-خونه‌ای غیر هم‌نهشت وجود دارد؟

ج) سی و پنج ۶-خونه‌ای غیر هم‌نهشت وجود دارد. حداقل ده ۶-خونه‌ای غیر هم‌نهشت رسم کنید و آنها را با پنج نفر از همکلاسی‌هایتان به اشتراک بگذارید. آیا از این جواب‌ها، سی و پنج ۶-خونه‌ای غیر هم‌نهشت حاصل می‌شود؟

۱۲. هریک از شکل‌های زیر را به سه چندضلعی هم‌نهشت تقسیم کنید. (خطوط خاکستری داخل شکل می‌توانند این کار را آسان‌تر کنند!) در هر مورد مشخص کنید چه تبدیل‌هایی چندضلعی‌های هم‌نهشت را به یکدیگر تبدیل می‌کنند.



۱۳. با یک برش، هریک از چندضلعی‌های زیر را به دو چندضلعی هم‌نهشت تقسیم کنید. (خطوط خاکستری داخل شکل می‌توانند این کار را آسان‌تر کنند!) در هر مورد مشخص کنید چه تبدیل‌هایی چندضلعی‌های هم‌نهشت را به یکدیگر تبدیل می‌کنند!



¹P.J. Carter, *Advanced IQ tests*, Kogan page, London, 2008, page 70.

فصل ۵

شمارنده‌ها و اعداد اول

مطالعهٔ عددهای صحیح همیشه از زیباترین و جالب‌ترین بخش‌های ریاضیات بوده است. ریاضی‌دانان رابطه‌های زیبایی را در این اعداد کشف کرده‌اند که این رابطه‌ها در طبیعت هم دیده می‌شوند؛ از جمله مارپیچ‌هایی که در گل آفتابگردان می‌توانید ببینید.

گفت و گو

- معلم ریاضی: هه هه هه!
- معلم ورزش: چی شده؟ جک می خونی؟ ما رو هم بی نصیب نذار.
- معلم ریاضی: نه! مطلبی درباره «الکساندر گروتندیک» می خونم. اینجا نوشته که یه روز در حال سخنرانی گفته: «یه عدد اول در نظر بگیرید، مثل ۵۱!»
- معلم ورزش: الکساندر چی؟
- معلم ریاضی: گروتندیک. یه ریاضی دان بزرگه!
- معلم ورزش: حالا چرا خندیدی؟
- معلم ریاضی: چون ۵۱ عدد اول نیست!
- معلم ورزش: این خیلی سخته که تشخیص بدن ۵۱ عدد اوله یا نه؟
- معلم ریاضی: نه!! خیلی هم آسونه. همینه که خنده داره!
- معلم ورزش: خب ببخشید؛ اینکه اصلاً خنده نداره. یه نفر که ادعا می کنه ریاضی دانه یه چیز آسون رو نتونسته تشخیص بده؛ حتماً یارو متقلب بوده!
- معلم ریاضی: نه! همه ریاضی دان ها می دونن که گروتندیک یه ریاضی دان تراز اوله. وسط یه بحث خیلی سنگین، یه دفعه حواسش پرت می شه و این اشتباه از سر می زنه. ریاضی دان های بزرگ هم گاهی اشتباه های کوچیک می کنن.
- معلم علوم: اتفاقاً من یه الکساندر می شناسم که از الکساندر شما مشهورتره. الکساندر فلمینگ. همون که پنی سلین رو کشف کرده.
- معلم ورزش: آره؛ اسمش رو شنیدم. از پنی سلین هم استفاده کردم.
- معلم علوم: بزرگترین جایزه بشری رو هم گرفته: مدال نوبل.
- معلم ریاضی: البته فلمینگ خدمت بزرگی به جامعه بشری کرده؛ اما بزرگترین جایزه بشری نوبل نیست.
- معلم علوم: آگه نوبل نیست، پس چیه؟
- معلم ریاضی: مدال فیلدزه.

معلم علوم: چرا؟

معلم ریاضی: خُب فیلدز رو هر چهار سال یه بار می‌دن؛ اما نوبل رو هر سال. فیلدز شرط بسیار سختش هم اینه که باید زیر ۴۰ سال داشته باشی؛ اما نوبل ممکنه تو هر سنی داده بشه.

معلم علوم: عجب! این همون جایزه‌ای نیست که تازگی‌ها یه ایرانی گرفته؟

معلم ریاضی: آره؛ مریم میرزاخانی. فرزاتگان تهران درس خونده بوده.

معلم:؟ یعنی باور کنم که جایزه‌ای که یه ایرانی گرفته از جایزه نوبل بالاتره؟!

معلم ریاضی: براتون متأسفم. زندگی و دیدگاه کوچکی دارید!

عدد اول

۱. باتوجه به گفت‌وگوی بالا، به نظر شما چرا ریاضی‌دان بزرگی مانند گروتندینگ (تصویر زیر) گفته ۵۱ عدد اول است؟



۱	۲۲	۱۵		۲۱
۱۸				
	۱۲	۷		
	۵			
۲۳	۱۴		۶	۲۵

۲. عددهای ۱ تا ۲۵ (و هرکدام یک‌بار) را در ۲۵ خانه جدول روبه‌رو طوری قرار دهید که مجموع هر دو عدد همسایه، عدد اول شود.
به دو عدد همسایه می‌گوییم هرگاه خانه‌های آنها در یک ضلع مشترک باشند.



۳. الگوی عددی زیر، ۳ عضو دارد.

۳, ۵, ۷.

همهٔ اعضای این دنباله، عدد اول‌اند و اختلاف هر دو عضو متوالی آن یکسان است.
الف) یک الگوی عددی با ۵ عضو بیابید که همهٔ اعضای آن عدد اول باشند و اختلاف هر دو عضو متوالی آن یکسان باشد.
ب) یک الگوی عددی با ۶ عضو بیابید که همهٔ اعضای آن عدد اول باشند و اختلاف هر دو عضو متوالی آن یکسان باشد.
ج) آیا یک الگوی عددی با ۱۰ عضو وجود دارد که همهٔ اعضای آن عدد اول باشند و اختلاف هر دو عضو متوالی آن یکسان باشد؟

یکی از مشهورترین ریاضی دانان معاصر (تصویر زیر)، به نام ترنس تائو (Trence Tao)، در سال ۲۰۰۴ میلادی ثابت کرد که برای هر n داده شده می‌توان یک الگوی عددی با n عضو یافت به طوری که همهٔ اعضای آن عدد اول و اختلاف هر دو عضو متوالی مقداری ثابت باشد.



۴. قانون الگوی عددی زیر را کشف کنید و ۱۰ عدد بعدی آن را بنویسید.

۰, ۱, ۲, ۲, ۳, ۳, ۴, ۴, ۴, ۵, ۵, ۶, ۶, ۶, ۷, ۷, ...

راهنمایی: تعداد اعداد اول کوچک‌تر یا مساوی هر عدد طبیعی را بشمارید.



کارگاه بازی - شمارنده و هُپ

۱. بازی شمارنده‌ها

این بازی، یک بازی دو نفره است. نفر اول از جدول زیر یک عدد انتخاب می‌کند و همه شمارنده‌های آن عدد را خط می‌زند و به تعداد اعدادی که خط زده است، امتیاز کسب می‌کند. نفر دوم عددی خط نخورده را انتخاب می‌کند و همه شمارنده‌های خط نخورده آن را خط می‌زند و به تعداد اعدادی که خط زده است، امتیاز می‌گیرد. این کار به نوبت ادامه پیدا می‌کند تا همه عددهای جدول خط بخورند. در پایان کسی که امتیاز بیشتری دارد، برنده است. **توجه.** اگر بازیکنی عددی انتخاب کند و شمارنده‌های آن عدد را به اشتباه خط بزند، رقیب او می‌تواند در نوبت خود دو عدد انتخاب کند!

۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰
۱۱	۱۲	۱۳	۱۴	۱۵	۱۶	۱۷	۱۸	۱۹	۲۰
۲۱	۲۲	۲۳	۲۴	۲۵	۲۶	۲۷	۲۸	۲۹	۳۰
۳۱	۳۲	۳۳	۳۴	۳۵	۳۶	۳۷	۳۸	۳۹	۴۰
۴۱	۴۲	۴۳	۴۴	۴۵	۴۶	۴۷	۴۸	۴۹	۵۰
۵۱	۵۲	۵۳	۵۴	۵۵	۵۶	۵۷	۵۸	۵۹	۶۰
۶۱	۶۲	۶۳	۶۴	۶۵	۶۶	۶۷	۶۸	۶۹	۷۰
۷۱	۷۲	۷۳	۷۴	۷۵	۷۶	۷۷	۷۸	۷۹	۸۰
۸۱	۸۲	۸۳	۸۴	۸۵	۸۶	۸۷	۸۸	۸۹	۹۰
۹۱	۹۲	۹۳	۹۴	۹۵	۹۶	۹۷	۹۸	۹۹	۱۰۰

۲. هُپ عدد اول

سه نفر از دانش‌آموزان جلوی کلاس می‌ایستند. معلم عددی طبیعی بین ۱ تا ۱۰۰ انتخاب می‌کند و بازی هُپ از این عدد شروع می‌شود. هر دانش‌آموز در نوبتش (بدون مکث) عدد طبیعی بعدی را می‌گوید اما باید به جای اعداد اول بگوید: «هُپ!» اگر کسی عددی اول را به زبان آورد، بازنده است و معلم دانش‌آموز دیگری را جایگزین او می‌کند. سپس معلم دوباره بازی را با یک عدد بین ۱ تا ۱۰۰ شروع خواهد کرد.

شمارنده

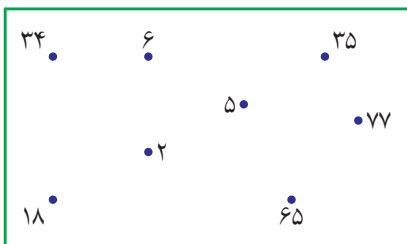
۱. در بازی شمارنده‌ها،

الف) بهترین انتخاب برای کسی که بازی را شروع می‌کند، چه عددی است؟
 ب) اگر نفر اول با بهترین انتخاب بازی را شروع کند، بهترین انتخاب برای نفر دوم چه عددی است؟

۲. در شکل زیر دو فلش می‌بینید. از فلش بالایی وارد جدول می‌شویم و از فلش پایینی خارج. در هر مرحله به خانه همسایه می‌رویم با این شرط که عدد خانه همسایه شمارنده عدد خانه‌ای که داخل آن هستیم، باشد یا برعکس. مسیری پیدا کنید که از فلش بالایی وارد شویم و از فلش پایینی خارج. دو خانه همسایه‌اند هرگاه در یک ضلع مشترک باشند.

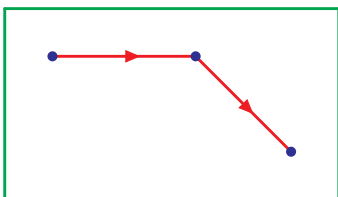
→	۱۸	۳	۱۲	۴	۲۰	۱۰۰
	۹	۳۹	۳	۲۱	۴۰	۸
	۶۳	۷	۲۸	۵۶	۳۰	۱۲
	۴۵	۹۱	۱۳	۱۶	۱۰	۲
	۱۵	۶	۷۸	۶۸	۴	۴۶
	۳	۱۰۲	۵۱	۱۷	۹۲	۲۳ →

۳. تعدادی عدد طبیعی متفاوت روی کاغذ می‌نویسیم. دو عدد a و b از آنها را در نظر می‌گیریم. اگر a شمارنده b باشد، پیکانی از a به b رسم می‌کنیم. اگر تمام پیکان‌های موجود بین اعداد روی کاغذ را رسم کنیم، از آن به عنوان «نمودار کشیدن» یاد می‌کنیم. الف) برای عددهای زیر، نمودار بکشید.

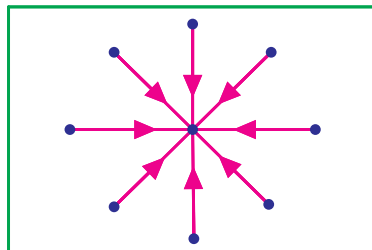
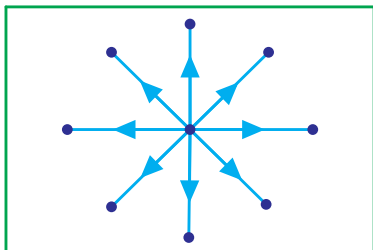
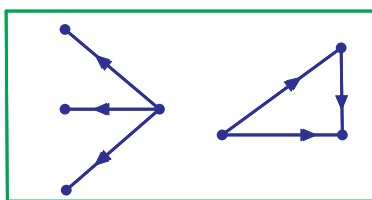
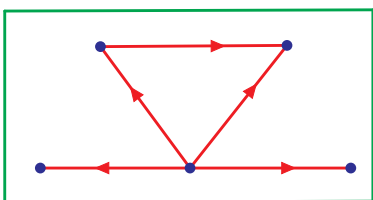


ب) بیژن نمودار صفحه بعد را رسم کرد. بعد هر چه تلاش کرد سه عدد پیدا کند که این نمودار برای آن سه عدد درست باشد، نتوانست. چرا تلاش بیژن بی‌فایده بود؟

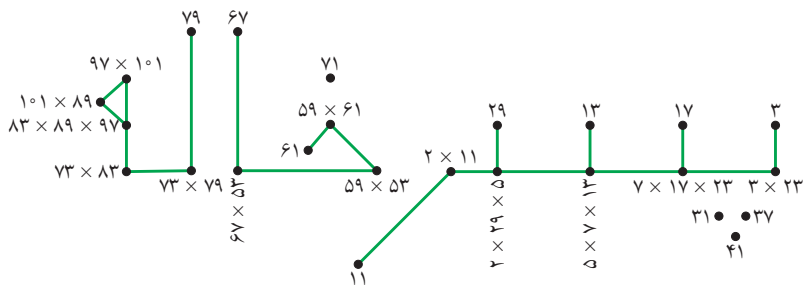
شمارنده‌ها و اعداد اول



ج) هریک از نمودارهای زیر را با عددهای طبیعی مناسب پر کنید.



۴. پسرخاله،^۱ با قانون تمرین قبل، نام خود را به شکل زیر نوشت و سپس روی هر نقطه عددی مناسب قرار داد.



الف) آیا پسرخاله، همهٔ عددهای اول دورقمی را برای نوشتن «پسرخاله» به کار برده است؟
ب) شما هم نام خود را با همین روش بنویسید.

^۱ برگرفته از مجموعهٔ تلویزیونی کلاه‌قرمزی به کارگردانی ایرج طهماسب.

۵. اگر p عددی اول باشد، آنگاه عبارت جبری $1 + (p-1) \times 2 \times 3 \times \dots \times p$ بر عدد p بخش پذیر است.

برای مثال، اگر $p = 5$ باشد، آنگاه $1 + 2 \times 3 \times 4 = 25$ ؛ یعنی ۲۵ بر ۵ بخش پذیر است. برای هر یک از اعداد زیر نیز درستی عبارت فوق را بررسی کنید.

الف) $p = 7$

ب) $p = 11$

ج) $p = 13$

۶. به عددی که مجموع همهٔ شمارنده‌های آن، به جز خود عدد، برابر آن عدد شود، «عدد کامل» می‌گویند. برای مثال، اعداد ۶ و ۲۸ کامل‌اند.

• $6 = 1 + 2 + 3$

• $28 = 1 + 2 + 4 + 7 + 14$

آیا می‌توانید عدد کاملی پیدا کنید که مضرب ۱۶ باشد؟



مسابقهٔ تیراندازی

ستاره و سپیده یک سیبل و تعدادی دارت دارند. داخل سیبل، عددهای ۲، ۳، ۵ و ۷ نوشته شده است. ستاره و سپیده با قانون‌های زیر شروع به بازی می‌کنند.

- هر نفر ۵ دارت پرتاب می‌کند.
- امتیاز نهایی هر نفر حاصل ضرب امتیاز ۵ پرتابش است.
- امتیاز دارتی که به عددهای ۲، ۳، ۵ و ۷ برخورد نکند، ۱ است.
- امتیاز نهایی نباید بیشتر از ۶۹ شود! اگر بیشتر از ۶۹ شد، امتیاز نهایی صفر است!



باتوجه به قانون‌های بالا به پرسش‌های زیر پاسخ دهید:

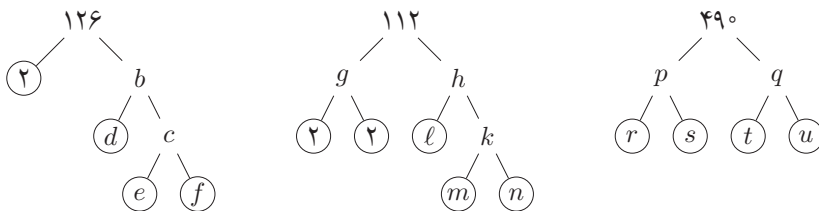
۱. اگر دارت‌های ستاره امتیازهای ۲، ۳، ۵ و ۱ گرفته باشند، امتیاز نهایی ستاره چقدر است؟

۲. اگر امتیاز نهایی سپیده ۵۰ باشد، امتیاز هر پرتاب سپیده را از کوچک به بزرگ بنویسید.
۳. کدام یک از عددهای زیر می‌توانند امتیاز نهایی باشند؟ برای هر کدام دلیل بیاورید.

۳۲ (د)	۲۹ (ج)	۲۷ (ب)	۱۶ (الف)
۷۲ (ح)	۶۴ (ز)	۴۸ (و)	۵۴ (ه)
۴. پرتاب اول ستاره به سیبل نخورد! حال اگر ستاره بخواهد (و بتواند!) به هر عدد داخل سیبل، حداکثر یک دارت برخورد کند، امتیاز نهایی او حداکثر چیست؟
۵. سپیده بعد از ۴ پرتاب، امتیازی کمتر از ۴۰ به دست آورد و فهمید که اگر دارت بعدی‌اش را خارج از سیبل نزند، امتیاز نهایی‌اش صفر می‌شود. ۴ دارت سپیده را روی سیبل نقاشی کنید.
۶. سپیده بعد از ۵ پرتاب، امتیازش ۶۳ شد. آیا ستاره می‌توانست امتیاز بیشتری بگیرد؟
۷. اگر ستاره از پرتاب اول امتیاز ۲ گرفته باشد، آیا ممکن است امتیاز نهایی‌اش عددی فرد شود؟ چرا؟
۸. کدام عددهای فرد نمی‌توانند امتیاز نهایی باشند؟ چرا؟
۹. کدام عددهای زوج نمی‌توانند امتیاز نهایی باشند؟ چرا؟

شمارنده‌ اول

۱. در زیر، نمودارهای تجزیه اعداد ۱۲۶، ۱۱۲ و ۴۹۰ رسم شده است. ابتدا به جای هر متغیر اعداد مناسب قرار دهید. سپس هریک از این عددها را به صورت حاصل ضرب عددهای اول بنویسید.



۲. علی با مکعب‌های کوچک هم‌اندازه یک مکعب مستطیل ساخت. خواهرش یک ردیف از وجه بالای مکعب مستطیل برداشت که از ۷۷ مکعب تشکیل شده بود. برادر بزرگ‌ترش یک ردیف از وجه جلوی مکعب مستطیل باقی‌مانده برداشت که از ۵۵ مکعب تشکیل



شده بود. برادر کوچک‌ترش یک ردیف از وجه سمت راست شکل باقی مانده برداشت. در پایان چند مکعب باقی مانده بود؟



۳. هر عدد مرکب، از حاصل ضرب عددهای اول به دست می‌آید. اعداد اولی را که از حاصل ضرب آنها یک عدد مرکب ساخته می‌شود، بچه‌های آن عدد مرکب می‌نامیم.

برای مثال، عدد ۱۲ سه بچه دارد. ۲، ۲ و ۳؛ یعنی یک بچه بزرگ (۳) و یک دوقلو (۲ و ۲). چون $12 = 2 \times 2 \times 3$.

الف) تعداد بچه‌های هریک از اعداد زیر را به دست آورید.

- ۱۸
- ۳۲
- ۴۴
- ۵۱
- ۵۶
- ۶۸
- ۸۴
- ۸۷
- ۹۱
- ۹۵
- ۱۱۵
- ۱۴۴

ب) چند عدد دو رقمی با چهار بچه وجود دارد به طوری که این چهار بچه، دو جفت دوقلو باشند؟

ج) همه عددهای دو رقمی را بنویسید که حداقل چهار بچه چهارقلو داشته باشند.

د) من کوچک‌ترین عدد فردی هستم که ۵ فرزند دارم. یک دوقلو و یک سهقلو! من کی‌ام؟

ه) همه عددهای فرد دو رقمی را بنویسید که یکی از بچه‌هایشان ۱۳ باشد.

۴. الف) حاصل ضرب دو عدد طبیعی برابر ۵۰۰ شده است. اگر هیچ‌کدام از این دو عدد بر ۱۰ بخش پذیر نباشند، این دو عدد را بیابید.

ب) اگر x و y عددهایی طبیعی باشند و هیچ‌یک بر ۶، ۱۰ و ۱۵ بخش پذیر نباشند، آنگاه همه جواب‌های معادله $x.y = ۶۰۰$ را بیابید.

ج) اگر m ، n و p اعدادی طبیعی باشند و هیچ‌یک بر ۹، ۱۰ و ۱۵ بخش پذیر نباشند، آنگاه همه جواب‌های معادله $m.n.p = ۹۰۰$ را بیابید.

۱۵	۳۹	۴۹	۵۱	
		۳۶	۶۶	۹۱

۵. خانه‌های خالی جدول روبه‌رو را طوری پر کنید که: اولاً حاصل ضرب عددهای دو سطر یکسان باشند؛ ثانیاً عددها از کوچک به بزرگ مرتب شده باشند.



بزرگ‌ترین شمارندهٔ مشترک

۱. حاصل ب.م.م‌های زیر را به دست آورید.

- | | |
|-----------------------------------|-----------------------------------|
| الف) $(2 \times 15, 2 \times 6)$ | ب) $(2 \times 5, 3 \times 7)$ |
| ج) $(4 \times 6, 12 \times 8)$ | د) $(3 \times 15, 5 \times 9)$ |
| ه) $(91 \times 31, 39 \times 93)$ | و) $(18 \times 12, 24 \times 51)$ |
| ز) $(202, 78)$ | ح) $(105, 77)$ |

۲. منظور از $(2, 4, 6)$ ب.م.م سه عدد $2, 4, 6$ است. حاصل $(2, 4, 6)$ و $(45, 63, 90)$ را به دست آورید.

دو عدد a و b را «نسبت به هم اول» می‌نامند هرگاه $(a, b) = 1$. برای مثال 91 و 51 نسبت به هم اول اند ولی 39 و 65 نسبت به هم اول نیستند.

۳. درستی یا نادرستی هریک از عبارتهای زیر را با ذکر دلیل بیان کنید.

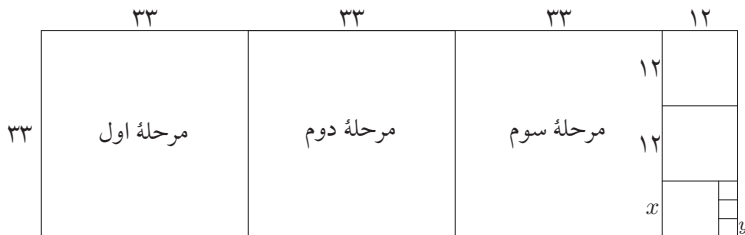
الف) ب.م.م دو عدد زوج، عددی زوج است.

ب) ب.م.م دو عدد فرد، عددی فرد است.

ج) ب.م.م یک عدد زوج و یک عدد فرد، عددی زوج است.

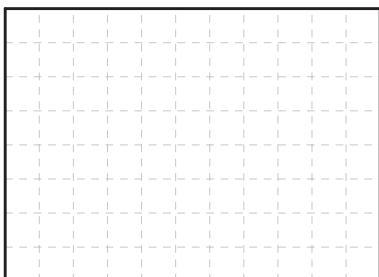
۴. شکل زیر مستطیلی به ابعاد 33 و 111 را نشان می‌دهد. در هر مرحله، بزرگ‌ترین مربع ممکن را از آن جدا می‌کنیم.

در مرحلهٔ اول مربعی به طول ضلع 33 از آن جدا می‌کنیم و یک مستطیل به ابعاد 78 و 33 باقی می‌ماند. در مرحلهٔ دوم و سوم نیز مربعی به طول ضلع 33 از باقی‌ماندهٔ شکل برمی‌داریم. در مرحلهٔ چهارم طول ضلع بزرگ‌ترین مربع ممکن 12 است. این کار را ادامه می‌دهیم تا تمام مستطیل با مربع‌های مختلف پوشیده شود.



الف) مقدار x و y را بیابید.

ب) طول ضلع مربع آخرین مرحله چه نسبتی با ب.م.م دو عدد 111 و 33 دارد؟



۵. در شکل روبه‌رو، مستطیلی به ابعاد ۶۶ و ۴۸ را با نقطه‌چین به مربع‌های برابر تقسیم کرده‌ایم. با روشی که در مسئله قبل گفته شد، هربار بزرگترین مربع ممکن را از مستطیل شبکه‌بندی شده بالا جدا کنید. طول ضلع مربع آخرین مرحله چقدر است؟

۶. سه حوض داریم که می‌خواهیم در یکی ۸۷۰ لیتر، در دومی ۸۹۹ لیتر و در سومی ۹۲۸ لیتر آب بریزیم. می‌خواهیم فقط با یک نوع سطل این کار را انجام دهیم به شرطی که همه محتوای سطل را هر بار در حوض‌ها خالی کنیم. بزرگترین سطلی که می‌توانیم با آن این کار را انجام دهیم چند لیتری است؟

	۱۲	۱۰
۱۵	۳	۵
۴	۴	۲

۷. جدول روبه‌رو را با دقت ببینید. در سطر اول عددهای ۱۰ و ۱۲، و در ستون اول عددهای ۱۵ و ۴ را قرار داده‌ایم. سپس در محل تقاطع هر عدد از سطر اول با عددی از ستون اول، ب.م.م آن دو عدد را نوشته‌ایم. باتوجه به سه جدول زیر به پرسش‌ها پاسخ دهید.

الف) خانه‌های خالی جدول سمت راست را با قانون بالا پر کنید.

ب) در جدول میانی، باتوجه به قانون گفته شده و ب.م.م‌های داخل جدول، برای هریک از متغیرها کوچکترین عدد طبیعی ممکن چیست؟

ج) آیا می‌توانید جدول سمت چپ را با کوچکترین عددهای طبیعی ممکن طوری پر کنید که قانون بالا برقرار باشد؟

		۶۶	
	۵۲		۸۴
۴۸			
	۹۸		۷۲

	t	k	v
x	۱	۵	۷۷
y	۱۸	۹	۱
z	۴	۱	۹۱

	۵۱	۱۰۵	۳۹
۸۵			
۹۱			
۶۵			

کوچکترین مضرب مشترک

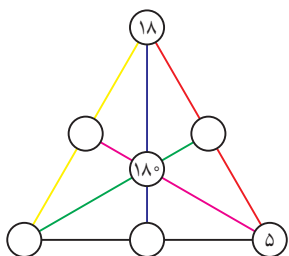
۱. چند عدد طبیعی دورقمی وجود دارد که هم بر ۶ بخش پذیر است و هم بر ۹؟

۲. حاصل عبارت‌های زیر را به دست آورید:

- | | | |
|-----------------|-----------------|----------------|
| الف) [۲۱, ۵۵] | ب) [۵۴, ۳۶] | ج) [۲۴, ۳۹] |
| د) [۳۹, ۶۵] | ه) [۹۱, ۱۴] | و) [۵۱, ۱۷] |
| ز) [۱۶, ۲۰] | ح) [۳۳, ۲۲] | ط) [۴۰, ۶۰] |
| ی) [۲۷, ۱۲, ۴۵] | ک) [۱۵, ۲۵, ۷۵] | ل) [۹, ۱۲, ۱۵] |

۳. در هر قسمت x را طوری بیابید که کوچک‌ترین عدد طبیعی ممکن باشد:

- | | | |
|--------------------|--------------------|------------------|
| الف) $[۶, x] = ۲۴$ | ب) $[۳۶, x] = ۷۲$ | ج) $[۶, x] = ۱۲$ |
| د) $[۱۵, x] = ۲۵$ | ه) $[۱۸, x] = ۵۴$ | و) $[۹, x] = ۵۴$ |
| ز) $[۵۱, x] = ۱۵۳$ | ح) $[۳۵, x] = ۱۰۵$ | ط) $[۸, x] = ۱۶$ |



۴. در شکل روبه‌رو، شش پاره‌خط (با رنگ‌های متفاوت) رسم کرده‌ایم و سپس روی هریک سه دایره قرار داده‌ایم.

ک.م.م. عدددهای داخل دایره‌های ابتدا و انتهای هر خط را در دایره میانی می‌نویسیم. هریک از دایره‌های خالی را با کوچک‌ترین عدد طبیعی ممکن پر کنید.

۵. مادر بزرگه دو خروس به نام‌های «حنایی» و «نوک‌سیاه» دارد. آنها از ساعت ۴ تا ۶ صبح قوقولی قوقو می‌کنند. حنایی هر ۸ دقیقه یک‌بار قوقولی قوقو می‌کند و نوک‌سیاه هر ۱۴ دقیقه یک‌بار. وقتی که آنها باهم می‌خوانند، مخمل، گربه مادر بزرگه، از خواب می‌پرد؛ کمی غرغر می‌کند و دوباره می‌خوابد. اگر خروس‌ها از ساعت ۴ صبح، هم‌زمان باهم شروع به خواندن کنند، تا ساعت ۶ صبح مخمل چند بار از خوابِ ناز می‌پرد؟ در چه ساعت‌هایی؟^۱



^۱ برگرفته از مجموعه تلویزیونی «خونه مادر بزرگه»، اثر مرضیه برومند.

۶. چند عدد طبیعی سه‌رقمی وجود دارد که هم بر ۱۸ بخش‌پذیر است و هم بر ۸۱؟
۷. راهزنان «گرگ‌دره» تعدادی گوسفند دزدیدند. دزدها ۱۸ نفر بودند. سردهسته آنها «حسام بیگ»، گوسفندها را به‌طور مساوی بین همه اعضای گروه تقسیم کرد و ۵ گوسفند باقی ماند که آنها را هم برای خودش برداشت. سه نفر از دزدها به این روش تقسیم او اعتراض کردند. حسام بیگ عصبانی شد و گفت: «چه معنی می‌ده دزد اعتراض کنه! اصلاً به شما سه‌تا گوسفند، گوسفند نمی‌دم». حسام بیگ این‌بار گوسفندها را بین ۱۵ نفر به‌طور مساوی تقسیم کرد و باز هم ۵ گوسفند باقی ماند که آنها را هم برای خودش برداشت. اگر تعداد گوسفندها کمتر از ۱۰۰ رأس باشد، راهزنان چند گوسفند دزدیده‌اند؟



لقمان را گفتند: «ادب از که آموختی؟»
گفت: «از بی‌ادبان، هرچه از ایشان در نظرم ناپسند آمد، از آن پرهیز کردم.»
نگویند از سر بازیچه حرفی
کز آن پندی نگیرد صاحب هوش
وگر صد باب حکمت پیش نادان
بخوانند، آیدش بازیچه در گوش
گلستان سعدی

۸. محمود تعدادی تپاله دارد. می‌دانیم تعداد تپاله‌ها بر عددهای ۲، ۳، ۴، ۵ و ۶ بخش‌پذیر است. اگر تپاله‌های محمود کمتر از صدتا باشد، محمود چند تپاله دارد؟
۹. الف) می‌دانیم x عددی دورقمی و $x - 7$ و $x - 8$ به‌ترتیب بر ۷ و ۸ بخش‌پذیرند. x چه عددی است؟
- ب) می‌دانیم y عددی دورقمی و $y - 12$ و $y - 16$ به‌ترتیب بر ۱۲ و ۱۶ بخش‌پذیرند. y چه عددی است؟
- ج) کوچک‌ترین عدد طبیعی را پیدا کنید که باقی‌مانده تقسیم آن بر هر دو عدد ۲۴ و ۱۸ برابر ۷ باشد.

کارگاه بازی - نقطه بذار - شلیک کن!

تعداد نفرات هر تیم و وسایل مورد نیاز: این بازی که بین دو تیم دو نفره انجام می‌شود، به دو برگه «جدول نقطه بذار- شلیک کن» و دو «دایره امتیاز» نیاز دارد.

کار هر بازیکن: هر بازیکن، نقطه‌ای در زیر خط‌چین برگه جدول «نقطه بذار- شلیک کن» می‌گذارد؛ برگه را دقیقاً از وسط طول آن (نقطه‌چین)، تا می‌کند و پشت اثر نقطه، نقطه‌ای پررنگ می‌کشد تا اثر آن نقطه روی عددی از جدول بیفتد. عددی که بازیکن به آن شلیک کرده، باید در دایره امتیاز، در ناحیه همان عدد با ضربدر علامت زده شود. هر بازیکن ۵ شلیک نقطه‌ای می‌کند.

امتیاز هر تیم و چگونگی محاسبه آن: امتیاز هر بازیکن حاصل ضرب عددهای ناحیه علامت‌دار شده در دایره امتیاز است. امتیاز نهایی هر تیم، ک.م.م امتیاز بازیکن‌های آن تیم است.

برنده: هر تیمی که امتیاز نهایی‌اش بیشتر باشد، برنده است.

در زیر، تصویر یک دایره امتیاز آمده است.



به نکته‌های زیر توجه کنید:

- ابتدا نفر اول هر تیم ۵ شلیک خود را انجام می‌دهد و سپس هم‌تیمی او وارد عمل می‌شود.
- در هر تیم باید رنگ خودکار اعضای تیم متفاوت باشد و امتیاز هر نفر با خودکار خودش در دایره امتیاز ثبت شود.
- بعد از اینکه کار یک تیم تمام شد و امتیازهای دو نفر (با دو رنگ متفاوت) در دایره امتیاز ثبت شد، دایره امتیاز به تیم حریف داده می‌شود تا آنها ک.م.م را محاسبه کنند. اگر تیم حریف ک.م.م را اشتباه حساب کند، هر بازیکن تیم مقابل یک شلیک جایزه می‌گیرد و بعد از شلیک و ثبت امتیاز، دوباره دایره امتیاز به تیم حریف داده می‌شود.

- اگر شلیک نقطه‌ای به خانه‌های خالی یا اطراف جدول برخورد کند، امتیاز ۱ محسوب می‌شود. توجه کنید که در دایره امتیاز، عدد ۱ وجود ندارد و واضح است که نیازی به ثبت شدن آن نیست.
 - اگر اثر نقطه دقیقاً روی خط جدول افتاد، شلیک تکرار می‌شود.
 - خانه‌ای که به آن شلیک می‌شود و همه خانه‌های همسایه آن منفجر می‌شوند. خانه‌هایی که منفجر می‌شوند، هیچ تفاوتی با خانه‌های خالی «جدول نقطه بذار- شلیک کن» ندارند.
- در جدول زیر، خانه‌های همسایه یک خانه خالی مشخص شده‌اند.

همسایه شمال غربی	همسایه شمالی	همسایه شمال شرقی
همسایه غربی		همسایه شرقی
همسایه جنوب غربی	همسایه جنوبی	همسایه جنوب شرقی



شمارندها و اعداد اول

		۵	۲	۲	۳	۷	۲	۳	۵	۳	۵	۳	۲	۷	۲	۲	۳	۷		
	۵	۳	۲	۳	۵	۳	۲	۵	۳	۳		۵	۳	۲	۲	۷	۳	۵		
	۳	۲	۲		۲	۲	۷	۳	۲	۲	۵	۲		۵	۳	۲	۲	۳		
	۳		۳	۲	۳	۳	۵	۲	۳	۵	۲	۳	۷		۵	۳	۵	۷		
	۲	۳	۲	۳		۵	۳	۳	۵	۷	۳	۷	۵	۳	۳	۲	۷			
	۷	۲	۳	۲	۵	۳	۲		۲	۲	۷	۲		۵	۷	۵	۲	۲		
	۲	۳	۵	۳	۳	۷	۵	۳	۵	۲	۳		۵	۲		۷	۳	۳		
	۳	۵	۷		۲	۳	۲	۵	۲	۳	۵	۷	۳	۲	۲	۳	۲	۵		
		۲	۳	۲	۷		۳	۲	۳	۲	۲	۳	۵		۵	۲	۳	۷		
	۲	۵	۳	۲	۳	۲	۳	۷	۳	۲	۲	۵	۳	۵	۳	۲	۵	۳		
	۲	۷	۳		۲	۳	۲	۳		۵	۳	۲	۲	۳		۵	۳	۲		
	۵	۲	۲	۳	۵	۳		۲	۳	۳	۵	۳	۲	۲	۵	۳	۲	۳		

ارتباط ب.م.م و ک.م.م

۱. در بازی «نقطه بذار-شلیک کن»، نفر اول ۹۸ امتیاز گرفته است.
 - الف) نقاطی را که نفر اول به آنها شلیک کرده است، در دایره امتیاز مشخص کنید.
 - ب) هم‌تیمی او بهتر است به چه خانه‌هایی شلیک کند؟ چرا؟
۲. در بازی «نقطه بذار-شلیک کن»، نفر اول ۶۳ امتیاز گرفته است.
 - الف) نقاطی را که نفر اول به آنها شلیک کرده است، در دایره امتیاز مشخص کنید.
 - ب) هم‌تیمی او بهتر است به چه خانه‌هایی شلیک کند؟ چرا؟
 - ج) اگر شلیک اول نفر دوم به عدد ۷ برخورد کند، او تیرهای بعدی‌اش را باید به سمت چه عددی نشانه رود؟ چرا؟
۳. در مسابقه‌های جهانی «نقطه بذار-شلیک کن»، ستاره ۲۵۲ امتیاز و سپیده، هم‌تیمی ستاره، ۷۵ امتیاز گرفته است.
 - الف) در دایره امتیاز، نقاطی را که ستاره به آنها شلیک کرده، با خودکار آبی و نقاط سپیده را با خودکار قرمز مشخص کنید.
 - ب) ب.م.م دو عدد ۲۵۲ و ۷۵ را با استفاده از علامت‌های آبی و قرمزی که گذاشته‌اید، پیدا کنید.
 - ج) ک.م.م دو عدد ۲۵۲ و ۷۵ را با استفاده از علامت‌های آبی و قرمز به صورت حاصل ضرب عددهای اول بنویسید. کدام عدد یا عددهایی را که علامت زده شده‌اند، نوشته‌اید؟ چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟
۴. هر جفت از عددهای زیر، امتیاز دو هم‌تیمی را در بازی «نقطه بذار-شلیک کن» نشان می‌دهد.

● ۶۰, ۹۰	● ۵۷, ۹۸	● ۱۴۰, ۲۷۰	● ۸۰, ۵۴۰
● ۱۰۸, ۱۷۵	● ۸۴, ۱۰۵	● ۳۴۳, ۲۴۳	● ۱۰۸, ۱۱۲

الف) برای هر جفت از عددهای بالا، یک دایره امتیاز رسم کنید و شلیک‌های دو نفر را با رنگ‌های متفاوت روی آن مشخص کنید.

ب) ب.م.م. و ک.م.م هر دو عدد را (با استفاده از دایره امتیاز) به صورت حاصل ضربی از اعداد اول بنویسید.

۵. حاصل هریک از عبارت‌های زیر را به صورت حاصل ضربی از اعداد اول بنویسید.

الف) $\frac{28 \times 39}{(28, 39)}$	ب) $\frac{105 \times 35}{(105, 35)}$	ج) $\frac{84 \times 102}{[84, 102]}$
د) $\frac{155 \times 93}{(155, 93)}$	ه) $\frac{106 \times 85}{[106, 85]}$	و) $\frac{182 \times 54}{[182, 54]}$
ز) $[85, 51] \times (85, 51)$	ح) $(39, 91) \times [39, 91]$	

۶. x و y چه اعدادی باشند تا تساوی‌های زیر برقرار شوند؟

الف) $(54, x) \times [54, x] = 1836$ ب) $(45, y) \times [45, y] = 810$

تمرین‌های تکمیلی

۱. در هریک از قسمت‌های زیر، به جای هر متغیر، عددی یک رقمی بگذارید به طوری که حاصل هر عبارت بیشترین مقدار ممکن شود.

الف) (x, y, z) ب) $[t, k, v]$ ج) $[a, b, c, d]$

۲. به کسری که ب.م.م صورت و مخرج آن برابر ۱ باشد، کسر ساده‌نشده می‌گویند. کدامیک از کسرهای زیر ساده‌نشده‌اند؟

الف) $\frac{39}{89}$	ب) $\frac{26}{57}$	ج) $\frac{98}{35}$	د) $\frac{51}{91}$
ه) $\frac{95}{34}$	و) $\frac{121}{1001}$	ز) $\frac{343}{243}$	ح) $\frac{221}{289}$

۳. کسرهای $\frac{2}{39}$ و $\frac{3}{26}$ را در نظر بگیرید.

الف) کوچک‌ترین کسر ساده‌نشده‌ای را بیابید که اگر آن را بر هریک از این دو کسر تقسیم کنیم، حاصل عددی طبیعی شود.

ب) بزرگ‌ترین کسر ساده‌نشده‌ای را بیابید که اگر هریک از این دو کسر را بر آن تقسیم کنیم، حاصل عددی طبیعی شود.

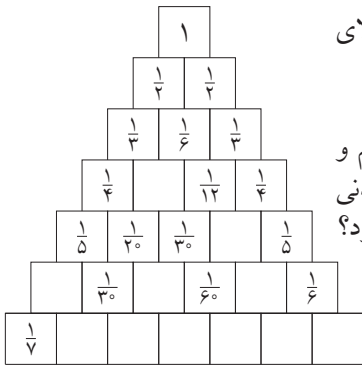
۴. همهٔ عددهای سه رقمی را که باقی‌ماندهٔ تقسیم آنها بر ۲، ۳، ۴، ۷ و ۸ به ترتیب برابر ۱، ۲، ۳، ۶ و ۷ باشد، بیابید.



۵. بین حاصل ضرب و حاصل جمع $\frac{5}{3}$ و $\frac{5}{6}$ تفاوتی نیست.

$$\frac{5}{2} \times \frac{5}{3} = \frac{25}{6}, \quad \frac{5}{2} + \frac{5}{3} = \frac{15}{6} + \frac{10}{6} = \frac{25}{6}.$$

پنج جفت کسر دیگر با این خاصیت بیابید.



۶. در جدول روبه‌رو، مجموع دو کسر کنار هم را بالای آن دو نوشته‌ایم.

(الف) خانه‌های خالی را با همین قانون پر کنید.
(ب) اگر تا سطر بیستم این جدول را ادامه دهیم و هر کسر را به صورت یک کسر ساده‌نشده‌نی بنویسیم، آنگاه صورت همه کسرها ۱ می‌شود؟

۷. با استفاده از جدول مسئله قبل،

(الف) عدد $\frac{1}{3}$ را به صورت مجموع دو کسر متفاوت با صورت ۱ بنویسید.

(ب) عدد $\frac{1}{6}$ را به صورت مجموع سه کسر متفاوت با صورت ۱ بنویسید.

(ج) عدد $\frac{1}{6}$ را به صورت مجموع پنج کسر متفاوت با صورت ۱ بنویسید.

(د) عدد $\frac{1}{30}$ را به صورت حاصل تفریق دو کسر با صورت ۱ بنویسید.

۸. در هریک از قسمت‌های زیر x و y اعداد طبیعی اند. در هر قسمت x و y جانگهدار چه عدهایی هستند؟

(الف) $\frac{5}{6} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$

(ب) $\frac{7}{10} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$

(ج) $\frac{5}{6} = \frac{7}{x} + \frac{5}{y}$

(د) $\frac{7}{12} = \frac{1393}{x} + \frac{2014}{y}$

۹. دو شناگر در دو طرف یک استخر به طول ۵۰ متر هم‌زمان در آب شیرجه می‌زنند. اولی در هر ۱۰ ثانیه ۱۴ متر شنا می‌کند و دومی در هر ۱۰ ثانیه ۱۶ متر. اگر دو شناگر استخر را به‌طور رفت و برگشت شنا کنند،

(الف) چند ثانیه طول می‌کشد تا این دو شناگر برای اولین بار از کنار هم بگذرند؟

(ب) چند ثانیه طول می‌کشد تا شناگر سریع‌تر، از دیگری جلو بزند؟ در این مدت چند بار دو شناگر از کنار هم گذشته‌اند؟

۱۰. صد لامپ داریم که آنها را از ۱ تا ۱۰۰ شماره‌گذاری کرده‌ایم. هر لامپ یک کلید دارد که با فشار دادن آن لامپ روشن یا خاموش می‌شود. فرض کنید همه لامپ‌ها خاموش‌اند. در ابتدا کلید همه لامپ‌های مضرب ۱ را فشار می‌دهیم. سپس کلید همه لامپ‌های مضرب ۲ را فشار می‌دهیم. بعد کلید همه لامپ‌های مضرب ۳، سپس کلید همه لامپ‌های مضرب ۴ و ...، بعد کلید لامپ ۱۰۰ فشار می‌دهیم. در پایان کدام لامپ‌ها روشن‌اند؟



۱۱. می‌دانیم a عددی زوج و b مضرب ۶۳ است. اگر $(a, b) = ۱۵$ و $ab = ۱۸۹۰۰$ ، آنگاه a و b چه اعدادی هستند؟

۱۲. دو دوندۀ تصمیم دارند با یکدیگر در پیاده‌روی مسابقه بدهند. دوندۀ اول دور میدان دو را در ۷ دقیقه و دوندۀ دوم این مسافت را در ۵ دقیقه طی می‌کند. اگر این دو دوندۀ در یک زمان و یک مکان مسابقه را آغاز کنند و هریک هشت‌بار میدان را دور بزنند، پس از چند دقیقه برای اولین بار بعد از حرکت، کنار یکدیگر قرار خواهند گرفت؟



۱۳. شنگول و منگول و حبه انگور هر روز کنار جاده‌ای دوچرخه‌سواری می‌کنند. کنار این جاده دکل‌های برق با فاصله‌های یکسان قرار دارند.



یک روز، شنگول کنار دکل اول، منگول کنار دکل هجدهم و حبه انگور کنار دکل سی و ششم ایستاده بودند. آنها هم‌زمان شروع به حرکت کردند. وقتی شنگول به دکل ششم رسید، منگول به دکل نوزدهم و حبه انگور به دکل سی و چهارم رسید. اگر هریک از آنها با سرعت ثابت، حرکت خود را ادامه دهند، آنگاه به پرسش‌های زیر پاسخ دهید.

الف) منگول و حبه انگور کجا به هم می‌رسند؟

ب) شنگول و حبه انگور کجا به هم می‌رسند؟

ج) کجا شنگول از منگول جلو می‌زند؟

۱۴. روبات‌های جهنده خرگوشی و ملخی طوری برنامه‌ریزی شده‌اند که خرگوشی ۱۵ متر و ملخی ۱۲ متر می‌جهد. اگر جهنده خرگوشی از نقطه ۴ و جهنده ملخی از نقطه ۱ شروع به جهش کند، اولین بار روی چه عددی جای پای هر دو حک می‌شود؟ دومین بار چطور؟ چهارمین بار چطور؟



۱۵. به هر عدد طبیعی که بتوان آن را به صورت حاصل ضرب یک عدد طبیعی در خودش نوشت، عدد مربعی می‌گویند. برای مثال ۱۲۱ یک عدد مربعی است؛ زیرا $۱۱ \times ۱۱ = ۱۲۱$.

الف) همهٔ عددهای مربعی یک‌رقمی، دورقمی و سه‌رقمی را به دست آورید.

ب) چند عدد مربعی پنج‌رقمی وجود دارد؟

۱۲		۶۳
۴۵		۷۵

۳۴	
	۷۸

۱۶. در جدول‌های روبه‌رو، به دو عدد همسایه می‌گوییم هرگاه خانه‌های آنها در یک ضلع مشترک باشند.

باتوجه به جدول‌های روبه‌رو به پرسش‌های زیر پاسخ دهید.

الف) خانه‌های خالی جدول سمت راست را با کوچک‌ترین عددهای طبیعی ممکن طوری پر کنید که ک.م.م هر دو عدد همسایه نصف حاصل ضرب آن دو عدد باشد. (تکرار مجاز نیست.)

ب) خانه‌های خالی جدول سمت چپ را با عددهای مربعی دو رقمی متفاوت طوری پر کنید که ک.م.م هر دو عدد همسایه با حاصل ضرب آن دو عدد برابر باشد.

۱۷. الف) هفت عدد دو رقمی متوالی پیدا کنید که هیچ‌کدام اول نباشند.

ب) ده عدد طبیعی متوالی پیدا کنید که هیچ‌کدام اول نباشند.

ج) هزار عدد طبیعی متوالی پیدا کنید که هیچ‌کدام اول نباشند.



شاید حل مسئله زیر، ایده‌ای به شما بدهد تا بتوانید قسمت «ج» مسئله قبل را حل کنید!

۱۸. برای هریک از عددهای زیر، شمارنده‌ای به غیر از ۱ و خود عدد پیدا کنید.

الف) $۲ \times ۳ \times ۴ \times ۵ + ۲$

ب) $۲ \times ۳ \times ۴ \times \dots \times ۲۷ + ۱۱$

ج) $۲ \times ۳ \times ۴ \times \dots \times ۱۰۰ + ۶۱$

د) $۲ \times ۳ \times ۴ \times \dots \times ۱۰۰ + ۸۹$

خواندنی

یک عدد زوج بزرگ‌تر از ۲ در نظر بگیرید. آیا می‌توانید این عدد را به صورت حاصل جمع دو عدد اول بنویسید؟

برای مثال، می‌توان عدد ۱۲ را به صورت مجموع دو عدد اول نوشت: $۱۲ = ۵ + ۷$.

یکی از مشهورترین مسئله‌های ریاضی که (از قرن هجدهم میلادی تاکنون) حل نشده است، به «حدس گلدباخ» معروف است:

«هر عدد زوج بزرگ‌تر از ۲ را می‌توان به صورت مجموع دو عدد اول نوشت.»



فصل ۶ سطح و حجم

منشورهای با قاعده شش ضلعی، محل ذخیرهٔ عسل زنبورها هستند. عسل یکی از شگفت‌انگیزترین خوراکی‌هاست. در قرآن کریم سوره‌ای به نام زنبور (نحل) وجود دارد. مضمون یکی از آیه‌های این سوره چنین است: «انسان‌های زیادی هستند که سال‌ها عسل می‌خورند، ولی حاضر نیستند ساعتی دربارهٔ شگفتی‌های موجود در عسل فکر کنند».

ریاضیات سیب زمینی!

برای کمک به یافتن پاسخ سؤالات، هر جا لازم بود از سیب زمینی و چاقو در کنار خطکش و پرگار کمک بگیرید. شاید بعد از حل مسائل، درست کردن چیپس برای رفع خستگی خیلی خوب باشد!



۱. الف) چطور با یک سیب زمینی، یک مکعب می‌توان ساخت؟ روش ساخت خود را شرح دهید.

ب) برای ساختن یک مکعب سیب زمینی حداقل به چند برش نیاز است؟

۲. چهار مکعب سیب زمینی بسازید!

الف) یکی از سیب زمینی‌ها را طوری برش دهید که مقطع آن مثلث باشد.

ب) روی سیب زمینی دوم یک مقطع چهارضلعی بسازید.

ج) سیب زمینی دیگر را طوری برش دهید که مقطع آن پنج‌ضلعی شود.

د) روی سیب زمینی چهارم یک برش بزنید به طوری که مقطع آن شش‌ضلعی باشد.

۳. الف) با سیب زمینی یک حجم منشوری بسازید که بیش از ۴ وجه جانبی داشته باشد.

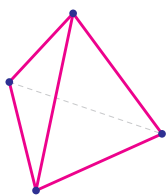
ب) با یک سیب زمینی یک حجم هرمی بسازید.

۴. الف) از یک سیب زمینی یک حجم هندسی بسازید که فقط چهار وجه داشته باشد و هر وجه آن مثالی شکل باشد.

ب) با اصلاح حجم هندسی خواسته شده در قسمت «الف»، تلاش کنید تا چهار وجه، مثلث متساوی‌الاضلاع شوند (به این نوع حجم هندسی، چهاروجهی منتظم می‌گویند).

ج) آیا می‌توانید تنها با چهار برش سیب زمینی یک چهاروجهی منتظم بسازید؟

۵. شکل ذیل یک چهار وجهی منتظم را نشان می‌دهد (یالی که دیده نمی‌شود با خط‌چین مشخص شده است). با استفاده از ۶ خلال دندان (یا چوب‌کبریت) یک چهار وجهی منتظم بسازید. برای هریک از چهار رأس می‌توانید از چوب‌پنبه استفاده کنید.

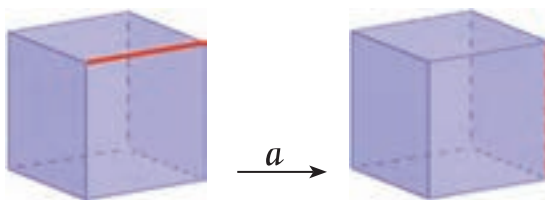


مکعب

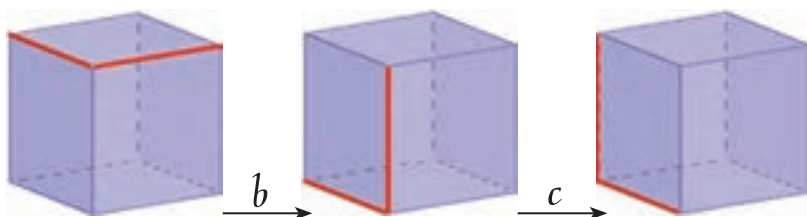
یک مکعب در نظر بگیرید. دستورهای a ، b و c به ترتیب این مکعب را به سمت راست، سمت چپ، جلو و پشت می‌غلطانند.

چند مثال

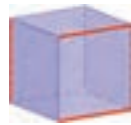
- دستور a ، مکعب سمت چپ (شکل زیر) را به مکعب سمت راست تبدیل می‌کند.



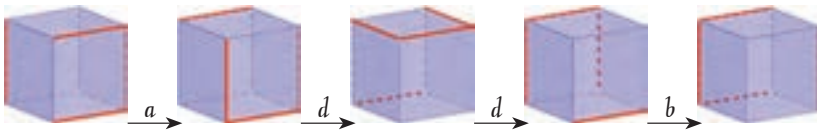
- دستور ترکیبی bc مکعب سمت چپ (شکل زیر) را در دو مرحله به مکعب سمت راست تبدیل می‌کند. توجه کنید که دستورهای ترکیبی به ترتیب از چپ به راست عمل می‌کنند.



● مکعب زیر را در نظر بگیرید.



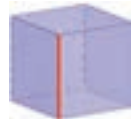
دستور $addb$ مکعب بالا را چهار بار حرکت می‌دهد:



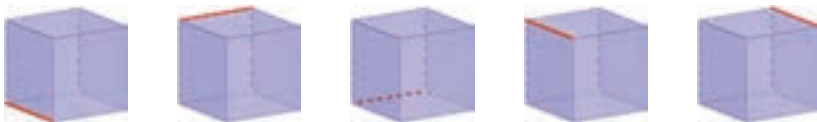
۱. در مکعب زیر، دستورات $abcadb$ را اجرا و مکعب هر مرحله را رسم کنید.



۲. مکعب زیر را در نظر بگیرید.

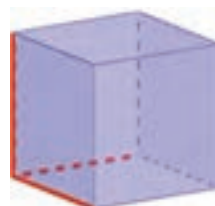
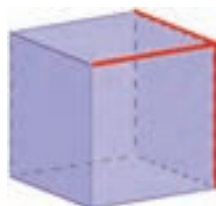


برای تبدیل این مکعب به هریک از مکعب‌های زیر، یک دستور برحسب a, b, c و d بیابید.



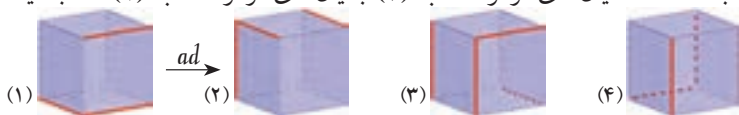
آیا پاسخی که برای هر قسمت یافته‌اید، حداقل دستورهایی ممکن است؟

۳. در شکل زیر، سعی کنید با کمترین دستورات ممکن، مکعب سمت چپ را به مکعب سمت راست تبدیل کرد؟



دو مکعب داریم که در هریک تعدادی یال قرمز وجود دارد. اگر بتوانیم با دستورهایی a, b, c, d یا ترکیبی از آنها مکعب اولی را به مکعب دومی تبدیل کنیم، آنگاه می‌گوییم «یال‌های قرمز مکعب اول» با «یال‌های قرمز مکعب دوم» مشابه‌اند.

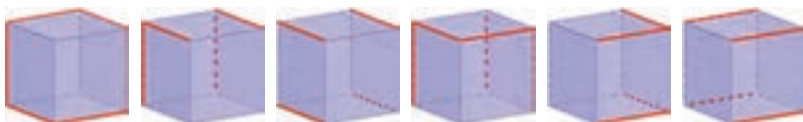
برای مثال، در شکل‌های زیر، یال‌های قرمز مکعب (۱) با یال‌های قرمز مکعب (۲) مشابه است؛ اما یال‌های قرمز مکعب (۳) با یال‌های قرمز مکعب (۴) مشابه نیست.



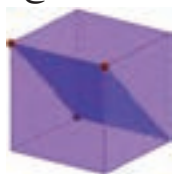
توجه کنید که یال‌های دو مکعب زیر نیز (بدون اجرای هیچ دستوری)، باهم مشابه‌اند.



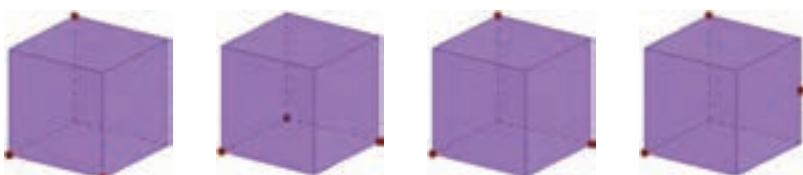
۴. در شکل زیر، جفت مکعب‌هایی را که یال‌های قرمز آنها مشابه یکدیگرند، مشخص کنید و دستور تبدیل آنها به هم را بیابید.



۵. در شکل زیر سه نقطه قرمز روی مکعب، یک سطح مقطع را مشخص کرده‌اند. در هریک



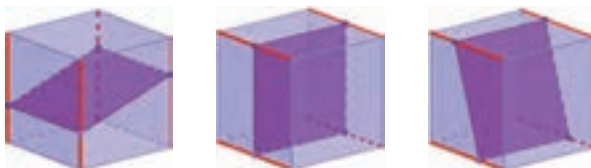
از شکل‌های زیر سه نقطه از یک سطح مقطع داده شده است. آن سطح مقطع را مشخص کنید. آیا شکلی وجود دارد که بیش از یک جواب داشته باشد؟



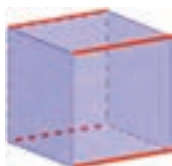
۶. سطح مقطع یک مکعب می‌تواند سه‌ضلعی، چهارضلعی، پنج‌ضلعی یا شش‌ضلعی باشد. برای هریک از سطح مقطع‌های مذکور، یک شکل رسم کنید.



۷. سطح مقطع یک مکعب نمی‌تواند هفت‌ضلعی یا هشت‌ضلعی باشد؛ چرا؟
۸. به سه شکل زیر دقت کنید. در هر سه شکل، سطح مقطعی به شکل چهارضلعی دیده می‌شود. رأس‌های این سطح مقطع‌ها روی یال‌های قرمز هر مکعب قرار دارند. آیا یال‌های قرمز مکعب سمت چپ با یال‌های قرمز دو مکعب دیگر مشابه‌اند؟



۹. دو سطح مقطع از دو مکعب را در نظر بگیرید که رئوس این دو سطح مقطع روی رئوس مکعب نباشد. اگر رئوس این دو سطح مقطع روی یال‌های مشابه دو مکعب باشند، این دو سطح مقطع را مشابه می‌نامیم.
- الف) روی مکعب زیر، سطح مقطعی مشابه سه سطح مقطع بالا معرفی کنید که رئوس آن روی چهار یال قرمز باشند.



- ب) آیا امکان دارد سطح مقطع یک مکعب (که از هیچ رأس مکعب نمی‌گذرد)، چهارضلعی باشد ولی مشابه «الف» نباشد؟
- ج) یک مکعب چند نوع سطح مقطع غیرمشابه دارد؟



چهاروجهی منتظم

۱. چرا سطح مقطع یک چهاروجهی منتظم نمی‌تواند یک هفت‌ضلعی باشد؟
۲. آیا سطح مقطع یک چهاروجهی منتظم می‌تواند مربع شکل شود؟ اگر پاسخ‌تان «بله» است، با یک شکل آن را نشان دهید و اگر پاسخ‌تان «خیر» است، دلیل خود را توضیح دهید.

۳. یک چهار وجهی منتظم داریم. مطابق شکل زیر، نقاط مشخص شده روی یال‌های آن، بیانگر رئوس یک چهار وجهی دیگر شده‌اند.



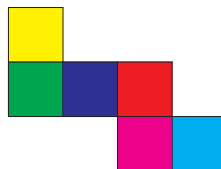
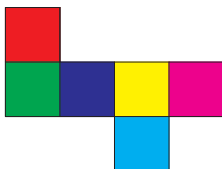
الف) یک چهار وجهی منتظم داریم. نقاطی را روی یال‌های آن مشخص کنید که (تقریباً) بیانگر رئوس یک مکعب باشند.



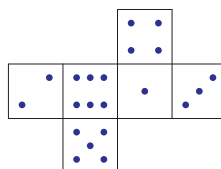
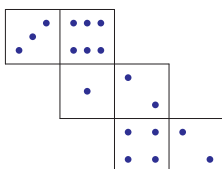
ب) یک مکعب داریم. نقاطی را روی یال‌های آن مشخص کنید که (تقریباً) بیانگر رئوس یک چهار وجهی منتظم باشند.

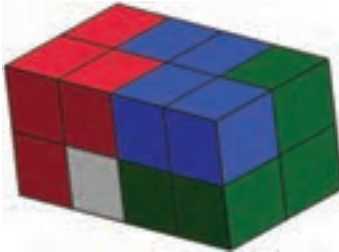
شهود فضایی

۱. هریک از شکل‌های زیر، گستردهٔ یک مکعب را نشان می‌دهند. در هر شکل وجه‌های روبه‌رو را دوبه‌دو مشخص کنید.



۲. اگر با هریک از شکل‌های زیر یک مکعب بسازیم، بزرگ‌ترین مجموع تعداد نقطه‌های سه وجه با رأس مشترک چقدر می‌شود؟

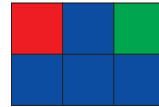
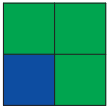




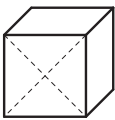
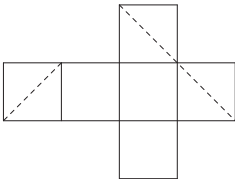
۳. مکعب مستطیل روبه‌رو از چهار بلوک تشکیل شده که هر بلوک با چهار مکعب کوچک ساخته شده است. سه‌تا از این بلوک‌ها را به طور کامل در شکل نشان داده‌ایم. بلوکی که با مکعب‌های سفید ساخته شده را رسم کنید.



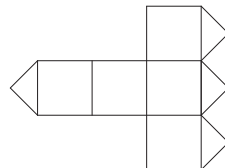
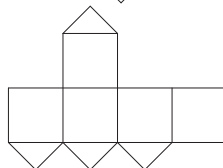
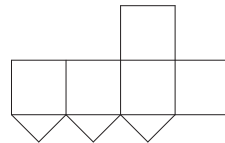
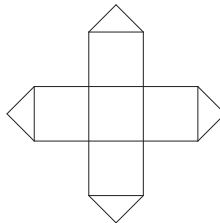
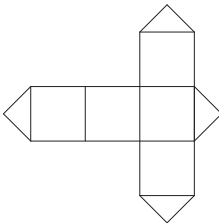
۴. یک مکعب مستطیل از سه بلوک به رنگ‌های قرمز، آبی و سبز ساخته شده است. هر کدام از بلوک‌ها از چهار مکعب یکسان تشکیل شده‌اند. شکل‌های زیر، به ترتیب (از راست به چپ) روبه‌رو، بالا و سمت راست این مکعب مستطیل را نشان می‌دهند. این مکعب از پایین چگونه دیده می‌شود؟



۵. یک مکعب کاغذی را برش داده‌ایم. شکل زیر گسترده این مکعب را نشان می‌دهد. اگر خط‌چین‌ها نشان‌دهنده محل برش باشند، آنگاه مقطع حاصل از این برش را رسم کنید.



۶. یکی از وجه‌های مکعب روبه‌رو را در امتداد قطرهایش بریده‌ایم. کدام یک از نمودارهای زیر نمی‌تواند نمایش گسترده این مکعب باشد؟



۷. مکعبی چوبی به ابعاد $5 \times 5 \times 5$ را با به هم چسباندن ۱۲۵ مکعب واحد درست کرده‌ایم. از این مکعب طوری عکس گرفته‌ایم که بیشترین مکعب‌های واحد دیده شوند. چند مکعب واحد در عکس دیده می‌شود؟

۸. سعید تعداد زیادی مکعب رنگی $1 \times 1 \times 1$ دارد. او می‌خواهد با استفاده از ۲۷ مکعب کوچک، یک مکعب $3 \times 3 \times 3$ بسازد به طوری که هر دو مکعبی که حداقل در یک رأس مشترک‌اند، هم‌رنگ نباشند. سعید حداقل باید چند رنگ مکعب داشته باشد؟



محاسبهٔ حجم‌های منشوری

۱. فرض کنید حجم یک مکعب مستطیل برابر V باشد. با هریک از تغییرات زیر، حجم مکعب مستطیل حاصل را برحسب V به دست آورید.

(الف) طول ۳ برابر شود.

(ب) عرض ۲ برابر و ارتفاع، $\frac{1}{5}$ شود.

(ج) عرض ۳ برابر، ارتفاع ۴ برابر و طول $\frac{1}{8}$ برابر شود.

۲. طول، عرض و ارتفاع یک مکعب مستطیل به ترتیب ۱۵، ۱۸، و ۲۱ است. حجم یک منشور با حجم این مکعب مستطیل برابر است. اگر مساحت قاعدهٔ این منشور 210° باشد، ارتفاع منشور را به دست آورید.

۳. یک قطعه فلز را در ظرف آبی به شکل مکعب مستطیل به قاعدهٔ 50×36 انداخته‌اند و کاملاً به زیر آب رفته است. در نتیجه ارتفاع آب $\frac{5}{8}$ بالا آمده است. حجم قطعه فلز را بیابید.

۴. دو ظرف استوانه‌ای مربای توت‌فرنگی ساخت یک کارخانه در قفسه‌های یک مغازه قرار دارد. ارتفاع ظرف بلندتر دو برابر ارتفاع ظرف کوتاه‌تر شعاع ظرف بلندتر نصف شعاع ظرف کوتاه‌تر است. قیمت ظرف بلندتر ۲۳ هزار تومان و قیمت ظرف کوتاه‌تر ۴۳ هزار تومان است. کدام را می‌خرید؟



۵. کاظم‌آقا هرچه تلاش کرد نتوانست برای کندن چاه مجوز بگیرد. او به دلیل وسواس روحی‌اش، در تقسیم‌بندی آب قنات محل، ثبت نام نکرده بود. کاظم‌آقا که نمی‌خواست درختان باغش خشک شود، تصمیم گرفت بدون مجوز چاهی در باغش حفر کند. او دربارهٔ قیمت کندن چاه چیزی نمی‌دانست؛ بنابراین از چند مُقَنّی^۱ هزینهٔ حفر چاه را پرسید. کمترین قیمتی که شنیده بود، چنین بود:

۱۰ متر اول، هر متر ۱۰۰۰۰۰ تومان، ۱۰ متر بعدی هر متر ۱۵۰۰۰۰ تومان، ۱۰ متر بعدی هر متر ۲۰۰۰۰۰ تومان و همین‌طور برای هر ۱۰ متر ۵۰۰۰۰ تومان به دستمزد اضافه می‌شود.

کاظم‌آقا حدس زد که این چاه در حدود عمق ۶۰ متری به آب می‌رسد. بعد از اینکه دستمزد کندن چاه را با خودش حساب کرد، خوشحال شد و از قنبرآقا چاه‌کن خواست که به باغ بیاید و کار را شروع کند.

مسئلهٔ ۱: کاظم‌آقا فکر می‌کرد قیمت کندن چاه چقدر می‌شود؟

بعد از اینکه قنبرآقا چاه‌کن کارش را شروع کرد، کاظم‌آقا هزینهٔ حمل خاک بیرون آمده از چاه را، به خارج شهر حساب کرد. او با خود گفت: «قطر دهانهٔ چاه ۹۰ سانتی‌متر است و ارتفاع آن حداکثر ۶۰ متر. عدد پی هم که برابر ۳ است؛ هر کامیون در هربار می‌تواند $\frac{3}{5}$ متر مکعب خاک جابه‌جا کند. اجرت راننده برای هربار حمل بار ۷۰۰۰۰ تومان است، پس ...»

مسئلهٔ ۲: کاظم‌آقا فکر می‌کرد هزینهٔ حمل خاک چاه چقدر می‌شود؟

بعد از چند روز کاظم‌آقا دید که حجم خاک بیرون آمده از چاه از آن چیزی که او محاسبه کرده خیلی بیشتر است. قنبر مقنی برای کاظم‌آقا توضیح داد که وقتی خاک از زمین بیرون می‌آید، حجمش $\frac{1}{3}$ برابر می‌شود.

بالاخره قنبر مقنی در عمق ۶۰ متری به آب رسید. او به کاظم‌آقا گفت که باید حداقل ۲۰ متر بیشتر بکند وگرنه چاه خیلی زود خشک می‌شود. ولی کاظم‌آقا قبول نکرد و گفت: «پنج متر دیگه بکن و تموم!» قنبرآقا گفت: «پس انبارش چی؟ چاهی که انبار نداره خیلی کم آبه!» سرانجام بعد از گفت‌وگوی بسیار، کاظم‌آقا قبول کرد که چاهش یک انبار مکعب‌مستطیلی به عرض قطر دهانهٔ چاه، طول ۱۰ متر (موازی با سطح زمین) و ارتفاع $\frac{1}{5}$ متر (عمود بر سطح زمین) داشته باشد. هزینه کندن هر متر مکعب انبار چاه ۷۵۰۰۰۰ تومان بود.

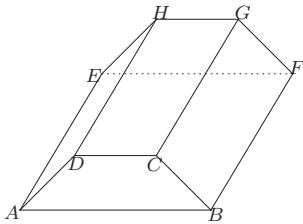
مسئلهٔ ۳: در نهایت کاظم‌آقا برای حفر این چاه، چقدر هزینه کرد؟

بد نیست بدانید که این داستان واقعی بود و بعد از دو سال چاه کاظم‌آقا خشک شد!!

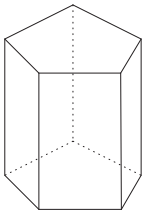
^۱ به کسانی که چاه و قنات می‌کنند، مُقَنّی می‌گویند.

مساحت جانبی و کل

۱. در یک جعبه مکعبی بزرگ، ۸ مکعب کوچک قرار داده‌ایم به طوری که جعبه بزرگ پر شده است. کف جعبه بزرگ چند مکعب کوچک قرار داده شده است؟
۲. یک مکعب به طول ضلع ۱ سانتی‌متر را روی یک مکعب دیگر به طول ضلع ۳ سانتی‌متر چسبانده‌ایم. مساحت کل شکل حاصل، چقدر است؟
۳. یک مکعب مستطیل، از هشت مکعب هم‌اندازه تشکیل شده است.
الف) همه حالت‌های ممکن برای این مکعب مستطیل را رسم کنید.
ب) اگر مساحت جانبی هر مکعب ۲۴ سانتی‌متر مربع باشد، آنگاه مساحت جانبی هر یک از مکعب‌مستطیل‌های رسم شده در قسمت «الف» را به دست آورید.
۴. شکل زیر یک منشور را نشان می‌دهد که قاعده‌های آن دوزنقه‌اند. طول قاعده‌های این دوزنقه ۴ و ۹، و طول ساق‌های آن ۵ و ۶ است. اگر $\overline{BF} = 12$ باشد، مساحت جانبی این منشور را به دست آورید.



۵. شکل زیر یک منشور با قاعده پنج‌ضلعی است که طول اضلاع قاعده آن ۲، ۷، ۷، ۵ و $8\frac{1}{2}$ است. اگر ارتفاع این منشور ۸ باشد، مساحت جانبی آن را به دست آورید.



۶. ارتفاع منشوری را بیابید که مساحت جانبی آن ۱۴۳ و محیط قاعده آن ۱۳ باشد.



۷. دو غلتک، اولی با محیط ۲۴ و دومی با محیط ۳۶ را در نظر بگیرید. از این دو غلتک برای رنگ کردن استفاده می‌شود. هر دو غلتک در هر دور یک خط باریک را رنگ نشده باقی می‌گذارند.

فرض کنید در غلتک اول، رنگ آبی، و در غلتک دوم رنگ زرد ریخته‌اند؛ ابتدا با غلتک اول مسیری به طول 180° و سپس با غلتک دوم روی همان مسیر را رنگ زده‌اند. اگر هر بار، هنگام شروع به رنگ کردن، قسمتی از غلتک که رنگ نمی‌کند، روی زمین باشد، آنگاه به پرسش‌های زیر پاسخ دهید (می‌دانیم ترکیب رنگ‌های آبی و زرد، رنگ سبز است).

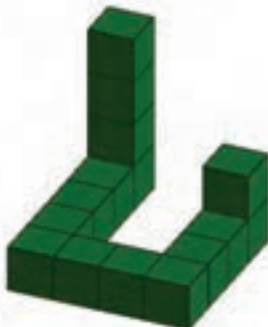
الف) چند خط در مسیر رنگ نشده باقی می‌ماند؟

ب) چند خط در مسیر سبز رنگ نیست؟

حجم و سطح

۱. حسین ۴۲ مکعب یکسان به طول ضلع ۱ سانتی‌متر دارد. او با استفاده از همه این مکعب‌ها یک مکعب مستطیل می‌سازد که محیط قاعده‌اش ۱۸ سانتی‌متر است. ارتفاع مکعب مستطیلی که علی ساخته، چقدر است؟

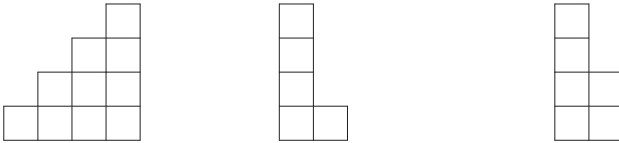
۲. شکل زیر از مکعب‌های به ضلع ۱ درست شده است. حداقل چند مکعب دیگر به شکل اضافه کنیم تا یک مکعب توپر بزرگ به دست آید؟ (مکعب‌های شکل را نمی‌توانید جابه‌جا کنید.)



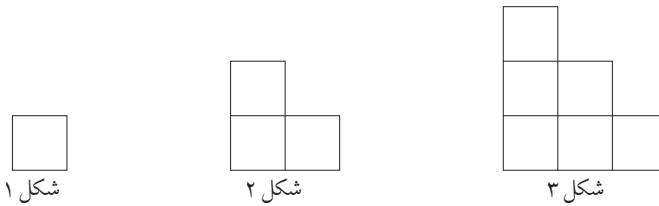
۳. یک ظرف مکعب شکل به ضلع 30 سانتی‌متر پر از آب است. اگر وزن یک لیتر آب یک کیلوگرم باشد، وزن آب درون ظرف چقدر است؟



۴. یک جسم سه‌بعدی از مکعب‌های واحد ساخته شده است. شکل‌های زیر، به ترتیب از راست به چپ، نمای جلو، نمای بالا و نمای چپ، از این جسم سه‌بعدی را نشان می‌دهند. حجم این جسم چقدر است؟



۵. در الگوی زیر، هریک از شکل‌ها، نمای جلو، بالا و سمت راست یک جسم سه‌بعدی است که از مکعب‌های به ضلع واحد درست شده است. جسم سه‌بعدی (۱) را ۱-پله، جسم سه‌بعدی (۲) را ۲-پله، جسم سه‌بعدی (۳) را ۳-پله، ... و جسم سه‌بعدی (n) را n -پله می‌نامیم.



شکل ۱

شکل ۲

شکل ۳

الف) حجم ۴-پله را به دست آورید.

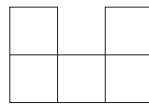
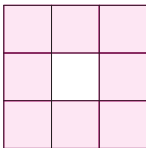
ب) به ۵-پله حداقل چند مکعب واحد بچسبانیم تا شکل حاصل یک مکعب شود؟

ج) حجم شکل چندم ۵۶ می‌شود؟

د) حجم ۱۰-پله را به دست آورید.

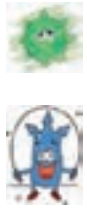
ه) حجم n -پله بر حسب n چیست؟

۶. دو جسم سه‌بعدی با رنگ‌های سفید و صورتی داریم که هریک از مکعب‌های به طول واحد تشکیل شده‌اند. در زیر، شکل سمت چپ نمای بالا و روبه‌روی جسم صورتی و شکل سمت راست نمای بالا و روبه‌روی جسم سفید است.

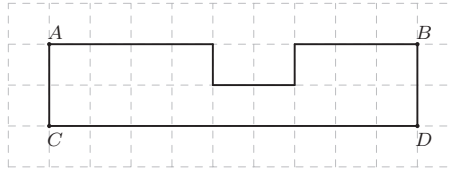


الف) حجم جسم سفید حداقل چقدر است؟

ب) حجم جسم صورتی حداکثر چقدر است؟



۷. در شکل زیر، هر مربع کوچک، یک واحد مساحت است.

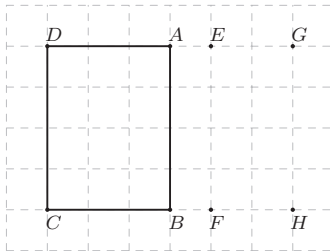


حجم شکل به دست آمده از دوران چندضلعی بالا؛

الف) حول خط AB چقدر است؟

ب) حول خط CD چقدر است؟

۸. در شکل زیر، هر مربع کوچک، یک واحد مساحت است. حجم شکل به دست آمده از دوران مستطیل $ABCD$:



الف) حول AB چقدر است؟

ب) حول EF چقدر است؟

ج) حول GH چقدر است؟

د) اعداد به دست آمده در قسمت‌های بالا را با یکدیگر مقایسه کنید. چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

۹. شکل زیر یک مکعب روبیک $3 \times 3 \times 3$ است.



^۱ این مکعب را «ارنو روبیک» (Erno Rubik) در سال ۱۹۷۴ میلادی طراحی کرده است.

الف) چند مکعب $1 \times 1 \times 1$ در مکعب روبیک $3 \times 3 \times 3$ وجود دارد؟

ب) در این روبیک چند مکعب $1 \times 1 \times 1$ سه وجه آن رنگی است؟ چند مکعب از آنها دو وجه آن رنگی شده است؟ چند مکعب از آنها تنها یک وجه آن رنگی شده است؟ چند مکعب از آنها اصلاً رنگی نشده‌اند؟

ج) آیا در روبیک بالا مکعبی هست که بیش از سه ضلعش رنگی باشد؟

د) مکعب‌هایی که رنگی نمی‌شوند، مکعب‌های پنهانی‌اند که روی سطح ظاهر نمی‌شوند. تعداد این مکعب‌های پنهانی در یک مکعب روبیک به ابعاد $4 \times 4 \times 4$ چند عدد است؟

ه) تعداد مکعب‌های پنهانی در یک مکعب (مکعب مستطیل) روبیک به ابعاد $d \times e \times f$ چند عدد است؟

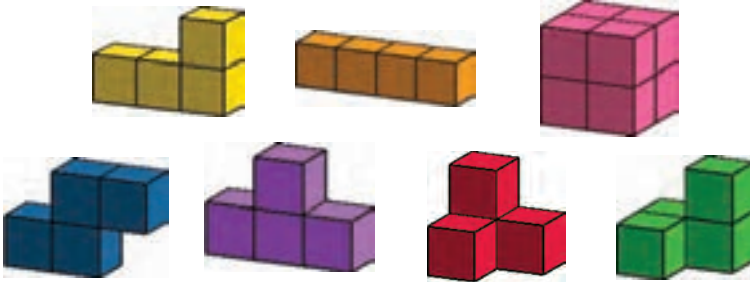
و) در یک مکعب روبیک به ابعاد $a \times b \times c$ ، نصف مکعب‌ها پنهانی هستند. a ، b و c چه اعدادی می‌توانند باشند؟

۱۰. پنج موجود ۴-خونه‌ای داریم (شکل‌های زیر) که هر یک از ۴ مربع واحد تشکیل شده‌اند.



آیا می‌تونید با چسباندن این ۴-خونه‌ای‌ها به یکدیگر مستطیلی 4×5 بسازید؟ (اگر لازم شد می‌توانید ۴-خونه‌ای‌ها را دوران یا بازتاب دهید، ولی مجاز به بریدن آنها نیستید).

۱۱. هفت موجود ۴-مکعبی داریم:

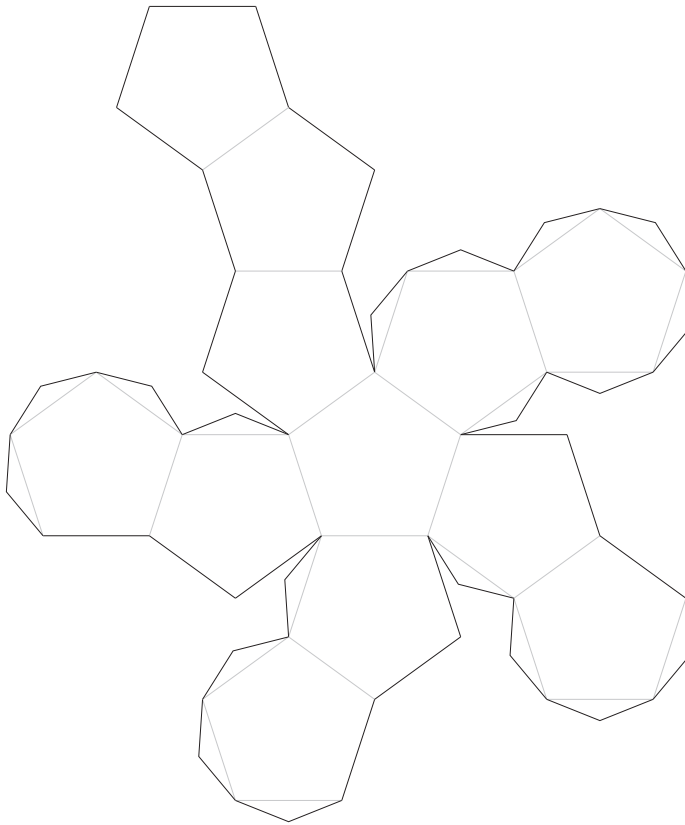


آیا می‌تونید با چسباندن این موجودات به یکدیگر یک مکعب مستطیل $2 \times 2 \times 7$ بسازید؟

^۱ M. Erickson, *Aha! Solutions*, Mathematical Association of America, 2008, Page 102.

کارگاه ساخت حجم - دوازده وجهی منتظم

شکل زیر گستردهٔ یک دوازده وجهی منتظم را نشان می‌دهد. این گسترده را با ابعاد بزرگ‌تر روی یک مقوای A_3 رسم کنید به طوری که وقتی اطراف آن را می‌برید، تبدیل به یک دوازده وجهی منتظم با بیشترین حجم ممکن شود. می‌توانید روی هر وجه این حجم، تقویم یک ماه از سال را بنویسید و یک‌سال از آن استفاده کنید!^۱



^۱ دوازده وجهی منتظم یکی از احجام افلاطونی است. برای آشنایی بیشتر با این اجسام، «احجام افلاطونی» را در گوگل جست‌وجو کنید.

فصل ۷

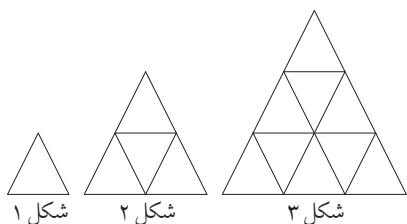
توان
و جذر

یک دانه گندم،
یک خوشه گندم،
یک مزرعه گندم ...

تعریف توان

۱. در یک مدرسه، ۳ پایه وجود دارد. هر پایه ۳ کلاس دارد. در هر کلاس ۳ ردیف نیمکت چیده شده است. در هر ردیف، ۳ نیمکت قرار دارد. روی هر نیمکت ۳ دانش‌آموز می‌نشیند. اگر هر دانش‌آموز، ۳ بار در روز آب بنوشد و هر بار به اندازه ۳ فنجان، آب هدر بدهد، دانش‌آموزان این مدرسه در ۳ روز، چند فنجان آب اسراف می‌کنند؟ در ۲۷ روز چطور؟

۲. به شکل‌های زیر توجه کنید.



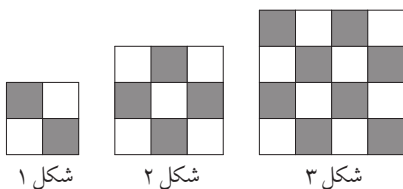
همان‌طور که می‌بینید، در «شکل ۱» یک مثلث کوچک، در «شکل ۲» چهار مثلث کوچک و در «شکل ۳» نه مثلث کوچک وجود دارد.

قانون این الگو را کشف کنید و سپس به پرسش‌های زیر پاسخ دهید.

الف) «شکل ۴» و «شکل ۵» را رسم کنید و تعداد مثلث‌های کوچک هر شکل را بشمارید.

ب) در شکل دهم چند مثلث کوچک وجود دارد؟

۳. الگوی روبه‌رو را به دقت ببینید.



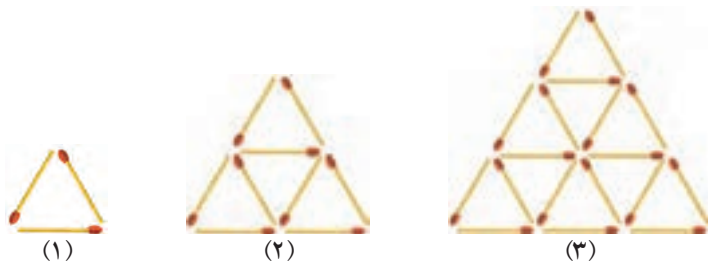
الف) در «شکل ۱»، چند مربع سیاه هست؟

ب) در «شکل ۲»، چند مربع سیاه هست؟

ج) در «شکل ۳»، چند مربع سیاه هست؟

د) در «شکل ۲۰»، چند مربع سیاه هست؟

۴. شکل‌های زیر، یک الگوی چوب‌کبریتی را نشان می‌دهد.



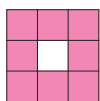
الف) باتوجه به چوب‌کبریت‌های شکل‌های (۱)، (۲) و (۳)، شکل (۴) و شکل (۵) را رسم کنید.

ب) تعداد چوب‌کبریت‌های شکل n م این الگو را برحسب n بیابید.

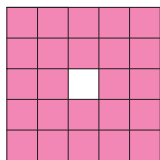
ج) باتوجه به رابطه‌ای که در قسمت قبل به دست آوردید، تعداد چوب‌کبریت‌های شکل (۲۰) را محاسبه کنید.



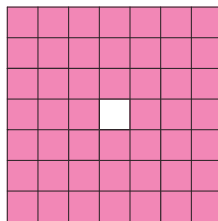
۵. در الگوی زیر، هریک از شکل‌ها، نمای جلو، بالا و چپ یک جسم سه‌بعدی است که از مکعب‌های صورتی‌رنگ به ضلع واحد ساخته شده است.



شکل ۱



شکل ۲



شکل ۳

الف) شکل چهارم حداقل از چند مکعب صورتی تشکیل شده است؟

ب) شکل پنجم حداکثر از چند مکعب صورتی تشکیل شده است؟

ج) حداکثر حجم شکل n م را به صورت یک عبارت جبری بنویسید.

۶. کاغذی را هر بار از وسط تا می‌زنیم. اگر مساحت کاغذ اصلی یک متر مربع باشد، مساحت شکل به دست آمده بعد از سومین تا، چقدر است؟

۷. الف) اگر یک کاغذ مربعی شکل به طول ضلع یک متر و ضخامت $\frac{1}{1000}$ میلی‌متر داشته باشیم و آن را در هر مرحله از وسط تا بزنیم، بعد از هشتمین تا، طول و ضخامت آن چقدر می‌شود؟

ب) یک کاغذ بردارید و آن را در هر مرحله از وسط تا بزنید. آیا می‌توانید از مرحله هفتم جلوتر بروید؟



محاسبهٔ یک عبارت توان‌دار

۱. در هر یک از قسمت‌های زیر، ابتدا پایهٔ هر توان را مشخص کنید. سپس حاصل هر عبارت را بیابید:

الف) $۲۶ \times ۳۵ \times ۷^۴$

ج) $-۳^۴$

ه) ۳×۱۰^{۱۲}

ز) $-۴۵ \times (-۵)^۴$

ب) ۵×۳^۴

د) $۸ - ۳^۴ - (۴ \times ۵)^۲$

و) $۰.۷ \times ۷^۰ - ۴^۰$

ح) $۱۱ - ۱۰^۳ \times ۳^۴ + (۲۵ + ۳)^۲$

۲. حاصل عبارت‌های زیر را به‌دست آورید:

الف) $۳^۲ \times ۲^۳ \div ۶ - ۱^۷$

ج) $۱۹ - (۳^۲ + ۴) + ۶$

ه) $۱۲ - (۴^۳ \div ۸) + ۱$

ز) $۵^۳ + ۵^۳ + ۵^۳$

ط) $۳ \times (۱۳ + ۷) \div (۱۰ - ۴^۲)$

ک) $۵^۲ - (۳^۲ - ۱^۳) \times ۲^۴ \div ۴^۲$

م) $(۵^۳ \div ۲۵) \times (۲^۳ + ۲^۳) \div ۲^۲$

س) $(-۷ \times ۲^۴) \div ۲^۴ \times (-۴)^۲$

ب) $۴^۲ - ۳ \times ۲^۲$

د) $۳ \times ۶^۲ + ۴$

و) $۱۵ - ۲^۳ \div ۴$

ح) $۷^۲ + ۷^۲$

ی) $(-۵ \times ۴)^۲ \div ۴^۲ \times (-۳)^۲$

ل) $(۷^۲ - ۵^۲)(۶ \times ۳^۲ + ۴) \times ۲^۰$

ن) $۵^۲ - (۳^۲ - ۱^۳) \times ۲^۲ \div ۴^۲$

ع) $(۳۵ - ۵^۳)(۲^۳ - ۳^۲) \div ۲^۲$

۳. داخل هریک از دایره‌های زیر، علامت «>»، «=» یا «<» قرار دهید:

الف) $۳۵ \bigcirc ۵^۳$

ج) $۲ \times ۲ \bigcirc ۲^۲$

ه) $\left(\frac{1}{۲}\right)^۲ \bigcirc \left(\frac{1}{۲}\right)^۷$

ز) $۲^{۱۰} + ۲^{۱۰} \bigcirc ۲^{۱۱}$

ح) $۱۰^{\circ} \bigcirc ۱۰۰^{\circ}$

ی) $-۳^۴ \bigcirc (-۳)^۴$

م) $۱ \div ۲ \times ۲ \times ۲ \bigcirc ۱ \div ۲^۳$

ب) $۲ \times ۱۰ \bigcirc ۲^{۱۰}$

د) $۴^۳ + ۴^۲ \bigcirc ۴^۵$

و) $\left(\frac{1}{۳}\right)^۳ \bigcirc \frac{۱^۳}{۳}$

ل) $(-۱)^{۲۰} \bigcirc -۱^{۱۰۰}$

ط) $۱ \times ۲۵ \bigcirc ۱۲۵$

ک) $-۳۵ \bigcirc (-۳)^۵$

ساده کردن عبارتهای توان دار

۱. کدام شیوه نمایش را برای عدد $۱,۰۰۰,۰۰۰,۰۰۰,۰۰۰,۰۰۰,۰۰۰,۰۰۰,۰۰۰,۰۰۰$ بیشتر می پسندید؟

(الف) $\underbrace{۱۰ \times ۱۰ \times \dots \times ۱۰}_{۲۱ \text{ بار}}$ (ب) $۱۰^{۲۱}$

(ج) $۱,۰۰۰,۰۰۰,۰۰۰,۰۰۰,۰۰۰,۰۰۰,۰۰۰,۰۰۰$

۲. کدام نمایش را برای تجزیه عدد ۱۹۱۴۴۲۲۳۴۳۷۵ بیشتر می پسندید؟

(الف) $۵ \times ۵ \times ۵ \times ۵ \times ۵ \times ۵ \times ۳ \times ۳ \times ۳ \times ۳ \times ۳ \times ۳ \times ۳ \times ۷ \times ۷ \times ۷ \times ۷ \times ۷$

(ب) $۵^۳ \times ۳^۱ \times ۷^۳ \times ۷^۲ \times ۳^۵ \times ۵^۳$ (ج) $۵^۶ \times ۱ \times ۳^۶ \times ۱ \times ۷^۵$

(د) $۵^۶ \times ۳^۶ \times ۷^۵$ (ه) $۱۵^۶ \times ۷^۵$

۳. الف) در رایانه، ۱ بایت ۸ بیت است. $۲^۱۰$ کیلوبایت، ۱ کیلوبایت، $۲^۱۰$ کیلوبایت ۱ مگابایت،

$۲^۱۰$ مگابایت ۱ گیگابایت و $۲^۱۰$ گیگابایت برابر ۱ ترابایت است. اگر پرسند یک

ترابایت چند بیت است، به نظر شما، کدام پاسخ مناسب تر است؟

• ۸۷۹۶۰۹۳۰۲۲۲۰۸

• $۱ \times ۲^{۱۰} \times ۲^{۱۰} \times ۲^{۱۰} \times ۲^{۱۰} \times ۲^{۱۰} \times ۸$

• $۲^{۴۳}$

• $\underbrace{۲ \times \dots \times ۲}_{۴۳ \text{ بار}}$

ب) سه هزار میلیارد بزرگ تر است یا تعداد بیت های یک ترابایت؟

۴. فروشنده ای می خواهد عدد $۱۲۳۶۰۱۹۲۱۷۸۹۷۵۴۹۲۱۶۳۶۵۲۶۴۹$ را بفروشد! به نظر

شما کدام نمایش زیر، خریدار بیشتری دارد؟!؟

• ۳۲۳۱°

• $۱۷۱^{\circ} \times ۱۹۱^{\circ}$

۵. حاصل عبارتهای زیر را به صورت یک عدد توان دار بنویسید:

(الف) ۱۰۰۰۰×۱۰۰

(ب) $(\frac{1}{8})^7 \times (0/2)^4$

(ج) $(\frac{4}{5})^5 \times (0/35)^{11}$

(د) $(\frac{4}{5})^{10} \times (0/6)^3 \times \frac{12}{4}$

(ه) $۲ \times ۲^۲ \times ۲^۳ \times \dots \times ۲^{۱۰}$

(و) $۳^۵ \times ۳^۶ \times ۳^۷ \times \dots \times ۳^{۲۰}$

(ز) $۲^۵ + ۲^۵$

(ح) $۳^۲ + ۳^۲ + ۳^۲$

۶. عدد $۵^{۱۸}$ را به صورت حاصل ضرب

الف) دو عدد توان دار مساوی بنویسید.

ب) سه عدد توان دار مساوی بنویسید.

۷. عدد $۷^{۷۷}$ را به صورت حاصل ضرب ۷ عدد توان دار مساوی بنویسید.

۸. هر دسته از عددهای زیر را از کوچک به بزرگ مرتب کنید.

- الف) $۲^۴, ۳^۴, ۴^۲, ۵^۳, ۹^۲$ ب) $۲^۳, ۳^۳, ۴^۲, ۵^۲, ۶^۲$
 ج) $۲^۲ \times ۳^۵, ۵ \times ۳^۵, ۵^۲ \times ۳^۴$ د) $۲^۵ \times ۱۷, ۳^۵ \times ۱۷, ۵^۳ \times ۱۷$
 ه) $\left(\frac{۲}{۳}\right)^۸, \frac{۲^۸}{۳}, \frac{۲}{۳^۸}$ و) $\left(\frac{۱}{۵}\right)^۱, \left(\frac{۲}{۵}\right)^۱, \left(\frac{۳}{۵}\right)^۱$
 ز) $\left(\frac{۱}{۲}\right)^۷ \times \left(\frac{۱}{۳}\right)^۵, \left(\frac{۱}{۲}\right)^۸ \times \left(\frac{۱}{۳}\right)^۴$ ح) $۳^۲, ۲^۳ \times ۳^{۱۸}, ۵^۳ \times ۳^{۱۶}$
 ط) $\left(\frac{۱}{۲}\right)^۷ \times \left(\frac{۱}{۳}\right)^۵, \left(\frac{۱}{۲}\right)^۸ \times \left(\frac{۱}{۳}\right)^۵$ ی) $۲^{۱۰}, ۳ \times ۲^۹, ۴^۲ \times ۲^۸$
 ک) $۵^{۲۱}, ۵^{۲۳} \times \left(\frac{۱}{۵}\right)^{۲۳}, ۵^{۲۳} \times \left(\frac{۲}{۵}\right)^۳$

تمرین‌های تکمیلی

۱. هریک از عددهای زیر را به صورت حاصل ضربی از اعداد اول توان‌دار بنویسید:

- الف) ۵۴ ب) ۷۲ ج) ۹۶ د) ۹۸
 ه) ۱۲۸ و) ۸۰۸ ز) ۲۵۰۰ ح) ۱۰۵۰۰۰
 ط) ۱۰۰۱ ی) ۷۲×۵۷ ک) ۳۵×۴۹ ل) ۳۶×۸۸
 م) ۵۱×۳۴ ن) ۳۹×۹۱ س) ۶۶×۱۲۱
 ع) ۲۳۴×۳۴۳ ف) ۷۸×۸۱ ص) $۲۵۶ \times ۲۲۵ \times ۲۵۰$

۲. در هر قسمت x چه عددی است؟

- الف) $۲^۲ \times (x) \times ۱۱ = ۶۶۰$ ب) $۳ \times ۲^۴ \times (x) = ۱۲۰۰$
 ج) $۲^۲ \times (x) \times ۳ = ۱۵۰۰$ د) $۲ \times (x) \times ۵^۲ = ۴۵۰$

۳. ب.م.م و ک.م.م هر جفت از اعداد زیر را به صورت حاصل ضربی از اعداد اول توان‌دار بنویسید:

- الف) $۵۷ \times ۷۵, ۵^۳ \times ۳^۵$ ب) $۳^۲ \times ۷ \times ۱۱, ۲^۵ \times ۳ \times ۷^۲$
 ج) $۳^۵ \times ۷۷, ۱۲ \times ۱۸$ د) $۱۰۰ \times ۷^۴ \times ۳^۵, ۵^۷ \times ۲^۵ \times ۱۸$
 ه) $۱۴ \times ۱۸ \times ۲۱, ۱۵ \times ۵۱ \times ۷۲$ و) $۹۱ \times ۳۹ \times ۴۵, ۶۵ \times ۴۹ \times ۸۵$

۴. هر دسته از عددهای زیر را از کوچک به بزرگ مرتب کنید:

- الف) $۲^۳ \times ۳^۵ \times ۵^۲ \times ۴ \times ۱۱, ۲^۴ \times ۳^۷ \times ۵^۳, ۲^۲ \times ۳^۶ \times ۵^۴$

ب) $۲۶ \times ۳۲ \times ۵۵$, $۲۲ \times ۳۷ \times ۵۴$

ج) $۲۶ \times ۵۵ \times ۱۳۷$, $۲۳ \times ۳ \times ۵۴ \times ۱۳۸$

د) ۱۳۱۸ , $۱۳۲۱ \times \left(\frac{۱}{۱۳}\right)^۴$, $۱۳۲۱ \times \left(\frac{۲}{۱۳}\right)^۴$

۵. مساحت یک مستطیل ۵۱۳۹۳ است. اگر طول ضلع مستطیل ۵ برابر عرض مستطیل باشد،

الف) طول و عرض این مستطیل را به صورت یک عدد توان دار بنویسید.

ب) محیط این مستطیل چند برابر عرضش است؟

۶. الف) می دانیم x و y دو عدد طبیعی هستند و $x.y = ۱۰۰۰$. اگر ۱۰ شمارنده x و y نباشد، x و y چه اعدادی هستند؟

ب) خانه های خالی جدول زیر را با عددهای طبیعی متفاوت طوری پر کنید که حاصل ضرب عددهای هر سطر برابر $۱۰^۴$ شود.

ج) آیا می توانید خانه های خالی جدول بالا را با عددهای طبیعی متفاوت طوری پر کنید که حاصل ضرب عددهای هر سطر و هر ستون برابر ۱۰۰۰ شود؟

۷. خانه های خالی جدول زیر را با عددهای طبیعی متفاوت طوری پر کنید که حاصل ضرب عددهای هر سطر، هر ستون و هر قطر برابر $۱۰^۶$ شود.

راهنمایی: می توانید از مربع های لاتین متعامد که در فصل یک درباره آنها تحقیق کردید، استفاده کنید. (Orthogonal latin squares)

۸. آیا ۶ شمارنده ۳×۲۷ است؟ چرا؟

۹. الف) حاصل عبارت زیر را به صورت یک عدد توان دار با پایه ۷۲ بنویسید.

$$۱ \times ۲ \times ۳ \times ۴ \times ۶ \times ۸ \times ۹ \times ۱۲ \times ۱۸ \times ۲۴ \times ۳۶ \times ۷۲$$

ب) حاصل عبارت زیر را به صورت یک عدد توان دار با توان بزرگتر از ۱۰ بنویسید.

$$۲^۳ \times ۳^۳ \times ۶^۳ \times ۹^۳ \times ۱۸^۳ \times ۲۷^۳ \times ۵۴^۳$$



۱۰. عدد $A = 1 \times 2 \times 3 \times \dots \times 18$ را در نظر بگیرید.

(الف) عدد A را به صورت حاصل ضربی از اعداد اول بنویسید.

(ب) ابتدا هر یک از عددهای زیر را به صورت حاصل ضربی از اعداد اول بنویسید. سپس با ذکر دلیل مشخص کنید کدام یک شمارنده عدد A هستند.

- ۱۲۸
- 49×28
- ۲۲۱
- ۱۰۰۰۰
- ۲۹۰
- 320×230
- 128×128
- 51×91

(ج) شمارنده‌های عدد A را به ترتیب از کوچک به بزرگ نوشته‌ایم. نوزدهمین شمارنده چیست؟



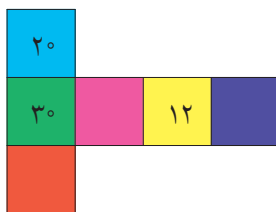
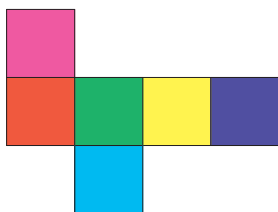
(د) اگر شمارنده‌های عدد A را به ترتیب از بزرگ به کوچک بنویسیم، بیست و سومین شمارنده چیست؟



۱۱. تعدادی باکتری در ظرفی شیشه‌ای گذاشته شده‌اند. یک ثانیه بعد هر باکتری به دو باکتری تقسیم می‌شود؛ یک ثانیه بعد از آن هر یک از باکتری‌های حاصل هم به دو باکتری تقسیم می‌شوند و همین‌طور تا آخر. بعد از یک دقیقه ظرف پر می‌شود. چند ثانیه طول کشیده تا نصف ظرف پر شده است؟



۱۲. هریک از شکل‌های زیر گسترده یک مکعب را نشان می‌دهند. ابتدا در هر شکل وجه‌های روبه‌رو را دوبه‌دو مشخص کنید؛ سپس به پرسش‌ها پاسخ دهید.



(الف) خانه‌های خالی مکعب سمت راست را با اعداد طبیعی کمتر از ۴۰ طوری پر کنید که حاصل ضرب هر دو عدد روبه‌روی هم مقداری یکسان شود (تکرار اعداد مجاز نیست).

(ب) آیا می‌توانید خانه‌های خالی مکعب سمت چپ را با اعداد طبیعی کمتر از ۴۰ که بر ۵ بخش پذیر نیستند، طوری پر کنید که حاصل ضرب هر دو عدد روبه‌روی هم مقداری یکسان شود؟ (تکرار اعداد مجاز نیست).



۱۳. عددی را که فقط سه شمارنده دارد، عدد دوم می‌نامیم. برای مثال ۴ یک عدد دوم است؛ زیرا سه شمارنده دارد: ۱، ۲ و ۴.

الف) کدام یک از عددهای زیر، عدد دوم هستند؟

- ۶
- ۴۹
- ۸۱
- ۱۶۹
- ۵۱۲
- ۳۶
- ۱۲۱
- ۱۴۲

ب) کدام یک از عددهای زیر را می‌توان به صورت حاصل ضربی از عددهای دوم نوشت؟

- ۵۰
- ۶۴
- ۱۰۰
- ۲۶×۳۹

ج) درست یا نادرست؟

«هر عدد دوم، توان دوم یک عدد اول است.»

۱۴. جمله n ام هریک از دنباله‌های زیر را بیابید.

- الف) $-۱, ۱, -۱, ۱, -۱, ۱, \dots$ ب) $۱, -۴, ۹, -۱۶, ۲۵, -۳۶, \dots$

جذر و ریشه

۱. مقدار دقیق عبارتهای زیر را به دست آورید:

الف) $\sqrt{۵۲۰}$

ب) $\sqrt{\sqrt{۴۰۰} + \sqrt{۱۶}} - \sqrt{۶۴}$

ج) $\sqrt{۱۵ \times ۳۵ \times ۲۱}$

د) $\sqrt{۴۰} - \sqrt{۱۶}$

ه) $\sqrt{\frac{۶۴}{۴۹} \times \frac{۴}{۸۱}}$

و) $\sqrt{\frac{۲}{۳} \times \frac{۳}{۴} \times \frac{۴}{۵} \times \dots \times \frac{۷۱}{۷۲}}$

ز) $\sqrt{\frac{۳۲^۲ + ۳۰^۲ + ۱۶^۲ + ۱۵^۲ + ۵^۲}{۳۰}}$

ح) $\sqrt{\frac{۹ + ۱۶}{۳۶ + ۶۴}}$

ط) $\sqrt{(-۲۵) \times (-۴)}$

ی) $\sqrt{\frac{۶۴}{۱۰۰} \times ۰,۳۶}$

ک) $\sqrt{۰,۰۴ \times ۸۱}$

ل) $\sqrt{۴ \times ۲۵ \times ۹}$

م) $\sqrt{\sqrt{۶۲۵}}$

ن) $\sqrt{۳۳ \times ۲۴ \times ۱۲}$

س) $\sqrt{0/7 \times 6/3}$ ع) $\sqrt{\frac{\sqrt{51/2}}{\sqrt{0/2}} + \frac{\sqrt{486}}{\sqrt{6}}}$

ف) $\sqrt{1+2 \times \sqrt{1+3 \times \sqrt{1+4 \times \sqrt{1+5 \times \sqrt{(1+6)^2}}}}}$

۲. در هر قسمت، x چه عددی باشد تا تساوی برقرار شود؟

الف) $3 \times \sqrt{x} = 21$ ب) $\sqrt{\frac{28}{\sqrt{x}}} = 2$

ج) $3 \times 4 \times \sqrt{x} = \frac{120}{2}$ د) $\sqrt{1+2 \times \sqrt{x}} = 3$

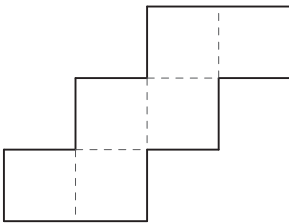
۳. برای هریک از موارد زیر، یک مثال بزنید.

- الف) جذر عددی با خود عدد مساوی باشد.
 ب) جذر عددی از خود عدد کوچک‌تر باشد.
 ج) جذر عددی از خود عدد بزرگ‌تر باشد.

۴. مقدار تقریبی جذرهای زیر را به دست آورید.

الف) $\sqrt{0/27}$ ب) $\sqrt{78}$ ج) $\sqrt{47/3}$

د) $\sqrt{35/5}$ ه) $\sqrt{740}$ و) $\sqrt{0/74}$



۵. شکل روبه‌رو از ۶ مربع با مساحت‌های برابر تشکیل شده است. مساحت کل شکل ۲۱۶۰۰ سانتی‌متر مربع است.

- الف) مساحت یک مربع را پیدا کنید.
 ب) طول ضلع یک مربع را به دست آورید.
 ج) محیط تمام شکل را برحسب سانتی‌متر بیابید.

۶. $2\sqrt{3}$ یعنی $\sqrt{3} \times 2$. مقدار تقریبی هریک از عبارات‌های زیر را به دست آورید.

الف) $\sqrt{6} \times \sqrt{3}$ ب) $3\sqrt{2}$

ج) $2\sqrt{5} \times \sqrt{99}$ د) $\sqrt{88} \times \sqrt{8} \times \sqrt{8}$

ه) $\sqrt{1} \times \sqrt{2} \times \sqrt{3} \times \sqrt{4} \times \sqrt{5} \times \sqrt{6} \times \sqrt{7}$

۷. اگر هریک از حروف نشان‌دهنده یک رقم ناصفر باشد، کدامیک از عبارات‌های زیر حتماً نادرست است؟

الف) $\sqrt{abcd} = ef$ ب) $\sqrt{abc} = def$ ج) $\sqrt{0/ab} = 0/c$ د) $\sqrt{ab} = c$



فصل ۸

بردار و مختصات

امروزه استفاده از ابزارهای جدید، مسافرت و یافتن نقشه‌های جاهای مختلف را برای ما آسان کرده است. این ابزارها با استفاده از مختصات هر نقطه‌ای که به دنبال آن می‌گردید، می‌تواند آن را برای شما پیدا کند و راه رسیدن به آن را نیز به شما نشان دهد.

کارگاه بازی- نبرد دریایی

بازی «نبرد دریایی»، یک جنگ دریایی است! باید تلاش کنید در این جنگ شکست نخورید. این بازی، دو نفره است. قبل از شروع بازی باید ناوگان خود را مستقر کنید. این کار می‌تواند با فکر و ظرافت خاصی انجام شود. اگر خوش اقبال باشید، ناوگان شما از شلیک‌های حریف جان سالم به‌در خواهد برد. هر نفر قبل از شروع بازی باید در صفحه «ناوگان نیروهای خودی»، ناوها، کشتی‌ها و زیردریایی خود را به‌صورت عمودی یا افقی بچیند. هرکس در ناوگان خود، یک ناو هواپیمابر به طول ۵ خانه، یک کشتی جنگی به طول ۴ خانه، یک رزم‌ناو به طول ۳ خانه، یک زیردریایی به طول ۳ خانه و یک ناوشکن به طول ۲ خانه دارد. بنابراین ناو هواپیمابر را با پنج «ه»، کشتی جنگی را با چهار «ج»، رزم‌ناو را به سه «ر»، زیردریایی را با سه «ز» و ناوشکن را با دو «ن» نشان می‌دهیم.

در زیر نمونه‌ای از این چیدمان را می‌توانید ببینید.

	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰
الف										
ب										
ج					ه	ه	ه	ه	ه	
د				ز						
ه				ز					ج	
و				ز					ج	
ز									ج	
ح									ج	
ط									ن	ن
ی	ر	ر	ر							

ناوگان نیروهای خودی

	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰
الف										
ب										
ج										
د										
ه										
و										
ز										
ح										
ط										
ی										

ثبت شلیک‌ها به سمت ناوگان حریف

واضح است حریف شما نباید از شیوه چیدمان ناوگان شما مطلع شود. هر بازیکن در دست خود دو صفحه دارد. یک صفحه مربوط به «ناوگان نیروهای خودی» و یک صفحه مربوط به «ثبت شلیک‌ها به سمت ناوگان حریف» است. بعد از اینکه شما و حریفتان ناوگان‌هایتان را مستقر کردید، می‌توانید بازی را شروع کنید.

هرکس در نوبت خود باید یک شلیک به سمت ناوگان حریف انجام دهد. برای این منظور باید مختصات یک خانه را انتخاب و به حریف اعلام کنید؛ مثلاً به او بگویید «من به خانه الف-۴ شلیک می‌کنم». سپس حریف شما باید اعلام کند که آیا شلیک شما به یکی از اهداف برخورد کرده است یا خیر. اگر شلیک شما به یکی از اهداف برخورد کرده باشد، شما در

خانهٔ «الف-۴» در صفحهٔ «ثبت شلیک‌ها به سمت ناوگان حریف» علامت «✓» بزنید. در غیر این صورت علامت «×» بزنید. برنده کسی است که زودتر بتواند ناوگان حریف را از بین ببرد. یعنی بتواند تمام ناوها، کشتی‌ها و زیردریایی‌های حریف را غرق کند.

	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰
الف										
ب										
ج				هـ	هـ	هـ	هـ	هـ	هـ	
د			ز							
هـ			ز						ج	
و			ز						ج	
ز									ج	
ح									ن	ن
ط										
ی	ر	ر	ر							

ناوگان نیروهای خودی

	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰
الف				✓						
ب			✓				×			
ج			✓							
د										
هـ						×				
و										
ز								×		
ح										
ط			✓	×						
ی										

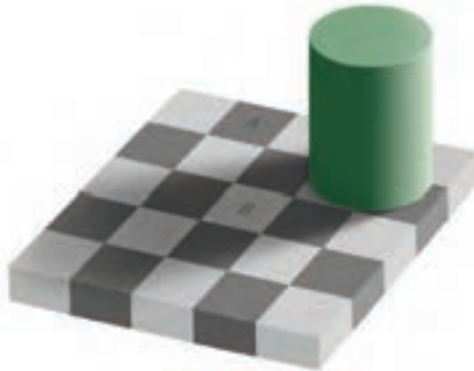
ثبت شلیک‌ها به سمت ناوگان حریف

اما قوانین مسابقه:

- برای غرق کردن یک کشتی باید به تمام خانه‌های اشغال شده توسط آن کشتی، شلیک شود. برای مثال اگر می‌خواهید ناو هواپیمابر را غرق کنید، باید به تمام پنج خانهٔ آن شلیک کنید.
- زمانی که یک شلیک به یک هدف برخورد کرد، می‌توانید یک شلیک دیگر جایزه بگیرید.

دیدنی!

در تصویر زیر خانه‌های A و B هم رنگ‌اند! اگر باور نمی‌کنید از این صفحه کپی بگیرید و خانه‌های A و B را با قیچی ببرید و کنار یکدیگر بگذارید.



	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰
الف										
ب										
ج										
د										
هـ										
و										
ز										
ح										
ط										
ی										

ناوگان نیروهای خودی

	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰
الف										
ب										
ج										
د										
هـ										
و										
ز										
ح										
ط										
ی										

ثبت شلیک‌ها به سمت ناوگان حریف

	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰
الف										
ب										
ج										
د										
هـ										
و										
ز										
ح										
ط										
ی										

ناوگان نیروهای خودی

	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰
الف										
ب										
ج										
د										
هـ										
و										
ز										
ح										
ط										
ی										

ثبت شلیک‌ها به سمت ناوگان حریف

	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰
الف										
ب										
ج										
د										
هـ										
و										
ز										
ح										
ط										
ی										

ناوگان نیروهای خودی

	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰
الف										
ب										
ج										
د										
هـ										
و										
ز										
ح										
ط										
ی										

ثبت شلیک‌ها به سمت ناوگان حریف

دریچه‌ای به روبوکاپ



روبوکاپ «RoboCup» یک رقابت رباتی سالانه بین‌المللی است. روبوکاپ از سال ۱۳۷۶ برگزار می‌شود، و از همان سال ایران حضور پررنگ و افتخارآمیزی در این رقابت مهیج داشته است. هدف این مسابقه، ارتقای دانش «روباتیک» و پژوهش در زمینه «هوش مصنوعی»، در قالب رقابتی چالش برانگیز است. نام روبوکاپ «RoboCup» برگرفته از «Robot Soccer» به معنای فوتبال رباتی و «World Cup» به معنای جام جهانی است. هدف این مسابقات، برگزاری مسابقه فوتبالی در نیمه قرن حاضر است که در آن تیم روبات‌های انسان‌نما بتواند بهترین تیم فوتبال جهان را شکست دهد!

تمرین ۱. در روبوکاپ لیگ‌های متنوعی برگزار می‌شود و هر ساله نمایندگان منتخبی از دانش‌آموزان مدارس استعداد‌های درخشان در آن شرکت می‌کنند. با ترجمه لیگ‌های این مسابقه، حدس می‌زنید این دانش‌آموزان در کدام لیگ(ها) شرکت می‌کنند؟

- RoboCup Soccer
- RoboCup Rescue
- RoboCup@Home
- RoboCup Logistics League
- RoboCupJunior

برای ساخت یک روبات چندین فن و دانش از جمله مکانیک و الکترونیک به‌کار گرفته می‌شود و در شیوه‌هدایت یک روبات چندین دانش از جمله برنامه‌نویسی رایانه‌ای و ریاضیات کاربرد دارد. در طی چندین سال شما با کاربرهایی از ریاضیات در روبوکاپ آشنا خواهید شد.

در اولین قدم، سه نفر از دانش‌آموزان سال اول دبیرستان تصمیم گرفتند که یک روبات بسازند. پس از گذراندن چندین ماه کلاس روباتیک در زمینه‌های مکانیک و الکترونیک، روبات دست‌سازی ساختند که شبیه ماشین کنترلی به جلو-عقب و چپ-راست حرکت می‌کرد. آنها در گام بعدی توانستند با نصب یک قطب‌نمای الکترونیکی، روباتی بسازند که می‌توانست به شمال-جنوب و شرق-غرب حرکت کند. آنها به شرایطی رسیده بودند که ریاضیاتی را که خوانده بودند به‌کار برند؛ اما چگونه؟ آنها روبات را طوری ارتقا دادند که بتواند به جای کنترل دستی با یک برنامه‌رایانه‌ای کنترل شود. برنامه‌ای که آنها نوشته بودند، می‌توانست با دریافت حروف خاصی، در یک جهت خاص روبات را به مسافت یک واحد (که برای آنها ده سانتی‌متر بود)، حرکت دهد.

N : حرکت رو به سوی شمال
 E : حرکت رو به سوی شرق
 S : حرکت رو به سوی جنوب
 W : حرکت رو به سوی غرب

اکنون روباتی که ساخته بودند، دیگر یک اسباب بازی بچگانه نبود. آنها برای اینکه یادشان نرود هدفشان چیست، به سبک نامگذاری روبوکاپ، از ترکیب دو اسم روبات و سمپاد، نام جدیدی ساختند: «روپاد».

برای اینکه بتوانند بدانند روپاد دقیقاً کجاست، از دستگاه مختصات استفاده کردند که روی هر یک از محورهای آن بر اساس دسی متر (که برابر ده سانتی متر است) مدرج شده بودند. این برای آنها بسیار لذت بخش بود که همزمان با یادگیری بهتر مختصات، به هدایت روپاد بیشتر مسلط می شدند.

با این همه وارد کردن تک تک حروف از سرعت حرکت روپاد می کاست. برای همین آنها برنامه ای رایانه ای نوشتند که یک رشته حروف را می گرفت و آن را تبدیل به حروفی جداگانه می کرد. با ترکیب این دو برنامه، آنها می توانستند دستوراتی پیچیده تر به روپاد بدهند.

تمرین ۲. فرض کنید روپاد در مبدأ مختصات باشد. اگر دستور

$NNNNNEEEENEESSSSSSWNW$

را به روپاد بدهیم، آنگاه روپاد،

الف) چه مسیری را طی می کند؟ ب) در چه نقطه ای متوقف می شود؟

توجه کنید که دستورات از چپ به راست خوانده می شوند.

برای دقت بیشتر حرکت روبات، تیم سازنده تصمیم گرفت دقت هر حرکت را افزایش دهد؛ بنابراین از نظر الکترونیکی مدارها را تغییر داد. آنها حتی مجبور شدند موتورهای خاصی بخرند که دقت حرکت آنها بالاتر بود. به این ترتیب اکنون با دریافت هر حرکت، روبات به جای 10° سانتی متر، یک میلی متر حرکت می کرد.

اکنون مشکلی دیگری پیدا شده بود. برای اینکه روپاد بتواند جابه جا شود، به دستورات بسیار زیادی نیاز بود. برای مثال با 20 بار نوشتن S ، روپاد تنها دو سانتی متر جابه جا می شد. در اینجا بود که یکی از دانش آموزان از جبری که امسال آموخته بود، ایده گرفت. او از راهی شبیه روش ضرایب متغیرها برای ساده کردن کار استفاده کرد؛ به این ترتیب که به جای مثلاً $EEEEEEEEEEEEEEEE$ از $(12E)$ استفاده کرد. سپس برنامه رایانه ای را طوری تغییر داد که این نمادگذاری را بفهمد؛ بنابراین اکنون می توانستند دستوری مثلاً به صورت

$(5E)W(4E)N(30S)N(8W)$

را به روپاد بدهند.

تمرین ۳. دستور بالا به چه معناست؟

تمرین ۴. دستور $(\Delta E)WWW(\Delta E)N(3N)N(2S)N(2S)N(2S)N(2S)$ را به ساده‌ترین صورت ممکن بنویسید.

تمرین ۵. چرا ساده‌سازی دستور $(\Delta E)S(\Delta E)$ به صورت $(\Delta E)S$ درست نیست؟

تمرین ۶. دستور $(3S)(2W)(2N)SE(2N)$ را اجرا کرده‌ایم.

الف) اگر روپاد با دستور فوق از مبدأ شروع به حرکت کند، آیا به مبدأ برمی‌گردد؟

ب) اگر روپاد از نقطه $\begin{bmatrix} -3 \\ -12 \end{bmatrix}$ شروع به حرکت کند، آیا به آن نقطه بازمی‌گردد؟

ج) این روپاد چند بار مسیر حرکتش را قطع خواهد کرد؟

تمرین ۷. فرض کنید روپاد در مبدأ مختصات باشد. با صد بار اجرای دستور $E(2N)E(3S)EN$ آیا عرض نقطه توقف روپاد صفر خواهد بود؟ طول آن چطور؟

تمرین ۸. دستور $(32N)(32E)(2N)(2E)(4S)(2E)(2N)EN(2S)NE$ را اجرا کرده‌ایم.

الف) روپاد جمعاً چند حرکت انجام داده است؟

ب) در سیصدمین حرکت، روپاد به چه سمتی حرکت کرده است؟

یک رویات باید بتواند (سریع) به نقطه‌ای خاص دست یابد؛ مثلاً فرض کنیم روپاد در نقطه $A = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$ است و می‌خواهیم به نقطه‌ای مثل $B = \begin{bmatrix} 5 \\ 5 \end{bmatrix}$ برویم. راه ساده و سریع این است از دستور EEN یا ENE یا NEE استفاده کنیم. حتی دستورهایی چون $NESSSEENWN$ ، با اینکه مسیر طولانی‌تری را طی می‌کند، روپاد را به همان نقطه $\begin{bmatrix} 5 \\ 5 \end{bmatrix}$ خواهد رساند. پس عملکرد همه این دستورات یکی است: در مجموع دو واحد به سمت شرق و یک واحد به سمت شمال. در این حالت می‌نویسیم: $\vec{AB} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$. به عملکرد یک دستور ترکیبی، «بردار انتقال» می‌گوییم.

برنامه‌نویس گروه روپاد برای ساده‌تر شدن کار، با تغییراتی در برنامه رایانه‌ای توانست معنای «دستور ترکیبی در دستور ترکیبی» را به روپاد بفهماند. او دستورات ترکیبی را با حروف کوچک نشان می‌داد، و برای مثال می‌توانست در برنامه بنویسد:

$x = WN(\Delta S)$ ؛ این یک دستور ترکیبی است، که نام آن را x گذاشته‌ایم.

$y = WNx$ ؛ این یک دستور ترکیبی است که در آن از x استفاده شده است و نام آن را y گذاشته‌ایم.

$Nx(2y)$ ؛ این دستوری است که به روپاد داده می‌شود و در آن از x و y استفاده شده است.

تمرین ۹. باتوجه به متن بالا به پرسش‌های زیر پاسخ دهید.

الف) دستورهای x ، y و $Nx(2y)$ به چه معنا هستند؟

ب) عملکرد دستورهای x ، y و $Nx(2y)$ چیست؟

تمرین ۱۰. روپاد با دستور $(2W)N(3N)(2x)ENESE(2N)$ از نقطه $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ شروع به حرکت می‌کند.

الف) دستور ترکیبی x را به‌گونه‌ای تعریف کنید که نقطه انتهای مسیر $\begin{bmatrix} 7 \\ 1 \end{bmatrix}$ باشد. بردار این دستور ترکیبی را بیابید.

ب) دستور ترکیبی x را به‌گونه‌ای تعریف کنید که روپاد در همان‌جا که شروع به حرکت کرده، پس از طی مسیر، متوقف شود. بردار انتقال این دستور ترکیبی را بیابید.

تمرین ۱۱. در هریک از حالات داده شده، بردار انتقال روپاد را بیابید.

الف) نقطه شروع از $\begin{bmatrix} -2 \\ 2 \end{bmatrix}$ و نقطه انتها در $\begin{bmatrix} 2 \\ -2 \end{bmatrix}$.

ب) نقطه شروع از $\begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix}$ و نقطه انتها در $\begin{bmatrix} -5 \\ -11 \end{bmatrix}$.

تمرین ۱۲. می‌دانیم که $A = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix}$ ، $B = \begin{bmatrix} 6 \\ 10 \end{bmatrix}$ و $C = \begin{bmatrix} -3 \\ -2 \end{bmatrix}$. حاصل \vec{AB} و \vec{CB} را به‌دست آورید.

تمرین ۱۳. می‌دانیم اگر دو روپاد باهم برخورد کنند، متوقف می‌شوند. دو روپاد داریم که به‌طور همزمان شروع به حرکت می‌کنند: روپاد اول با دستور $(2N)(3E)(3S)(3E)(4N)E$ از نقطه $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ ، و روپاد دوم با دستور $(2E)N(2E)(2S)E(2N)(2E)(5S)(3W)N$ از نقطه $\begin{bmatrix} 7 \\ 6 \end{bmatrix}$.

الف) این دو روپاد در چه نقطه‌ای متوقف می‌شوند؟

ب) اگر روپاد دوم از نقطه $\begin{bmatrix} 7 \\ 8 \end{bmatrix}$ شروع به حرکت کند، در چه نقطه‌ای متوقف می‌شود؟

ج) روپاد دوم باید از چه نقطه‌ای شروع به حرکت کند تا در سیزدهمین حرکت متوقف شود؟

ه) آیا امکان دارد که روپاد دوم در نقطه $\begin{bmatrix} 4 \\ 4 \end{bmatrix}$ از حرکت بازایستد؟ چرا؟

و) روپاد دوم از کجا شروع به حرکت کند تا در نقطه $\begin{bmatrix} 8 \\ 5 \end{bmatrix}$ متوقف شود؟

مختصات و تبدیل‌های هندسی

۱. در مثلث ABC ، $A = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}$ ، $B = \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \end{bmatrix}$ و $C = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$. تصویر مثلث ABC را تحت هریک از دوران‌های زیر حول نقطه A بیابید و مختصات رئوس مثلث به‌دست آمده را بنویسید.

الف) 90°

ب) -90°

ج) 180°

۲. ابتدا نقاط زیر را در صفحه مختصات مشخص کنید:

$$S = \begin{bmatrix} -5 \\ 1 \end{bmatrix} \quad M = \begin{bmatrix} -2 \\ -2 \end{bmatrix} \quad I = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \quad L = \begin{bmatrix} -2 \\ 5 \end{bmatrix} \quad E = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$L' = \begin{bmatrix} 1 \\ -6 \end{bmatrix} \quad A = \begin{bmatrix} 4 \\ -9 \end{bmatrix} \quad U = \begin{bmatrix} 3 \\ -6 \end{bmatrix} \quad G = \begin{bmatrix} 8 \\ -6 \end{bmatrix} \quad H = \begin{bmatrix} 5 \\ -3 \end{bmatrix}$$

سپس مشخص کنید چه تبدیلی‌هایی پنج‌ضلعی *SMILE* را به پنج‌ضلعی *L'AUGH* تبدیل می‌کند.

۳. الف) نقاط زیر را در صفحه مختصات مشخص کنید:

$$W = \begin{bmatrix} -6 \\ 3 \end{bmatrix} \quad H = \begin{bmatrix} -7 \\ -2 \end{bmatrix} \quad I = \begin{bmatrix} -5 \\ 1 \end{bmatrix} \quad T = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} \quad E = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 8 \\ 1 \end{bmatrix} \quad L = \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \end{bmatrix} \quad A = \begin{bmatrix} 8 \\ 8 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 2 \\ 7 \end{bmatrix} \quad K = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

ب) آیا دو پنج‌ضلعی *WHITE* و *BLACK* هم‌نهشت‌اند؟ چرا؟

ج) کدام نقطه از پنج‌ضلعی *BLACK* را تعویض کنیم تا پنج‌ضلعی حاصل با پنج‌ضلعی *BLACK* هم‌نهشت شود؟

۴. نقطه‌های $A = \begin{bmatrix} -9 \\ 4 \end{bmatrix}$ ، $B = \begin{bmatrix} 2 \\ -7 \end{bmatrix}$ ، $C = \begin{bmatrix} 5 \\ 11 \end{bmatrix}$ و $D = \begin{bmatrix} 17 \\ -18 \end{bmatrix}$ را در نظر بگیرید. چند نقطه، مانند E و F ، می‌توان یافت به طوری که مثلث ABC با یک بردار انتقال به مثلث EFD تبدیل شود؟ همه حالت‌های ممکن را بنویسید و در هر حالت اجزای برابر دو مثلث را مشخص کنید.



۵. فرض کنید a ، b و c سه عدد منفی باشند به طوری که سه نقطه $A = \begin{bmatrix} a \\ 2 \end{bmatrix}$ ، $B = \begin{bmatrix} b \\ 3 \end{bmatrix}$ و $C = \begin{bmatrix} c \\ 4 \end{bmatrix}$ سه رأس یک مثلث در صفحه مختصات باشند؛



الف) مثلث ABC در کدام ناحیه است؟

ب) فرض کنید $D = \begin{bmatrix} b \\ 1 \end{bmatrix}$ و $E = \begin{bmatrix} c \\ y \end{bmatrix}$. چه عددی باشد تا دو مثلث ABC و ADE هم‌نهشت شوند؟ با چه تبدیلی ABC به ADE تبدیل می‌شود؟ اجزای متناظر این دو مثلث را بنویسید.

۶. نقطه‌های $A = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$ ، $B = \begin{bmatrix} 7 \\ 3 \end{bmatrix}$ و $C = \begin{bmatrix} 6 \\ 6 \end{bmatrix}$ رأس‌های مثلث ABC هستند. اگر $G = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$ و $M = \begin{bmatrix} 6 \\ 0 \end{bmatrix}$ باشد، چند نقطه مانند N ، وجود دارد به طوری که دو مثلث ABC و GMN هم‌نهشت باشند؟ در هر حالت تبدیلی‌هایی که مثلث ABC را به مثلث GMN تبدیل می‌کند، بنویسید.



۷. نقطه‌های $A = \begin{bmatrix} 15 \\ -15 \end{bmatrix}$ ، $B = \begin{bmatrix} 18 \\ 12 \end{bmatrix}$ و $C = \begin{bmatrix} 19 \\ -15 \end{bmatrix}$ رأس‌های یک مثلث هستند. چند نقطه، مانند D ، می‌توان یافت که دو مثلث ABC و ABD هم‌نهشت باشند. در هر یک از حالت‌های تساوی، اجزای متناظر را بنویسید.

۸. دستوره‌های زیر را در نظر بگیرید.

a : هر نقطه به مختصات $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ به $\begin{bmatrix} y \\ x \end{bmatrix}$ تبدیل شود.

b_1 : هر نقطه به مختصات $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ با بردار $\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$ انتقال یابد.

b_2 : هر نقطه به مختصات $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ با بردار $\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$ انتقال یابد.

b_3 : هر نقطه به مختصات $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ با بردار $\begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix}$ انتقال یابد.

c : هر نقطه به مختصات $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ به $\begin{bmatrix} -x \\ y \end{bmatrix}$ تبدیل شود.

d : هر نقطه به مختصات $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ به $\begin{bmatrix} x \\ -y \end{bmatrix}$ تبدیل شود.

شکل $ABCDE$ را با مختصات $A = \begin{bmatrix} 6 \\ 5 \end{bmatrix}$ ، $B = \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \end{bmatrix}$ ، $C = \begin{bmatrix} 7 \\ 4 \end{bmatrix}$ ، $D = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \end{bmatrix}$ و $E = \begin{bmatrix} 7 \\ 3 \end{bmatrix}$ در نظر بگیرید.

• هریک از جملات زیر کدامیک از دستورات بالا را مشخص می‌کند؟

(الف) هر نقطه نسبت به محور طول‌ها قرینه می‌شود.

(ب) هر نقطه نسبت به مبدأ مختصات قرینه می‌شود.

(ج) هر نقطه نسبت به محور عرض‌ها قرینه می‌شود.

(د) هر نقطه ۲ واحد به سمت چپ و ۳ واحد به سمت بالا انتقال می‌یابد.

(ه) هر نقطه ۴ واحد به سمت چپ و ۴ واحد به سمت بالا انتقال می‌یابد.

• در هریک از قسمت‌های زیر دستورات را (به ترتیب از چپ به راست) دربارهٔ

شکل $ABCDE$ اجرا کنید و مختصات رأس‌های شکل تبدیل یافته را به دست

آورید (در هر مورد، انتقال، دوران و بازتاب شکل را مشخص کنید).

(الف) $ab_1b_2b_3a$

(ب) cd

(ج) ac

(د) ad

(ه) cab_1

(و) $cb_1ab_2db_3$

• در هریک از قسمت‌های زیر دستورات را (به ترتیب از چپ به راست) دربارهٔ شکل

$ABCDE$ اجرا کنید و مختصات رأس‌های شکل تبدیل یافته را به دست آورید.

سپس مشخص کنید در کدام قسمت‌ها نتیجه یکسانی به دست می‌آید؟

(الف) b_1b_3


(ب) b_3b_1

(ج) cd

(د) dc

(ه) ad

(و) da



فصل ۹
آمار و
احتمال

گره‌ای که در تصویر می‌بینید، «گره پالاس» نام دارد. به احتمال زیاد چنین گره‌ای به چشم شما ناآشناست؛ اما این گره در ایران هم زندگی می‌کند، ولی متأسفانه از گونه‌های در حال انقراض است و تعداد کمی از این گره‌ها باقی مانده‌اند. البته آماری هم از تعداد آنها در ایران وجود ندارد. برای همین شما وقتی می‌شنوید این جانور در ایران هم زندگی می‌کند، تعجب می‌کنید.

جمع‌آوری و نمایش داده‌ها

در یک کلاس ۲۰ نفره از مدارس سمپاد، برای تدریس ریاضی هفتم، به جای این کتابی که در دست دارید، از کتاب‌های نامناسبی استفاده کرده بودند. روایت تقویم زمانی چنین بود:

شنبه: زمان برگزاری امتحان هماهنگ کشوری درس ریاضی بود.

یک‌شنبه: معلم ریاضی تا دیر هنگام به تصحیح برگه‌های امتحان پرداخت و فرصت نکرد نتایج اعلام کند.

دوشنبه: معلم در جلسه انجمن اولیای دانش‌آموزان گفت: «باعث سرفرازی مدرسه است که بیشترین نمره گرفته شده از این امتحان سخت و طاقت‌فرسا ۲۰ بوده است».

اولیای دانش‌آموزان خوشحال به خانه رفتند. مدیر که در جلسه حضور داشت، از معلم خواست گزارش مکتوبی درباره نمره‌های این درس، به او ارائه کند.

سه‌شنبه: معلم در گزارش کتبی خود به مدیر مدرسه نوشت: «در امتحان ریاضی گرفته شده، بیش از نصف دانش‌آموزان نمره‌شان حداقل ۱۸ شده است».

مدیر از اینکه گزارش شفافی دریافت کرده بود، خوشحال شد و از اینکه چنین معلمی را در این مدرسه انتخاب کرده، به خود بالید.

چهارشنبه: معلم عصبانی سرکلاس رفت و به دانش‌آموزان چنین گفت: «میانگین نمرات شما ۱۲ شده است. از شما راضی نیستم! فردا کسانی که نمره آنها زیر میانگین شده است، باید در کلاس جبرانی شرکت کنند».

پنج‌شنبه: اولین کلاس جبرانی درس ریاضی هفتم تشکیل شد!

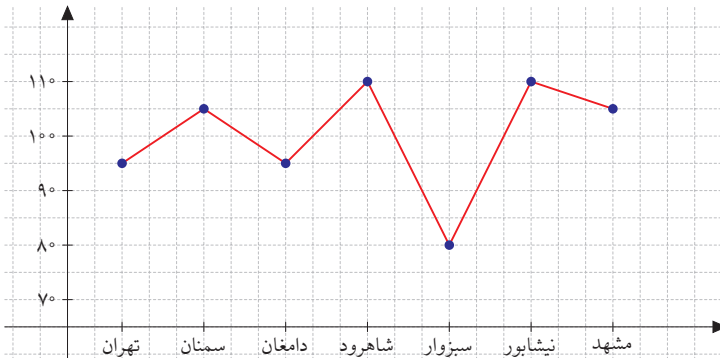
جمعه: معلم با خودش فکر کرد آیا بهتر نبود به جای استفاده از تمرین‌های متوسط و زیاد، از تمرین‌های خوب ولی کمتری استفاده می‌کرد؟ با این فکر تصمیم گرفت شنبه هفته آینده، روز متفاوتی برای تدریس ریاضی هفتم باشد؛ روزی که برای اولین بار تنها به دو کتاب فکر می‌کرد؛ کتاب درسی رسمی و کتاب تکمیلی.

باتوجه به متن بالا،

- مثالی از نمرات این کلاس ارائه دهید.
- مثالتان را طوری ارائه دهید که کلاس جبرانی روز پنج‌شنبه با بیشترین تعداد نفرات ممکن تشکیل شود.

نمودارها و تفسیر نتیجه‌ها

۱. خانواده محترم رجبی با خودروی شخصی‌شان از تهران عازم مشهد شدند. مهران رجبی، فرزند دوم خانواده، همیار پلیس است. او سرعت خودرو را در نزدیکی شهرهای تهران، سمنان، دامغان، شاهرود، سبزوار، نیشابور و مشهد یادداشت کرد. سپس نمودار زیر را کشید.

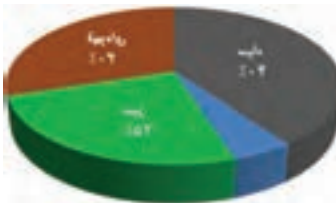


باتوجه به نمودار بالا درستی یا نادرستی هریک از جمله‌های زیر را بررسی کنید:

الف) در این سفر هیچ‌گاه سرعت خودرو از 110° بیشتر نبوده است.

ب) میانگین سرعت خودروی خانواده رجبی در جاده شاهرود-سبزوار از رابطه زیر به دست می‌آید.

$$\frac{110^\circ + 80^\circ}{2} = 95.$$



۲. نمودار روبه‌رو تعداد انسان‌ها با رنگ چشم‌های مختلف را در یک شهر نشان می‌دهد.

الف) چند درصد از مردم این شهر چشم‌های آبی دارند؟

ب) اگر جمعیت این شهر 285200° باشد، رنگ چشم چند نفر سبز است؟

۳. تصویر زیر که از «www.fifa.com/worldcup» انتخاب شده است، اطلاعاتی از بازی دو تیم در جام جهانی ۲۰۱۴ را ارائه می‌کند. دو مستطیل سبز و دایره‌های داخل آن وضعیت قرار گرفتن بازیکنان هر تیم را نشان می‌دهد.



الف) آیا باتوجه به وضعیت قرار گرفتن بازیکنان دو تیم در زمین، می‌توانید نتیجه بازی را حدس بزنید؟

ب) به جدول میان دو مستطیل سبز دقت کنید. ردیف اول تعداد حملات خطرناک دو تیم را نشان می‌دهد. در ردیف دوم تعداد شوت‌های به سمت دروازه هر تیم را می‌بینید. ردیف آخر نشان می‌دهد که تیم سبز ۵۶۶ پاس سالم و تیم قرمز ۳۱۸ پاس سالم داشته است. دایره‌ای که با دو رنگ سبز و قرمز مشاهده می‌کنید، درصد مالکیت توپ را در هر تیم نشان می‌دهد. آیا با این اطلاعات می‌توانید نتیجه بازی را حدس بزنید؟

ج) برای دیدن نتیجه و آمار کامل این بازی نشانی زیر را در مرورگر رایانه خود وارد کنید:

<http://www.fifa.com/worldcup/matches/round=255931/match=300186510/statistics.html>

د) به نظر شما با داشتن چه اطلاعاتی از یک بازی فوتبال، می‌توان با اطمینان خاطر، تیم برنده را تعیین کرد؟

۴. قانون انتخابات ریاست جمهوری اسلامی ایران، فصل دوم، ماده ۱۳ به شرح زیر است:

چنانچه در مرحله اول برای هیچ‌یک از داوطلبان اکثریت مطلق حاصل نگردد، انتخابات دو مرحله‌ای خواهد شد بدین معنی که دو نامزدی که بیشترین آرا را در مرحله اول داشته‌اند، در انتخابات مرحله دوم شرکت می‌کنند.

در اینجا منظور از اکثریت مطلق، کسب حداقل نصف به علاوه یک رای، از کل آرای مأخوذه است.

دو وبگاه نتیجه انتخابات ریاست جمهوری اسلامی ایران در سال ۹۲ را به صورت زیر نمایش دادند.



کدام وبگاه از نمودار مناسب‌تری استفاده کرده است؟ چرا؟

۵. یک روز آقای شکمو روی ترازویش ایستاد؛ اما به دلیل بزرگی شکمش نتوانست وزنش را از روی ترازو بخواند! به ناچار از یک آینه کمک گرفت. وزن او ۱۳۵ کیلوگرم بود. همان روز آقای شکمو تصمیم گرفت وزنش را کم کند. او چند هفته رژیم غذایی سختی را هفته اجرا کرد. آقای شکمو هر هفته، صبح شنبه وزنش را اندازه گرفت و آنها را این‌گونه یادداشت کرد:

هفته اول: ۱۳۵ کیلوگرم، هفته دوم: ۱۳۰ کیلوگرم، هفته سوم: ۱۲۶ کیلوگرم، هفته چهارم: ۱۲۲ کیلوگرم، هفته پنجم: ۱۱۸ کیلوگرم، هفته ششم: ۱۱۵ کیلوگرم، هفته هفتم: ۱۱۲ کیلوگرم، هفته هشتم: ۱۱۰ کیلوگرم، هفته نهم: ۱۰۸ کیلوگرم، هفته دهم: ۱۰۶ کیلوگرم، هفته یازدهم: ۱۰۴ کیلوگرم، هفته دوازدهم: ۱۰۲ کیلوگرم، هفته سیزدهم: ۱۰۲ کیلوگرم، هفته چهاردهم: ۱۰۷ کیلوگرم، هفته پانزدهم: ۱۱۱ کیلوگرم، هفته شانزدهم: ۱۱۳ کیلوگرم.

الف) چه نموداری برای نشان دادن وزن آقای شکمو در این ۱۶ هفته مناسب است؟ آن نمودار را رسم کنید.

ب) اگر کسی به نموداری که شما کشیده اید دقت کند، می‌تواند نتیجه بگیرد که میانگین وزن آقای شکمو در روزهای هفته یازدهم تقریباً ۱۰۳ کیلو بوده است. آیا این نتیجه‌گیری درست است؟

ج) به نظر شما آقای شکمو در هفته چندم از آن رژیم طاقت فرسا دست کشیده است؟

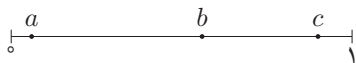
۶. فیلم «آتش بس» را اولین فیلم میلیاردی سینمای ایران نامیده‌اند. این فیلم در سال ۱۳۸۵، حدود یک میلیارد و پانصد میلیون تومان فروش داشته است. فیلم «کلاه قرمزی و پسرخاله» در سال ۱۳۷۳، حدود چهارصد میلیون تومان فروش داشته است.

- الف) به نظر شما آیا فقط با دانستن میزان فروش این دو فیلم می‌توان محبوبیت هریک را در زمان خودشان با یکدیگر مقایسه کرد؟
- ب) میانگین قیمت بلیت در سال‌های ۱۳۸۵ و ۱۳۷۳ به ترتیب ۱۲۰۰ و ۷۰ تومان بوده است. فیلم کلاه‌قرمزی و پسرخاله تقریباً چند بلیت بیشتر از فیلم آتش بس فروخته است؟
- ج) در سال‌های ۱۳۷۵ و ۱۳۸۵ جمعیت ایران، به ترتیب در حدود ۶۰ و ۷۰ میلیون نفر بوده است. چند درصد مردم برای دیدن این دو فیلم به سینما رفته‌اند؟
- د) به نظر شما برای مقایسه میزان فروش و محبوبیت فیلم‌ها چه شاخص‌هایی را باید در نظر گرفت؟



احتمال یا اندازه‌گیری شانس

۱. در هریک از قسمت‌های زیر، «صفر»، «یک» یا «بین صفر و یک» بودن احتمال پیشامد داده شده را بررسی کنید. در مواردی که احتمال بین صفر و یک است، دربارهٔ نزدیک بودن آن به عددهای a ، b یا c (که در شکل زیر مشخص شده‌اند) بحث کنید.



- الف) انتخاب شدن شما برای درس جواب دادن در کلاستان!

- (ب) برنده شدن یک نفر در قرعه‌کشی برنامه نود!
- (ج) شیرین بودن خربزه مشهدی!
- (د) سبز شدن یک گل در باغچه، بدون کاشتن بذر!
- (ه) آقای گل شدن شخصی که در هیچ تیم فوتبالی حضور ندارد!
- (و) ایرانی بودن فیلم سینمایی تلویزیون در عصر جمعه هفته آینده
- (ز) بارش برف در ماه ژانویه در سبیری
- (ح) احتمال پیدا کردن رمز یک کارت بانکی در سومین آزمایش تصادفی!
- (ط) وجود فلفل در غذای یک کدبانوی خرمشهری
- (ی) هم‌رنگ شدن تمام وجه‌های یک مکعب روبیک به هم‌ریخته با ده‌بار چرخاندن وجه‌های مکعب به‌طور تصادفی
- (ک) پرواز کلاغ در آسمان محله شما در غروب یک روز پاییزی!
- (ل) دختر بودن فرزند یک خانم باردار
- (م) ابری بودن هوای تهران در یک روز پاییزی
- (ن) پرواز یک مگس در یخچال نزدیک‌ترین شیرینی‌فروشی به خانه شما!
- (س) قرمز بودن انار ساوه!
- (ع) پخش شدن اذان ظهر از بلندگوی مسجد محله شما در ظهر شرعی
- (ف) یک دانش‌آموز در برگه امتحانش، عدد ۹۱ را عددی اول در نظر بگیرد!
- (ص) یک ریاضی‌دان در سخنرانی مهمی بگوید: ۵۱ عددی اول است!
۲. تاسی را می‌اندازیم. آیا احتمال اینکه «عدد بزرگ‌تر از چهار ظاهر شود» از احتمال اینکه «عدد اول ظاهر شود» بیشتر است؟
۳. باتوجه‌به بازی نبرد دریایی که در فصل قبل با آن آشنا شدید، به پرسش‌های زیر پاسخ دهید:
- (الف) چقدر احتمال دارد که شلیک اول شما به هدف برخورد کند؟
- (ب) اگر شلیک اول شما به هدف برخورد نکند، چقدر احتمال دارد که شلیک دوم به هدف برخورد کند؟

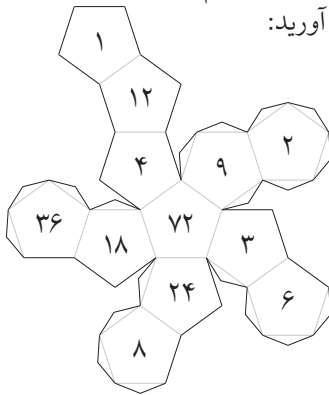
ج) فرض کنید شلیک اول شما به هدف برخورد کرده باشد. آیا ممکن است احتمال برخورد شلیک دوم شما به هدف بیش از $\frac{1}{3}$ باشد؟

۴. الف) از بین اعداد ۱، ۲، ۳، ... و ۵۰ یک عدد به تصادف انتخاب می‌کنیم. چقدر احتمال دارد که این عدد اول باشد؟

ب) از بین اعداد ۱، ۲، ۳، ... و ۱۰۰ یک عدد به تصادف انتخاب می‌کنیم. چقدر احتمال دارد که این عدد اول باشد یا فقط دو شمارنده اول داشته باشد؟

۵. در کیسه‌ای تعدادی مهره سیاه، سفید و آبی وجود دارد. اگر احتمال بیرون آمدن مهره سیاه $\frac{2}{8}$ و احتمال بیرون آمدن مهره سفید $\frac{2}{7}$ باشد، احتمال بیرون آمدن مهره آبی چقدر است؟

۶. شکل روبه‌رو گسترده یک جسم فضایی را نشان می‌دهد. این جسم فضایی را مانند یک تاس می‌اندازیم. هریک از احتمال‌های زیر را به دست آورید:



الف) وجه بالا شمارنده ۷۲ باشد.

ب) وجه بالا مضرب ۱۲ شود.

ج) وجه بالا شمارنده ۳۶ نباشد.

د) حاصل ضرب وجه بالا و پایین برابر ۷۲ نشود.

ه) حاصل ضرب وجه بالا و پایین برابر ۵۶ شود.

و) حاصل ضرب وجه بالا و پایین برابر ۲۸۸ باشد.

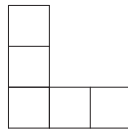
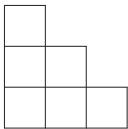
ز) حاصل ضرب همه وجه‌ها به غیر از وجه بالا و

پایین برابر $31^{\circ} \times 215$ باشد.

ح) وجه بالا مضرب ۶ باشد ولی مضرب ۴ نباشد.

ط) وجه بالا بر هر دو عدد ۴ و ۶ بخش پذیر باشد.

۷. یک جسم فضایی از مکعب‌های واحد ساخته شده است. در زیر، شکل سمت چپ و شکل سمت راست به ترتیب این جسم را از بالا و روبه‌رو نشان می‌دهند.

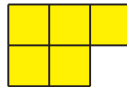
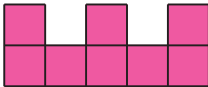


الف) احتمال اینکه حجم این جسم سه‌بعدی برابر ۷ باشد، چقدر است؟

ب) احتمال اینکه حجم این جسم سه‌بعدی برابر ۱۱ باشد، چقدر است؟

۸. مهدی سه کتاب داستان خارجی، چهار کتاب داستان ایرانی، سه کتاب شعر و پنج کتاب معما دارد. مهدی یکی از این کتاب‌ها را با چشم بسته انتخاب می‌کند. احتمال اینکه، این کتاب، کتاب داستان باشد چقدر است؟

۹. دو جسم سه‌بعدی با رنگ‌های زرد و صورتی داریم که هریک، از مکعب‌های به طول واحد تشکیل شده‌اند. در زیر، شکل سمت چپ، نمای بالا و روبه‌روی جسم زرد، و شکل سمت راست، نمای بالا و روبه‌روی جسم صورتی است.



الف) چقدر احتمال دارد که حجم جسم صورتی برابر 10° باشد؟

ب) چقدر احتمال دارد که حجم جسم زرد برابر ۹ نباشد؟

ج) چقدر احتمال دارد که مجموع حجم این دو جسم برابر 20° باشد؟

۱۰. یک عدد صحیح به تصادف انتخاب کرده‌ایم و آن را a نامیده‌ایم. «صفر»، «۱» یا «بین صفر و ۱» بودن احتمال هریک از اتفاق‌های زیر را مشخص کنید.

الف) a عددی مثبت باشد. ب) a برابر $3/14$ باشد.

ج) $-a$ برابر صفر باشد. ب) $-a$ عددی مثبت باشد.

۱۱. در کلاه یک شعبده باز ۶ موش و چند خرگوش وجود دارد. اگر احتمال بیرون آوردن یک خرگوش از این کلاه $1/4$ باشد، تعداد خرگوش‌ها چقدر است؟



۱۲. پنج جفت جوراب در یک کیسه وجود دارد. دو لنگه به تصادف از این کیسه بیرون می‌کشیم. احتمال اینکه این جوراب‌ها لنگه به لنگه باشند، چقدر است؟



احتمال و تجربه

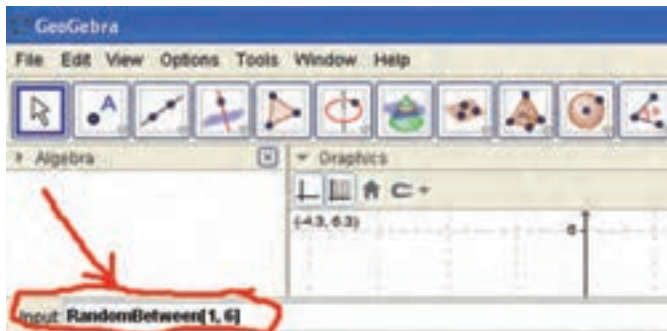
لطفاً نرم‌افزار جئوجبرا را از «www.geogebra.org» دانلود کنید.

۱. الف) با سیب زمینی یک تاس بسازید و آن را صدبار بیندازید. تعداد «۶»های آمده را یادداشت کنید.

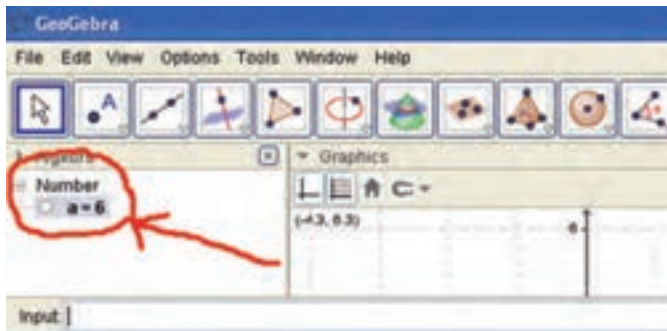
ب) نرم‌افزار جئوجبرا را اجرا کنید. در نوار مقابل Input، عبارت

$\text{RandomBetween}[1, 6]$

را وارد کنید (تصویر زیر را ببینید).



سپس کلید Enter را فشار دهید. جئوجبرا یک عدد تصادفی از اعداد ۱ تا ۶ انتخاب و آن عدد را در نوار سمت چپ، چاپ می‌کند (تصویر زیر را ببینید).



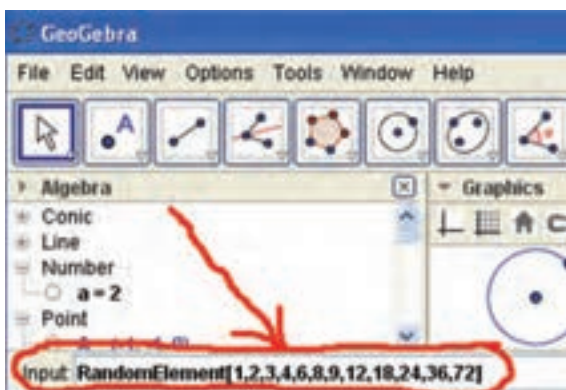
با هر بار فشار دادن کلید F9، جئوجبرا یک عدد تصادفی دیگر (بین ۱ تا ۶) را مقابل حرف a چاپ می‌کند. صدبار کلید F9 را فشار دهید و تعداد «۶»های ظاهر شده مقابل حرف a را یادداشت کنید.

ج) اگر پانصدبار تاس سیب‌زمینی را بیندازید (یا کلید F9 را فشار دهید) انتظار دارید، چندبار عدد ۶ ظاهر شود؟

د) کدام عدد به پاسخ شما در قسمت «ج» نزدیک‌تر است: تعداد «۶»های آمده در پرتاب تاس سیب‌زمینی یا تعداد «۶»های ظاهر شده در جئوجبرا؟

۲. الف) سعی کنید با سیب‌زمینی یک دوازده‌وجهی منتظم بسازید. روی هر وجه آن یکی از شماره‌های عدد ۷۲ حک کنید. دوازده‌وجهی را صدبار بیندازید و تعداد ۲۴‌های آمده را یادداشت کنید.

ب) نرم‌افزار جئوجبرا را اجرا کنید. در نوار مقابل Input، عبارت
 $\text{RandomElement}[1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 18, 24, 36, 72]$
 را وارد کنید (تصویر زیر را ببینید).

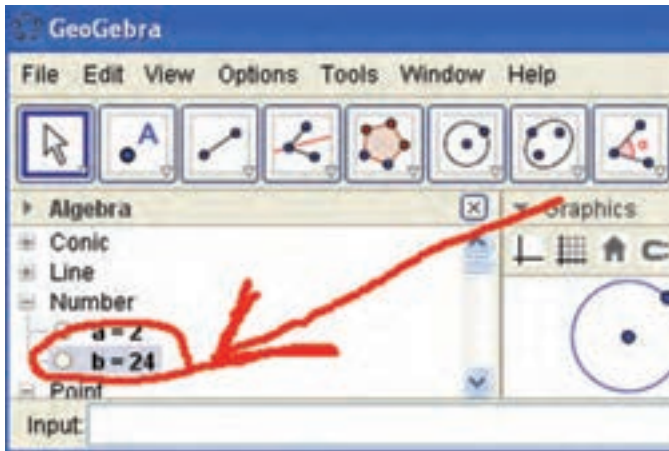


سپس کلید Enter را فشار دهید. جئوجبرا یک عدد تصادفی از اعداد شماره‌های عدد ۷۲ انتخاب می‌کند و آن عدد را در نوار سمت چپ، چاپ می‌کند (تصویر صفحه بعد را ببینید).

با هر بار فشار دادن کلید F9، جئوجبرا یک عدد تصادفی دیگر (از شماره‌های ۷۲) را مقابل حرف b چاپ می‌کند. صدبار کلید F9 را فشار دهید و تعداد ۲۴‌های ظاهر شده مقابل حرف b را یادداشت کنید.

ج) اگر پانصدبار دوازده‌وجهی سیب‌زمینی را بیندازید (یا کلید F9 را فشار دهید) انتظار دارید، چندبار عدد ۲۴ ظاهر شود؟

د) کدام عدد به پاسخ شما در قسمت «ج» نزدیک‌تر است: تعداد ۲۴‌های آمده در پرتاب دوازده‌وجهی سب‌زمینی یا تعداد ۲۴‌های ظاهر شده در جئوجبرا؟



خواندنی

یک سکه را ده بار می‌اندازیم. هر ده بار شیر می‌آید. شما انتظار دارید در پرتاب یازدهم شیر بیاید یا خط؟

استدلال استقرایی و نظریهٔ احتمال می‌گوید دو حالت وجود دارد:

۱. ایراد از سکه است و باید انتظار داشت که بار یازدهم نیز شیر بیاید.
۲. این ده بار به‌طور اتفاقی شیر آمده و بنابراین احتمال شیر یا خط آمدن در بار یازدهم یکسان است.

اما عده‌ای از مردم انتظار دارند که در پرتاب یازدهم خط بیاید. آنها چنین استدلال می‌کنند: «احتمال یازده بار شیر آمدن خیلی کمتر از ده بار شیر آمدن است؛ پس در پرتاب یازدهم خط می‌آید».

مردم با همین استدلال، گاهی اوقات زیر درختان صاعقه زده پناه می‌برند و گمان می‌کنند که صاعقه به‌ندرت دو بار بر یک جا اصابت می‌کند. در بمباران‌ها نیز بعضی اشخاص داخل گودال‌های بمب خورده می‌نشینند و تصور می‌کنند که احتمال دو بار اصابت بمب در یک مکان بسیار کم است.

روان‌شناسانی که شیوهٔ استدلال اشخاص دربارهٔ احتمالات را بررسی می‌کنند، می‌گویند: «تقریباً هرکس در معرض این نوع اشتباه قرار دارد. این استدلال اگرچه درست نیست؛ اما با عادت ذهنی آدمی مطابقت دارد».

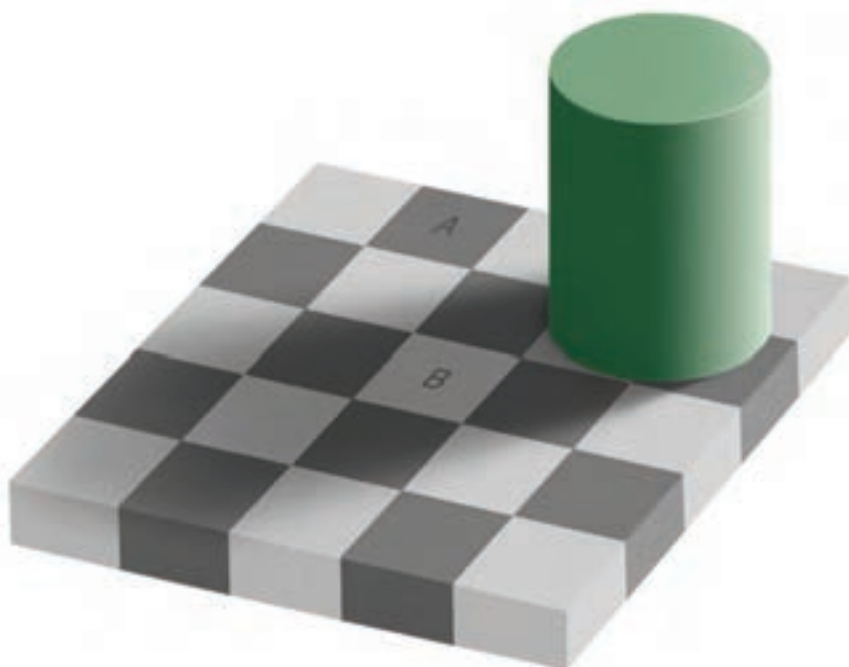
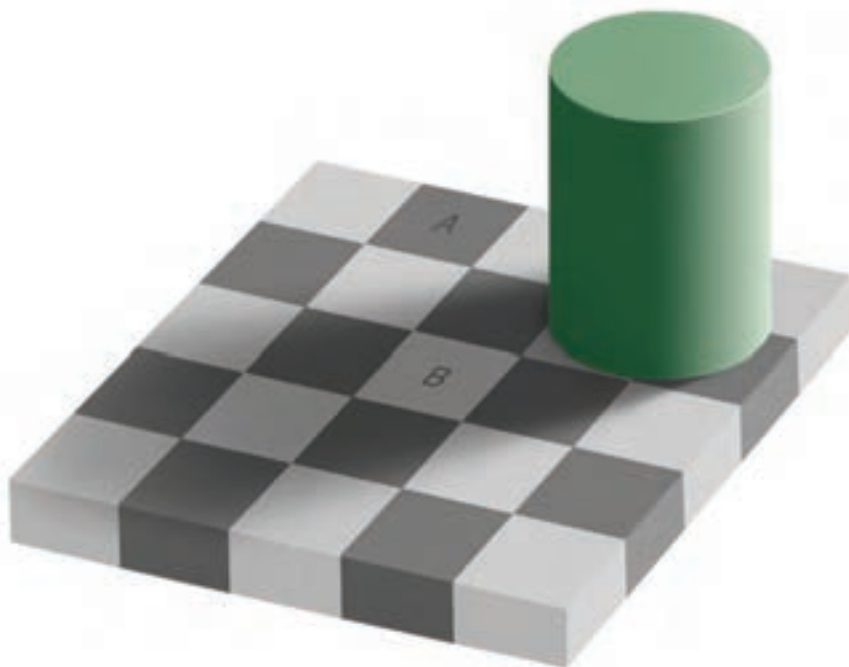
ادم. مورتون، فلسفه در عمل، ترجمهٔ فریبرز مجیدی.

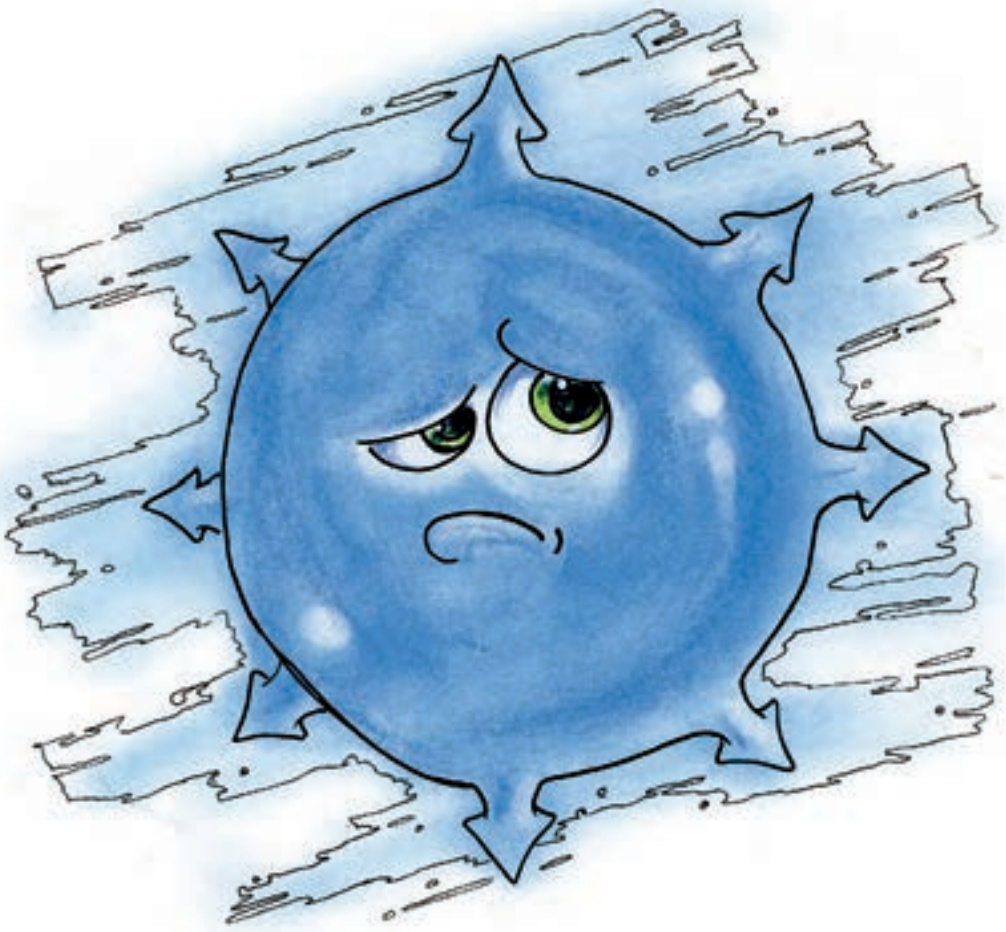
کتاب‌نامه

- [۱] آیزاک آسیموف، عدد، ترجمه ایرج جهانشاهی، انتشارات فاطمی، تهران، ۱۳۶۹.
- [۲] محمد حسین احمدی و نرگس اخلاقی‌نیا، خودآموز هندسه ۱، جلد اول، انتشارات مبتکران، تهران، ۱۳۹۲.
- [۳] ریاضیات کانگورو ۷ و ۸، ترجمه مهران اخباریفر، انتشارات فاطمی با همکاری انتشارات باشگاه دانش‌پژوهان جوان، تهران، ۱۳۸۹.
- [۴] محمد حسین احمدی، سعید صدری و علیرضا تاج‌بخش، ریاضی تکمیلی سال اول دوره راهنمایی، سازمان ملی پرورش استعدادهای درخشان، تهران، ۱۳۸۹.
- [۵] شه‌پان النسکی، در پی فیثاغورث، ترجمه پرویز شهریاری، انتشارات امیرکبیر، تهران، ۱۳۸۴.
- [۶] اویستن اور، گزیده‌هایی از نظریه اعداد، ترجمه منوچهر وصال، مرکز نشر دانشگاهی، تهران، ۱۳۶۹.
- [۷] هاوارد ایوز، آشنایی با تاریخ ریاضیات، جلد اول، ترجمه محمد قاسم وحیدی اصل، مرکز نشر دانشگاهی، تهران، ۱۳۸۶.
- [۸] دیوید برتن، نظریه مقدماتی اعداد، ترجمه محمد صادق منتخب، مرکز نشر دانشگاهی، تهران، ۱۳۸۱.
- [۹] اریک تمپل بل، ریاضی‌دانان نامی، ترجمه حسن صفاری، انتشارات امیرکبیر، تهران، ۱۳۸۲.
- [۱۰] واسیلی دمیتریه‌ویچ چیستیاکوف، مسئله‌های تاریخی ریاضیات، ترجمه پرویز شهریاری، نشر نی، تهران، ۱۳۷۴.
- [۱۱] ریاضیات کانگورو ۹ و ۱۰، ترجمه بردیا حسام، انتشارات فاطمی، تهران، ۱۳۹۰.
- [۱۲] خسرو داودی، از توان بیشتر بدانیم، انتشارات مدرسه، تهران، ۱۳۷۷.
- [۱۳] عبدالرضا زارع شهنه، ریاضی تکمیلی سال دوم دوره راهنمایی، سازمان ملی پرورش استعدادهای درخشان، تهران، ۱۳۸۹.
- [۱۴] واسیلی دمیتریه‌ویچ چیستیاکوف، مسئله‌های تاریخی ریاضیات، ترجمه پرویز شهریاری، نشر نی، تهران، ۱۳۷۴.
- [۱۵] پرویز شهریاری، ۹۹ مسئله ریاضی، موسسه چاپ سوره، تهران، ۱۳۷۹.
- [۱۶] دمیتری فومین، سرگی گنکین و ایلیا ایتنبرگ، محافل ریاضی (تجربه روس‌ها)، ترجمه ارشک حمیدی و مهرداد مسافر، انتشارات فاطمی، تهران، ۱۳۸۶.

- [۱۷] بوریس آناستاسویچ کوردمسکی، اندیشه ریاضی، ترجمه پرویز شهریاری، انتشارات امیرکبیر، تهران، ۱۳۶۱.
- [۱۸] سرژ لانگ و جین مورو، هندسه، ترجمه محمدعلی رضوانی، انتشارات فاطمی، تهران، ۱۳۷۷.
- [۱۹] مارتین گاردنر، معماهای ابوالهول، ترجمه حسن نصیرنیا، مرکز نشر دانشگاهی، تهران، ۱۳۷۰.
- [۲۰] ادوین مویز و فلویید دانز، هندسه، ترجمه محمود دیانی، انتشارات فاطمی، تهران، ۱۳۷۵.
- [۲۱] راجر نلسن، اثبات بدون کلام، ترجمه سپیده چمن آرا، انتشارات فاطمی، تهران، ۱۳۷۵.
- [۲۲] تارل هاف، چگونه با آمار دروغ می‌گویید، ترجمه مهدی تقوی، نشر آفتاب، تهران، ۱۳۷۱.







تا به حال به فرش‌های ایرانی توجه کرده‌اید؟!

گلیم یا پلاس یکی از انواع صنایع دستی، زیراندازی و پوششی است که از ابریشم، موی بز، پشم گوسفند و یا دیگر چارپایان اهلی بافته می‌شود. گلیم به شکل سنتی‌اش، معمولاً برای پوشاندن زمین، دیوار و یا رواندازی برای حیوانات باربر استفاده می‌شود ولی امروزه به‌عنوان یک پوشش مدرن برای خانه‌های شهری نیز خریداری می‌شود.^۱

طرح روی جلد این کتاب قسمتی از نقشهٔ یک گلیم است که از وبگاه www.picnama.com انتخاب شده است. در زیر، طرح کامل این گلیم زیبا را می‌بینید.



معلمان محترم، صاحب نظران، دانش آموزان عزیز و اولیای آنان می توانند نظر اصلاحی خود را درباره مطالب این کتاب از طریق نامه به نشانی تهران- خیابان سپهدقنی- نبش سمیه- وزارت آموزش و پرورش- ساختمان مرحوم علاقمندان- طبقه، منقسم- کد پستی ۵۸۱۱۱-۱۵۹۹۹ و یا رایانامه به نشانی sampad@medu.ir ارسال نمایند.

مرکز ملی پرورش استعداد های درخشان و دانش پژوهان جوان