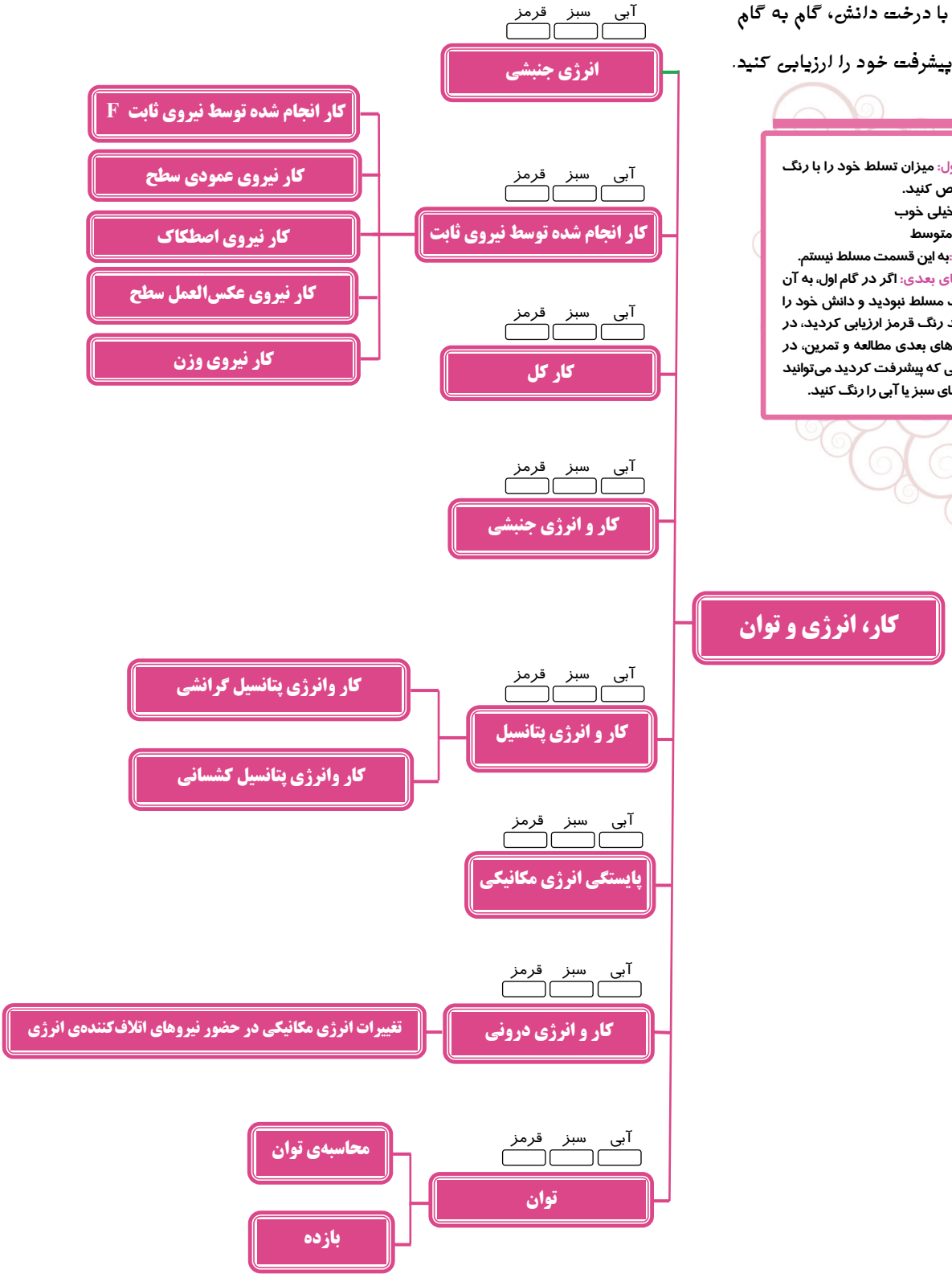
فصل دوم: کار، انرژی و توان

درخت دانش

با درخت دانش، گام به گام پیشرفت خود را ارزیابی کنید.

گام اول: میزان تسلط خود را با رنگ مشخص کنید.
آبی: خیلی خوب
سبز: متوسط
قرمز: به این قسمت مسلط نیستم.
گام‌های بعدی: اگر در گام اول، به آن مبحث مسلط نبودید و دانش خود را در حد رنگ قرمز ارزیابی کردید، در نوبت‌های بعدی مطالعه و تمرین، در صورتی که پیشرفت کردید می‌توانید خانه‌های سبز یا آبی را رنگ کنید.



فصل دوم

کار، انرژی و توان

انرژی جنبشی

انرژی که جسم به علت داشتن حرکت دارا می‌باشد را انرژی جنبشی یا انرژی حرکتی گوئیم.

انرژی جنبشی جسمی به جرم m که با تندی V در حال حرکت باشد از رابطه زیر به دست می‌آید.

$$k = \frac{1}{2}mV^2$$

- $k : (J)$ انرژی جنبشی بر حسب ژول
- $m : (kg)$ جرم بر حسب کیلوگرم
- $V : (\frac{m}{s})$ تندی بر حسب متر بر ثانیه

نکته ۱: هرچه جسم سریع‌تر حرکت کند انرژی جنبشی آن بیشتر است و هنگامی که جسم ساکن $(V = 0)$ است انرژی جنبشی آن صفر است.

به این نکته توجه کنید برای بیان کمیت‌های اندازه‌گیری شده در فیزیک یک عدد به تنهایی معنی ندارد.

نکته ۲: اگر تندی جسم بر حسب کیلومتر بر ساعت $(\frac{km}{h})$ داده شود برای تبدیل آن به متر بر ثانیه $(\frac{m}{s})$ کافیست آن را بر $3/6$ تقسیم کنیم.

نکته ۳: یکای انرژی جنبشی و هر نوع دیگری از انرژی، $kg.\frac{m^2}{s^2}$ است که به افتخار جیمز ژول، فیزیکدان انگلیسی، ژول (J) نامیده می‌شود.

مثال ۱: شهاب سنگی به جرم $۴\times۱۰^{۶}\,kg$ و تندی $۱۵\frac{km}{s}$ وارد جو زمین می‌شود اگر این شهاب سنگ تقریباً با همین تندی به زمین برخورد کند انرژی جنبشی آن را بدست آورید. و با انرژی آزاد شده بوسیله یک تن TNT مقایسه کنید.

پاسخ:

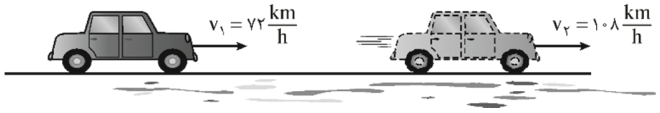
$$\begin{cases} V=۱۵\frac{km}{s}=۱۵\times۱۰^{۳}\frac{m}{s} \\ K=\frac{۱}{۲}mV^{۲}=\frac{۱}{۲}\times۴\times۱۰^{۶}\times(۱۵\times۱۰^{۳})^{۲}=۴۵۰\times۱۰^{۱۲}J \end{cases}$$

$$\frac{\text{انرژی شهاب سنگ}}{\text{انرژی آزاد شده یک تن TNT}}=\frac{۴۵۰\times۱۰^{۱۲}}{۴/۸\times۱۰^{۹}}=۹۳۷۵۰$$

انرژی شهاب سنگ ۹۳۷۵۰ برابر انرژی یک تن TNT است.

مثال ۲: جرم خودرویی به همراه راننده‌اش ۸۰۰ کیلوگرم است. مطابق شکل تندی خودرو در نقطه از مسیری که روی آن در حال حرکت است نشان داده شده است. تغییرات انرژی جنبشی خودرو بر حسب کیلوژول کدام است؟ (تمرین ۲-۲ کتاب درسی)

۱) ۴۰۰
۲) ۴۰۰۰۰۰
۳) ۲۰۰
۴) ۲۰۰۰۰۰



پاسخ:

$$V_۱=\frac{km}{h}=\frac{۷۲}{۳/۶}=۲۰\frac{m}{s}$$

$$V_۲=۱۰۸\frac{km}{h}=\frac{۱۰۸}{۳/۶}=۳۰\frac{m}{s}$$

$$\Delta k=k_۲-k_۱=\frac{۱}{۲}mV_۲^{۲}-\frac{۱}{۲}mV_۱^{۲}=\frac{۱}{۲}m(V_۲^{۲}-V_۱^{۲})=\frac{۱}{۲}\times۸۰۰\times(۳۰^{۲}-۲۰^{۲})$$

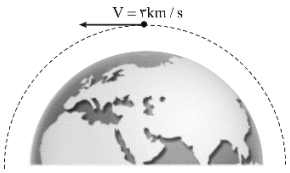
$$\Rightarrow \Delta k=۴۰۰\times۵۰۰=۲۰۰۰۰۰J$$

$$\Rightarrow \Delta k=۲۰۰kJ$$

گزینه ۳ صحیح است.

مثال ۳: ماهواره‌ای به جرم $۲۰kg$ و با تندی ثابت $۳\frac{km}{s}$ مطابق شکل به دور زمین می‌چرخد. انرژی جنبشی ماهواره بر حسب مگاژول کدام است؟ (تمرین ۲-۱ کتاب درسی)

۱) ۹۰
۲) ۹
۳) ۹×۱۰^{۷}
۴) ۴۵



پاسخ:

تندی ماهواره را بر حسب $\frac{m}{s}$ به دست می‌آوریم و سپس انرژی جنبشی را طبق رابطه $k=\frac{۱}{۲}mV^{۲}$ محاسبه می‌کنیم:

$$\begin{cases} V = ۳\frac{km}{s} = ۳\times ۱۰^{۳}\frac{m}{s} \\ k = \frac{۱}{۲}mV^{۲} = \frac{۱}{۲}(۲۰)(۳\times ۱۰^{۳})^{۲} = ۹\times ۱۰^{۷}J = ۹۰MJ \end{cases}$$

گزینه ۱ صحیح است.

نکته: برای مقایسه انرژی جنبشی دو جسم با جرم‌ها و تندی‌های متفاوت داریم:

$$k = \frac{۱}{۲}mV^{۲} \Rightarrow \frac{k_{۲}}{k_{۱}} = \frac{m_{۲}}{m_{۱}}\times(\frac{V_{۲}}{V_{۱}})^{۲}$$

▼ مثال ٤: نسبت انرژی جنبشی جسمی به جرم m که با تندی V در حرکت است، به انرژی جنبشی جسم دیگری که جرم آن $۲m$ و تندیش $\frac{۱}{۲}V$ می‌باشد، چقدر است؟ **(سراسری تجربی ۷۹)**

۱) $\frac{۱}{۴}$ ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) ۱ ٤) ۲

☑پاسخ:

انرژی جنبشی حالت اول $k = \frac{۱}{۲}mV^{۲}$ *و انرژی جنبشی حالت دوم* $k' = \frac{۱}{۲}m'V'^{۲}$ *می‌باشد. بنابراین داریم:*

$$k = \frac{۱}{۲}mV^{۲} \Rightarrow \frac{k}{k'} = \frac{m}{m'}\times(\frac{V}{V'})^{۲} \xrightarrow{m'=۲m, V'=\frac{۱}{۲}V} \frac{k}{k'} = \frac{m}{۲m}\times(\frac{V}{\frac{۱}{۲}V})^{۲} \Rightarrow \frac{k}{k'} = \frac{۱}{۲}\times ۴ \Rightarrow \frac{k}{k'} = ۲$$

گزینه ۴ صحیح است.

▼ مثال ٥: جسمی در مسیر مستقیم با تندی V در حال حرکت است. اگر تندی این جسم $۵\frac{m}{s}$ افزایش یابد، انرژی جنبشی آن ۴۴ درصد افزایش می‌یابد. V چند متر بر ثانیه است؟ **(خارج از کشور تجربی ۹۳)**

۱) ۵ ۲) ۱۰ ۳) ۲۰ ٤) ۲۵

☑پاسخ:

$$k_{۲} = k_{۱} + \Delta k = k_{۱} + ۰/۴۴k_{۱} = ۱/۴۴k_{۱}$$

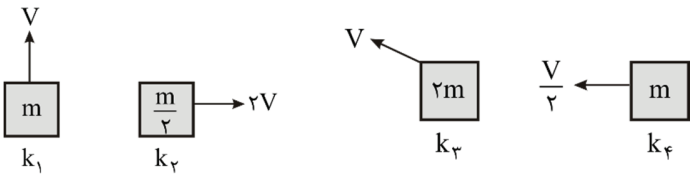
$$k = \frac{۱}{۲}mV^{۲} \Rightarrow \frac{k_{۲}}{k_{۱}} = \frac{m_{۲}}{m_{۱}}\times(\frac{V_{۲}}{V_{۱}})^{۲} \Rightarrow ۱/۴۴ = ۱\times(\frac{V+۵}{V})^{۲}$$

$$\Rightarrow ۱/۲ = \frac{V+۵}{V} \Rightarrow ۰/۲V = ۵ \Rightarrow V = ۲۵\frac{m}{s}$$

گزینه ۴ صحیح است.

نکته: انرژی جنبشی کمیتی نرده‌ای و همواره مثبت است. این کمیت تنها به جرم و تندی جسم بستگی دارد و به جهت حرکت جسم وابسته نیست.

مثال ٦: در کدام گزینه مقایسه بین انرژی جنبشی جسم‌های زیر به درستی انجام گرفته است؟ (پرسش ۶-۱ کتاب درسی)



۱) $k_۲ > k_۲ > k_۱ > k_۴$

۲) $k_۲ = k_۳ > k_۱ > k_۴$

۳) $k_۱ > k_۲ = k_۳ > k_۴$

٤) $k_۲ > k_۳ > k_۱ > k_۴$

پاسخ:

برای به دست آوردن انرژی جنبشی یک متحرک فقط تندی مهم است و جهت حرکت اهمیتی ندارد؛

$$k_۱ = \frac{۱}{۲}mV^۲$$

$$k_۲ = \frac{۱}{۲}\frac{m}{۲}(۲V)^۲ = mV^۲$$

$$k_۳ = \frac{۱}{۲}(۲m)V^۲ = mV^۲$$

$$k_۴ = \frac{۱}{۲}(m)(\frac{V}{۲})^۲ = \frac{۱}{۸}mV^۲$$

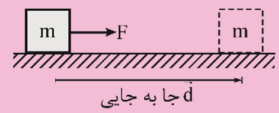
$$\Rightarrow k_۲ = k_۳ > k_۱ > k_۴$$

گزینه ۲ صحیح است.

کار انجام شده توسط نیروی ثابت

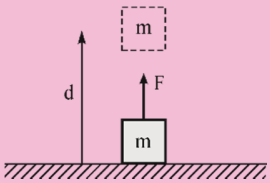
در بسیاری از فعالیت‌هایی که در طول روز انجام می‌دهیم به اجسام مختلف نیرو وارد می‌کنیم. حال ممکن است این اجسام تحت اثر نیرویی که به آن‌ها وارد می‌شود جابه‌جا شوند و یا این که سر جای خود ثابت باقی بمانند. در این جا توجه خود را به نیروهای ثابت معطوف می‌کنیم یعنی نیروهایی که اندازه یا بزرگی آن‌ها یکسان است و در دو حالت آن را بررسی می‌کنیم:

الف) حالتی که نیرو و جابه‌جایی در یک جهت باشند:



$$W_F = Fd$$

$$\begin{cases} W : (J) & \text{کار انجام شده بر حسب ژول} \\ F : (N) & \text{اندازه‌ی نیرو بر حسب نیوتن} \\ d : (m) & \text{اندازه‌ی جابه‌جایی بر حسب متر} \end{cases}$$



$$W_F = Fd$$

نکته: کار یک کمیت نرده‌ای (عددی) است و طبق تعریف یکای آن، یک ژول، برابر است با یک نیوتن در متر.

$$۱J = ۱N.m$$

یک ژول مقدار کاری است که نیروی یک نیوتون در جابه‌جایی نقطه اثر خود به اندازه یک متر انجام دهد.

مثال ۷: کار چه نوع کمیتی است و یکای آن در کدام است؟ (فارغ از کنکور ۸۴)

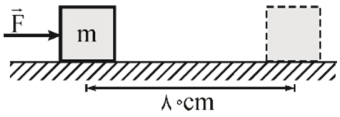
۱) برداری - $N.m$
۲) نرده‌ای - $N.m$
۳) نرده‌ای - $\frac{N}{m}$
۴) برداری - $\frac{N}{m}$

پاسخ:

کار یک کمیت نرده‌ای است و با توجه به تعریف، یکای آن برابر حاصل ضرب یکای نیرو در یکای جابه‌جایی $N.m$ است.

گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

مثال ۸: مطابق شکل مقابل نیروی افقی $F = ۵۰N$ به جسمی به جرم $۱۰kg$ که بر روی یک سطح افقی بدون اصطکاک قرار دارد وارد می‌شود. اگر جسم تحت اثر این نیرو به اندازه‌ی $۸۰cm$ جابه‌جا شود، کار نیروی F را محاسبه کنید.



پاسخ:

نیروی ثابت F و جابه‌جایی جسم d هم جهت هستند بنابراین کار نیروی برابر است با:

$$W_F = Fd$$

$$W_F = Fd \Rightarrow W_F = ۵۰ \times ۰/۸ \Rightarrow W_F = ۴۰J$$

مثال ۹: یک قایق به جرم $۵۰۰kg$ روی یک دریاچه بدون اصطکاک ساکن است. در لحظه‌ای که بادی ناگهانی با نیروی ثابت $\vec{F}$ به قایق شتابی به بزرگی $۴۰\frac{m}{s^۲}$ می‌دهد، این قایق در جهت این نیرو به اندازه $۸m$ جابجا می‌شود. کار انجام شده توسط نیروی $\vec{F}$ چقدر است؟

پاسخ:

با استفاده از قانون دوم نیوتن برای محاسبه نیروی باد $(\vec{F})$ داریم:

$$F = ma = ۵۰۰ \times ۴۰ \Rightarrow F = ۲ \times ۱۰^۴ N$$

چون نیرو و جابجایی هم جهت‌اند بنابراین برای محاسبه کار نیروی F داریم:

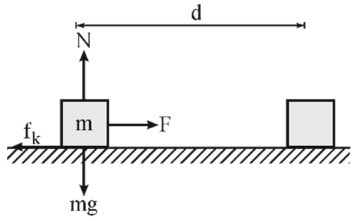
$$W_F = Fd = ۲ \times ۱۰^۴ \times ۸ \Rightarrow W_F = ۱۶ \times ۱۰^۴ J$$

مثال ۱۰: جسمی بر روی یک سطح افقی تحت اثر نیروی F با تندی ثابت $۴\frac{m}{s}$ حرکت می‌کند. اگر نیروی اصطکاک لغزشی $۲۰۰N$ باشد، کار نیروی F در هر دقیقه، چند کیلوژول است؟ (سراسری تجربی ۷۱)

۱) $۰/۸$
۲) ۳
۳) ۴۸
۴) ۴۸۰

پاسخ:

جسم با تندی ثابت حرکت می‌کند پس شتاب حرکت صفر است:



$$(F_{\text{برآیند}})_x = ma = ۰ \Rightarrow F - f_k = ۰ \Rightarrow F = f_k \Rightarrow F = ۲۰۰N$$

$$\text{حرکت یکنواخت}: d = Vt = ۴ \times ۶۰ \Rightarrow d = ۲۴۰m$$

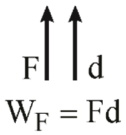
$$W_F = Fd\cos\theta \Rightarrow W_F = ۲۰۰ \times ۲۴۰ \times \cos ۰ = ۴۸۰۰۰J \Rightarrow W_F = ۴۸kJ$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

▼ مثال ۱۱: جسمی به جرم m ، توسط یک نیروی ثابت $F=10N$ در راستای قائم به اندازه‌ی $5m$ جابه‌جا می‌شود کار نیروی F را محاسبه کنید.

(مکمل و مرتبط با مثال ۲ کتاب درسی)

☑پاسخ:

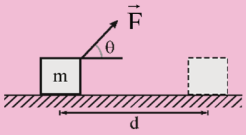


$W_F = Fd$

با توجه به این که نیروی F و جابه‌جایی جسم d هر دو هم جهت هستند بنابراین کار نیروی F برابر است با:

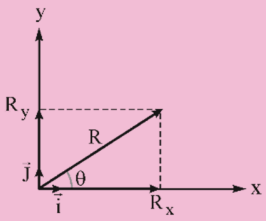
$$W_F = Fd \Rightarrow W_F = 10\times 5 \Rightarrow W_F = 50J$$

ب) حالتی که نیرو (F) و جابه‌جایی (d) با هم زاویه‌ی θ می‌سازند.



یادآوری از تجزیه‌ی بردار:

اگر R_x و R_y مؤلفه‌های بردار $\vec{R}$ روی محورهای x و y و $\vec{i}$ و $\vec{j}$ بردارهای یکه باشند، آن گاه داریم:



$$\vec{R} = R_x\vec{i} + R_y\vec{J}$$

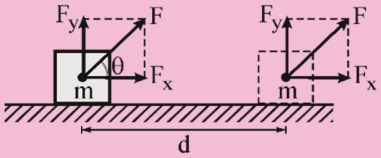
از طرفی با توجه به روابطی که برای نسبت‌های مثلثی داریم، می‌توان نوشت:

$$\cos\theta = \frac{\text{ضلع مجاور}}{\text{وتر}} = \frac{R_x}{R} \Rightarrow R_x = R\cos\theta$$

$$\sin\theta = \frac{\text{ضلع مقابل}}{\text{وتر}} = \frac{R_y}{R} \Rightarrow R_y = R\sin\theta$$

بدین ترتیب بردار $\vec{R}$ بر حسب مؤلفه‌های آن و بردارهای یکه $\vec{i}$ و $\vec{j}$ به صورت زیر است:

$$\vec{R} = R\cos\theta\vec{i} + R\sin\theta\vec{j}$$



مؤلفه‌ی عمودی نیرو $(F_y = F\sin\theta)$ بر جابه‌جایی عمود است و کار روی جسم انجام نمی‌دهد بنابراین کار انجام شده روی جسم تنها ناشی از مؤلفه‌ای از نیرو است که با جابه‌جایی موازی است $(F\cos\theta)$ بنابراین کاری که نیروی ثابت $\vec{F}$ به ازای جابه‌جایی $\vec{d}$ روی جسم انجام می‌دهد از رابطه‌ی زیر به دست می‌آید.

$$W_F = F\cos\theta.d$$

نکته: کار نیروی ثابت F مطابق رابطه‌ی $W_F = Fd\cos\theta$ ، در یکی از سه حالت زیر می‌تواند صفر شود:

I) **نیروی ثابت (F) برابر صفر باشد:** $F=0 \Rightarrow W_F = 0$

II) **جابه‌جایی جسم (d) برابر صفر باشد:** $d=0 \Rightarrow W_F = 0$

III) **نیروی F بر جابه‌جایی d عمود باشد:** $\theta = 90^\circ \Rightarrow W_F = Fd\cos 90 \Rightarrow W_F = 0$

نکته: اگر $0^\circ \le \theta < 90^\circ$ باشد، $\cos\theta > 0$ بوده و کار انجام شده توسط نیرو مثبت است.

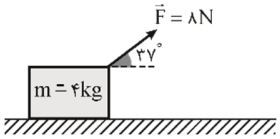
نکته ۲: کار نیروی ثابت $90^\circ < \theta \le 180^\circ$ باشد $\cos\theta < 0$ بوده و کار انجام شده توسط نیرو منفی است.

▼ مثال ۱۲: مطابق شکل، وزنه‌ی m روی سطح افقی جابه‌جا می‌شود. کار نیروی F در هر متر جابه‌جایی چقدر است؟ $(\cos 37^\circ = 0/8)$

(شیراز- فرانگان- ۸۹)

پاسخ:

برای محاسبه‌ی کار نیروی F داریم:

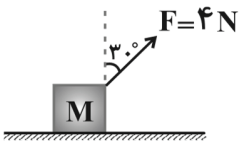


$$W_F = Fd\cos\theta$$

$$W_F = 8\times 1\times \cos 37^\circ \Rightarrow W_F = 8\times 1\times 0/8 \Rightarrow W_F = 6/4\,J$$

▼ مثال ۱۳: در شکل زیر، نیروی $F = 4N$ وزنه‌ی M را روی سطح افقی در هر ثانیه ۲ متر جابه‌جا می‌کند، کار این نیرو در مدت ۱۰ ثانیه برابر چند ژول است؟

(آزاد ریاضی بعدا(ظهر ۸۶)



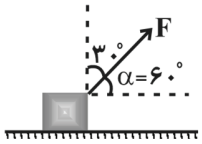
۱) ۴

۲) $4\sqrt{3}$

۳) ۴۰

۴) $40\sqrt{3}$

پاسخ:



$$W_F = Fd\cos\alpha = 4\times(10\times 2)\times\cos 60^\circ$$

$$W_F = 40\,J$$

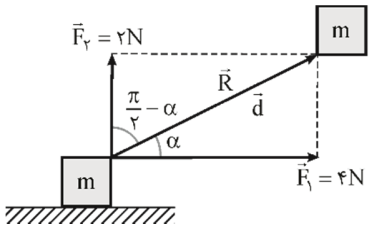
گزینه ۳ صحیح است.

▼ مثال ۱۴: بر جسم ساکنی تنها دو نیروی عمود بر هم $F_1 = 4N$ و $F_2 = 2N$ وارد می‌شود. پس از ۱۰ متر جابه‌جایی جسم، کار نیروی F_1 چند برابر کار نیروی F_2 است؟

(آزمون کانون- دوم دبیرستان- ۲۵ بهمن ۹۲)

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۶

پاسخ: چون جسم ساکن است بنابراین در جهت برآیند نیروهای وارد بر آن $(\vec{R})$ جابه‌جا می‌شود.



$$W_{F_1} = F_1 d\cos\alpha$$

$$W_{F_2} = F_2 d\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) = F_2 d\sin\alpha$$

$$\frac{W_{F_1}}{W_{F_2}} = \frac{F_1 d\cos\alpha}{F_2 d\sin\alpha} = \frac{F_1}{F_2}\cot\alpha = 2\times 2 \Rightarrow \frac{F_1}{F_2} = 4$$

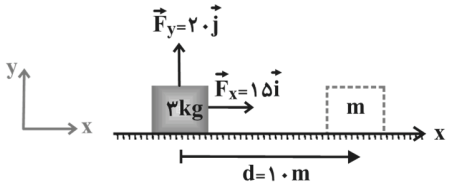
گزینه ۳ صحیح است.

▼ مثال ۱۵: جسمی به جرم $3kg$ روی سطح افقی بر حالت سکون قرار دارد. نیروی ثابت $\vec{F}=15\vec{i}+20\vec{j}$ (در SI) بر جسم وارد می‌شود و جسم بر روی محور x، ۱۰ متر جابه‌جا می‌شود. کار نیروی F در این جابه‌جایی چند ژول است؟ (سراسری ریاضی ۹۳ خارج از کشور)

۱) ۲۵۰ ۲) ۲۰۰ ۳) ۱۵۰ ۴) ۹۰

☑پاسخ:

مطابق شکل مؤلفه عمود نیرو (F_y) بر جابه‌جایی عمود است بنابراین کار آن صفر است $W_{F_y}=0$ و فقط مؤلفه‌ی افقی آن (F_x) که در جهت جابه‌جایی به جسم وارد می‌شود، کار انجام می‌دهد:



$$\begin{cases}\rightarrow F_x \\ \rightarrow d\end{cases}\Rightarrow \theta=0$$

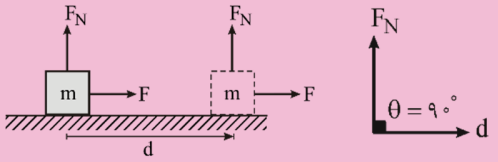
$$W_F=W_{F_x}=F_x d\cos\theta=15\times10\times\cos0$$
$$W_F=150J$$

گزینه ۳ صحیح می‌باشد.

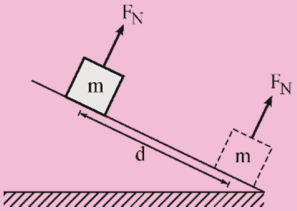
در زیر به بررسی کار برخی از نیروهای ثابت خاص می‌پردازیم:

کار نیروی عمودی سطح (W_{F_N})

هنگامی که یک جسم روی سطح افقی و یا یک سطح شیب‌دار حرکت می‌کند با توجه به این که نیروی عکس‌العمل عمودی سطح (F_N) بر سطح عمود است در نتیجه می‌توان گفت زاویه بین این نیرو و جابه‌جایی $\theta=90^\circ$ بوده بنابراین کار آن صفر است.



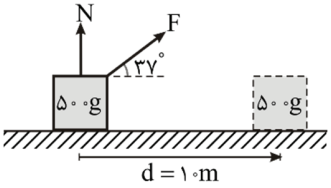
$$\Rightarrow W_N=F_N d\cos90^\circ=0$$



$$\Rightarrow W_N=F_N d\cos90^\circ=0$$

▼ مثال ۱۶: جسمی به جرم $500g$، روی یک سطح افقی به وسیله‌ی نیروی F که تحت زاویه ۳۷ درجه بر جسم اثر می‌کند، به اندازه‌ی ۱۰ متر با سرعت ثابت تغییر مکان می‌یابد. کار انجام شده توسط نیروی عمودی سطح چند ژول است؟ $(g=10\frac{m}{s^2})$ (سراسری ریاضی ۷۴ با اندکی تغییر)

۱) ۱/۲۵ ۲) ۲/۵ ۳) ۱۲/۵ ۴) صفر



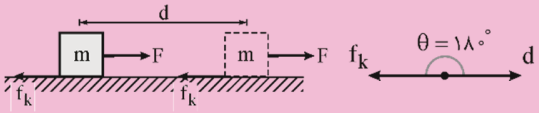
پاسخ:

با توجه به عمود بودن F_N بر d، کار انجام شده توسط نیروی عمودی سطح (W_{F_N}) برابر صفر است.

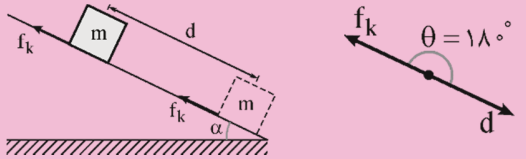
$$\theta = ۹۰ \Rightarrow W_N = Nd\cos ۹۰ = ۰$$

کار نیروی اصطکاک

هنگامی که یک جسم روی یک سطح افقی و یا یک سطح شیب‌دار دارای اصطکاک حرکت می‌کند همواره نیروی اصطکاک در خلاف جهت حرکت جسم بر آن وارد می‌شود بنابراین:



$$\Rightarrow W_{f_k} = f_k d\cos ۱۸۰ = -f_k d$$



$$\Rightarrow W_{f_k} = f_k d\cos ۱۸۰ = -f_k d$$

نکته: معمولاً کاری که نیروی اصطکاک انجام می‌دهد به صورت گرما تولید می‌شود و مقدار این گرما برابر قدرمطلق کار نیروی اصطکاک است.

نکته: اندازه‌ی کار انجام شده برای غلبه بر نیروی اصطکاک برابر است با قدرمطلق کار انجام شده توسط نیروی اصطکاک، از طرفی کار نیروی اصطکاک برابر با $W_{f_k} = -f_k d$ است در نتیجه کار مورد نیاز برای غلبه بر نیروی اصطکاک، (W') برابر است با:

$$W' = |W_{f_k}| \rightarrow W' = f_k d$$

▼ مثال ۱۷: جسمی به جرم ۵ کیلوگرم به اندازه‌ی ۲ متر روی سطح افقی جابه‌جا می‌شود. اگر نیروی اصطکاک در مقابل حرکت ۱۰ نیوتن باشد، کار نیروی اصطکاک بر حسب ژول برابر است با: $(g = ۱۰ \frac{m}{s^۲})$ (سراسری تجربی ۷۴ با اندکی تغییر)

۱) -۲۰ ۲) ۲۰ ۳) ۱۰ ۴) -۱۰

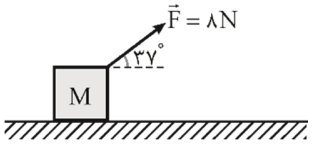
پاسخ:

کار نیروی اصطکاک $W_{f_k} = -f_k d$ است بنابراین داریم:

$$W_{f_k} = -f_k d = -۱۰ \times ۲ \Rightarrow W_{f_k} = -۲۰ J$$

گزینه ۱ صحیح است.

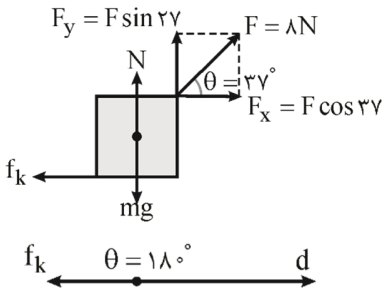
مثال ۱۸: در شکل مقابل وزنه M با سرعت ثابت روی سطح افقی جابه‌جا می‌شود. کار نیروی اصطکاک در هر متر جابه‌جایی چند ژول است؟ $(\cos ۳۷^\circ = ۰/۸)$ (آزاد - تجربی- ۸۱)



۱) $-۶/۴$ ۲) $-۴/۸$ ۳) $۶/۴$ ۴) $۴/۸$

پاسخ:

با توجه به اینکه سرعت وزنه ثابت و در نتیجه شتاب آن صفر است، نیروی اصطکاک را از قانون دوم نیوتون با استفاده از شکل زیر تعیین می‌کنیم و سپس کار نیروی اصطکاک را از رابطه $W_{f_k} = -f_k d$ تعیین می‌کنیم:



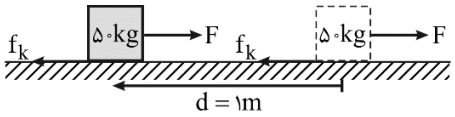
$$F_x = F\cos ۳۷ = ۸\times ۰/۸ = ۶/۴N$$
$$F_y = F\sin ۳۷ = ۸\times ۰/۶ = ۴/۸N$$
$$(F_x)_{\text{برآیند}} = ma \Rightarrow (F_x)_{\text{برآیند}} = ۰ \rightarrow F_x - f_k = ۰$$
$$\rightarrow ۶/۴ - f_k = ۰ \Rightarrow f_k = ۶/۴N$$
$$W_{f_k} = -f_k d \Rightarrow W_{f_k} = -۶/۴\times ۱ \Rightarrow W_{f_k} = -۶/۴J$$

گزینه ۱ صحیح است.

مثال ۱۹: صندوقی به جرم ۵۰Kg با سرعت ثابت $۱\frac{m}{s}$ توسط یک نیروی افقی روی کف اتاق کشیده می‌شود. اگر نیروی اصطکاک در مقابل حرکت ۲۰۰ نیوتون باشد، مقدار گرمایی که در هر متر جابه‌جایی جسم در اثر اصطکاک تولید می‌شود چند ژول است؟ $(g = ۱۰\frac{m}{s^۲})$ (تألیفی)

۱) ۲۰ ۲) ۲۰۰ ۳) ۱۰ ۴) ۱۰۰

پاسخ:



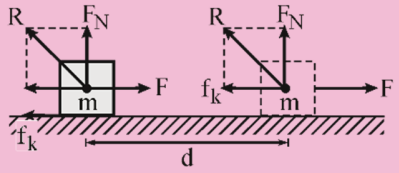
$$\begin{cases} W_{f_k} = f_k d\cos ۱۸۰ = ۲۰۰\times ۱\times -۱ \\ \Rightarrow W_{f_k} = -۲۰۰J \end{cases}$$

$$\text{گرمای تولید شده} = |W_f| = ۲۰۰J$$

گزینه ۲ صحیح است.

کار نیروی عکس العمل سطح (W_R)

مطابق شکل نیروی عکس العمل سطح (R) دارای دو مؤلفه‌ی نیروی عمودی سطح F_N و نیروی اصطکاک f_k است، بنابراین داریم:



$$W_R = W_{F_N} + W_{f_k}$$
$$\begin{cases} W_{F_N} = ۰ \\ W_{f_k} = -f_k d \end{cases} \Rightarrow W_R = -f_k d$$

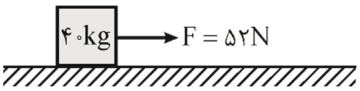
بنابراین کار نیروی عکس‌العمل سطح همواره با کار نیروی اصطکاک برابر است.

تذکر: این رابطه برای سطح شیبدار نیز صادق است. یعنی داریم:

$$W_R = W_{f_k} = -f_k d$$

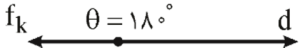
▼ مثال ۲۰: در مجموعه مقابل، بسته از حال سکون شروع به حرکت می‌کند. اگر نیروی اصطکاک در طول مسیر برابر ۱۲N باشد کار انجام شده توسط نیروی عکس‌العمل سطح در طول ۱۵ متر جابه‌جایی جسم چند ژول است؟ (سراسری ریاضی ۸۱ خارج از کشور با اندکی تغییر)

۱) ۱۲۰ ۲) −۱۲۰ ۳) −۱۸۰ ۴) صفر



☑پاسخ:

کار انجام شده توسط نیروی عکس‌العمل سطح (W_R) برابر با کار نیروی اصطکاک (W_{f_k}) است (در واقع کار مؤلفه‌ی عمودی سطح (W_{f_N}) صفر است.)



$$\begin{cases} W_N = 0 \\ W_R = W_N + W_{f_k} \Rightarrow W_R = W_{f_k} \Rightarrow \\ f_k d\cos 180 = 12\times 15\times -1 \\ W_R = -180\,J \end{cases}$$

گزینه ۳ صحیح است.

▼ مثال ۲۱: جسمی به وزن W از بالای سطح شیبداری به طول L که با افق زاویه‌ی θ می‌سازد به پایین می‌لغزد. اگر سطح بدون اصطکاک باشد، کار نیروی عکس‌العمل سطح شیبدار در این جابه‌جایی برابر با کدام یک از مقادیر زیر خواهد بود؟ (مرتبط با صفحه‌های ۱۳۱ تا ۱۳۳ کتاب درسی)

۱) صفر ۲) $W.L$ ۳) $W.L\sin\theta$ ۴) $W.L\cos\theta$

☑پاسخ:

کار نیروی عکس‌العمل سطح (W_R) برابر با کار نیروی اصطکاک است (زیرا کار نیروی سطح W_{F_N} صفر است.) از طرفی چون سطح شیبدار بدون اصطکاک است پس کار نیروی اصطکاک (W_{f_k}) نیز صفر خواهد بود، بنابراین داریم:

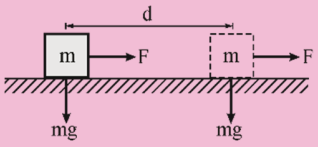
$$\begin{matrix} W_N = 0 \\ W_{f_k} = 0 \end{matrix} \Rightarrow W_R = W_N + W_{f_k} = 0+0 = 0$$

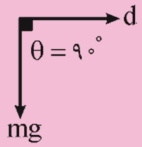
$$\Rightarrow W_R = 0$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

کار نیروی وزن (W_{mg})

الف) جسم در **راستای افقی جابه‌جا** شود:





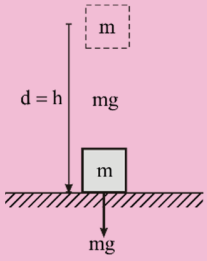
$$\Rightarrow W_{mg} = mgd\cos 90 = 0$$

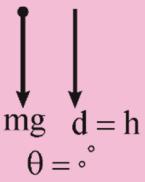
ب) جسم در **راستای قائم جابه‌جا** شود:

- جسم در راستای قائم به طرف بالا حرکت کند.

$$\theta = 180 \Rightarrow W_{mg} = mgd\cos 180 = -mgh$$

- جسم در راستای قائم به سمت پایین حرکت کند.



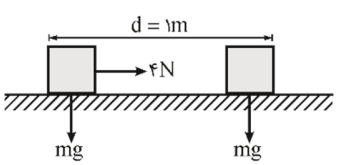


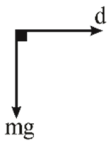
$$W_{mg} = mgd\cos 0 = mgh$$

مثال ۲۲: نخی را به یک وزنه‌ی یک کیلوگرمی بسته و آن را با نیروی کشش ۴ نیوتون روی سطح افقی به اندازه‌ی یک متر جابه‌جا می‌کنیم. کار نیروی وزن در این جابه‌جایی چند ژول است؟ (سراسری تجربی ۷۷)

۱) صفر ۲) ۴ ۳) ۹/۸ ۴) ۱۹/۶

پاسخ:





$$W_{mg} = mgd\cos\theta \xrightarrow{\theta=۹۰^\circ} W_{mg} = ۰$$

کار نیروی وزن در جابه‌جایی‌های افقی صفر است.

گزینه ۱ صحیح است.

مثال ۲۳: جسمی به جرم $۱۰kg$ توسط نیروی F از روی سطح زمین به اندازه‌ی $۵m$ بالا برده می‌شود، کار نیروی وزن در این جابه‌جایی چند ژول است؟ $(g = ۱۰\frac{N}{kg})$ (مکمل تمرین ۶-۹ کتاب درسی)

پاسخ:

جسم به سمت بالا جابه‌جا می‌شود، بنابراین کار نیروی وزن برابر $W_{mg} = -mgd$ *است.*

$$W_{mg} = -۱۰\times۱۰\times۵ \rightarrow W_{mg} = -۵۰۰J$$

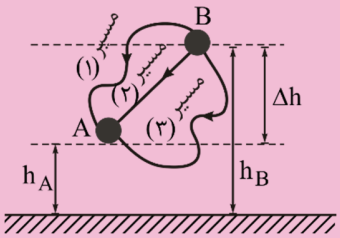
مثال ۲۴: شخصی به جرم $۶۰kg$ داخل آسانسور قرار دارد. آسانسور با شتاب $۲\frac{m}{s^۲}$ به طرف بالا شروع به حرکت می‌کند، کار نیروی وزن در صورتی که آسانسور ۱۰ متر بالا بود چقدر است؟ $(g = ۱۰\frac{m}{s^۲})$ (سراسری- اندیشه‌سازی- ۹۶)

پاسخ:

آسانسور به سمت بالا حرکت می‌کند بنابراین کار نیروی وزن برابر $W_{mg} = -mgd$ *است.*

$$W_{mg} = -mgd \Rightarrow W_{mg} = -۶۰\times۱۰\times۱۰ \Rightarrow W_{mg} = -۶۰۰۰J$$

نکته: کار نیروی وزن مستقل از مسیر حرکت است و فقط به اختلاف ارتفاع (Δh) دو نقطه‌ای که بین آن‌ها جابه‌جا می‌شود بستگی دارد.

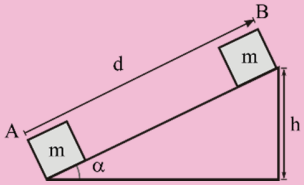


$$\begin{cases}(W_{mg})_۱ = (W_{mg})_۲ = (W_{mg})_۳ = mg\Delta h \\ \Delta h = h_B - h_A\end{cases}$$

تذکر: در نکته‌ی بالا اگر جسم از A به B جابه‌جا شود، آن گاه داریم:

$$(W_{mg})_1 = (W_{mg})_2 = (W_{mg})_3 = -mg\Delta h$$

نکته : هرگاه جسمی از نقطه‌ی A تا B روی سطح شیبدار مطابق شکل جابه‌جا شود کار نیروی وزن برابر است با:



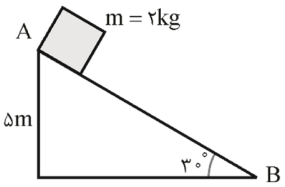
$$\begin{cases} W_{mg} = -mgh \Rightarrow W_{mg} = -mgd\sin\alpha \\ \sin\alpha = \dfrac{h}{d} \end{cases}$$

تذکر: اگر جسم از نقطه‌ی B تا نقطه‌ی A جابه‌جا شود داریم:

$$W_{mg} = +mgd\sin\alpha$$

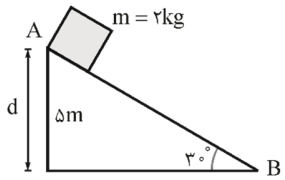
▼ **مثال ۲۵:** اگر در سطح شیب‌دار مطابق شکل، اندازه‌ی نیروی اصطکاک برابر ۰/۱ وزن جسم باشد و جسم از نقطه‌ی A (ارتفاع ۵ متر) به نقطه‌ی B برسد، کار نیروی گرانش (جاذبه) زمین روی جسم در این جابه‌جایی چند ژول است؟ $(g = 10N/kg)$

(سراسری تجربی ۷۷)



۱) ۴۰
۲) ۵۰
۳) ۶۰
۴) ۱۰۰

☑**پاسخ:**



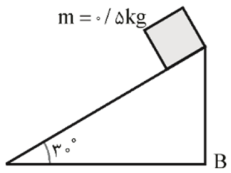
پایین آمدن $W_{mg} = mgh = 2\times10\times5$

$$W_{mg} = 100J$$

گزینه ۴ صحیح می‌باشد.

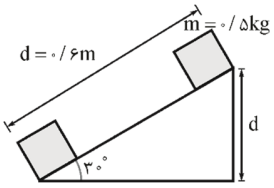
▼ **مثال ۲۶:** وزنه‌ای به جرم ۰/۵kg روی سطح شیب‌دار شکل مقابل به اندازه‌ی ۶۰ سانتی‌متر به پایین می‌لغزد، کار نیروی گرانش (جاذبه) زمین در این جابه‌جایی چند ژول است؟ $(g = 10N/kg)$

(آزاد ریاضی ۸۰)



۱) ۱۵
۲) ۱/۵
۳) ۳
۴) ۳۰

☑**پاسخ:**



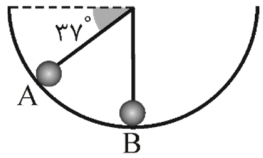
پایین آمدن $W_{mg} = mgh = mgd\sin\alpha$

$$W_{mg} = 0/5\times10\times0/6\times\sin30 \Rightarrow W_{mg} = 1/5J$$

گزینه ۲ صحیح می‌باشد.

▼ مثال ۲۷: جسم m به جرم $۱۰۰g$ درون نیم کره صیقلی به قطر ۶۰ سانتی‌متر به پایین می‌لغزد. کار نیروی وزن جسم از A تا B چند ژول است؟ $(g=۱۰\frac{m}{s^۲}, \sin ۳۷^\circ = ۰/۶)$

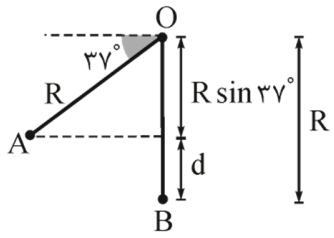
(سراسری- تجربی -۷۸)



۱) ۰/۱۲
۲) ۰/۱۸
۳) ۱/۲
۴) ۱/۸

☑پاسخ:

جسم از نقطه‌ی A تا نقطه‌ی B به سمت پایین جابه‌جا شده است بنابراین کار نیروی وزن در حین پایین آمدن جسم برابر با $W_{mg}=mgd$ است که d جابه‌جایی عمودی جسم بین دو نقطه‌ی مورد نظر است برای محاسبه‌ی d با توجه به شکل زیر داریم:



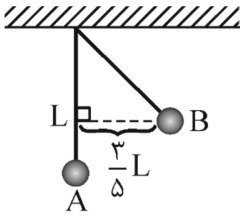
$$d=R-R\sin ۳۷ \Rightarrow d=R(۱-\sin ۳۷)$$
$$W_{mg}=mgd \Rightarrow W_{mg}=mgR(۱-\sin ۳۷)$$
$$\Rightarrow W_{mg}=۰/۱\times ۱۰\times ۰/۳(۱-۰/۶)$$
$$\Rightarrow W_{mg}=۰/۳(۰/۴) \Rightarrow W_{mg}=۰/۱۲J$$

گزینه ۱ صحیح است.

(طول ضلع‌های OA و OB یکسان است)

▼ مثال ۲۸: مطابق شکل زیر، گلوله‌ای به جرم $۳kg$ از انتهای یک نخ سبک به طول ۲ متر آویزان است. اگر آونگ را از حالت عمودی A به نقطه‌ی B برسانیم، کار نیروی وزن گلوله در این جابه‌جایی چند ژول می‌شود؟ $(g=۱۰\frac{N}{kg})$

(آزمون کانون- چهارم ریاضی- ۲۲ اسفند ۹۳)

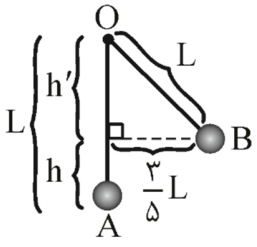


۱) ۱۲
۲) −۱۲
۳) ۳۶
۴) −۳۶

☑پاسخ:

کار نیروی وزن در بالا رفتن: $\begin{cases} W_{mg}=-mgh \\ h: \text{اختلاف ارتفاع جسم بین دو نقطه‌ی } A \text{ و } B \end{cases}$

رابطه‌ی فیثاغورث: $(\frac{۳}{۵}L)^۲+h'^۲=L^۲$

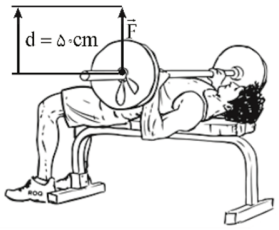


$$\Rightarrow h'=\sqrt{L^۲-\frac{۹}{۲۵}L^۲} \Rightarrow h'=\frac{۴L}{۵}$$
$$\Rightarrow h=L-h'=L-\frac{۴L}{۵} \Rightarrow h=\frac{L}{۵}$$
$$\Rightarrow W_{mg}=-mg\frac{L}{۵}=-۳\times ۱۰\times \frac{۲}{۵} \Rightarrow W_{mg}=-۱۲J$$

نکته: کار لازم برای غلبه بر نیروی وزن (W') برابر قدر مطلق کار نیروی وزن W_{mg} است.

$$W' = |W_{mg}|$$

مثال ۲۹: ورزشکاری وزنه‌ای به جرم $40kg$ را به طور یکنواخت، $50cm$ بالای سر خود می‌برد (مطابق شکل). کاری که این ورزشکار روی وزنه انجام می‌دهد چند ژول است؟ (اندازه‌ی شتاب گرانشی زمین را $9/8 \frac{N}{kg}$ در نظر بگیرید) (مشابه تمرین ۲-۵ کتاب درسی)



پاسخ: *کاری که ورزشکار توسط نیروی F انجام می‌دهد صرف غلبه بر نیروی وزن وزنه می‌شود؛*

در بالا رفتن: $W_{mg} = -mgh = -40 \times 9/8 \times 50 \times 10^{-2} = -196J$

$$W_F = |W_{mg}| = 196J$$

مثال ۳۰: شخصی چمدانی به جرم $5kg$ را یک متر در امتداد افق و سپس یک متر در امتداد قائم حمل می‌کند. کاری که این شخص در غلبه بر وزن چمدان انجام می‌دهد تقریباً برابر است با: (سراسری تجربی ۹۳)

۱) ۵ ژول ۲) ۱۰ ژول ۳) ۵۰ ژول ۴) ۱۰۰ ژول

پاسخ: *کار نیروی وزن در جابه‌جایی افقی صفر است اما برای جابه‌جایی در امتداد قائم رو به بالا داریم؛*

$$W_{mg} = -mgh = -5 \times 10 \times 1 = -50 \Rightarrow W_{mg} = -50J$$

کار لازم برای غلبه بر وزن چمدان: $W' = 50J$

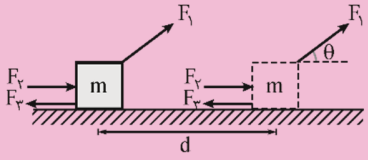
گزینه ۳ صحیح می‌باشد.

کار کل

اگر به جای یک نیرو، چند نیرو به یک جسم وارد شود، برای محاسبه کار کل به یکی از دو روش زیر می‌توان عمل کرد:

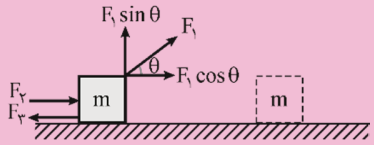
۱) کار انجام شده توسط هر نیرو به طور جداگانه محاسبه شود در نهایت کل کار (W_t) برابر جمع جبری کل انجام شده توسط تک‌تک نیروهاست.

$$W_t = W_{F_1} + W_{F_2} + \dots$$



تذکر: جمع جبری به این معناست که ممکن است کار برخی نیروها منفی شود و برای محاسبه کار کل، علامت منفی کار باید در جمع کردن در نظر گرفته شود.

۲) ابتدا نیروهایی که در امتداد جابه‌جایی بر جسم وارد می‌شوند شناسایی شوند. سپس اندازه‌ی نیروی خالص (F_t) موازی با بردار جابه‌جایی وارد بر جسم تعیین شود و در نهایت کار کل انجام شده برابر است با:



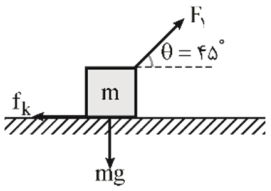
$$F_t = F_2 + F_1\cos\theta - F_3$$
$$W_t = F_t d$$

تذکر: نیروهایی که عمود بر جابه‌جایی هستند سهمی در محاسبه کار کل وارد شده بر جسم (W_t) نخواهند داشت.

▼ مثال ۳۱: کشاورزی توسط تراکتور، سورتمه‌ای پر از هیزم را در راستای یک زمین هموار به اندازه‌ی $235m$ جابه‌جا می‌کند (شکل زیر) وزن کل سورتمه و بار آن $mg = 1/47\times10^3$ است تراکتور نیروی ثابت $F_1 = 4\sqrt{2}\times10^3$ را در زاویه‌ی $\theta = 45^\circ$ بالای افق به سورتمه وارد می‌کند. نیروی اصطکاک جنبشی $f_k = 3/4\times10^3\,N$ است که برخلاف جهت حرکت به سورتمه وارد می‌شود. کار کل انجام شده روی سورتمه کدام است؟ $(\cos 45 = \frac{\sqrt{2}}{2})$

(شکل را بیازمایید ۳-۶ کتاب درسی)

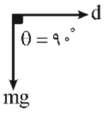
☑**پاسخ:** *روش اول: در این روش کار انجام شده توسط هر نیرو را به طور جداگانه محاسبه می‌کنیم.*



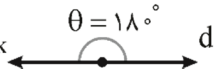
$$W_{F_1} = F_1 d\cos\theta = \sqrt{2}\times10^3\times235\times\cos45 \Rightarrow W_{F_1} = 94000\,J$$

کار نیروی وزن در جابه‌جایی‌های افقی صفر است.

$$W_{mg} = mgd\cos90 \Rightarrow W_{mg} = 0$$

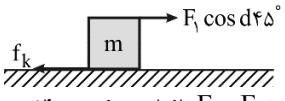


$$W_{f_k} = f_k\cos\pi = -f_k d = -3/4\times10^3\times235 = -799000\,J$$



$$W_t = W_1 + W_2 + W_3 = 940000 + 0 - 799000 \Rightarrow W_t = 141000\,J$$

روش دوم: ابتدا نیروهایی را شناسایی می‌کنیم که در امتداد جابه‌جایی بر جسم وارد می‌شوند.



اندازه‌ی نیروی خالص: $F = F_1\cos45 - f_k$

$$= 4\sqrt{2}\times10^3\times\frac{\sqrt{2}}{2} - 3/4\times10^3 = 600\,N$$

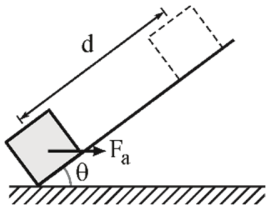
علامت مثبت نشان می‌دهد که نیروی خالص F در جهت جابه‌جایی است، بنابراین داریم:

$$W_t = Fd = 600\times235 \Rightarrow W_t = 141000\,J$$

▼ مثال ۳۲: نیروی افقی $F_a = ۲۰N$ بر جسمی به جرم $۳kg$ که روی یک سطح شیبدار بدون اصطکاک به زاویه‌ی $\theta = ۳۰^\circ$ قرار گرفته، وارد می‌شود. اگر جسم به اندازه‌ی $d = ۰/۵m$ جابه‌جا شود. در طول این جابه‌جایی، کار خالص انجام شده روی جسم چند ژول است؟ (مرتبط با صفحه‌های ۳۵ و ۳۶ کتاب درسی)

$(\cos ۳۰ = ۰/۸, \sin ۳۰ = ۰/۵, g = ۱۰ \frac{N}{kg})$

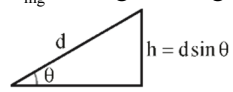
۱) ۸ ۲) ۰/۵
۳) −۸ ۴) −۰/۵



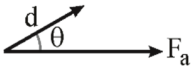
☑ پاسخ:

کار نیروی وزن در بالا رفتن:

$$\begin{cases} W_{mg} = -mgh = -mgd\sin\theta = -۳\times۱۰\times۰/۵\times\sin ۳۰ \Rightarrow W_{mg} = -۷/۵J \\ h = d\sin\theta \end{cases}$$



$$\begin{cases} W_{Fa} = F_a d\cos\theta = ۲۰\times۰/۵\times\cos ۳۰ = ۸J \end{cases}$$



کار کل: $W_t = W_{mg} + W_{F_a} = -۷/۵ + ۸ \Rightarrow W_t = ۰/۵J$

گزینه ۲ صحیح است.

کار و انرژی جنبشی

قضیه‌ی کار- انرژی جنبشی: همواره کار کل انجام شده روی یک جسم (W_t) با تغییرات انرژی جنبشی آن (Δk) برابر است.

$$W_t = \Delta k = k_۲ - k_۱$$

نکته ۱: هنگامی که $W_t > ۰$ **است، انرژی جنبشی آن افزایش می‌یابد** $(k_۲ > k_۱)$ **بنابراین تندی جسم در پایان جابه‌جایی بیش‌تر از تندی آن در ابتدای حرکت است** $(V_۲ > V_۱)$

نکته ۲: هنگامی که $W_t < ۰$ **است، انرژی جنبشی جسم کاهش می‌یابد** $(k_۲ < k_۱)$ **بنابراین تندی جسم در انتهای جابه‌جایی کم‌تر از تندی آن در آغاز حرکت است** $(V_۲ < V_۱)$

نکته ۳: هنگامی که $W_t = ۰$ **است، انرژی جنبشی جسم در آغاز و پایان جابه‌جایی یکسان است** $(k_۲ = k_۱)$ **بنابراین تندی جسم در این دو نقطه یکسان است.** $(V_۲ = V_۱)$

تذکر: قضیه‌ی کار- انرژی جنبشی نه تنها برای حرکت یک جسم روی مسیر مستقیم معتبر است بلکه اگر جسم روی مسیر خمیده‌ای نیز حرکت کند می‌توان از آن استفاده کرد.

تذکر: قضیه‌ی کار- انرژی جنبشی، قانون جدیدی در فیزیک نیست بلکه صرفاً کار $(W = Fd\cos\theta)$ و انرژی جنبشی $(k = \frac{1}{2}mV^2)$ را به هم مرتبط می‌سازد و به سادگی می‌توان آن را از قانون دوم نیوتن به دست آورد.

▼ مثال ۳۳: تندی جسمی به جرم $8kg$ تحت تاثیر نیروی F از $4m/s$ به $6m/s$ می‌رسد، کار این نیرو چند ژول است؟ (سراسری ریاضی ۷۳ و ۷۵)

۱) ۱۶ ۲) ۳۲ ۳) ۴۰ ۴) ۸۰

☑پاسخ: تنها نیروی وارد بر جسم، نیروی ثابت F است بنابراین طبق قضیه‌ی کار- انرژی جنبشی داریم:

$$W_t = \Delta k \Rightarrow W_F = \Delta k = k_2 - k_1 = \frac{1}{2}mV_2^2 - \frac{1}{2}mV_1^2 = \frac{1}{2}m(V_2^2 - V_1^2) = \frac{1}{2}\times 8\times(6^2 - 4^2)$$
$$W_F = 80J$$

گزینه ۴ صحیح است.

▼ مثال ۳۴: جسمی با سرعت $10\frac{m}{s}$ در جهت مثبت محور x ها حرکت می‌کند و انرژی جنبشی آن $100J$ است. پس از مدتی سرعت این جسم تغییر کرده و در جهت منفی محور x ها به $20\frac{m}{s}$ می‌رسد. کار کل در این مدت چند ژول است؟ (سراسری تجربی-۸۰)

۱) -500 ۲) -300 ۳) ۳۰۰ ۴) ۵۰۰

☑پاسخ: با استفاده از رابطه‌ی کار و انرژی می‌دانیم که کار کل برابر است با تغییرات انرژی جنبشی آن. در نتیجه کافی است تغییرات انرژی جنبشی جسم را در طول حرکت به دست آوریم.

$$K_1 = \frac{1}{2}mV_1^2 \Rightarrow 100 = \frac{1}{2}\times m_1 \times 10^2 \Rightarrow m_1 = 2kg \ , \ K_2 = \frac{1}{2}mV_2^2 \Rightarrow K_2 = \frac{1}{2}\times 2\times(-20)^2 \Rightarrow K_2 = 400J$$
$$W_t = \Delta K \Rightarrow W_t = K_2 - K_1 \Rightarrow W_t = 400 - 100 \Rightarrow W_t = 300J$$

گزینه ۳ صحیح است.

▼ مثال ۳۵: توپ فوتبالی به جرم $0/5kg$ از طریق یک ضربه ایستگاهی با تندی $12\frac{m}{s}$ به سمت دروازه، شوت می‌شود. اگر توپ با تندی $10\frac{m}{s}$ به تیرک دروازه برخورد کند، کار کل انجام شده روی توپ چند ژول است؟ (مشابه مثال ۶-۲ کتاب درسی)

☑پاسخ: با استفاده از قضیه کار- انرژی جنبشی داریم:

$$W_t = \Delta K = K_2 - K_1 \Rightarrow \frac{1}{2}mV_2^2 - \frac{1}{2}mV_1^2 = \frac{1}{2}m(V_2^2 - V_1^2) = \frac{1}{2}\times 0/5(10^2 - 12^2) \Rightarrow W_t = -11J$$

علامت منفی بیانگر این است که کار کل انجام شده روی توپ، انرژی جنبشی آن را کاهش داده است.

▼ مثال ۳۶: برای آن که تندی خودرویی از حال سکون به v برسد، باید کار کل W_{1t} روی آن انجام شود. همچنین برای آن که تندی خودرو از v به $4v$ برسد، باید کار کل W_{2t} روی آن انجام شود (شکل زیر). نسبت $\frac{W_{1t}}{W_{2t}}$ چقدر است؟ (پرسش ۲-۳ کتاب درسی)

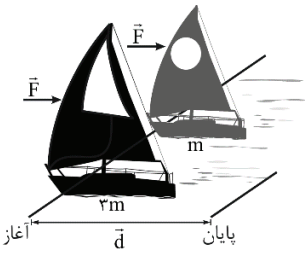
☑**پاسخ:** طبق قضیه‌ی کار- انرژی جنبشی داریم:

$$\begin{cases} V_1 = 0 \Rightarrow k_1 = 0 \\ W_{1t} = \Delta k = k_2 - k_1 = \frac{1}{2}mV_2^2 \Rightarrow W_{1t} = \frac{1}{2}mV^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} W_{2t} = \Delta k' = k_2' - k_1' = \frac{1}{2}mV_2'^2 - \frac{1}{2}mV_1'^2 \\ = \frac{1}{2}m(4V)^2 - \frac{1}{2}m(V)^2 = \frac{1}{2}m(16V^2 - V^2) \\ = W_{2t} = \frac{15}{2}mV^2 \end{cases}$$

$$\frac{W_{1t}}{W_{2t}} = \frac{\frac{1}{2}mV^2}{\frac{15}{2}mV^2} = \frac{1}{15}$$

▼ **مثال ۳۷:** دو قایق مخصوص حرکت روی سطوح یخ زده مطابق شکل، دارای جرم‌های m و $3m$ و بادبان‌های مشابه‌اند. قایق‌ها روی دریاچه‌ی افقی و بدون اصطکاکی قرار دارند و نیروی ثابت و یکسان $\vec{F}$ با وزیدن باد به هر دو وارد می‌شود. هر دو قایق از حال سکون شروع به حرکت می‌کنند و از خط پایان به فاصله‌ی d می‌گذرند. نسبت تندی قایق ۲ به تندی قایق ۱ درست پس از عبور از خط پایان کدام است؟ (مشابه تمرین ۲-۷ کتاب درسی)



۱) $\sqrt{3}$

۲) $\frac{\sqrt{3}}{3}$

۳) 2

۴) $\frac{1}{2}$

☑**پاسخ:** تنها‌ی نیرویی که در راستای جابه‌جایی (d) به قایق وارد می‌شود نیروی باد (F) است بنابراین فقط این نیرو کار انجام می‌دهد بنابراین طبق قضیه‌ی کار- انرژی جنبشی داریم:

$$\begin{cases} W_t = Fd\cos 0 = Fd \\ W_t = \Delta k = k_2 - k_1 \xrightarrow[k_1 = 0]{V_1 = 0} W_t = k_2 \\ \Rightarrow Fd = k_2 = \frac{1}{2}mV_2^2 \Rightarrow V = \sqrt{\frac{2Fd}{m}} \end{cases}$$

$$\frac{\text{یکسان } F}{\text{یکسان } d} \rightarrow \frac{V_{2\ \text{قایق}}}{V_{1\ \text{قایق}}} = \sqrt{\frac{m_{1\ \text{قایق}}}{m_{2\ \text{قایق}}}} = \sqrt{\frac{m}{3m}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\frac{V_{2\ \text{قایق}}}{V_{1\ \text{قایق}}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

گزینه ۲ صحیح می‌باشد.

مثال ۳۸: شکل‌های (الف) و (ب) دو جسم به جرم‌های $M_1 = m$ و $M_2 = 2m$ را نشان می‌دهند که بر روی یک سطح افقی بدون اصطکاک در حالت سکون قرار گرفته‌اند اگر کار انجام شده در هر دو حالت یکسان باشد، تندی نهایی این دو جسم را با یکدیگر مقایسه کنید؟ (مشابه با مسأله ۳ کتاب درسی)

(الف) (ب)

پاسخ: با توجه به این که کار انجام شده در هر دو حالت یکسان است بنابراین طبق قضیه کار- انرژی جنبشی داریم:

$$W_t = \Delta k \Rightarrow (W_t)_{الف} = (W_t)_{ب} \Rightarrow \Delta k_{الف} = \Delta k_{ب} \xrightarrow[(V_1)_{ب}=0 \Rightarrow (k_1)_{ب}=0]{(V_1)_{الف}=0 \Rightarrow (k_1)_{الف}=0} (k_2)_{الف} = (k_2)_{ب}$$

$$\frac{1}{2}M_1(V_2)^2_{الف} = \frac{1}{2}M_2(V_2)^2_{ب} \Rightarrow \quad m(V_2)^2_{الف} = 2m(V_2)^2_{ب} \Rightarrow \quad (V_2)^2_{الف} = 2(V_2)^2_{ب} \Rightarrow \quad (V_2)_{الف} = \sqrt{2}(V_2)_{ب}$$

مثال ۳۹: جسمی به جرم $8kg$ با تندی $10\frac{m}{s}$ روی خط راست حرکت می‌کند. چه نیرویی بر حسب نیوتون و در کدام جهت باید در راستای حرکت به آن وارد شود، تا پس از طی مسافت ۸ متر انرژی جنبشی آن به ۱۲۰۰ ژول برسد؟ (سراسری تجربی ۷۲)

۱) ۱۰۰ و در جهت حرکت ۲) ۵۰ و در جهت حرکت ۳) ۵۰ و در خلاف جهت حرکت ۴) ۱۰۰ و در خلاف جهت

پاسخ:

$$k_1 = \frac{1}{2}mV_1^2 \Rightarrow k_1 = \frac{1}{2}\times 8\times 10^2 \Rightarrow k_1 = 400J \quad , \quad k_2 = 1200J$$

چون پس از طی مسافت $8m$، انرژی جنبشی آن افزایش پیدا کرده است پس نیروی F در جهت حرکت باید به جسم وارد شود، بنابراین طبق قضیه‌ی کار- انرژی جنبشی داریم:

$$W_t = \Delta k \Rightarrow W_F = k_2 - k_1 \Rightarrow Fd\cos 0 = 1200 - 400 \Rightarrow F\times 8 = 800 \Rightarrow F = 100N$$

گزینه ۱ صحیح است.

مثال ۴۰: اتومبیلی به جرم ۲ تن در یک جاده‌ی شیب‌دار که با سطح افق زاویه‌ی ۳۰ درجه می‌سازد، رو به بالا در حرکت است. اگر تندی اتومبیل در مدت ۲۰ ثانیه از $2\frac{m}{s}$ به $12\frac{m}{s}$ بر سد، کار کل در این بازه‌ی زمانی چند کیلوژول است؟ (خارج از کشور تجربی ۸۷)

۱) ۱۴۰ ۲) ۱۴۸ ۳) ۲۱۰ ۴) ۲۱۸

پاسخ: طبق قضیه کار- انرژی جنبشی داریم:

$$W_t = \Delta k = k_2 - k_1 = \frac{1}{2}mV_2^2 - \frac{1}{2}mV_1^2 = \frac{1}{2}m(V_2^2 - V_1^2) = \frac{1}{2}\times 2\times 10^3 \times (12^2 - 2^2)$$

$$\Rightarrow W_t = 140\times 10^3 J = 140kJ$$

مثال ۴۱: ماهواره‌ها در مدارهای معین و با تندی ثابت در زمین می‌چرخند. شکل زیر حرکت ماهواره را به دور زمین مدل‌سازی کرده است. کدام گزینه نادرست است؟ (مشابه و مکمل مسأله ۱۴ کتاب درسی)

۱) تغییرات انرژی جنبشی ماهواره در طول حرکت آن صفر است.
۲) کار کل انجام شده روی ماهواره در طول حرکت آن صفر است.
۳) نیروی جاذبه گرانشی که از طرف زمین به ماهواره وارد می‌شود معادل وزن ماهواره است.
۴) نیروی جاذبه گرانشی که از طرف زمین به ماهواره وارد می‌شود روی آن کار انجام می‌دهد.

☑**پاسخ:** گزینه ۱: چون تندی حرکت ماهواره ثابت است طبق رابطه $k=\frac{۱}{۲}mV^۲$، تغییرات انرژی جنبشی آن صفر است.

گزینه ۲: طبق قضیه کار- انرژی جنبشی $W=\Delta k$، چون تغییرات انرژی جنبشی ماهواره صفر است (تندی حرکت ثابت) بنابراین کار کل انجام شده روی ماهواره صفر است.

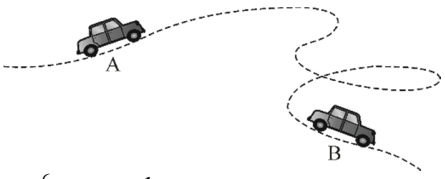
گزینه ۳: تنها نیروی وارد بر ماهواره، نیروی جاذبه گرانشی است که از طرف زمین به ماهواره وارد می‌شود و معادل وزن ماهواره است.

گزینه ۴: چون نیروی جاذبه گرانشی بر مسیر حرکت ماهواره عمود است کاری روی ماهواره انجام نمی‌دهد.

$$W_F=Fd\cos\theta \xrightarrow[\cos۹۰^\circ=۰]{\theta=۹۰^\circ} W_F=۰$$

گزینه ۴ نادرست است.

▼ **مثال ۴۲:** جرم یک خودروی الکتریکی به همراه راننده‌اش $۶۰۰kg$ است. این خودرو از موقعیت A به موقعیت B می‌رود، اگر تندی خودرو در موقعیت A برابر $۵۴\frac{km}{h}$ و تندی آن در موقعیت B $۲۰\frac{m}{s}$ باشد کل کار انجام شده روی این خودرو چند کیلوژول است؟ (مشابه تمرین ۲-۸ کتاب درسی)



☑**پاسخ:** طبق قضیه کار- انرژی جنبشی داریم:

$$\begin{cases} V_A=۵۴\frac{km}{h}=\frac{۵۴}{۳/۶}=۱۵\frac{m}{s} \\ W_t=\Delta k=k_B-k_A=\frac{۱}{۲}mV_B^۲-\frac{۱}{۲}mV_A^۲=\frac{۱}{۲}m(V_B^۲-V_A^۲) \end{cases}$$

$$\Rightarrow W_t=\frac{۱}{۲}\times۶۰۰(۲۰^۲-۱۵^۲)=۵۲۵۰۰J \Rightarrow W_t=۵۲/۵kJ$$

▼ **مثال ۴۳:** شکل روبه‌رو شخصی را نشان می‌دهد که با وارد کردن نیروی ثابت $۵۲N$، جعبه‌ای به جرم $۴kg$ را از حال سکون تا ارتفاع $۱۵۰cm$ در امتداد قائم جابه‌جا می‌کند. تندی نهایی جعبه کدام است؟ (مشابه تمرین ۲-۹ کتاب درسی)

☑**پاسخ:** نیروها در راستای حرکت عبارتند از نیروی دست $F_۱$ و نیروی وزن mg؛ بنابراین اندازه‌ی نیروی خالص برابر است با:

$$F=F_۱-mg=۵۲-۴\times۱۰=۱۲N$$

علامت مثبت نشان می‌دهد که نیروی خالص F در جهت جابه‌جایی است به این ترتیب داریم:

$$\Rightarrow W_t=Fd\cos۰=Fd=۱۲\times۱/۵=۱۸J \Rightarrow W_t=۱۸J$$

طبق قضیه‌ی کار- انرژی جنبشی داریم:

$$V_۱=۰ \Rightarrow k_۱=۰$$

$$\begin{cases} W_t=\Delta k=k_۲-k_۱=k_۲=\frac{۱}{۲}mV_۲^۲ \\ \Rightarrow ۱۸=\frac{۱}{۲}\times۴\times V_۲^۲ \\ \Rightarrow V_۲=۳\frac{m}{s} \end{cases}$$

▼ مثال ٤٤: شخصی به جرم $75kg$ ، چمدانی به جرم $10kg$ را از روی زمین برداشته و در داخل صندوق عقب اتومبیل خود قرار می‌دهد. اگر ارتفاع کف صندوق عقب از سطح زمین $1m$ باشد کدام گزینه نادرست است؟ $(g=10\frac{N}{kg})$ (مکمل تمرین ۸ کتاب درسی)

۱) کار نیروی وزن در این جابجایی $-100J$ است.

۲) کاری که شخص برای غلبه بر نیروی وزن انجام می‌دهد برابر $100J$ است.

۳) انرژی جنبشی چمدان در این جابجایی تغییر نمی‌کند.

٤) انرژی جنبشی چمدان در این جابجایی $100J$ تغییر کرده است.

☑پاسخ:

گزینه ۱: $W_{mg}=-mgh=-10\times10\times1=-100J$: کار نیروی وزن در بالا رفتن

گزینه ۲: کار لازم برای غلبه بر نیروی وزن، قرینه کار نیروی وزن است.

$$W'=-W=-(-100)=100J$$

گزینه ۳:

$W_t=W_{\text{شخص}}+W_{\text{وزن}}=mgh-mgh=0$: کار کل

$$W_t=\Delta k\Rightarrow 0=\Delta k\Rightarrow k_1=k_2$$

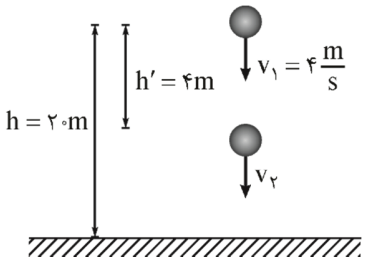
گزینه ۴ چون کار کل صفر است پس طبق قضیه کار- انرژی جنبشی $W_t=\Delta k$ ، انرژی جنبشی چمدان تغییری نمی‌کند.

گزینه ۴ نادرست است.

▼ مثال ٤٥: گلوله‌ای از ارتفاع ۲۰ متری سطح زمین، با تندی اولیه $4\frac{m}{s}$ در راستای قائم رو به پایین پرتاب می‌شود. انرژی جنبشی این گلوله بعد از ۴ متر پایین آمدن چند برابر می‌شود؟ ($g=10\frac{m}{s^2}$ و از مقاومت هوا صرف‌نظر شود.) (خارج از کشور تجربی ۹۶)

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ٤) ۶

☑پاسخ: از مقاومت هوا صرف‌نظر شده است بنابراین تنها نیروی وزن در این جابه‌جایی کار انجام می‌دهد پس طبق قضیه کار- انرژی جنبشی داریم:



$$W_t=\Delta k=W_{mg}=k_2-k_1$$

$$\Rightarrow mgh'=\frac{1}{2}mV_2^2-\frac{1}{2}mV_1^2$$

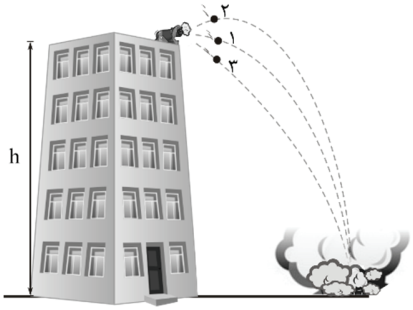
$$\Rightarrow 10\times4=\frac{1}{2}V_2^2-\frac{1}{2}\times4^2$$

$$\Rightarrow V_2^2=96(\frac{m}{s})^2$$

$$\begin{cases}k=\frac{1}{2}mV^2\\ m_1=m_2\end{cases}\Rightarrow\frac{k_2}{k_1}=\frac{V_2^2}{V_1^2}=\frac{96}{16}\Rightarrow k_2=6k_1$$

گزینه ۴ صحیح است.

▼ مثال ٤٦: مطابق شکل سه گلوله مشابه از بالای یک ساختمان به ارتفاع h با تندی یکسان توسط یک توپ شلیک می‌شوند. گلوله اول (۱) در امتداد افقی، گلوله دوم (۲) با زاویه‌ای بالاتر از افق و گلوله سوم (۳) با زاویه‌ای زیر امتداد افق. تندی گلوله‌ها در هنگام برخورد با زمین را با یکدیگر مقایسه کنید (از مقاومت هوا چشم‌پوشی کنید) (مشابه مسأله ۱۵ کتاب درسی)



☑**پاسخ:** *تنها نیروی وارد بر گلوله از نقطه پرتاب تا نقطه برخورد به زمین، نیروی وزن است. (زیرا از مقاومت هوا صرف نظر شده است) که برای هر سه توپ یکسان است؛*

$$\begin{cases} h_۱ = h_۲ = h_۳ = h \\ (W_{mg})_۱ = (W_{mg})_۲ = (W_{mg})_۳ = +mgh \end{cases}$$

$$(W_t)_۱ = (W_t)_۲ = (W_t)_۳$$

از طرفی با توجه به این که تندی اولیه برای هر سه توپ یکسان است انرژی جنبشی اولیه k_i آنها نیز یکسان است بنابراین طبق قضیه کار- انرژی جنبشی داریم؛

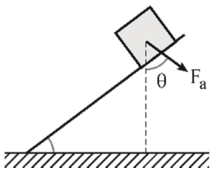
$$\begin{cases} (W_t)_۱ = (W_t)_۲ = (W_t)_۳ \\ (k_i)_۱ = (k_i)_۲ = (k_i)_۳ \\ \Rightarrow W_t = \Delta k = k_f - k_i \Rightarrow (k_f)_۱ = (k_f)_۲ = (k_f)_۳ \end{cases}$$

از طرفی طبق رابطه $k = \frac{۱}{۲}mV^۲$ ، چون جرم هر سه گلوله یکسان است پس تندی نهایی آنها نیز با هم برابر است؛

$$(V_f)_۱ = (V_f)_۲ = (V_f)_۳$$

▼ مثال ٤٧: نیروی ثابت F_a به یک جعبه به جرم $۵kg$ تحت زاویه‌ی $\theta = ۳۷^\circ$ مطابق شکل وارد می‌شود. اگر جعبه تحت این نیرو و با تندی ثابت بر روی سطح شیبدار بدون اصطکاک تا ارتفاع عمودی $۱m$ جابه‌جا شود، کار انجام شده توسط F_a چند ژول است؟ (مرتبط با صفحه‌های ۳۷ تا ۴۰ کتاب درسی)

$$(\sin\theta = ۰/۸, \sin ۵۳ = ۰/۸, g = ۱۰\frac{N}{kg})$$



☑**پاسخ:** *چون جعبه با تندی ثابت جابه‌جا می‌شود بنابراین تغییرات انرژی جنبشی صفر است از طرفی سطح بدون اصطکاک است پس کار نیروی اصطکاک نیز صفر است لذا طبق قضیه‌ی کار- انرژی جنبشی، کار کل صفر است؛*

$$\begin{cases} V = \text{ثابت} \Rightarrow \Delta k = ۰ \\ W_t = \Delta k = ۰ \Rightarrow W_{f_k} + W_{mg} + W_{F_a} = ۰ \xrightarrow{W_{f_k} = ۰} W_{F_a} + W_{mg} = ۰ \Rightarrow W_{F_a} = -W_{mg} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \text{کار نیروی وزن در بالا رفتن } W_{mg} = -mgh = -۵ \times ۱۰ \times ۱ = -۵۰J \\ \Rightarrow W_{F_a} = -W_{mg} = -(-۵۰) \Rightarrow W_{F_a} = ۵۰J \end{cases}$$

مثال ۴۸: چتربازی از ارتفاع ۸۰۰ متری از حال سکون رها می‌شود. جرم چترباز به همراه چترش $80kg$ است. اگر او با تندی $5\frac{m}{s}$ به زمین برسد، کار نیروی مقاومت هوا در مسیر سقوط چند کیلوژول است؟ ($g=10\frac{m}{s^2}$) (متکمل و مشابه مثال ۲-۷ کتاب درسی)

پاسخ: نیروی وزن و نیروی مقاومت هوا (R) روی چترباز کار انجام می‌دهند بنابراین طبق قضیه‌ی کار- انرژی جنبشی داریم:

$$V_1=0\Rightarrow k_1=0$$

$$W_t=\Delta k\Rightarrow W_{mg}+W_R=k_2-k_1 \quad , \quad W_{mg}=mgh \text{ کار نیروی وزن در پایین آمدن}$$

$$\Rightarrow mgh+W_R=\frac{1}{2}mV_2^2$$

$$\Rightarrow W_R=\frac{1}{2}\times 80\times 5^2-80\times 10\times 800\Rightarrow W_R=-639000J$$

$$\Rightarrow W_R=-639kJ$$

مثال ۴۹: اتومبیلی به جرم ۶۰۰ کیلوگرم با تندی ۵۴ کیلومتر بر ساعت در حال حرکت است. اگر در اثر ترمز، اتومبیل متوقف شود، کار نیروی اصطکاک (بر حسب کیلوژول) کدام است؟ (سراسری ریاضی ۶۹)

۱) ۱۳۵ ۲) ۶۷/۵ ۳) −۶۷/۵ ۴) −۱۳۵

پاسخ: در طول مسیر حرکت، نیروی اصطکاک روی اتومبیل کار انجام می‌دهد، کار نیروی وزن در جابه‌جایی‌های افقی صفر است بنابراین طبق قضیه‌ی کار- انرژی جنبشی داریم:

$$\begin{cases} V_2=0\Rightarrow k_2=0 \\ W_{mg}=0 \\ W_t=\Delta k\Rightarrow W_{f_k}+W_{mg}=k_2-k_1 \\ \Rightarrow W_{f_k}=-k_1=-\frac{1}{2}mV_1^2 \end{cases}$$

$$W_{f_k}=-\frac{1}{2}\times 600\times\left[\left(\frac{54}{3/6}\right)^2\right]=-67500J$$

$$\Rightarrow W_{f_k}=-67/5kJ$$

گزینه ۳ صحیح است.

مثال ۵۰: گلوله‌ای به جرم ۲۰ گرم با تندی $100\frac{m}{s}$ به مانعی برخورد می‌کند و با تندی $40\frac{m}{s}$ از طرف دیگر آن خارج می‌شود. کار کل در این برخورد چند ژول است؟ (آزاد تجربی ۷۴)

۱) ۶۰ ۲) ۱۲۰ ۳) −۸۰ ۴) −۸۴

☑**پاسخ:** طبق قضیه‌ی کار- انرژی جنبشی داریم:

$$W_t = \Delta k = W_t = \frac{۱}{۲}mV_۲^۲ - \frac{۱}{۲}mV_۱^۲ = \frac{۱}{۲}m(V_۲^۲ - V_۱^۲) = \frac{۱}{۲}\times ۲۰\times ۱۰^{-۳}\times(۴۰^۲ - ۱۰۰^۲)$$

$$W_t = -۸۴J$$

گزینه ۴ صحیح است.

▼ **مثال ۵۱:** گلوله‌ای به جرم ۱۰ گرم با سرعت $۱۰۰\frac{m}{s}$ به تنه‌ی درختی برخورد می‌کند و به اندازه‌ی ۱۰ سانتی‌متر در آن فرو می‌رود و متوقف می‌شود.

الف) نیروی متوسطی که از طرف درخت به گلوله وارد می‌شود را به دست آورید.

ب) با ذکر دلیل توضیح دهید چرا به این نیرو، نیروی متوسط گفته می‌شود؟ **(تهران- آقا مصطفی- ۹۱)**

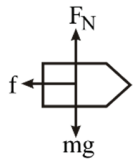
☑**پاسخ:** نیروهای وزن mg و عمودی سطح F_N هر دو بر جابه‌جایی افقی گلوله عمود هستند $(\theta = ۹۰)$ بنابراین کار آنها صفر است:

کار نیروی وزن : $W_{mg} = mgd\cos ۹۰ \Rightarrow W_{mg} = ۰$ و کار نیروی عمودی سطح : $W_N = F_N d\cos ۹۰ \Rightarrow W_{F_N} = ۰$

نیروی f وارد شده بر گلوله از طرف درخت و جابه‌جایی گلوله d در خلاف جهت یکدیگرند $\theta = ۱۸۰^\circ$ ، بنابراین داریم:

کار نیروی f : $W_f = fd\cos ۱۸۰ \Rightarrow W_f = -f\times ۰/۱$

کار کل : $W_t = W_N + W_{mg} + W_f \Rightarrow W_t = ۰ + ۰ - ۰/۱f \Rightarrow W_t = -۰/۱f$



انرژی جنبشی اولیه: $K_i = \frac{۱}{۲}mv_i^۲ \Rightarrow K_i = \frac{۱}{۲}\times ۰/۰۱\times ۱۰۰^۲ \Rightarrow K_i = ۵۰J$

انرژی جنبشی نهایی: $K_f = \frac{۱}{۲}mV_f^۲ \Rightarrow K_f = ۰$

$$\Rightarrow \Delta K = K_f - K_i \Rightarrow \Delta K = ۰ - ۵۰ \Rightarrow \Delta K = -۵۰J$$

حال با استفاده از قضیه کار و انرژی داریم:

$$W_t = \Delta K = -۰/۱f = -۵۰ \Rightarrow f = ۵۰۰N$$

بنابراین نیروی متوسطی که از طرف درخت به گلوله وارد می‌شود ۵۰۰ نیوتون است.

ب)نیرویی که درخت به گلوله وارد می‌کند، ثابت نیست و همان‌طور که می‌دانیم شرط استفاده از رابطه‌ی $W_F = Fd\cos\theta$ برای محاسبه‌ی کار، ثابت بودن نیرو است، بنابراین در چنین مواردی این نیروی متغیر را با یک نیروی متوسط ولی ثابت جایگزین می‌کنیم تا بتوانیم کار آن را از رابطه‌ی بالا به سادگی محاسبه کنیم.

▼ **مثال ۵۲:** چکشی به جرم $۱۰kg$ با تندی $۱۰\frac{m}{s}$ به میخی برخورد می‌کند و باعث می‌شود میخ به اندازه‌ی $۲cm$ درون چوبی فرو رود. نیروی متوسط وارد شده از طرف چوب بر میخ در این جابه‌جایی چند نیوتون است؟ (چکش بعد از ضربه ساکن می‌شود و از اتلاف انرژی صرف‌نظر شود.)

(آزمون کانون- ۲۲ اسفند ۹۳)

۱) ۲۰۰۰۰ ۲) ۲۵۰۰۰ ۳) ۲۰۰۰ ۴) ۲۵۰۰

☑**پاسخ:** از لحظه‌ی برخورد چکش با میخ تا لحظه‌ی فرورفتن میخ در چوب، نیروی F از طرف چوب به میخ در خلاف جهت حرکت آن وارد می‌شود بنابراین طبق قضیه‌ی کار- انرژی جنبشی داریم:

$$\begin{cases} V_۲ = ۰ \Rightarrow k_۲ = ۰ \\ W_t = \Delta k \Rightarrow W_F = k_۲ - k_۱ = ۰ - \frac{۱}{۲}mV_۱^۲ \end{cases}$$

$$W_F = -\frac{۱}{۲}\times ۱۰ \times ۱۰^۲ \Rightarrow W_F = -۵۰۰J$$

از طرفی : $W_F = -Fd \Rightarrow -۵۰۰ = -F \times ۲ \times ۱۰^{-۲} \Rightarrow F = ۲۵۰۰۰N$

گزینه ۲ صحیح است.

▼ **مثال ۵۳:** جسمی به جرم $۵۰۰g$ از بالای یک ساختمان به ارتفاع $۲۰m$ از سطح زمین با تندی $۲۰\frac{m}{s}$ پرتاب می‌شود. اگر گلوله با سرعت $۱۰\frac{m}{s}$ به زمین برخورد کند در طول حرکت جسم، کار نیروی مقاومت هوا چند ژول است؟ $(g = ۱۰\frac{N}{kg})$ (مکمل مسأله ۴ کتاب درسی)

☑**پاسخ:** دو نیروی وزن و مقاومت هوا در طول حرکت به جسم وارد می‌شوند.

کار نیروی وزن در پایین آمدن : $W_{mg} = +mgh = +۵۰۰ \times ۱۰^{-۳} \times ۱۰ \times ۲۰ \Rightarrow W_{mg} = +۱۰۰J$

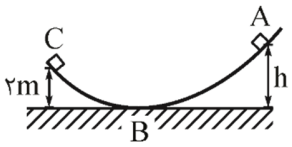
اگر کار نیروی مقاومت هوا را W_F بنامیم طبق قضیه کار - انرژی جنبشی داریم:

$$W_t = \Delta k \Rightarrow W_F + W_{mg} = k_۲ - k_۱ = \frac{۱}{۲}m(V_۲^۲ - V_۱^۲)$$

$$\Rightarrow W_F + ۱۰۰ = \frac{۱}{۲}\times ۵۰۰ \times ۱۰^{-۳}(۱۰^۲ - ۲۰^۲)$$

$$\Rightarrow W_F = -۱۰۰ - ۷۵ \Rightarrow W_F = -۱۷۵J$$

▼ **مثال ۵۴:** جسمی به جرم $۰/۸kg$ مطابق شکل، از نقطه‌ی A بدون تندی اولیه شروع به حرکت می‌کند و با تندی $۵\frac{m}{s}$ به نقطه‌ی C می‌رسد، اگر اندازه‌ی کار نیروی اصطکاک در مسیر ABC برابر ۲۲ ژول و $g = ۱۰N/kg$ باشد، ارتفاع h چند متر است؟ (آزاد تجربی ۷۸)



۱) ۲
۲) ۶
۳) ۸
۴) ۳/۵

☑**پاسخ:** نیروی وزن و اصطکاک در این جابه‌جایی از نقطه‌ی A تا نقطه‌ی C، کار انجام می‌دهند بنابراین طبق قضیه‌ی کار و انرژی داریم:

$$W_t = \Delta k \Rightarrow W_{mg} + W_{f_k} = k_C - k_A$$

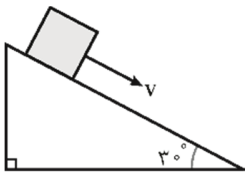
$$\Rightarrow mg(h-۲) + W_{f_k} = \frac{۱}{۲}mV_C^۲ - ۰$$

$$\Rightarrow ۰/۸ \times ۱۰ \times (h-۲) - ۲۲ = \frac{۱}{۲}\times ۰/۸ \times ۵^۲$$

$$\Rightarrow h - ۲ = ۴ \Rightarrow h = ۶m$$

گزینه ۲ صحیح است.

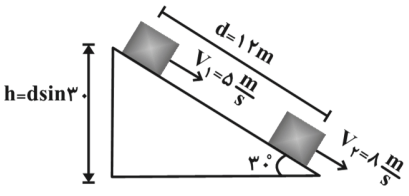
▼ مثال ۵۵: جسمی به جرم $۲kg$ را مطابق شکل با تندی اولیه‌ی $۵\frac{m}{s}$ مماس بر سطح رو به پایین پرتاب می‌کنیم. اگر تندی جسم پس از ۱۲ متر جابه‌جایی روی سطح به $۸\frac{m}{s}$ برسد، کار نیروی اصطکاک چند ژول است؟ $(g=۱۰m/s^۲)$ (سراسری ریاضی ۸۵)



۱) -۴۲
۲) -۴۵
۳) -۶۳
۴) -۸۱

☑**پاسخ:** *نیروهای وزن و اصطکاک بر روی جسم کار انجام می‌دهند بنابراین طبق قضیه کار- انرژی جنبشی داریم:*

$$W_t=\Delta k \Rightarrow W_{f_k}+W_{mg}=k_۲-k_۱,\ W_{mg}=mgh$$



$$\Rightarrow W_{f_k}=\frac{۱}{۲}m(V_۲^۲-V_۱^۲)-mgh$$

$$\Rightarrow W_{f_k}=\frac{۱}{۲}\times ۲(۸^۲-۵^۲)-۲\times ۱۰\times ۱۲\times \sin ۳۰$$

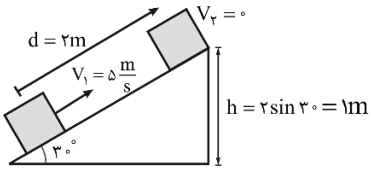
$$\Rightarrow W_{f_k}=-۸۱J$$

گزینه ۴ صحیح است.

▼ مثال ۵۶: جسمی به جرم $۲kg$ را از پایین سطح شیبداری که با افق زاویه‌ی ۳۰ درجه می‌سازد، با تندی اولیه‌ی $۵\frac{m}{s}$ مماس با سطح رو به بالا پرتاب می‌کنیم. جسم روی سطح به اندازه‌ی $۲m$ بالا می‌رود و سپس به نقطه‌ی پرتاب برمی‌گردد. کار نیروی اصطکاک در این مسیر رفت و برگشت چند ژول است؟ $(g=۱۰\frac{m}{s^۲})$ (شاهد ۱ کشور ریاضی ۸۶)

۱) صفر
۲) -۵
۳) -۱۰
۴) -۲۰

☑**پاسخ:** *قضیه‌ی کار- انرژی جنبشی را برای مسیر رفت جسم می‌نویسیم، دو نیروی وزن و اصطکاک روی جسم کار انجام می‌دهند.*



$$W_{\text{برآیند}}=\Delta k \Rightarrow W_{mg}+W_{f_k}=k_۲-k_۱$$

$$-mgh+W_{f_k}=۰-\frac{۱}{۲}mV_۱^۲$$

$$\Rightarrow W_{f_k}=-\frac{۱}{۲}\times ۲\times ۵^۲+۲\times ۱۰\times ۱$$

$$\Rightarrow W_{f_k}=-۵J$$

کار نیروی اصطکاک در مسیر برگشت هم برابر $-۵J$ است و در نتیجه کار نیروی اصطکاک در کل مسیر رفت و برگشت برابر $-۱۰J$ است.
گزینه ۳ صحیح است.

کار و انرژی پتانسیل

انرژی پتانسیل، کمیتی مربوط به یک سامانه (دستگاه یا سیستم) است. بنابراین وقتی دو یا چند جسم به یکدیگر نیرو وارد می‌کنند به دلیل موقعیت مکانی‌شان در سامانه، انرژی پتانسیل دارند. این نوع انرژی می‌توان به شکل‌های مختلفی، بسته به این که چه نیروهایی در سامانه وجود دارد، مانند گرانشی، کشسانی و الکتریکی در سیستم ذخیره شود.

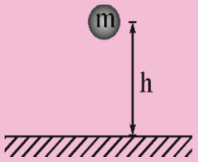
نکته ۱: هر سامانه می‌تواند حداقل از دو جسم یا تعداد بیش‌تری از اجسام تشکیل شده باشد مانند، انرژی پتانسیل گرانشی در سامانه شخص- زمین، انرژی پتانسیل کشسانی در سامانه‌ی گلوله- فنر و انرژی پتانسیل الکتریکی در سامانه‌ی دو جسم باردار

نکته ۲: انرژی پتانسیل بر خلاف انرژی جنبشی که به حرکت یک جسم وابسته است، ویژگی یک سامانه است تا ویژگی یک جسم منفرد، به عبارتی دیگر انرژی پتانسیل به مکان اجسام یک سامانه نسبت به یک‌دیگر بستگی دارد.

نکته ۳: وقتی انرژی پتانسیل یک سامانه تغییر می‌کند به شکل‌های دیگری از انرژی تبدیل می‌شود.

انرژی پتانسیل گرانشی:

انرژی پتانسیل گرانشی سامانه‌ی متشکل از زمین و جسمی به جرم m که در ارتفاع h از سطح زمین به صورت زیر تعریف می‌شود:

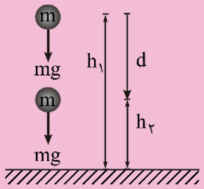


$$U = mgh$$

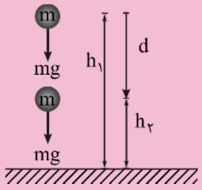
نکته: انرژی پتانسیل گرانشی، یک ویژگی مشترک جسم و زمین است و برای سامانه‌ی متشکل از این دو تعریف می‌شود و توجه کنید که رابطه $U = mgh$ شامل هر دو ویژگی جسم (m) و زمین (مقدار g) است.

نکته: اگر گلوله به اندازه‌ی h به سمت پایین جابجا شود، انرژی پتانسیل گرانشی آن به اندازه‌ی mgh کاهش می‌یابد $(\Delta U = -mgh)$ و اگر به اندازه‌ی h به سمت بالا جابجا شود به اندازه‌ی mgh افزایش می‌یابد $(\Delta U = +mgh)$. همچنین در حالتی که جسم حرکت افقی دارد انرژی پتانسیل گرانشی آن تغییر نمی‌کند. $(\Delta U = ۰)$

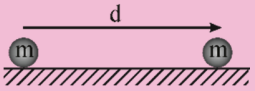
$\Delta U = -mgh$



$\Delta U = +mgh$



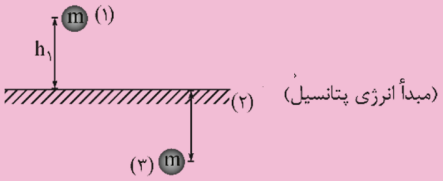
$\Delta U = ۰$



مبدأ انرژی پتانسیل گرانشی:

مبدأ انرژی پتانسیل گرانشی نقطه‌ای است که در آن جا $U = ۰$ $(h = ۰)$ قرار داده می‌شود و انرژی پتانسیل گرانشی نقاط دیگر نسبت به آن نقطه سنجیده می‌شود که این نقطه کاملاً اختیاری است زیرا آن چه در فیزیک اهمیت دارد مقدار U در یک نقطه خاص نیست بلکه تنها تغییرات انرژی پتانسیل گرانشی (ΔU) بین دو نقطه مهم است. بنابراین می‌توانیم U را در نقطه‌ای که بخواهیم برابر صفر تعریف کنیم بدون آن که تأثیری در فیزیک مسئله داشته باشد.

نکته: اگر جسم بالای مبدأ انرژی پتانسیل $(U=0)$ قرار داشته باشد، انرژی پتانسیل گرانشی آن مثبت و در صورتی که زیر آن قرار گیرد انرژی پتانسیل گرانشی‌اش منفی است.



$$U_1 = +mgh_1$$
$$U_2 = 0$$
$$U_3 = -mgh_3$$

kg

☑**پاسخ:** *انرژی مصرف شده برای بالا بردن جسم، به صورت انرژی پتانسیل گرانشی در جسم ذخیره می‌شود بنابراین داریم:*

$$U = mgh \Rightarrow 10 = 1\times 10\times h \Rightarrow h = 1m$$

▼ **مثال ۵۸:** غواصی به جرم $70kg$ در حال غواصی در یک دریاچه به عمق $60m$ نسبت به سطح آزاد دریاچه است. تغییر انرژی پتانسیل گرانشی این غواص در فاصله $15m$ تا کف دریاچه را در دو حالت زیر بدست آورید و با مقایسه این دو حالت نتیجه‌گیری خود را توضیح دهید. $(g = 10\frac{N}{kg})$

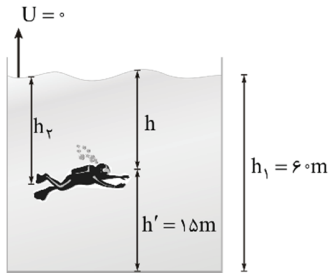
(مرتبط با صفحه‌های ۱۴۱ تا ۱۴۴ کتاب درسی)

(در هر دو حالت فرض کنید غواص ابتدا در کف دریاچه بوده است)

الف) مبدأ انرژی پتانسیل گرانشی را سطح آزاد دریاچه در نظر بگیرید.

ب) مبدأ انرژی پتانسیل گرانشی را کف دریاچه فرض کنید.

☑**پاسخ:** *الف) راه حل اول:*

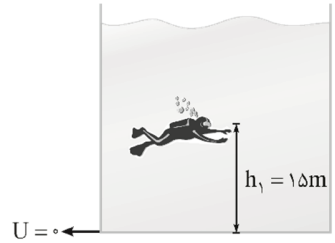


$$\begin{cases} h_1 = 60m \\ h_2 = (60-15) = 45m \\ U_1 = -mgh_1 = -70\times 10\times 60 = -42000J \\ U_2 = -mgh_2 = -70\times 10\times 45 = -31500J \end{cases}$$
$$\Delta U = U_2 - U_1 = -31500 - (-42000) \Rightarrow \Delta U = 10500J$$

راه حل دوم: چون غواص به سمت بالا جابجا شده است پس داریم:

$$\Delta U = +mgh = 70\times 10\times (60-45) \Rightarrow \Delta U = 10500J$$

ب)راه حل اول:



$$\begin{cases} h_1 = 0 \\ h_2 = 15m \\ U_1 = +mgh_1 = 0 \\ U_2 = mgh_2 = 70\times 10\times 15 = 10500J \end{cases}$$
$$\Delta U = U_2 - U_1 = 10500 - 0 \Rightarrow \Delta U = 10500J$$

راه حل دوم: چون غواص به سمت بالا جابجا شده است پس داریم:

$$\Delta U = mg\Delta h = 70\times 10\times (15-0) \Rightarrow \Delta U = 10500J$$

نتیجه گیری: همانطور که انتظار می‌رفت، انتخاب مبدأ انرژی پتانسیل گرانشی اختیاری است و تأثیری در نتیجه نهایی و فیزیک مسئله ندارد.

مثال ۵۹: یک پسر جوان به جرم m_1 و یک مرد مسن به جرم m_2 $(m_2 > m_1)$ برای رسیدن به طبقه چهارم یک برج مسکونی دو مسیر زیر را انتخاب می‌کنند. پسر جوان از طریق پلکان ساختمان و مرد مسن از طریق آسانسور. کدام گزینه در مورد این دو شخص در طبقه چهارم صحیح است؟

(مکمل مسأله ۱۱ کتاب درسی)

۱)کار نیروی وزن برای هر دو شخص یکسان است.

۲)انرژی پتانسیل گرانشی پسر جوان از مرد مسن کمتر است.

۳)انرژی پتانسیل گرانشی مرد مسن از پسر جوان کمتر است.

۴)انرژی پتانسیل گرانشی مرد مسن و پسر جوان یکسان است.

☑**پاسخ:** *با توجه به این که هر دو شخص به سمت بالا جابجا می‌شوند بنابراین داریم؛*

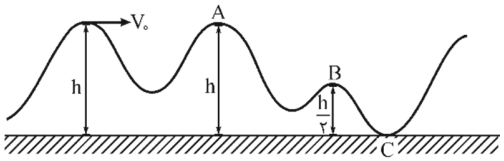
گزینه‌های ۲ و ۳ و ۴: $\Delta U = +mgh \xrightarrow[m_2>m_1]{h_1=h_2} \Delta U_2 > \Delta U_1$

گزینه ۱: کار نیروی وزن در بالا رفتن $W_{mg} = -mgh \xrightarrow{m_2>m_1} (W_{mg})_2 > (W_{mg})_1$

گزینه ۳ صحیح است.

مثال ۶۰: یک قطار بازی به جرم m مطابق شکل در یک مسیر بدون اصطکاک حرکت می‌کند تا با تندی V_0 به بالای نخستین تپه می‌رسد. نسبت انرژی پتانسیل گرانشی سامانه قطار- زمین در نقطه‌ی B به انرژی پتانسیل گرانشی آن در نقطه‌ی A کدام است؟

(مشابه و مکمل مسأله ۱۷ کتاب درسی)



۱) $\frac{1}{2}$

۲) ۲

۳) ۱

۴) $\frac{1}{3}$

☑**پاسخ:**

$$\begin{cases} U_A = mgh \\ U_B = mg\frac{h}{2} \end{cases} \Rightarrow \frac{U_B}{U_A} = \frac{1}{2}$$

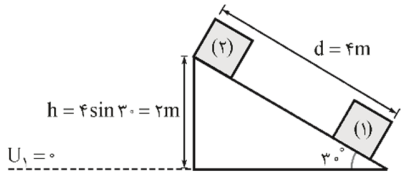
گزینه ۱ صحیح است.

مثال ۶۱: جسمی به وزن ۵۰۰ نیوتون را روی سطح شیب‌داری که با افق زاویه‌ی 30° می‌سازد بالا می‌کشیم. اگر جابه‌جایی جسم روی سطح ۴ متر باشد، افزایش انرژی پتانسیل آن چند ژول خواهد بود؟

(آزاد پزشکی ۶۷)

۱) ۹۸۰۰ ۲) ۲۰۰۰ ۳) ۱۰۰۰ ۴) $1000\sqrt{3}$

☑**پاسخ:**



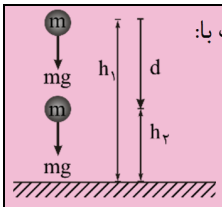
$$\Delta U = U_2 - U_1 = U_2 - 0 = U = mgh$$

$$\Rightarrow \Delta U = 500 \times 2 = 1000\,J \Rightarrow \Delta U = 1000\,J$$

گزینه ۳ صحیح می‌باشد.

کار و انرژی پتانسیل گرانشی:

کار نیروی وزن بر روی جسم در حال سقوط به طرف زمین از ارتفاع h_1 به ارتفاع h_2 (نسبت به زمین) برابر است با:



$$\begin{cases} d = h_1 - h_2 \\ W_{mg} = mgd = mg(h_1 - h_2) \end{cases}$$

از طرفی انرژی پتانسیل گرانشی سامانه متشکل از زمین و جسمی به جرم m که در ارتفاع h از سطح زمین است بصورت زیر تعریف می‌شود:

$$U = mgh$$

بنابراین کار نیروی وزن برابر با منفی تغییر انرژی پتانسیل گرانشی است:

$$W_{\text{وزن}} = -\Delta U$$

تذکر: هنگامی که جسم رو به بالا حرکت می‌کند نیز رابطه $W_{\text{وزن}} = -\Delta U$ برقرار است.

نکته ۱: هنگامی که جسم رو به زمین حرکت می‌کند (h کاهش می‌یابد) نیروی وزن جسم کار مثبت انجام می‌دهد و انرژی پتانسیل گرانشی کاهش می‌یابد. $(\Delta U < 0)$

نکته ۲: هنگامی که جسم رو به بالا حرکت می‌کند و از زمین دور می‌شود (h افزایش می‌یابد)، در این صورت کار انجام شده توسط نیروی وزن جسم منفی است و انرژی پتانسیل گرانشی آن افزایش می‌یابد. $(\Delta U > 0)$

نکته ۳: هنگامی که جسمی به جرم m توسط یک نیروی خارجی به آرامی و با تندی ثابت به اندازه‌ی Δh در راستای قائم جابه‌جا می‌شود (مانند جرثقیل) کار انجام شده توسط نیروی خارجی (W_F) برابر تغییرات انرژی پتانسیل گرانشی جسم است.

$$\begin{cases} W_{mg} = -mg\Delta h \\ \Delta U = -W_{mg} = -(-mg\Delta h) = mg\Delta h \end{cases} \Rightarrow W_F = mg\Delta h$$

کار نیروی وزن در بالا رفتن

▼ مثال ۶۲: اگر جسمی به وزن mg در امتداد قائم به اندازه‌ی h به طرف پایین جابه‌جا شود، انرژی پتانسیل چقدر و چگونه تغییر می‌کند؟

(مشهد- آزادگان- ۸۹)

☑ **پاسخ:** *تغییرات انرژی پتانسیل گرانشی برابر است با منفی کار نیروی وزن:*

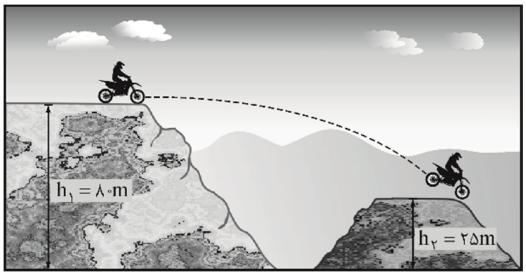
$$\Delta U = -W_{mg}$$

از طرفی جسم به اندازه‌ی $d = h$ به سمت پایین جابه‌جا شده است بنابراین کار نیروی وزن در حین پایین آمدن برابر است با mgd ، بنابراین داریم:

$$\Delta U = -W_{mg} = -mgd$$

در نتیجه انرژی پتانسیل جسم به اندازه‌ی mgd کاهش خواهد یافت.

▼ مثال ۶۳: موتورسواری به جرم کل $۱۲۰kg$ از بالای تپه‌ای، پرشی مطابق شکل روبه‌رو انجام می‌دهد. تغییرات پتانسیل گرانشی موتورسوار و کار نیروی وزن موتورسوار در این جابه‌جایی به ترتیب از راست به چپ کدام‌اند؟ $(g = ۱۰\frac{N}{kg})$ (مشابه و مکمل تمرین ۶-۱۲)



۱) $۶۶۰۰J$ و $-۶۶۰۰J$
۲) $-۶۶۰۰J$ و $۶۶۰۰J$
۳) $-۶۶۰۰۰J$ و $+۶۶۰۰۰J$
۴) $+۶۶۰۰۰J$ و $۶۶۰۰۰J$

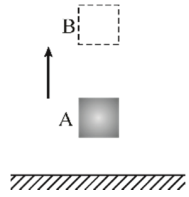
☑پاسخ: *اگر جسم به اندازه‌ی h به سمت پایین جابجا شود انرژی پتانسیل گرانشی آن به صورت زیر تغییر می‌کند:*

$$\Delta U = -mgh = -۱۲۰\times۱۰\times(۸۰-۲۵) = -۶۶۰۰۰J$$

$$W_{mg} = -\Delta U \Rightarrow W_{mg} = +۶۶۰۰۰J$$

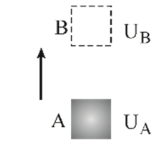
گزینه ۳ صحیح است.

▼ مثال ۶۴: در راستای قائم جسمی به جرم m را از نقطه‌ی A به نقطه‌ی B می‌بریم و کار نیروی وزن در این جابه‌جایی $-۴۰J$ است. اگر انرژی پتانسیل گرانشی جسم در نقطه‌ی B برابر $۶۰J$ باشد، انرژی پتانسیل آن در نقطه‌ی A چند ژول است؟ (مکمل مثال ۶-۹ کتاب درسی)



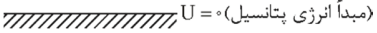
۱) ۱۰۰
۲) -۱۰۰
۳) ۲۰
۴) -۲۰

☑پاسخ:



$$\Delta U = -W_{mg} \Rightarrow U_B - U_A = -(-۴۰)$$

$$\Rightarrow ۶۰ - U_A = ۴۰ \Rightarrow U_A = ۲۰$$



گزینه ۳ صحیح است.

▼ مثال ۶۵: شخصی وزنه‌ای به جرم ۱ کیلوگرم را از سطح زمین تا ارتفاع ۲ متر بالا می‌برد و سپس آن را با تندی ۵ متر بر ثانیه پرتاب می‌کند. کار انجام شده توسط این شخص بر روی سنگ تقریباً چقدر است؟ $(g = ۱۰\frac{N}{kg})$ (مشابه مسأله ۸ کتاب درسی)

☑پاسخ: *زمین را مبدأ انرژی پتانسیل در نظر می‌گیریم $(U_۱ = ۰)$ و از مقاومت هوا صرف‌نظر می‌کنیم و فرض می‌کنیم جسم ابتدا در حال سکون $(k_۱ = ۰)$ بوده است.*

$$W_{\text{شخص}} = \Delta U + \Delta K \Rightarrow W_{\text{شخص}} = U_۲ - U_۱ + k_۲ - k_۱$$

$$= mgh - ۰ + \frac{۱}{۲}mV^۲ - ۰$$

$$\Rightarrow W_{\text{شخص}} = ۱\times۱۰\times۲ + \frac{۱}{۲}\times۱\times۵^۲ \Rightarrow W_{\text{شخص}} = ۳۲/۵J$$

مثال ٦٦: **اتومبیلی به جرم ۱۰۰۰ کیلوگرم توسط جرثقیل از روی یک بارکش به آرامی با تندی ثابت از ارتفاع ۲ متری به سطح زمین انتقال می‌یابد. تغییر انرژی پتانسیل اتومبیل در این عمل برابر است با :** $(g = ۹/۸ \frac{m}{s^۲})$ (سراسری ریاضی ۶۲)

۱) صفر ۲) ۲ کیلوژول ۳) ۱۹/۶ کیلوژول ٤) ۲۰۰۰ کیلوژول

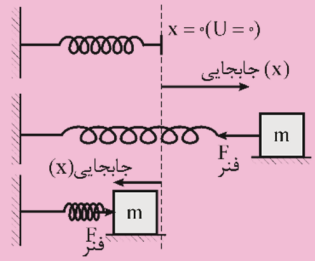
پاسخ:

$$\Delta U = -mgh = -۱۰۰۰ \times ۹/۸ \times ۲ \Rightarrow \Delta U = -۱۹۶۰۰J \Rightarrow \Delta U = -۱۹/۶kJ \Rightarrow \Delta U = ۱۹/۶kj$$

گزینه ۳ صحیح است.

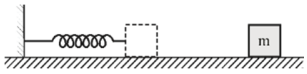
کار و انرژی پتانسیل کشسانی سامانه‌ی جسم- فنر

در صورتی‌که یک فنر از وضعیت تعادل‌اش $(x = ۰)$ به اندازه‌ی x فشرده یا کشیده شود نیرویی در خلاف جهت جابه‌جایی به عامل واردکننده‌ی نیرو وارد می‌شود، بنابراین کار نیروی فنر در این جابه‌جایی منفی و تغییرات انرژی پتانسیل کشسانی سامانه‌ی جسم- فنر مثبت است.

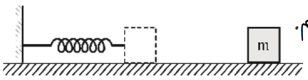


$$\Delta U = -W_{\text{فنر}}$$

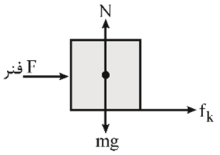
مثال ٦٧: **با توجه به شکل مقابل، جسمی به جرم $۲kg$ با سرعت v روی یک سطح افقی به یک فنر برخورد کرده و آن را فشرده می‌کند. در لحظه‌ی توقف جسم، انرژی پتانسیل کشسانی فنر $۲۰J$ است. اگر کار نیروی اصطکاک در این جابه‌جایی $-۲۹J$ باشد، سرعت جسم در لحظه‌ی برخورد با فنر v را محاسبه کنید.**



پاسخ: *شکل نیروهای وارد بر جسم را رسم می‌کنیم و کار کل را به دست می‌آوریم. سپس تغییرات انرژی جنبشی جسم Δk را محاسبه می‌کنیم و در نهایت با استفاده از قضیه کار و انرژی جنبشی $W_t = \Delta k$ ، سرعت جسم در لحظه‌ی برخورد با فنر را تعیین می‌کنیم.*



کار نیروهای وزن mg و عمودی سطح N به دلیل آنکه بر جابه‌جایی افقی عمود هستند $(\theta = ۹۰)$ صفر است:



کار نیروی وزن : $W_{mg} = mgd\cos ۹۰ \Rightarrow W_{mg} = ۰$

کار نیروی عمودی سطح : $W_{F_N} = Nd\cos ۹۰ \Rightarrow W_{F_N} = ۰$

کار نیروی اصطکاک : $W_{f_k} = -۲۹J$

از طرفی چون تغییرات انرژی پتانسیل کشسانی فنر ΔU برابر با منفی کاری است که فنر روی جسم انجام می‌دهد بنابراین:

$$\Delta U_{\text{کشسانی}} = -W_{\text{فنر}} \Rightarrow W_{\text{فنر}} = -\Delta U_{\text{کشسانی}} \Rightarrow W_{\text{فنر}} = (U_f - U_i) \Rightarrow W_{\text{فنر}} = -(۲۰ - ۰) \Rightarrow W_{\text{فنر}} = -۲۰J$$

بنابراین کار کل برابر است با:

$$W_t = W_{mg} + W_N + W_{f_k} + W_{\text{فنر}} \Rightarrow W_{\text{برآیند}} = ۰ + ۰ - ۲۰ - ۲۹ \Rightarrow W_{\text{برآیند}} = -۴۹J$$

حال تغییرات انرژی جنبشی را تعیین می‌کنیم:

$$\Delta K = K_f - K_i \Rightarrow \Delta K = \frac{1}{2}mv_f^2 - \frac{1}{2}mv_i^2 \Rightarrow \Delta K = \frac{1}{2}m(v_f^2 - v_i^2) \rightarrow \Delta K = \frac{1}{2}\times 2(0^2 - v^2) \Rightarrow \Delta K = -v^2$$

بنابراین طبق قضیه‌ی کار و انرژی داریم:

$$W_t = \Delta K \Rightarrow -49 = -v^2 \Rightarrow v = 7\frac{m}{s}$$

انرژی مکانیکی (E):

مجموع مقادیر انرژی‌های جنبشی و پتانسیل یک جسم را انرژی مکانیکی آن جسم (E) می‌نامند.

$$E = k + U$$

$$\begin{cases} k = \frac{1}{2}mV^2 \\ U = U_{\text{گرانشی}} + U_{\text{فنر}} \end{cases}$$

اصل پایستگی انرژی مکانیکی:

اگر فرض کنیم نیروهای اتلاف‌کننده‌ی انرژی (مانند مقاومت هوا و اصطکاک) در طول مسیر حرکت جسم ناچیز باشند، آن گاه انرژی مکانیکی جسم در تمام نقاط مسیر مقدار یکسانی خواهد داشت و پایسته می‌ماند، این نتیجه اصل پایستگی انرژی مکانیکی نام دارد.

$$E_1 = E_2$$

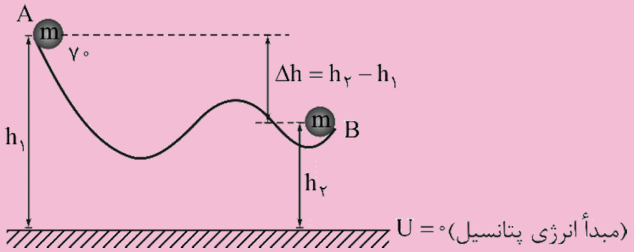
نکته ۱: بیان ریاضی دیگری از اصل پایستگی انرژی مکانیکی به صورت زیر است:

$$k_1 + U_1 = k_2 + U_2 \Rightarrow k_2 - k_1 + U_2 - U_1 = 0$$
$$\Rightarrow \Delta k + \Delta U = 0 \Rightarrow \Delta k = -\Delta U \text{ یا } |\Delta k| = |\Delta U|$$

بنابراین اگر انرژی مکانیکی پایسته باشد همواره افزایش (کاهش) انرژی جنبشی جسم با کاهش (افزایش) انرژی پتانسیل آن همواره خواهد بود.

نکته ۲: اگر یک جسم در یک سطح بدون اصطکاک مطابق شکل به اندازه‌ی Δh سقوط کند، اندازه‌ی تندی آن از V_0 به $\sqrt{V_0^2 + 2g\Delta h}$ خواهد رسید.

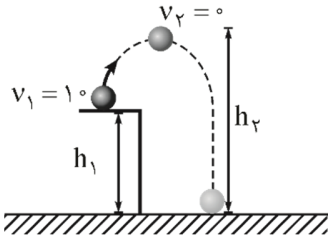
اثبات:



$$E_A = E_B \Rightarrow k_A + U_A = k_B + U_B$$
$$\Rightarrow \frac{1}{2}mV_0^2 + mgh_1 = \frac{1}{2}mV_B^2 + mgh_2$$
$$\Rightarrow \begin{cases} V_B = \sqrt{V_0^2 + 2g\Delta h} \\ \Delta h = h_2 - h_1 \end{cases}$$

تذکر: اگر جسم به اندازه‌ی Δh بالا رود، تندی آن کاهش یافته و $\sqrt{V_0^2 - 2g\Delta h}$ می‌رسد.

▼ **مثال ۶۸:** جسمی به جرم $0/5kg$ را از ارتفاع $2m$ با سرعت $10\frac{m}{s}$ به بالا پرتاب می‌کنیم. این جسم حداکثر تا چه ارتفاعی از سطح زمین بالا می‌رود؟ $(g=10\frac{m}{s^2}$ و از مقاومت هوا صرف‌نظر کنید) (مشهد- غیرانتفاعی دانش گستر- ۸۹)



☑**پاسخ:** چون حداکثر ارتفاع بالا رفتن خواسته شده بنابراین جسم تا جایی بالا می‌رود که متوقف شود $(k_2=0)$. از مقاومت هوا صرف‌نظر شده است بنابراین انرژی مکانیکی جسم بین نقاط (۱) و (۲) پایسته است $(E_1=E_2)$. مبدأ انرژی پتانسیل $(U=0)$ را سطح زمین در نظر می‌گیریم.

بنابراین خواهیم داشت:

$$(1)\ \text{انرژی مکانیکی جسم در نقطه‌ی}: E_1=K_1+U_1 \Rightarrow E_1=\frac{1}{2}mv_1^2+mgh_1 \Rightarrow E_1=(\frac{1}{2}\times 0/5\times 10^2)+(0/5\times 10\times 2)$$

$$\Rightarrow E_1=35J$$

$$(2)\ \text{انرژی مکانیکی جسم در نقطه‌ی}: E_2=K_2+U_2 \Rightarrow E_2=0+mgh_2 \Rightarrow E_2=0/5\times 10\times h_2$$

$$\Rightarrow E_2=5h_2$$

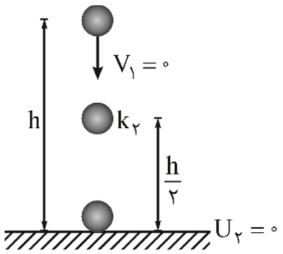
طبق رابطه پایستگی انرژی خواهیم داشت:

$$E_1=E_2 \Rightarrow 35=5h_2 \Rightarrow h_2=7m$$

▼ **مثال ۶۹:** جسمی به جرم یک کیلوگرم در شرایط خلاء، بدون تندی اولیه از ارتفاع h رها می‌شود. اگر انرژی جنبشی آن در نیمه‌ی مسیر ۲۰ ژول باشد، ارتفاع h چند متر است؟ $(g=10\frac{m}{s^2})$ (سراسری تجربی ۷۶)

۱) ۱/۵ ۲) ۲/۷۵ ۳) ۶ ۴) ۴

☑**پاسخ:** جسم بدون تندی اولیه رها شده است $(V_1=0 \Rightarrow k_1=0)$ و از مقاومت هوا صرف‌نظر شده است بنابراین انرژی مکانیکی جسم در طول مسیر پایسته است.



$$E_1=E_2 \Rightarrow k_1+U_1=k_2+U_2 \Rightarrow 0+mgh=20+mg\frac{h}{2}$$

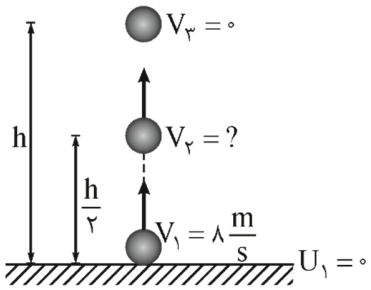
$$\Rightarrow mg\frac{h}{2}=20 \Rightarrow 1\times 10\times\frac{h}{2}=20 \Rightarrow h=4m$$

گزینه ۴ صحیح است.

▼ **مثال ۷۰:** جسمی به جرم m را با تندی $8\frac{m}{s}$ در راستای قائم به طرف بالا پرتاب می‌کنیم. با نادیده گرفتن اتلاف انرژی، تندی جسم در نیمه‌ی راه روبه بالا چند متر بر ثانیه است؟ $(g=10\frac{m}{s^2})$ (سراسری ریاضی ۸۸)

۱) ۶ ۲) ۴ ۳) $4\sqrt{2}$ ۴) $5\sqrt{2}$

☑**پاسخ:** *از مقاومت هوا صرف‌نظر شده است، بنابراین انرژی مکانیکی جسم در طول مسیر پایسته است.*

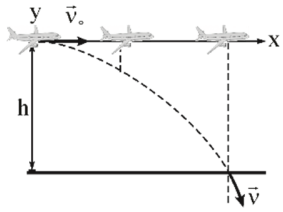


$$E_1 = E_3 \Rightarrow k_1 + U_1 = k_3 + U_3$$
$$\Rightarrow \frac{1}{2}mV_1^2 + 0 = 0 + mgh \Rightarrow h = \frac{V_1^2}{2g} = \frac{8^2}{2\times 10}$$
$$\Rightarrow h = 3/2m$$
$$E_1 = E_2 \Rightarrow \frac{1}{2}mV_1^2 = \frac{1}{2}mV_2^2 + mg\frac{h}{2}$$
$$\Rightarrow V_2 = \sqrt{V_1^2 - gh} = \sqrt{8^2 - 10\times 3/2} = \sqrt{32}$$
$$\Rightarrow V_2 = 4\sqrt{2}\frac{m}{s}$$

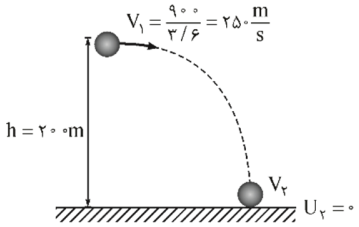
گزینه ۳ صحیح است.

▼ **مثال ۷۱:** در شکل زیر، هواپیمای بمب‌افکنی که در ارتفاع ۲۰۰ متری با تندی $900km/h$ به طور افقی پرواز می‌کند، بمبی را رها می‌کند. اگر از مقاومت هوا صرف نظر شود، تندی بمب در لحظه‌ی برخورد به زمین تقریباً چند متر بر ثانیه است؟ $(g = 10\frac{N}{kg})$

(مطابق با تمرین ۱۵ کتاب درسی)



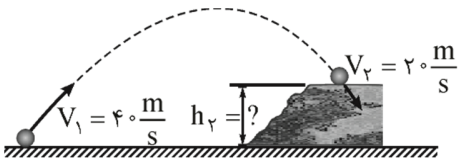
☑**پاسخ:** *با توجه به این که از مقاومت هوا صرف‌نظر شده است پس انرژی مکانیکی بمب در طول مسیر پایسته است.*



$$E_1 = E_2 \Rightarrow k_1 + U_1 = k_2 + U_2$$
$$\frac{1}{2}mV_1^2 + mgh = \frac{1}{2}mV_2^2 + 0$$
$$\Rightarrow V_2 = \sqrt{V_1^2 + 2gh} = \sqrt{250^2 + 2\times 10\times 200} \Rightarrow V_2 \simeq 258\frac{m}{s}$$

▼ **مثال ۷۲:** توپی مطابق شکل از سطح زمین با تندی $V_1 = 40\frac{m}{s}$ به طرف صخره‌ای پرتاب می‌شود. اگر توپ با تندی $V_2 = 20\frac{m}{s}$ به بالای صخره برخورد کند، ارتفاع h_2 را به دست آورید. مقاومت هوا را هنگام حرکت توپ نادیده بگیرید. $(g = 10\frac{m}{s^2})$

(مطابق شود را بیازمایید ۳-۱۴)



پاسخ: از مقاومت هوا صرف‌نظر شده است، بنابراین داریم:

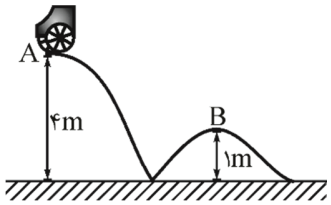
$$\begin{cases} E_1 = E_2 \Rightarrow k_1 + U_1 = k_2 + U_2 \Rightarrow k_1 = k_2 + U_2 \\ U_1 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}mV_1^2 = \frac{1}{2}mV_2^2 + mgh_2 \Rightarrow \frac{1}{2}V_1^2 = \frac{1}{2}V_2^2 + gh_2$$

$$\frac{1}{2}\times(40)^2 = \frac{1}{2}\times(20)^2 + 10h_2 \Rightarrow h_2 = 60m$$

مثال ۷۳: مطابق شکل، ارابه‌ای به جرم m از نقطه‌ی A با تندی ۲ متر بر ثانیه می‌گذرد، تندی آن هنگام عبور از نقطه‌ی B چند متر بر ثانیه است؟ (از اصطکاک صرف‌نظر شود $g = 10 m/s^2$)

(سراسری ریاضی ۸۶)



۱) ۴
۲) ۸
۳) $\sqrt{46}$
۴) بستگی به جرم m دارد.

پاسخ: چون از اصطکاک صرف‌نظر شده است، انرژی مکانیکی ارابه در طول مسیر پایسته است. مبدأ انرژی پتانسیل را زمین در نظر می‌گیریم:

$$E_A = E_B \Rightarrow k_A + U_A = k_B + U_B$$

$$\frac{1}{2}mV_A^2 + mgh_A = \frac{1}{2}mV_B^2 + mgh_B$$

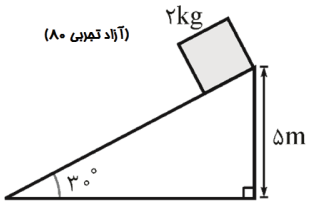
$$\Rightarrow \frac{1}{2}\times(2)^2 + 10\times4 = \frac{1}{2}\times V_B^2 + 10\times1$$

$$V_B^2 = 64 \Rightarrow V_B = 8\frac{m}{s}$$

گزینه ۲ صحیح است.

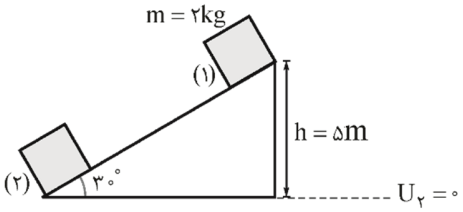
مثال ۷۴: در شکل زیر، وزنه‌ی $2kg$ از حال سکون به حرکت درمی‌آید. اگر اصطکاک ناچیز باشد، انرژی جنبشی وزنه در لحظه‌ی رسیدن به سطح افقی به چند ژول می‌رسد؟ $(g = 10\frac{N}{kg})$

(آزاد تجربی ۸۰)



۱) ۱۰۰
۲) ۵۰
۳) ۲۰
۴) ۲۰۰

پاسخ: چون سطح بدون اصطکاک است انرژی مکانیکی وزنه در طول مسیر پایسته است.



$$E_1 = E_2 \Rightarrow k_1 + U_1 = k_2 + U_2$$

$$0 + mgh = k_2 + 0$$

$$\Rightarrow k_2 = mgh = 2\times10\times5$$

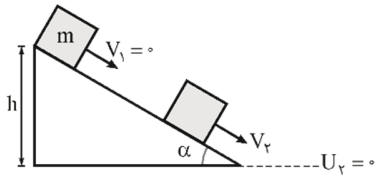
$$\Rightarrow k_2 = 100J$$

گزینه ۱ صحیح می‌باشد.

مثال ۷۵: دو جسم A و B بر روی دو سطح شیب‌دار بدون اصطکاک که به ترتیب با سطح افق زوایای ۳۰ درجه و ۶۰ درجه می‌سازند، از یک ارتفاع، بدون تندی اولیه رها می‌شوند و با تندی‌های V_A و V_B به پایین سطح می‌رسند. در این صورت نسبت $\frac{V_A}{V_B}$ برابر است با: (سراسری ریاضی ۶۲)

۱) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ ۲) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ۳) ۱ ۴) $\sqrt{3}$

پاسخ: چون از اصطکاک صرف‌نظر شده است انرژی مکانیکی جسم در طول مسیر پایسته است.



$$E_1 = E_2 \Rightarrow k_1 + U_1 = k_2 + U_2$$

$$\Rightarrow 0 + mgh = \frac{1}{2}mV_2^2 + 0$$

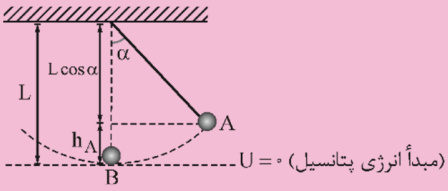
$$\Rightarrow V_2 = \sqrt{2gh}$$

بنابراین تندی گلوله در موقع رسیدن به پایین سطح فقط تابعی از ارتفاع سطح شیبدار است بنابراین برای هر دو جسم A و B که از یک ارتفاع مشخص رها می‌شوند، تندی آن‌ها در لحظه رسیدن به پایین سطح شیبدار یکی است.

گزینه ۳ صحیح است.

نکته: در شکل مقابل گلوله‌ای به جرم m ، به ریسمانی به طول L متصل است اگر گلوله با تندی V_0 از نقطه‌ی A شروع به حرکت کند، تندی در پایین‌ترین نقطه‌ی مسیر گلوله از رابطه $V = \sqrt{V_0^2 + 2gL(1-\cos\alpha)}$ به دست می‌آید: (از مقاومت هوا صرف‌نظر شده است.)

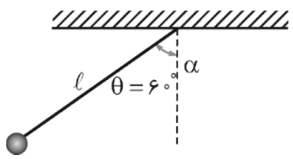
اثبات:



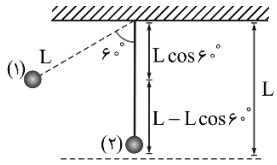
$$\begin{cases} V_B = \sqrt{V_0^2 + 2g\Delta h} \\ \Delta h = h_A = L - L\cos\alpha = L(1-\cos\alpha) \end{cases}$$

$$\Rightarrow V_B = \sqrt{V_0^2 + 2gL(1-\cos\alpha)}$$

مثال ۷۶: آونگی به جرم $2g$ و طول $4cm$ را مطابق شکل مقابل به اندازه‌ی ۶۰ درجه از وضعیت قائم منحرف و از حال سکون رها می‌کنیم. سرعت آونگ هنگامی که از وضعیت قائم می‌گذرد چقدر است؟ (از مقاومت هوا صرف‌نظر کنید و $g = 10\frac{m}{s^2}$ است و $\cos 60^\circ = 0/5$) (تهران- هرمیدگان- ۸۹)



☑**پاسخ:** از مقاومت هوا صرف‌نظر شده است بنابراین انرژی مکانیکی مطابق شکل بین نقاط ۱ و ۲ پایسته است $(E_۱ = E_۲)$. مبدأ انرژی پتانسیل گرانشی $(U = ۰)$ را نقطه ۲ در نظر می‌گیریم بنابراین برای محاسبه سرعت آونگ در وضعیت قائم به صورت زیر عمل می‌کنیم:



$$h_۱ = l - l\cos ۶۰ \Rightarrow h_۱ = l(۱ - \cos ۶۰)$$
$$h_۲ = ۰ \Rightarrow U_۲ = ۰$$

انرژی مکانیکی آونگ در نقطه‌ی (۱):

$$E_۱ = k_۱ + U_۱ \Rightarrow E_۱ = \frac{۱}{۲}mv_۱^۲ + mgh_۱ \Rightarrow E_۱ = \frac{۱}{۲} \times m \times ۰^۲ + m \times g \times l(۱ - \cos ۶۰)$$

$$\Rightarrow E_۱ = ۰ + mgl(۰/۵) \Rightarrow E_۱ = \frac{۱}{۲}mgl$$

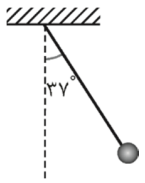
انرژی مکانیکی آونگ در نقطه‌ی (۲):

$$E_۲ = k_۲ + U_۲ \Rightarrow E_۲ = \frac{۱}{۲}mv_۲^۲ + ۰ \Rightarrow E_۲ = \frac{۱}{۲}mv_۲^۲$$

با توجه به رابطه‌ی پایستگی انرژی داریم:

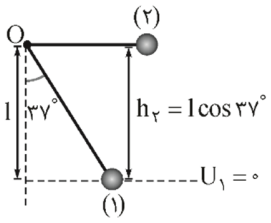
$$E_۱ = E_۲ \Rightarrow \frac{۱}{۲}mgl = \frac{۱}{۲}mV_۲^۲ \Rightarrow V_۲^۲ = gl \Rightarrow V_۲^۲ = ۱۰ \times ۰/۰۴ \Rightarrow V_۲ = \sqrt{۰/۴} = \frac{۲}{\sqrt{۱۰}} = \frac{۲\sqrt{۱۰}}{\sqrt{۱۰}} \Rightarrow \boxed{V_۲ = \frac{\sqrt{۱۰}}{۵}\frac{m}{s}}$$

▼ **مثال ۷۷:** مطابق شکل زیر، آونگی به طول ۱/۲۵ متر، با تندی V از وضعیت نشان داده شده (نقطه‌ی A) عبور می‌کند. کم‌ترین مقدار V چند متر بر ثانیه باشد، تا ریسمان بتواند به وضعیت افقی برسد؟ (از مقاومت هوا صرف‌نظر شود، $g = ۱۰\frac{m}{s^۲}$ و $\sin ۳۷^\circ = ۰/۶$) (سراسری تجربی ۹۴)



۱) ۲
۲) $۲\sqrt{۵}$
۳) $\sqrt{۵}$
۴) ۴

☑**پاسخ:** چون از مقاومت هوا صرف‌نظر شده است، انرژی مکانیکی آونگ پایسته می‌ماند.



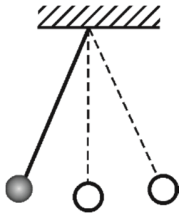
$$E_۱ = E_۲ \Rightarrow k_۱ + U_۱ = k_۲ + U_۲$$
$$\frac{۱}{۲}mV_۱^۲ + ۰ = \frac{۱}{۲}mV_۲^۲ + mgh_۲$$
$$\Rightarrow V^۲ = V_۲^۲ + ۲gh_۲$$

چون کم‌ترین مقدار V خواسته شده است باید فرض کنیم تندی در نقطه‌ی ۲ صفر شود و ریسمان دیگر بالاتر نرود.

$$\Rightarrow V = \sqrt{۲gh_۲} = \sqrt{۲gl\cos ۳۷} = \sqrt{۲ \times ۱۰ \times ۱/۲۵ \times ۰/۸} = \sqrt{۲۰} = \sqrt{۴ \times ۵} \Rightarrow V = ۲\sqrt{۵}\frac{m}{s}$$

گزینه ۲ صحیح است.

مثال ۷۸: آونگی به طول $۱/۶$ متر در حال نوسان است. وقتی گلوله‌ی آونگ از پایین‌ترین نقطه‌ی مسیر می‌گذرد، تندیش $۴\,m/s$ است. زاویه‌ی راستای نخ با خط قائم وقتی گلوله به بالاترین نقطه‌ی مسیر می‌رسد، چند درجه است؟ ($g = ۱۰\,m/s^۲$ و مقاومت هوا ناچیز است.) (ازاد از کنکور ریاضی ۸۷)

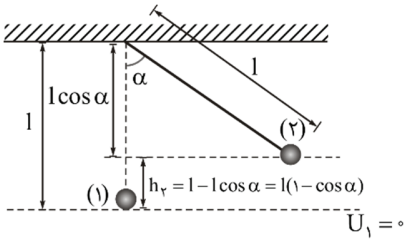


۱) ۴۵
۲) ۳۰
۳) ۶۰
۴) ۹۰

پاسخ: چون مقاومت هوا ناچیز است، انرژی مکانیکی آونگ پایسته است.

$$E_۱ = E_۲ \Rightarrow k_۱ + U_۱ = k_۲ + U_۲$$

بالاترین نقطه‌ی مسیر، مکانی است که تندی در آن جا صفر است.



$$\frac{۱}{۲}mV_۱^۲ + ۰ = ۰ + mgh_۲$$

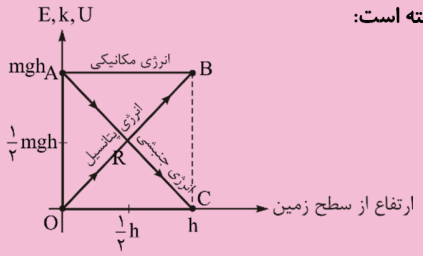
$$V_۱^۲ = ۲gh_۲ = ۲gl(۱-\cos\alpha)$$

$$۴^۲ = ۲\times۱۰\times۱/۶(۱-\cos\alpha)$$

$$\Rightarrow \frac{۱}{۲} = ۱-\cos\alpha \Rightarrow \cos\alpha = \frac{۱}{۲} \Rightarrow \alpha = ۶۰^\circ$$

گزینه ۳ صحیح است.

نکته: نمودار تغییرات انرژی جنبشی و پتانسیل برای جسمی که از روی سطح زمین تا ارتفاع h جابه‌جا می‌شود در شکل مقابل رسم شده است. از روی نمودار پیداست که در حین بالا رفتن انرژی پتانسیل جسم افزایش و انرژی جنبشی آن کاهش می‌یابد ولی مجموع این دو انرژی در طول حرکت پایسته (ثابت) می‌ماند. بنابراین انرژی مکانیکی در طول حرکت پایسته است:

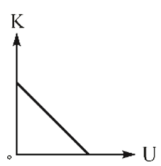


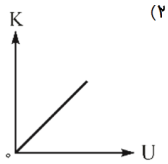
$$E_۱ = E_۲$$

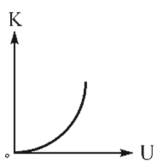
لحظه پرتاب از روی سطح زمین: O, A

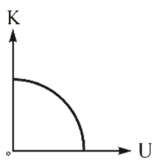
لحظه توقف در ارتفاع h از سطح زمین: B, C

مثال ۷۹: گلوله‌ای را با تندی اولیه‌ی $V_۰$ از سطح زمین در راستای قائم به سمت بالا پرتاب می‌کنیم. اگر مقاومت هوا ناچیز باشد، نمودار انرژی جنبشی گلوله (K) بر حسب انرژی پتانسیل گرانشی آن (U) از لحظه‌ی پرتاب تا لحظه‌ای که گلوله به حداکثر ارتفاع خود از سطح زمین می‌رسد، مطابق کدام گزینه است؟ (سطح زمین را مبدأ انرژی پتانسیل گرانشی در نظر بگیرید.) (آزمون کانون- چهارم تجربی- ۲۲ اسفند ۹۳)

۱) 

۲) 

۳) 

۴) 

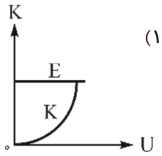
☑**پاسخ:** چون مقاومت هوا ناچیز است بنابراین انرژی مکانیکی پایسته است:

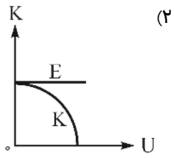
$E = K + U = \text{ثابت} \quad K = -U + \text{ثابت}$

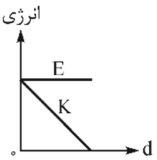
بنابراین نمودار $K - U$ یک خط راست با شیب منفی و عرض از مبدأ مثبت است.

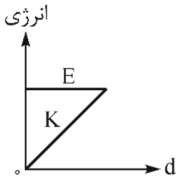
گزینه ۱ صحیح می‌باشد.

▼ **مثال ۸۰: در شرایط خلاء، جسمی بدون تندی اولیه از ارتفاع معینی از سطح رها می‌شود. نمودار تغییرات انرژی جنبشی (K) و انرژی مکانیکی جسم (E)، بر حسب اندازه‌ی جابه‌جایی آن (d)، کدام است؟** (آزمون کانون- چهارم تجربی ۹۰)

۱)


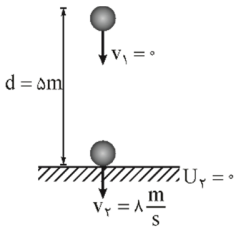
۲)


۳)


۴)


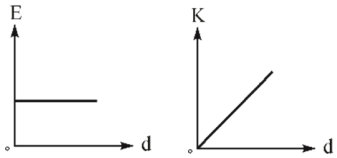
☑**پاسخ:** چون مقاومت هوا وجود ندارد پس انرژی مکانیکی (E) پایسته است (بدون تغییر می‌ماند):

$E = \text{ثابت}$



$E_1 = E_2 \Rightarrow k_1 + U_1 = k_2 + U_2$

$\Rightarrow 0 + mgd = k_2 + 0 \Rightarrow k_2 = mgd$



بنابراین نمودار انرژی جنبشی (k_2) و اندازه‌ی جابه‌جایی (d)، یک خط راست با شیب ثابت و مثبت است.

گزینه ۴ صحیح است.

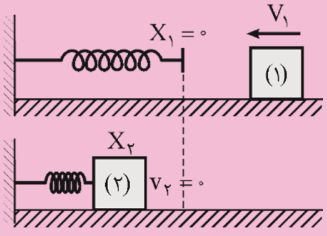
پایستگی انرژی مکانیکی در حضور فنر:

در شکل زیر جسمی را در نظر بگیرید که با تندی V_1 روی یک سطح افقی بدون اصطکاک به یک فنر برخورد کرده و فنر تا جایی فشرده می‌شود که جسم برای یک لحظه ساکن شود (حداکثر فشردگی) در این صورت بیش‌ترین انرژی پتانسیل کشسانی فنر برابر است با:

$U_{max} = k_1$

اثبات:

با فرض زمین به عنوان مبدأ انرژی پتانسیل گرانشی چون جسم روی سطح زمین جابجا می‌شود انرژی پتانسیل گرانشی آن صفر است.



$E_1 = E_2 \Rightarrow k_1 + U_1 = k_2 + U_2$

$\Rightarrow k_1 + 0 = 0 + U_{max}$

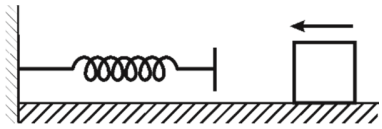
$\Rightarrow U_{max} = k_1 = \frac{1}{2}mV_1^2$

تذکر: کار نیروی فنر در این حالت برابر است با:

$$\begin{cases} W_{فنر} = -(\Delta U) = -(U_۲ - U_۱) = -(U_{max} - ۰) = -k_۱ \\ U_{max} = k_۱ \end{cases} \Rightarrow W_{فنر} = -k_۱ = -\frac{۱}{۲}mV_۱^۲$$

▼ مثال ۸۱: مطابق شکل، جسمی به جرم $۴kg$ با سرعت $۱۰\frac{m}{s}$ به فنری که در وضع عادی است برخورد می‌کند، هیچ گونه اصطکاکی نداریم. در لحظه‌ای که سرعت جسم $۴\frac{m}{s}$ است، انرژی پتانسیل کشسانی ذخیره شده در فنر چند ژول است؟

(صدا- تهران)



☑پاسخ: نقطه (۱) را لحظه برخورد جسم با فنر و نقطه (۲) را لحظه‌ای که جسم فنر را فشرده کرده دارای سرعت $V_۲ = ۴\frac{m}{s}$ است در نظر می‌گیریم

با توجه به نبود اصطکاک انرژی مکانیکی پایسته است $E_۱ = E_۲$ بنابراین برای محاسبه انرژی پتانسیل کشسانی ذخیره شده در فنر خواهیم داشت:

(۱) انرژی مکانیکی جسم در نقطه‌ی : $E_۱ = K_۱ + U_۱ \Rightarrow E_۱ = \frac{۱}{۲}mV_۱^۲ + (U_{کشسانی})_۱ \Rightarrow E_۱ = \frac{۱}{۲}\times ۴\times ۱۰^۲ + ۰ \rightarrow E_۱ = ۲۰۰J$

(۲) انرژی مکانیکی جسم در نقطه‌ی : $E_۲ = K_۲ + U_۲ \Rightarrow E_۱ = \frac{۱}{۲}mV_۲^۲ + (U_{کشسانی})_۲ \Rightarrow E_۲ = \frac{۱}{۲}\times ۴\times ۴^۲ + (U_{کشسانی})_۲$

$\Rightarrow E_۲ = ۳۲ + (U_{کشسانی})_۲$

با توجه به رابطه‌ی پایستگی انرژی داریم:

$E_۱ = E_۲ \Rightarrow ۲۰۰ = ۳۲ + (U_{کشسانی})_۲ \Rightarrow (U_{کشسانی})_۲ = ۱۶۸J$

بنابراین انرژی پتانسیل کشسانی ذخیره شده در فنر در لحظه‌ای که سرعت آن $۴\frac{m}{s}$ است برابر $۱۶۸J$ است.

سامانه منزوی:

به سامانه‌ای که نه از بیرون انرژی می‌گیرد و نه به بیرون انرژی می‌دهد سامانه منزوی گفته می‌شود.

قانون پایستگی انرژی:

در یک سامانه منزوی، مجموع کل انرژی پایسته است، نمی‌توان آن را خلق یا نابود کرد بلکه فقط از یک شکل به شکل دیگر تبدیل می‌شود.

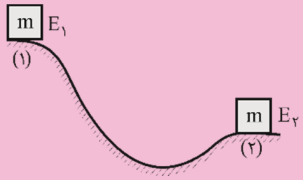
تذکر: قانون پایستگی انرژی بر اساس آزمایش‌های بی‌شماری بنا شده است و تاکنون هیچ مورد استثنایی برای آن یافته نشده است.

نکته ۱: قانون پایستگی انرژی بیانی از ثبات در طبیعت است. انرژی کل، کمیتی است که پایسته می‌ماند در حالی‌که کمیت‌های دیگر می‌توانند تغییر کنند.

نکته ۲: هرچه تعداد ذرات سازنده یک جسم بیش‌تر و انرژی هر ذره آن زیادتر باشد، انرژی درونی آن نیز بیش‌تر است.

کار و انرژی درونی- بررسی تغییرات انرژی مکانیکی در اثر نیروهای تلف‌کننده انرژی

اگر در طی مسیر حرکت جسم، نیروهای اتلافی (اصطکاک و مقاومت هوا) به جسم وارد شوند، این نیروها روی جسم کار منفی انجام می‌دهند و بخشی از انرژی مکانیکی جسم را به انرژی درونی جسم، سطح مسیر و یا هوا تبدیل می‌کنند. اگر کار نیروهای اتلافی را با W_f نشان دهیم، داریم:



$$W_f = E_2 - E_1$$

نکته ۱: در حضور نیروهای اتلافی رابطه بین ΔU و Δk برابر است با:

$$E_2 - E_1 = W_f \Rightarrow (U_2 + k_2) - (U_1 + k_1) = W_f$$

$$\Rightarrow U_2 - U_1 + k_2 - k_1 = W_f \Rightarrow \Delta U + \Delta k = W_f$$

نکته ۲: با گذشت زمان، انرژی مکانیکی جسم دائماً کاهش می‌یابد و پایسته نمی‌ماند زیرا نیروهای اتلافی به جسم وارد می‌شوند.

مثال ۸۲: انرژی ..... یک جسم، ..... آن است. (مرتبط با صفحه ۴۹ تا ۵۰)

۱)جنبشی- متناسب با سرعت

۲)درونی- مجموع انرژی‌های جنبشی و پتانسیل ذره‌های تشکیل دهنده

۳)پتانسیل گرانشی- متناسب با سرعت

۴)مکانیکی- مجموع انرژی پتانسیل گرانشی و کشسانی

پاسخ: *طبق تعریف، انرژی درونی یک جسم، مجموع انرژی‌های جنبشی و پتانسیل ذره‌های تشکیل دهنده آن است.*

گزینه‌ی «۱»: انرژی جنبشی متناسب با مجذور تندی است $k = \frac{1}{2}mV^2$.

گزینه‌ی «۳»: انرژی پتانسیل گرانشی متناسب با جرم و ارتفاع آن از سطح زمین است $U = mgh$.

گزینه‌ی «۴»: انرژی مکانیکی، مجموع انرژی پتانسیل و جنبشی جسم است $E = k + U$.

گزینه ۲ صحیح است.

مثال ۸۳: جسمی که در هوا سقوط می‌کند: (سراسری تجربی ۷۶)

۱)تمام انرژی مکانیکی آن به گرما تبدیل می‌شود.

۲)انرژی مکانیکی آن مرتباً کاهش می‌یابد.

۳)تمام انرژی مکانیکی آن همواره ثابت می‌ماند.

۴)کاهش انرژی پتانسیل آن برابر گرمایی است که تولید می‌شود.

☑**پاسخ:** به علت وجود مقاومت هوا، انرژی مکانیکی جسم رفته رفته کاهش می‌یابد.

گزینه ۲ صحیح است.

▼ **مثال ۸۴:** **کاهش انرژی پتانسیل گرانشی جسمی بر اثر سقوط از ارتفاع h برابر $60J$ و افزایش انرژی جنبشی آن $40J$ می‌باشد. کار نیروی مقاومت هوا در این جابه‌جایی چقدر است؟** **(شهری- مکمت- ۸۸)**

☑**پاسخ:** برای به دست آوردن کار نیروی مقاومت هوا در یک جابه‌جایی مشخص، کافی است تغییرات انرژی مکانیکی را بین آن دو نقطه محاسبه کنیم، بنابراین خواهیم داشت:

$$\begin{cases}\Delta k = 40J \ , \ \Delta U = -60J \\ W_{\text{مقاومت هوا}} = \Delta E\end{cases} \Rightarrow W_{\text{مقاومت هوا}} = \Delta k + \Delta U$$

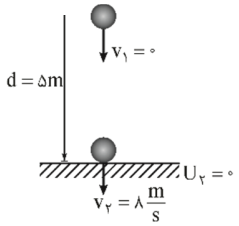
$$W_{\text{مقاومت هوا}} = 40 - 60 \Rightarrow W_{\text{مقاومت هوا}} = -20J$$

بنابراین کار نیروی مقاومت هوا در این جابه‌جایی $-20J$ است.

▼ **مثال ۸۵:** **جسمی به جرم ۲ کیلوگرم را از ارتفاع ۵ متری رها می‌کنیم و جسم با تندی ۸ متر بر ثانیه به زمین می‌رسد. کار نیروی مقاومت هوا چند ژول است؟** $(g = 10N/kg)$ **(سراسری تجربی ۷۷)**

۱) -64 ۲) -36 ۳) 36 ۴) 64

☑**پاسخ:** کار نیروی مقاومت هوا در طول مسیر با W_R نشان می‌دهیم بنابراین داریم:



$$W_R = E_2 - E_1 = k_2 + U_2 - k_1 - U_1 = \frac{1}{2}mV_2^2 + 0 - 0 - mgh$$

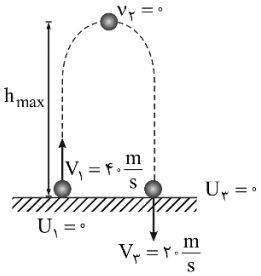
$$\Rightarrow W_R = \frac{1}{2} \times 2 \times 8^2 - 2 \times 10 \times 5 \Rightarrow W_R = -36J$$

گزینه ۲ صحیح است.

▼ **مثال ۸۶:** **گلوله‌ای را از سطح زمین با تندی $40\frac{m}{s}$ در راستای قائم به سمت بالا پرتاب می‌کنیم. اگر گلوله با تندی $20\frac{m}{s}$ به نقطه‌ی پرتاب بازگردد و کار نیروی مقاومت هوا در مسیری که گلوله از سطح زمین دور می‌شود، دو برابر کار نیروی مقاومت هوا در مسیری که گلوله با سطح زمین نزدیک می‌شود باشد، گلوله حداکثر تا چه ارتفاعی از سطح زمین بالا می‌رود؟** $(g = 10\frac{N}{kg})$ **(آزمون کانون ۹۱)**

۱) 60 ۲) 20 ۳) 50 ۴) 40

☑**پاسخ:** اگر کار نیروی مقاومت هوا در طول مسیر را با W_R نمایش دهیم، خواهیم داشت:



$$W_R = E_3 - E_1 = k_3 + U_3 - k_1 - U_1 = \frac{1}{2}mV_3^2 + 0 - \frac{1}{2}mV_1^2 - 0$$

$$\Rightarrow W_R = \frac{1}{2}m \times 20^2 - \frac{1}{2}m \times 40^2 \Rightarrow W_R = -600m$$

از طرفی کار نیروی مقاومت هوا برابر مجموع کار نیروی مقاومت هوا در مسیر رفت و برگشت است و از آن جایی که کار نیروی مقاومت هوا در مسیر رفت دو برابر مسیر برگشت گلوله است، داریم:

$$W_R = W_{\text{رفت}} + W_{\text{برگشت}} = W_{\text{رفت}} + \frac{W}{2}_{\text{رفت}} = \frac{3}{2}W_{\text{رفت}}$$

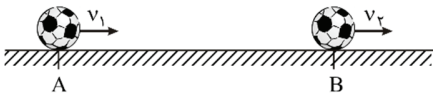
$$\Rightarrow W_{\text{رفت}} = \frac{2}{3}W_R = \frac{2}{3} \times -600m \Rightarrow W_{\text{رفت}} = -400m$$

$$W_{\text{رفت}} = E_2 - E_1 = k_2 + U_2 - k_1 - U_1$$

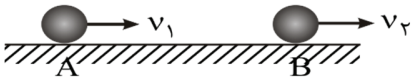
$$\Rightarrow -۴۰۰m = ۰ + mgh_{max} - \frac{۱}{۲}mV_۱^۲ - ۰ \Rightarrow -۴۰۰ + ۸۰۰ = ۱۰h_{max} \Rightarrow h_{max} = ۴۰ \text{ متر}$$

گزینه ۴ صحیح است.

▼ **مثال ۸۷:** **توپی به جرم $۰/۵kg$ مطابق شکل با تندی $V_۱ = ۱۰\frac{m}{s}$ از نقطه‌ی A می‌گذرد. نیروی مقاومت هوا و نیروی اصطکاک بین سطح تماس توپ با زمین، ۱۰ درصد انرژی جنبشی توپ را تا رسیدن به نقطه‌ی B تلف می‌کنند. تندی توپ را در این نقطه به دست آورید.** **(مشابه تمرین ۲-۱۵ کتاب درسی)**



☑**پاسخ:** *جسم روی سطح افقی جابه‌جا می‌شود بنابراین انرژی پتانسیل گرانشی در هر دو نقطه A و B صفر است، از طرفی انرژی مکانیکی در اثر حضور نیروهای اصطکاک تلف می‌شود:*



$$\begin{cases} U_A = ۰ \\ E_A = k_A + U_A = k_A = \frac{۱}{۲}mV_A^۲ = \frac{۱}{۲} \times ۰/۵ \times ۱۰^۲ \Rightarrow E_A = ۲۵J \end{cases}$$

$$W_{fk} = \frac{۱۰}{۱۰۰} \times k_A = \frac{۱۰}{۱۰۰} \times ۲۵ = ۲/۵J$$

$$\begin{cases} W_f = E_B - E_A \\ E_B = k_B + U_B = k_B + ۰ = k_B = \frac{۱}{۲}mV_B^۲ \end{cases}$$

$$\Rightarrow -۲/۵ = \frac{۱}{۲} \times ۰/۵ \times V_B^۲ - ۲۵ \Rightarrow V_B = \sqrt{۹۰} = \sqrt{۹ \times ۱۰} = ۳\sqrt{۱۰}\frac{m}{s}$$

راه حل دوم:

۱۰ درصد انرژی جنبشی تلف می‌شود بنابراین ۹۰ درصد آن به نقطه B می‌رسد:

$$k_B = ۰/۹k_A \Rightarrow \frac{۱}{۲}mV_B^۲ = ۰/۹ \times \frac{۱}{۲}mV_A^۲ \Rightarrow V_B^۲ = ۰/۹ \times ۱۰^۲ \Rightarrow V_B = \sqrt{۹۰}\frac{m}{s} = ۳\sqrt{۱۰}\frac{m}{s}$$

▼ **مثال ۸۸:** **قطاری با تندی $۵۴km/h$ در حال حرکت است. یک تکه گل به جرم $۴۰۰g$ را با تندی $۲۰m/s$ به طور افقی به طرف قطار پرت کرده و به آن می‌چسبد. اتلاف انرژی تکه گل چند ژول است؟** **(سراسری ریاضی ۶۹)**

۱) ۱۴۰ ۲) ۷۰ ۳) ۳۵ ٤) ۱۷/۵

☑**پاسخ:** *حرکت تکه گل قبل و بعد از برخورد با قطار افقی است بنابراین انرژی پتانسیل گرانشی آن در طول مسیر صفر است. از طرفی اگر کاری که باعث اتلاف انرژی می‌شود را با W' نشان دهیم، داریم:*

$$W' = E_۲ - E_۱ = k_۲ + U_۲ - k_۱ - U_۱ = \frac{۱}{۲}mV_۲^۲ + ۰ - \frac{۱}{۲}mV_۱^۲ - ۰$$

$$\Rightarrow W' = \frac{۱}{۲} \times ۴۰۰ \times ۱۰^{-۳} \times (\frac{۵۴}{۳/۶})^۲ - \frac{۱}{۲} \times ۴۰۰ \times ۱۰^{-۳} \times (۲۰)^۲$$

$$W' = ۴۵ - ۸۰ \Rightarrow W' = -۳۵J$$

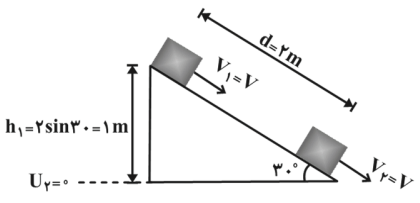
بنابراین $۳۵J$ انرژی در اثر این برخورد اتلاف می‌شود.

گزینه ۳ صحیح است.

مثال ۸۹: جسمی به جرم $2kg$ روی سطح شیبداری که با سطح افق زاویه‌ی 30° می‌سازد، با تندی ثابت رو به پایین می‌لغزد. اگر در این حرکت جسم به اندازه‌ی ۲ متر جابه‌جا شود، کار نیروی اصطکاک چند ژول است؟ $(g=10\frac{m}{s^2})$ (سراسری ریاضی ۹۴)

۱) $-20\sqrt{3}$ ۲) $-10\sqrt{3}$ ۳) -10 ۴) -20

پاسخ: *به علت وجود اصطکاک، انرژی مکانیکی جسم پایسته نیست و تغییر می‌کند.*



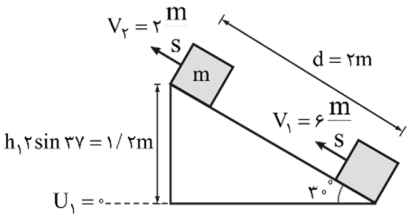
$$W_{f_k}=E_2-E_1=(k_2+U_2)-(k_1+U_1)$$
$$\Rightarrow W_{f_k}=(k_2-k_1)+(U_2-U_1)=(0-0)+(0-U_1)=-U_1$$
$$\Rightarrow W_{f_k}=-mgh_1=-2\times20\times1\Rightarrow W_{f_k}=-20J$$

گزینه ۴ صحیح است.

مثال ۹۰: جسمی به جرم $1kg$ با تندی اولیه $6\frac{m}{s}$ از پایین سطح شیب‌داری که با افق زاویه‌ی 37° می‌سازد، به طرف بالا پرتاب می‌شود. هنگامی که جسم روی سطح شیب‌دار ۲ متر را رو به بالا طی می‌کند، تندیش به $2\frac{m}{s}$ می‌رسد. انرژی مکانیکی جسم در این جابه‌جایی چند ژول کاهش می‌یابد؟ $(\sin37^\circ=0/6$ و $g=10\frac{m}{s^2}$ از مقاومت هوا صرف‌نظر شود.) (سراسری تجربی ۹۴)

۱) ۴ ۲) ۶ ۳) ۸ ۴) ۱۶

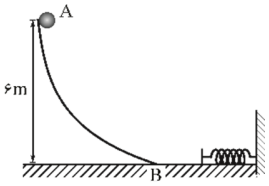
پاسخ:



$$E_1=k_1+U_1=\frac{1}{2}mV_1^2+0=\frac{1}{2}mV_1^2\Rightarrow E_1=\frac{1}{2}\times1\times6^2\Rightarrow E_1=18J$$
$$E_2=k_2+U_2=\frac{1}{2}mV_2^2+U_2\Rightarrow E_2=\frac{1}{2}\times1\times2^2+1\times10\times1/2\Rightarrow E_2=14J$$
$$\Delta E=E_2-E_1=14-18\Rightarrow\Delta E=-4J$$

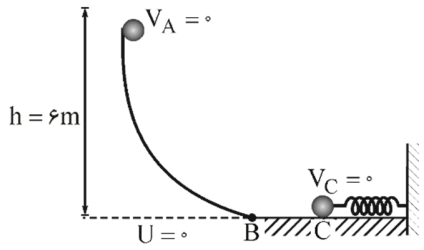
پس انرژی مکانیکی به اندازه‌ی $4J$ کاهش می‌یابد.
گزینه ۱ صحیح است.

مثال ۹۱: گلوله‌ای به جرم ۲۰۰ گرم از نقطه‌ی A رها می‌شود و پس از برخورد به فنری در سطح افقی آن را متراکم می‌کند. اگر کار نیروی اصطکاک در مسیر AB برابر $-2J$ باشد و سطح افقی بدون اصطکاک باشد حداکثر انرژی پتانسیل کشسانی فنر چند ژول خواهد شد؟ $(g=10m/s^2)$ (سراسری تجربی ۸۶)



۱) ۱ ۲) ۸
۳) ۱۰ ۴) ۱۲

پاسخ: *حداکثر انرژی پتانسیل کشسانی فنر زمانی حاصل می‌شود که جسم در برخورد با فنر، آن را حداکثر متراکم کند یعنی تا نقطه‌ای (C) که تندی آن صفر شده و متوقف شود. با توجه به وجود اصطکاک انرژی مکانیکی گلوله پایسته نمی‌ماند.*



$$E_A = k_A + U_A = ۰ + mgh \Rightarrow E_A = mgh$$
$$E_C = k_C + U_C + (U_{\text{فنر}})_{max} = ۰ + ۰ + (U_{\text{فنر}})_{max}$$
$$W_{f_k} = E_C - E_A$$
$$\Rightarrow -۲ = (U_{\text{فنر}})_{max} - ۲۰۰ \times ۱۰^{-۳} \times ۱۰ \times ۶$$
$$\Rightarrow (U_{\text{فنر}})_{max} = ۱۰J$$

گزینه ۳ صحیح است.

توان

توان کمیتی است نرده‌ای و به صورت آهنگ انجام کار (یا کار انجام شده در واحد زمان) تعریف می‌شود. هنگامی که کار (W) در بازه‌ی زمانی Δt انجام می‌شود، کار انجام شده در واحد زمان یا توان متوسط (P_{avg}) به صورت زیر بیان می‌شود:

$$P_{avg} = \frac{W}{\Delta t} \begin{cases} W : (J) & \text{کار انجام شده بر حسب ژول} \\ \Delta t : (s) & \text{بازه‌ی زمانی انجام کار بر حسب ثانیه} \\ P_{avg} : (W) & \text{توان بر حسب ژول بر ثانیه یا وات} \end{cases}$$

نکته: یکای توان در SI، وات (W) است و مطابق تعریف آن، یک وات برابر است با یک ژول بر ثانیه $(۱W = \frac{۱J}{۱s})$ یکاهای بزرگ‌تر مانند کیلووات (kW) و مگاوات (MW) نیز مرسوم است.

$$۱kW = ۱۰^{۳} W$$
$$۱MW = ۱۰^{۶} W$$

تذکر: یکای رایج و متداول برای توان خودرو اسب بخار است $(horse\ power = hp)$ و هر اسب بخار برابر با ۷۴۶ وات است.

تذکر: در فیزیک، سریع انجام گرفتن کار بر حسب توان توصیف می‌شود، بنابراین توان یک ماشین معیاری برای توصیف کندتر یا سریع‌تر انجام گرفتن یک کار است.

▼ مثال ۹۲: نیوتن متر بر ثانیه معادل با واحد کدام کمیت فیزیکی است؟ (مرتبط با صفحه ۵۱ کتاب درسی)

۱) انرژی ۲) کار ۳) توان ٤) شتاب

☑**پاسخ:** طبق رابطه‌ی $W = Fd$، یک نیوتن متر معادل یک ژول است. بنابراین داریم:

$$۱\frac{N.m}{s} = ۱\frac{J}{s} = ۱W$$

که وات واحد توان است.

گزینه ۳ صحیح است.

مثال ۹۳: اتومبیلی به جرم $900kg$ در یک جاده‌ی افقی روی خط راست از حال سکون شروع به حرکت می‌کند و پس از $10s$ تندی آن به $72\frac{km}{h}$ می‌رسد. توان متوسط اتومبیل چند کیلووات است؟ (نیروی مقاوم در مقابل حرکت اتومبیل را نادیده بگیرید.) (سراسری ریاضی ۸۱)

۱) ۹ ۲) ۱۸ ۳) ۳۰ ۴) ۳۶

پاسخ: چون نیروی مقاوم ناچیز است تنها نیروی موتور اتومبیل (F) کار انجام می‌دهد بنابراین طبق قضیه‌ی کار- انرژی جنبشی داریم:

$$W_t = \Delta k \Rightarrow W_F = \frac{1}{2}mV_2^2 - \frac{1}{2}mV_1^2 = \frac{1}{2}m(V_2^2 - V_1^2)$$

$$\Rightarrow W_F = \frac{1}{2}\times 900\left[(\frac{72}{3/6})^2 - 0\right] \Rightarrow W_F = 18\times 10^4 J$$

$$P = \frac{W_F}{t} = \frac{18\times 10^4}{10} \Rightarrow P = 18000W = 18kW$$

گزینه ۲ صحیح است.

مثال ۹۴: جرم یک آسانسور با محتویات آن $600kg$ است و با سرعت ثابت در ۵ دقیقه، $40m$ بالا می‌رود. توان متوسط موتور آن را حساب کنید. $(g = 10\frac{m}{s^2})$ (سراسری- غیردولتی کمال- ۹۱)

پاسخ: به آسانسور در حال حرکت رو به بالا دو نیرو وارد می‌شود: یکی نیروی وزن (mg) به سمت پایین و دیگری نیروی موتور به سمت بالا F، بنابراین ابتدا با استفاده از قضیه کار و انرژی $W_t = \Delta K$، کار نیروی موتور آسانسور W_F را محاسبه کرده و سپس با توجه به رابطه‌ی $\overline{P} = \frac{W_F}{\Delta t}$ توان موتور آسانسور را به دست می‌آوریم.

کار نیروی وزن در حین بالا رفتن آسانسور : $W_{mg} = -mgd \Rightarrow W_{mg} = -600\times 10\times 40 \Rightarrow W_{mg} = -240000J$

کار نیروی موتور آسانسور : W_F

بنابراین طبق قضیه‌ی کار و انرژی داریم:

$$W_t = \Delta K \Rightarrow W_F + W_{mg} = \Delta K$$

با توجه به اینکه سرعت ثابت است بنابراین تغییرات انرژی جنبشی $\Delta K = 0$ است لذا خواهیم داشت:

$$W_F + W_{mg} = 0 \Rightarrow W_F = -W_{mg} \Rightarrow W_F = -(-240000) \Rightarrow W_F = 240000J$$

بنابراین توان متوسط موتور آسانسور برابر است با:

$$\overline{P} = \frac{W_F}{\Delta t} \Rightarrow \overline{P} = \frac{240000}{300} \Rightarrow \overline{P} = 800w$$

مثال ۹۵: یک پمپ الکتریکی در هر دقیقه ۱۲۰۰ کیلوگرم آب را به سطحی به ارتفاع ۵۰ متر می‌رساند. توان پمپ چند وات است؟ $(g = 10N/kg)$ (سراسری تجربی ۷۶)

۱) 10^3 ۲) 10^4 ۳) ۲۴۰ ۴) ۲۴۰۰

پاسخ: کاری که پمپ انجام می‌دهد صرف غلبه بر نیروی وزن آب می‌شود:

$$P = \frac{W}{t} = \frac{mgh}{t} = \frac{1200\times 10\times 50}{60} \Rightarrow P = 10^4 W$$

گزینه ۲ صحیح است.

▼ مثال ۹۶: کوهنوردی که جرمش ۶۰ کیلوگرم است در مدت ۲۰ دقیقه از دامنه‌ی کوهی بالا می‌رود. اگر اختلاف ارتفاع دو نقطه‌ی شروع و پایان حرکت او ۵۰۰ متر باشد، توان متوسط وی در غلبه بر نیروی وزنش چند وات است؟ $(g = ۱۰N/kg)$ (آزاد ریاضی ۷۵)

۱) ۱۵۰۰ ۲) ۱۲۰۰ ۳) ۲۵۰ ۴) ۱۵۰

☑پاسخ: کاری که کوهنورد انجام می‌دهد برای غلبه بر نیروی وزن‌اش است.

$$P_{\text{شخص}} = \frac{W_{\text{شخص}}}{t} = \frac{mgh}{t} = \frac{۶۰\times۱۰\times۵۰۰}{۲۰\times۶۰} \Rightarrow P_{\text{شخص}} = ۲۵۰W$$

گزینه ۳ صحیح است.

▼ مثال ۹۷: شخصی به جرم ۷۵ کیلوگرم از طریق پلکان یک ساختمان ۵ طبقه که ارتفاع هر طبقه‌ی آن ۳ متر است، در مدت ۲۰ ثانیه از طبقه‌ی همکف به طبقه‌ی آخر ساختمان می‌رسد، توان متوسط این شخص چند کیلووات است؟ $(g = ۱۰N/kg)$ (سراسری تجربی ۷۴)

۱) ۰/۵۶۲ ۲) ۵/۶۲ ۳) ۵۶/۲ ۴) ۵۶۲

☑پاسخ: کاری که شخص انجام می‌دهد صرف غلبه بر نیروی وزن آن می‌شود:

$$P_{\text{شخص}} = \frac{W_{\text{شخص}}}{t} = \frac{mgh}{t} = \frac{۷۵\times۱۰\times۵\times۳}{۲۰} = ۵۶۲/۵W = ۰/۵۶۲kW$$

گزینه ۱ صحیح است.

▼ مثال ۹۸: پمپ یک ماشین آتش‌نشانی در هر یک دقیقه ۷۵ کیلوگرم آب را با تندی ۲۰ متر بر ثانیه از دهانه‌ی لوله‌ای به خارج می‌فرستد. توان مفید پمپ بر حسب کیلووات برابر است با: (سراسری تجربی ۷۶)

۱) ۰/۲۵ ۲) ۱/۵۰ ۳) ۲/۵۰ ۴) ۳/۰۰

☑پاسخ: تغییرات انرژی جنبشی آب هنگام خروج از دهانه لوله پمپ آتش‌نشانی نتیجه کار پمپ است.

$$W_{\text{پمپ}} = \Delta k_{\text{آب}} = \frac{۱}{۲}mV^۲ \Rightarrow W_{\text{پمپ}} = \frac{۱}{۲}\times۷۵\times۲۰^۲ \Rightarrow W_{\text{پمپ}} = ۱۵۰۰۰J$$

$$P_{\text{پمپ}} = \frac{W_{\text{پمپ}}}{t} = \frac{۱۵۰۰۰}{۶۰} \Rightarrow P_{\text{پمپ}} = ۲۵۰W = ۰/۲۵kW$$

گزینه ۱ صحیح است.

نکته: اگر یک متحرک با تندی ثابت V در یک مسیر مستقیم حرکت کند، توان نیروی ثابت F که بر این متحرک وارد می‌شود برابر است با:

$$\begin{cases} W = Fd\cos\alpha \\ d = Vt \end{cases} \Rightarrow P = \frac{W}{t} = \frac{FVt\cos\theta}{t} \Rightarrow P = FV\cos\theta$$

که θ زاویه‌ی بین نیروی F و جهت حرکت متحرک است.

مثال ۹۹: آسانسوری با تندی ثابت، ۱۰ نفر مسافر را در مدت ۳ دقیقه به اندازه‌ی ۸۰ متر در راستای قائم بالا می‌برد. اگر جرم متوسط هر مسافر $80kg$ و جرم آسانسور $1000kg$ باشد، توان متوسط موتور آسانسور چند کیلووات است؟ $(g=10\frac{N}{kg})$ (مکمل مثال ۲-۱۶ کتاب درسی)

پاسخ: چون تندی ثابت است پس نیرویی که آسانسور باید وارد کند برابر وزن آسانسور و مسافران داخل آن است.

$$\begin{cases} P=FV\cos\theta=mgV\cos 0 \\ V=\frac{h}{t}=\frac{80}{3\times 60}=\frac{4}{9}\frac{m}{s} \end{cases}$$

$$\Rightarrow P=(80\times 10+1000)\times 10\times\frac{4}{9}=8000W\Rightarrow P=8kW$$

مثال ۱۰۰: هر یک از دو موتور جت یک هواپیمای مسافربری بوئینگ ۷۶۷، پیشرانه‌ای (نیرویی که به هواپیما به طرف جلو وارد می‌شود) برابر $3/73\times10^5N$ ایجاد می‌کند. اگر هواپیما در هر دقیقه $8/22km$ در امتداد پیشرانه حرکت کند، توان متوسط هر یک از موتورهای هواپیما چند اسب بخار است؟ (فهد را بیازمایید ۳-۱۶ کتاب درسی)

۱) $68/5hP$
۲) $6850hP$
۳) $68500hP$
۴) $685000hP$

پاسخ:

$$d=V.t\Rightarrow V=\frac{d}{t}=\frac{8/22\times10^3}{60}=137\frac{m}{s}$$

$$\begin{cases} P=FV\cos\theta=FV\cos 0=FV=3/73\times10^5\times137\Rightarrow P=511/01\times10^5W \\ \theta=0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow P=511/01\times10^5W\xrightarrow{(hP)_{\text{هر اسب بخار}}=746W}P=6850hP$$

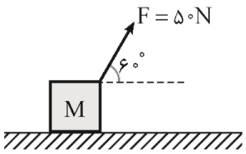
گزینه ۳ صحیح است.

مثال ۱۰۱: یک موتور الکتریکی جسمی به جرم ۲۰۰ کیلوگرم را در مدت ۵۰ ثانیه در راستای قائم با تندی ثابت ۱۲ متر بر ثانیه بالا می‌برد. توان این موتور چند کیلووات است؟ $(g=10\frac{N}{kg})$ (آزاد غیربهداشتی ۸۹ و آزاد ریاضی ۸۴)

پاسخ: چون تندی ثابت است، برای این کار باید نیرویی برابر با mg از طرف موتور بر جسم وارد شود و همچنین توان متوسط با توان لحظه‌ای و تندی متوسط با تندی لحظه‌ای یکی است:

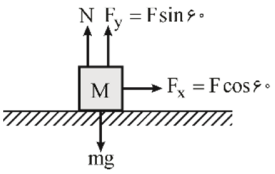
$$\begin{cases} \theta=0 \\ \bar{P}=\bar{F}V\cos\theta\Rightarrow P=mgV\cos 0=200\times10\times12=24000W\Rightarrow P=24kW \end{cases}$$

▼ **مثال ۱۰۲:** در شکل زیر، وزنه‌ی M که اصطکاک آن با سطح ناچیز است، از حال سکون به حرکت درمی‌آید و در مدت ۵ ثانیه ۱۰ متر روی سطح افقی جابه‌جا می‌شود. متوسط توان مفید چند وات است؟ (آزاد پزشکی ۸۶)



۱) $۵۰\sqrt{۳}$
۲) $۲۵\sqrt{۳}$
۳) ۵۰
۴) ۲۵

☑**پاسخ:**



$$\overline{V}=\frac{\Delta x}{\Delta t}=\frac{۱۰}{۵}=۲\frac{m}{s}\Rightarrow \overline{P}=F\overline{V}\cos\theta\Rightarrow \overline{P}=۵۰\times۲\times\cos۶۰\Rightarrow \overline{P}=۵۰W$$

گزینه ۳ صحیح است.

بازده:

هر سامانه‌ای فقط بخشی از انرژی ورودی (انرژی مصرفی سامانه) را به انرژی مورد نظر ما تبدیل می‌کند. بنابراین تنها بخشی از انرژی ورودی قابل استفاده است که به آن انرژی خروجی یا کار مفید گفته می‌شود، نسبت انرژی خروجی به انرژی ورودی را بازده می‌نامیم.

$$\text{بازده بر حسب درصد} = \frac{\text{انرژی خروجی}}{\text{انرژی ورودی}} \times ۱۰۰$$

تذکر: معمولاً بازده هر سامانه را بر حسب درصد بیان می‌کنند که همواره عددی کوچک‌تر از ۱۰۰ است.

نکته: بازده را به صورت نسبت توان مفید به کل کار یا توان ورودی نیز تعریف می‌کنند.

$$\text{بازده بر حسب درصد} = \frac{P_{\text{مفید}}}{P_{\text{کل}}} = \frac{P_{\text{خروجی}}}{P_{\text{ورودی}}} \times ۱۰۰$$

نکته: کار یا توان تلف شده از روابط زیر به دست می‌آیند:

$$W_{\text{تلف شده}} = W_{\text{کل}} - W_{\text{مفید}}$$
$$P_{\text{تلف شده}} = P_{\text{کل}} - P_{\text{مفید}}$$

نکته: بازده را می‌توان به صورت‌های زیر نیز بیان کرد:

$$\text{بازده بر حسب درصد} = \frac{W_{\text{کل}} - W_{\text{تلف}}}{W_{\text{کل}}} \times ۱۰۰ = (۱ - \frac{W_{\text{تلف}}}{W_{\text{کل}}}) \times ۱۰۰ = \frac{W_{\text{مفید}}}{W_{\text{مفید}} + W_{\text{تلف}}} \times ۱۰۰$$

$$\text{بازده بر حسب درصد} = \frac{P_{\text{کل}} - P_{\text{تلف}}}{P_{\text{کل}}} \times ۱۰۰ = (۱ - \frac{P_{\text{تلف}}}{P_{\text{کل}}}) \times ۱۰۰ = \frac{P_{\text{مفید}}}{P_{\text{مفید}} + P_{\text{تلف}}} \times ۱۰۰$$

مثال ۱۰۳: توان مصرفی یک موتور الکتریکی ۴۰۰ وات و بازده آن ۷۵٪ است. در هر دقیقه چند کیلوژول انرژی الکتریکی در آن به انرژی گرمایی تبدیل می‌شود؟ (سراسری ریاضی ۷۳)

۱) ۱/۴۴ ۲) ۴ ۳) ۴/۳۲ ۴) ۶

پاسخ:

$$\text{بازده} = \frac{\text{انرژی خروجی (مفید)}}{\text{انرژی تولیدی (کل)}} = \frac{E_{\text{مفید}}}{E_{\text{تولیدی}}}$$

$$E_{\text{تولیدی}} = P_{\text{تولیدی}} \times t = ۴۰۰ \times ۶۰ \Rightarrow E_{\text{تولیدی}} = ۲۴۰۰۰J$$

$$\Rightarrow \frac{۷۵}{۱۰۰} = \frac{E_{\text{مفید}}}{۲۴۰۰} \Rightarrow E_{\text{مفید}} = ۱۸۰۰۰J$$

$$E_{\text{گرمایی}} = E_{\text{تولیدی}} - E_{\text{مفید}} = ۲۴۰۰۰ - ۱۸۰۰۰$$

$$\Rightarrow E_{\text{گرمایی}} = ۶۰۰۰J \Rightarrow E_{\text{گرمایی}} = ۶kJ$$

گزینه ۴ صحیح است.

مثال ۱۰۴: توان یک تلمبه‌ی برقی ۲ کیلووات و بازده آن ۹۵٪ است. این تلمبه در هر دقیقه چند کیلوگرم آب را از عمق ۹/۵ متر بالا می‌آورد؟ $(g = ۱۰ m/s^۲)$ (سراسری تجربی ۷۳)

۱) $۱/۲ \times ۱۰^۴$ ۲) $۱/۲ \times ۱۰^۳$ ۳) ۲۰۰ ۴) ۲۰

پاسخ:

$$\text{بازده} = \frac{P_{\text{مفید}}}{P_{\text{کل}}} \Rightarrow ۰/۹۵ = \frac{P_{\text{مفید}}}{۲ \times ۱۰^۳} \Rightarrow P_{\text{مفید}} = ۱۹۰۰W$$

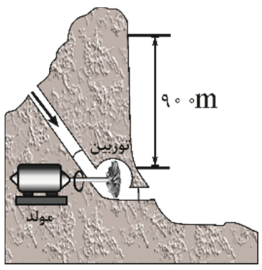
کاری که تلمبه برقی انجام می‌دهد صرف غلبه بر کار نیروی وزن می‌شود.

در بالا رفتن: $W_{mg} = -mgh \Rightarrow W_{\text{تلمبه}} = mgh = m \times ۱۰ \times ۹/۵ \Rightarrow W_{\text{تلمبه}} = ۹۵m$

$$P_{\text{مفید}} = \frac{W_{\text{تلمبه}}}{t} \Rightarrow ۱۹۰۰ = \frac{۹۵m}{۶۰} \Rightarrow m = ۱۲۰۰kg \Rightarrow ۱/۲ \times ۱۰^۳ kg$$

گزینه ۲ صحیح است.

مثال ۱۰۵: آب ذخیره شده در پشت سد یک نیروگاه برق آبی، از ارتفاع ۹۰/۰ متری روی پره‌های توربینی می‌ریزد و آن را می‌چرخاند. با چرخش توربین، مولد می‌چرخد و انرژی الکتریکی تولید می‌شود (شکل روبه‌رو). اگر ۸۵/۰ درصد کار نیروی گرانش به انرژی مکانیکی تبدیل شود، در هر ثانیه چند متر مکعب آب باید روی توربین بریزد تا توان الکتریکی خروجی مولد نیروگاه ۲۰۰MW برسد، جرم هر متر مکعب آب را $۱/۰۰ \times ۱۰^۳ kg$ در نظر بگیرید. (مشابه تمرین ۲-۱۷ کتاب درسی)



پاسخ:

کار نیروی وزن در پایین آمدن: $W_{mg} = mgh = m \times ۱۰ \times ۹۰ \Rightarrow W_{mg} = ۹۰۰m$

توان ورودی به مولد $P_{کل} = \frac{W_{mg}}{t} = \frac{۹۰۰m}{۱} \Rightarrow P_{کل} = ۹۰۰m$

$$بازده = \frac{P_{ورودی}}{P_{کل}} \Rightarrow \frac{۸۵}{۱۰۰} = \frac{۲۰۰\times۱۰^{۶}}{۹۰۰m} \Rightarrow m = \frac{۲۰۰\times۱۰^{۶}}{۹\times۸۵} = ۲۶۱۴۳۷/۹kg$$

با توجه به این که جرم هر متر مکعب آب را برابر $۱۰^{۳}$ در نظر گرفتیم بنابراین داریم:

$$حجم\ آب\ بر\ حسب\ m^{۳} = \frac{۲۶۱۴۳۷/۹}{۱۰^{۳}} = ۲۶۱/۴m^{۳}$$

▼ مثال ۱۰۶: مولد A نسبت به مولد B دارای توان کم‌تر ولی بازده بیش‌تر است. این بدان معنی است که مولد A نسبت به مولد B با مقدار سوخت مساوی کار ..... انجام می‌دهد. **(سراسری ریاضی ۷۶)**

۱)بیش‌تر و در زمان بیش‌تر
۲)بیش‌تر و در زمان کم‌تر
۳)کم‌تر و در زمان کم‌تر
۴)کم‌تر و در زمان بیش‌تر

☑پاسخ:

$$بازده = \frac{P_{خروجی}}{P_{ورودی}} = \frac{W_{خروجی}}{W_{ورودی}} \xrightarrow[(A\ بازده‌ی) > (B\ بازده‌ی)]{(W_{ورودی})_A = (W_{ورودی})_B} \Longrightarrow (W_{خروجی})_A < (W_{خروجی})_B$$

از طرفی چون توان مولد A کم‌تر از مولد B است، مولد A برای انجام یک کار مشخص، زمان بیش‌تری باید صرف کند.

گزینه ۳ صحیح است.

آزمون

۱- شهاب سنگی به جرم $۴\times۱۰^{۶}\,kg$ و تندی $۱۵\frac{km}{s}$ وارد جو زمین می‌شود، اگر این شهاب سنگ تقریباً با همین تندی به زمین برخورد کند، انرژی جنبشی آن چند برابر انرژی آزاد شده به‌وسیله‌ی یک تن TNT است؟ (انرژی آزاد شده هر تن TNT برابر $۴/۸\times۱۰^{۹}$ ژول است.)

(مشابه پرسش و مسئله ۲ کتاب درسی)

۱) ۴۵۰۰۰۰ ۲) ۸۳۷۵۰ ۳) ۹۳۷۵۰ ۴) ۱۰۰۰۰۰

۲- اگر تندی اتومبیلی ۲۰ درصد افزایش یابد، انرژی جنبشی آن چند درصد افزایش می‌یابد؟

(آزمون کانون- چهارم ریاضی- ۲۲ اسفند ۹۳)

۱) ۲۰ ۲) ۴۰ ۳) ۴۴ ۴) ۱۴۴

۳- یک قایق به جرم ۵۰۰kg روی یک دریاچه بدون اصطکاک ساکن است. در لحظه‌ای که بادی ناگهانی با نیروی ثابت $\vec{F}$ به قایق شتابی به بزرگی $۴۰\frac{m}{s^{۲}}$ می‌دهد، این قایق در جهت نیرو به اندازه‌ی $۸m$ جابه‌جا می‌شود. کار انجام شده توسط نیروی $\vec{F}$ چند ژول است؟

(مسئله ۱۳ کتاب درسی)

۱) ۱۶۰۰۰۰۰ ۲) ۱۶۰۰۰۰ ۳) ۱۶۰۰۰ ۴) ۱۶۰۰

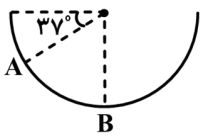
۴- صندوقی به جرم ۵۰kg با تندی ثابت $۱\frac{m}{s}$ توسط یک نیروی افقی روی کف اتاق کشیده می‌شود. اگر نیروی اصطکاک در مقابل حرکت ۲۰۰ نیوتن باشد، مقدار گرمایی که در هر متر جابه‌جایی جسم در اثر اصطکاک تولید می‌شود چند ژول است؟ $(g=۱۰\frac{m}{s^{۲}})$ (فرض می‌کنیم کار نیروی اصطکاک تماماً به گرما تبدیل می‌شود.)

(مکمل مثال ۲-۲ کتاب درسی)

۱) ۲۰ ۲) ۲۰۰ ۳) ۱۰ ۴) ۱۰۰

۵- جسم m به جرم ۱۰۰g درون نیم‌کره صیقلی به قطر ۶۰ سانتی‌متر به پایین می‌لغزد. کار نیروی وزن جسم از A تا B چند ژول است؟ $(g=۱۰m/s^{۲}\ ,\ \sin ۳۷^{\circ}=۰/۶)$

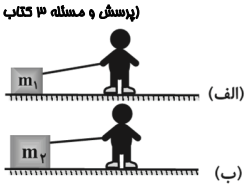
(سراسری تجربی ۷۸)



۱) ۰/۱۲ ۲) ۰/۱۸ ۳) ۱/۲ ۴) ۱/۸

۶- شکل‌های الف و ب دو جسم به جرم‌های $m_{۱}=m$ و $m_{۲}=۲m$ را نشان می‌دهند که بر روی یک سطح افقی بدون اصطکاک در حالت سکون قرار گرفته‌اند اگر کار انجام شده در هر دو حالت یکسان باشد، تندی نهایی این دو جسم در کدام گزینه به‌درستی مقایسه شده است؟

(پرسش و مسئله ۳ کتاب درسی)



۱) $V_{۱}>V_{۲}$ ۲) $V_{۲}>V_{۱}$ ۳) $V_{۱}=V_{۲}$ ۴) هر سه حالت می‌توان اتفاق بیافتد.

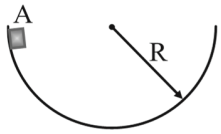
۷- چتربازی که مجموع جرم او و چترش ۱۴۰kg است، از ارتفاع ۶۰۰ متری سطح زمین با تندی ثابت سقوط می‌کند. کار نیروی مقاومت هوا بر روی چتر و شخص از لحظه‌ی سقوط تا لحظه‌ای که به سطح زمین می‌رسد، چند کیلوژول می‌باشد؟ $(g=10\frac{N}{kg})$

(آزمون کانون- چهارم تجربی- ۲۲ اسفند ۹۳)

۱) ۶۴۰ ۲) -۶۴۰ ۳) ۸۴۰ ۴) -۸۴۰

۸- جسمی درون سطح نیم‌کره‌ای مطابق شکل، از نقطه‌ی A رها می‌شود و بعد از چند حرکت رفت و برگشت لغزشی، روی سطح در پایین سطح می‌ایستد. نسبت کار نیروی اصطکاک به کار نیروی جاذبه‌ی زمین کدام است؟

(سراسری ریاضی ۷۹)



۱) -۲

۲) -۱

۳) ۱

۴) ۲

۹- یک جسم به‌وسیله جرثقیل به‌آرامی و با تندی ثابت، از سطح زمین تا ارتفاع معین بالا برده می‌شود، در این عمل:

(مشابه تمرین ۶-۱۲ کتاب درسی)

۱) کار انجام شده صرف تغییر انرژی جنبشی جسم می‌شود.

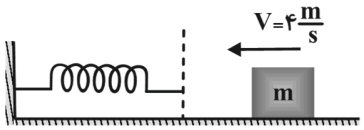
۲) کار انجام شده به‌صورت انرژی پتانسیل در جسم ذخیره می‌شود.

۳) انرژی جنبشی به انرژی پتانسیل تبدیل می‌شود.

۴) انرژی پتانسیل جسم کاهش می‌یابد.

۱۰- مطابق شکل، جسمی به جرم ۰/۵kg با تندی $4\frac{m}{s}$ روی سطح افقی بدون اصطکاکی می‌لغزد و پس از برخورد با فنری آن‌را فشرده می‌کند. وقتی جسم توسط فنر به‌طور لحظه‌ای متوقف می‌شود، تغییرات انرژی پتانسیل کشسانی فنر چند ژول است؟

(مشابه و مشابه مثال ۶-۱۲ کتاب درسی)

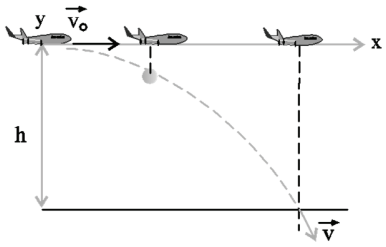


۱) ۴ ۲) -۴

۳) ۸ ۴) -۸

۱۱- در شکل زیر، هواپیمای بمب افکنی که در ارتفاع ۲۰۰ متری با تندی ۹۰۰ km/h به طور افقی پرواز می‌کند، بمبی را رها می‌کند. اگر از مقاومت هوا صرف نظر شود، اندازه‌ی تندی بمب در لحظه‌ی برخورد به زمین تقریباً چند متر بر ثانیه است؟ $(g=10\frac{N}{kg})$

(آزمون کانون ۹۱- چهارم ریاضی ۹۲)



۱) ۲۰۰

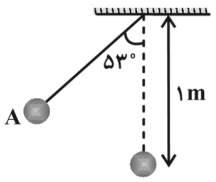
۲) ۲۲۰

۳) ۲۵۸

۴) ۳۲۰

۱۲- در شکل زیر، گلوله‌ی آونگ از نقطه‌ی A رها می‌شود و با تندی v از پایین‌ترین نقطه‌ی مسیر می‌گذرد. هنگامی که با تندی گلوله به $\frac{\sqrt{۲}}{۲}v$ می‌رسد، زاویه‌ی نخ با راستای قائم چند درجه است؟ (از مقاومت هوا صرف‌نظر شود، $g = ۱۰\frac{m}{s^۲}$ و $\cos ۵۳^\circ = ۰/۶$)

(سراسری ریاضی ۹۲)



۱) ۶۰
۲) ۴۵
۳) ۳۷
۴) ۳۰

۱۳- هواپیمای ایرباس A۳۲۰ به جرم $۸\times۱۰^۴ kg$ در امتداد باند هواپیما از حال سکون شروع به حرکت می‌کند و پس از گذشت ۲۰ ثانیه با تندی $۳۶۰\frac{km}{h}$ از روی باند به پرواز درمی‌آید، توان موتور این هواپیما چند مگاوات است؟

(مشابه با تمرین ۱۹ پایان فصل کتاب درسی)

۱) ۲۰ ۲) ۲۰۰ ۳) ۲۵/۹ ۴) ۲۵۹

۱۴- مصرف بنزین خودرویی که با تندی $۹۰\frac{km}{h}$ حرکت می‌کند، در هر ۱۰۰km، ۶ لیتر است. انرژی شیمیایی موجود در هر لیتر بنزین $۳/۵\times۱۰^۷ J$ است. ۶۵ درصد انرژی ناشی از سوختن بنزین در این خودرو از طریق اگزوز و دستگاه خنک‌کننده‌ی موتور مستقیماً به هوا داده می‌شود و ۱۵ درصد از انرژی در دستگاه تهویه، در دینام و در اثر اصطکاک بین اجزای موتور مصرف می‌شود. توان مفید این خودرو تقریباً چند اسب بخار است؟ ($۱hP = ۷۴۶ W$)

(متمم پرسش ۲۲ کتاب درسی)

۱) ۱۴ ۲) ۱۲ ۳) ۱۰ ۴) ۱۱

۱۵- یک ماشین برای بالا بردن یک جسم ۲ کیلوگرمی از سطح زمین به ارتفاع معین ۱۰۰ ژول انرژی مصرف کرده است. اگر جسم از این ارتفاع در شرایط خلاء سقوط کند و تندی آن هنگام رسیدن به زمین $۴\sqrt{۵} m/s$ باشد، بازده ماشین کدام است؟ ($g = ۱۰\frac{N}{kg}$)

(سراسری ریاضی ۷۶)

۱) ۰/۷ ۲) ۰/۷۵ ۳) ۰/۸ ۴) ۰/۸۵

پاسخنامه

۱- گزینه‌ی «۳»

$$\begin{cases} V = ۱۵\frac{km}{s} = ۱۵\times۱۰^{۳}\frac{m}{s} \\ K = \frac{۱}{۲}mV^{۲} = \frac{۱}{۲}\times۴\times۱۰^{۶}\times(۱۵\times۱۰^{۳})^{۲} \\ = ۴۵۰\times۱۰^{۱۲}\ J \end{cases}$$

$$\frac{\text{انرژی شهاب سنگ}}{\text{انرژی آزاد شده یک تن TNT}} = \frac{۴۵۰\times۱۰^{۱۲}}{۴/۸\times۱۰^{۹}} = ۹۳۷۵۰$$

۲- گزینه‌ی «۳»

$$V_۲ = V_۱ + \Delta V \Rightarrow V_۲ = V_۱ + \frac{۲۰}{۱۰۰}V_۱ = \frac{۶}{۵}V_۱$$

طبق رابطه‌ی انرژی جنبشی داریم:

$$\begin{cases} k = \frac{۱}{۲}mv^{۲} \\ m: \text{ثابت} \end{cases} \Rightarrow \frac{k_۲}{k_۱} = (\frac{V_۲}{V_۱})^{۲} \Rightarrow \frac{k_۲}{k_۱} = (\frac{\frac{۶}{۵}V_۱}{V_۱})^{۲} = \frac{۳۶}{۲۵}$$

$$\Rightarrow k_۲ = ۱/۴۴k_۱$$

درصد افزایش انرژی جنبشی: $\frac{k_۲ - k_۱}{k_۱}\times۱۰۰$

$$= \frac{۱/۴۴k_۱ - k_۱}{k_۱}\times۱۰۰ = ۴۴٪$$

۳- گزینه‌ی «۲»

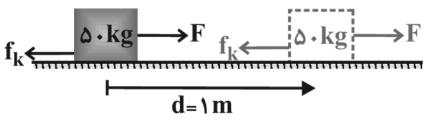
با استفاده از قانون دوم نیوتن برای محاسبه‌ی نیروی باد $(\vec{F})$ داریم:

$$F = ma = ۵۰۰\times۴۰ \Rightarrow F = ۲\times۱۰^{۴}\ N$$

چون نیرو و جابه‌جایی هم‌جهت‌اند بنابراین برای محاسبه کار نیروی F داریم:

$$W_F = Fd = ۲\times۱۰^{۴}\times۸ \Rightarrow W_F = ۱۶\times۱۰^{۴}\ J$$

۴- گزینه‌ی «۲»



$$\begin{cases} f_k \xleftarrow{\theta=180^\circ} d \\ W_{f_k} = f_k d\cos 180^\circ = 200\times 1\times(-1) \\ \Rightarrow W_{f_k} = -200\ J \end{cases}$$

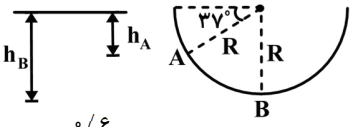
گرمای تولیدشده $= |W_f| = 200J$

۵- **گزینه‌ی «۱»**

کار نیروی وزن در پایین آمدن جسم برابر $W_{mg} = +mgh$ است که h اختلاف ارتفاع بین دو نقطه در جابه‌جایی است.

$$\begin{cases} h_A = R\sin 37 \\ h_B = R \end{cases} \Rightarrow h = R - R\sin 37$$

$$= R(1-\sin 37) = 0/4\ R$$



$$W_{mg} = mgh = 0/1\times 10\times 0/4\times(\frac{0/6}{2})$$

$$\Rightarrow W_{mg} = 0/12\ J$$

۶- **گزینه‌ی «۳»**

با توجه به این‌که کار انجام شده در هر دو حالت یکسان است، بنابراین طبق قضیه‌ی کار- انرژی جنبشی داریم:

$$W_t = \Delta K = (W_t)_{\text{الف}} = (W_t)_{\text{ب}}$$

$$\Rightarrow \Delta K_{\text{الف}} = \Delta K_{\text{ب}} \xrightarrow[(V_1)_{\text{ب}}=0]{(V_1)_{\text{الف}}=0} (V_2)_{\text{الف}} = (V_2)_{\text{ب}}$$

تندی نهایی هر دو یکسان است.

۷- **گزینه‌ی «۴»**

چترباز با تندی ثابت سقوط می‌کند پس تغییرات انرژی جنبشی آن صفر است از طرفی فقط نیروی وزن **(mg)** و نیروی مقاومت هوا **(R)** بر روی آن کار انجام می‌دهند پس طبق قضیه‌ی کار- انرژی جنبشی داریم:

$$W_{\text{برآیند}} = \Delta k \Rightarrow W_R + W_{mg} = 0$$

$$\Rightarrow W_R = -W_{mg} = -mgh = -140\times 10\times 600$$

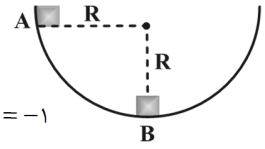
$$\Rightarrow W_R = -840\ kJ$$

۸- **گزینه‌ی «۲»**

در جابه‌جایی جسم از A تا B، نیروی وزن و اصطکاک کار انجام می‌دهند بنابراین طبق قضیه‌ی کار- انرژی جنبشی داریم:

$$W_{\text{برآیند}} = \Delta k \Rightarrow W_{mg} + W_{f_k} = k_B - k_A$$

$$\Rightarrow W_{mg} + W_{f_k} = 0-0 = 0$$



$$\Rightarrow W_{f_k} = -W_{mg} \Rightarrow \frac{W_{f_k}}{W_{mg}} = -1$$

۹- **گزینه‌ی «۲»**

چون تندی جسم تغییر نکرده، بنابراین انرژی جنبشی ثابت می‌ماند.

۱۰- **گزینه‌ی «۱»**

با توجه به نبود اصطکاک از لحظه‌ی برخورد جسم با فنر تا لحظه‌ی متوقف شدن آن $V_2 = 0$ ، فقط نیروی فنر بر روی جسم کار انجام می‌دهد بنابراین برای محاسبه‌ی کار نیروی فنر طبق قضیه‌ی کار- انرژی جنبشی داریم:

$$\begin{cases} V_1 = 4\ \frac{m}{s} \\ V_2 = 0 \Rightarrow k_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow W_t = \Delta k$$

$$\Rightarrow W_{\text{فنر}} = k_2 - k_1 = 0 - k_1 = -k_1$$

$$\Rightarrow W_{\text{فنر}} = -\frac{1}{2}mV_1^2 = -\frac{1}{2}\times 0/5 \times 4^2$$

$$\Rightarrow W_{\text{فنر}} = -4\ J$$

از طرفی تغییرات انرژی پتانسیل کشسانی سامانه جسم- فنر برابر منفی کار نیروی فنر بر روی جسم است:

$$\Delta U_{\text{فنر}} = -W_{\text{فنر}} \Rightarrow \Delta U = -(-4) \Rightarrow \Delta U = 4\ J$$

۱۱- **گزینه‌ی «۳»**

با توجه به این‌که از مقاومت هوا صرف‌نظر شده است پس انرژی مکانیکی بمب در طول مسیر پایسته است.

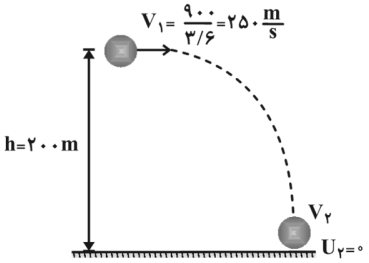
$$E_1 = E_2 \Rightarrow k_1 + U_1 = k_2 + U_2$$

$$\frac{1}{2}mV_1^2 + mgh = \frac{1}{2}mV_2^2 + 0$$

$$\Rightarrow V_2 = \sqrt{V_1^2 + 2gh}$$

$$= \sqrt{250^2 + 2\times 10\times 200}$$

$$\Rightarrow V_2 \simeq 258\ \frac{m}{s}$$



۱۲- **گزینه‌ی «۳»**

از مقاومت هوا صرف‌نظر شده است پس انرژی مکانیکی گلوله در مسیر پایسته است.

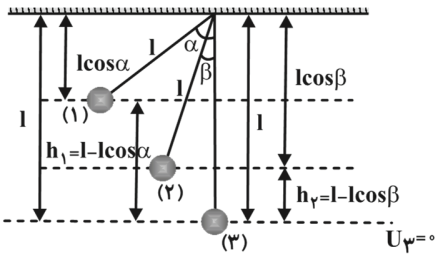
$$E_1 = E_2 \Rightarrow k_1 + U_1 = k_2 + U_2$$

$$0 + mgh_1 = \frac{1}{2}mV_2^2 + mgh_2$$

$$\Rightarrow V_2^2 = 2gh_1 - 2gh_2 = 2g(h_1 - h_2)$$

$$V_2^2 = 2g(l - l\cos\alpha - l + l\cos\beta)$$

$$\Rightarrow V_2 = \sqrt{2gl(\cos\beta - \cos\alpha)}$$



بنابراین اگر گلوله‌ای را به‌اندازه‌ی زاویه‌ی α از وضع تعادل خارج کرده، رها کنیم تندی آن در هر لحظه از رابطه‌ی بالا به‌دست می‌آید.

$$\begin{cases} \alpha = 53 \\ \beta = 0 \end{cases} \Rightarrow V_2 = V = \sqrt{2gl(\cos 0 - \cos 53)}$$

$$\Rightarrow V = \sqrt{2\times 10\times 1\times 0/4} \Rightarrow V = \sqrt{8l}$$

$$\begin{cases}\alpha = ۵۳^\circ \\ \beta = ? \\ V_۲ = \frac{\sqrt{۲}}{۲}V\end{cases} \Rightarrow V_۲ = \sqrt{۲gl(\cos\beta - \cos ۵۳^\circ)}$$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{۲}}{۲} \times \sqrt{۸l} = ۲\sqrt{l} = \sqrt{۲۰l(\cos\beta - ۰/۶)}$$

$$\Rightarrow ۴l = ۲۰l(\cos\beta - ۰/۶) \Rightarrow \cos\beta = ۰/۲ + ۰/۶ = ۰/۸$$

$$\Rightarrow \beta = ۳۷^\circ$$

۱۳- گزینه‌ی «۱»

طبق قضیه‌ی کار- انرژی جنبشی، کار انجام شده توسط موتور هواپیما برابر با تغییر انرژی جنبشی آن است، بنابراین داریم:

$$W_t = \Delta k = K_۲ - K_۱ = \frac{۱}{۲}mV_۲^۲ - \frac{۱}{۲}mV_۱^۲$$

$$= \frac{۱}{۲}m(V_۲^۲ - V_۱^۲)$$

$$\Rightarrow W_t = \frac{۱}{۲} \times ۸ \times ۱۰^۴ \times ((\frac{۳۶۰}{۳/۶})^۲ - ۰) = ۴۰۰ \times ۱۰^۶ \ J$$

بنابراین توان متوسط موتور برای انجام این کار برابر است با:

$$\bar{P} = \frac{W_t}{\Delta t} = \frac{۴۰۰ \times ۱۰^۶}{۲۰} \Rightarrow \bar{P} = ۲۰ \times ۱۰^۶ \ W$$

$$\Rightarrow \bar{P} = ۲۰mW$$

۱۴- گزینه‌ی «۱»

۲۰ درصد انرژی صرف راندن اتومبیل می‌شود:

$$(۱۰۰ - ۶۵ - ۱۵ = ۲۰)$$

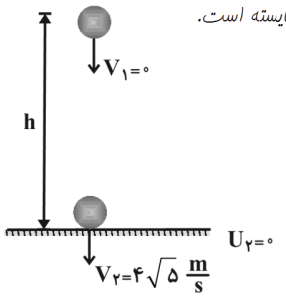
$$\text{انرژی مفید} = ۶lit \times ۳/۵ \times ۱۰^۷ \frac{J}{lit} \times \frac{۲۰}{۱۰۰} = ۴/۲ \times ۱۰^۷ \ J$$

$$\text{مدت زمان حرکت} : t = \frac{۱۰۰km}{۹۰\frac{km}{h}} = \frac{۱۰}{۹}h = \frac{۳۶۰۰۰}{۹}s \Rightarrow t = ۴۰۰۰s$$

$$\begin{cases}P = \frac{E}{t} = \frac{۴/۲ \times ۱۰^۷}{۴۰۰۰} = ۱۰۵۰۰ \ W = \frac{۱۰۵۰۰}{۷۴۶} \Rightarrow P \simeq ۱۴ \ hp \\ (hp) \text{ هر اسب بخار} = ۷۴۶ \ W \text{ (وات)}\end{cases}$$

۱۵- گزینه‌ی «۳»

چون جسم در شرایط خلأ سقوط کرده است بنابراین از مقاومت هوا صرف‌نظر شده و انرژی مکانیکی در طول مسیر پایسته است.



$$E_1 = E_2 \Rightarrow k_1 + U_1 = k_2 + U_2 \Rightarrow 0 + mgh = \frac{1}{2}mV_2^2 + 0$$

$$h = \frac{V_2^2}{2g} = \frac{(4\sqrt{5})^2}{2\times 10} \Rightarrow h = 4\ m$$

کاری که ماشین در بالا بردن جسم انجام می‌دهد (W') صرف غلبه بر کار نیروی وزن می‌شود:

$$W' = mgh = 2\times 10\times 4 \Rightarrow W' = 80\ J$$

از طرفی کل انرژی ماشین در انجام این کار $100\ J$ بوده است بنابراین داریم:

$$\text{بازده} = \frac{W'}{W} = \frac{80}{100} = 0/8$$