جزوه آمار و احتمال

مخصوص مهندسان صنایع

(براساس کتاب وحیدی اصل)

مهندسی صنایع در محیط دانشگاه

www.ieuni.ir

فهرست

۱- جدول توزیع فراوانی طبقه بندی نشده

از این جدول برای تنظیم داده های گسسته که تنوع داده ها اندک است استفاده می کنند و فراوانی هر داده در مقابل آن ثبت می شود.

مثال ۱. برای نمرات یک کلاس ۳۰ نفری داریم:

تعداد دانش آموزان= F_i	نمرات = X_i
۲	۸
۱	۱۰
۶	۱۲
۵	۱۳
۶	۱۷
۸	۱۹
۲	۲۰

۲- دامنه تغییرات

اختلاف بین بزرگترین داده آماری و کوچکترین داده آماری را دامنه تغییرات گویند.

$$R = X_{max} - X_{min}$$

چنانچه داده های آماری با تقریب کمتر از واحد گرد شده باشند دامنه تغییرات برابر است با:

$$R = X_{max} - X_{min} + 1$$

۳- شاخصهای مرکزی یا پارامترهای مکانی

۳-۱- میانگین حسابی(Mean)

الف- اگر داده‌ها تکراری نباشند

$$\overline{X} = \frac{\sum X_i}{n}$$

ب- اگر هر یک از داده ها تکراری باشند

$$\overline{X} = \frac{\sum F_i X_i}{N}$$

مثال۲. در جدول زیر مطلوبست میانگین حسابی: $\bar{X} = \frac{۶۵۴}{۵۰} = ۱۳/۰۸$

حدود طبقات	فراوانی	X_i (نماینده طبقات)	F_iX_i
۲-۴	۲	۳	۶
۵-۷	۳	۶	۱۸
۸-۱۰	۵	۹	۴۵
۱۱-۱۳	۱۰	۱۲	۱۲۰
۱۴-۱۶	۲۵	۱۵	۳۷۵
۱۷-۱۹	۵	۱۸	۹۰

$\sum F_i = ۵۰ \quad \sum F_i X_i = 654$

۳- ۲- میانه(Median)

عددی را که در یک مجموعه از اعداد مرتب شده آماری درست در وسط داده ها قرار گیرد، میانه گویند. برای تعیین میانه در یک سری داده های آماری ابتدا داده ها را به ترتیب صعودی یا نزولی مرتب می کنیم. در صورتیکه تعداد داده ها فرد باشد، عددی که در وسط قرار می گیرد عدد میانه بوده و اگر تعداد داده ها زوج باشد نصف مجموع دو عددی که در وسط قرار گرفته عدد میانه را مشخص می کند، میانه را با $\tilde{X}$ نشان می دهیم.

مثال۳.

۱۰,۱۲,۱۶,۱۴,۲۶,۵

۵,۱۰,۱۲,۱۴,۱۶,۲۶

$\tilde{X} = \frac{۱۲+۱۴}{۲} = ۱۳/۵$

۴,۷,۶,۹,۱,۵,۳

۱,۳,۴,۵,۶,۷,۹

$\tilde{X} = ۵$

الف - تعیین میانه در جدول توزیع فراوانی دسته بندی نشده (طبقه بندی نشده)

ابتدا، $\sum F_i$ را به دست آورده و N می نامیم. سپس اولین ردیفی را که فراوانی تجمعی آن بزرگتر یا مساوی $\frac{N}{۲}$ است را به عنوان ردیف میانه معین می‌کنیم. داده مربوط به این ردیف میانه خواهد بود.

مثال۴.

X_i	F_i	CF_i
۴	۳	۳
۶	۲	۵
۷	۴	۹
۱۰	۱	۱۰
۱۱	۳	۱۳
۱۶	۲	۱۵
۲۰	۱	۱۶

ردیف میانه← (ردیف سوم: ۷، ۴، ۹)

$N = \sum F_i = ۱۶$ $\qquad \frac{N}{۲} = ۸$ $\qquad \tilde{X} = ۷$

ب- تعیین میانه در جدول توزیع فراوانی طبقه بندی شده

در جدول توزیع فراوانی دسته بندی شده ابتدا مثل قبل ردیف میانه را مشخص کرده و سپس میانه را از فرمول زیر به دست می آوریم:

$$\tilde{X} = L + \frac{\frac{N}{2} - CF_{i-1}}{F_i} \times C$$

که در این فرمول

$\tilde{X}$= میانه

L= کوچکترین عدد طبقه میانه دار *(در صفات پیوسته کرانه پایین و در صفات گسسته حد پایین طبقه میانه دار)*

CF_{i-1} = فراوانی تجمعی طبقه ماقبل طبقه میانه دار

F_i= فراوانی طبقه میانه دار

C= فاصله طبقات جدول(۱+ حد پایین - حد بالا)

مثال۵. در جدول ذیل میانه را مشخص کنید.

الف – اگر داده‌ها پیوسته باشند.

$$\frac{N}{۲}=\frac{۵۰}{۲}=۲۵$$

$$\tilde{X}=\underline{۴۹/۵}+\frac{۲۵-۲۰}{۶}\times\underline{۵}=۵۳/۶۶$$

ب- اگر داده‌ها گسسته باشند.

$$\frac{N}{۲}=\frac{۵۰}{۲}=۲۵$$

$$\tilde{X}=۵۰+\frac{۲۵-۲۰}{۶}\times\underline{۵}=۵۴.۱۶۷$$

	F_i	FC_i
۴۰-۴۴	۱۲	۱۲
۴۵-۴۹	۸	۲۰
۵۰-۵۴	۶	۲۶
۵۵-۵۹	۱۰	۳۶
۶۰-۶۴	۴	۴۰
۶۵-۶۹	۱۰	۵۰

ردیف میانه←

نکته: اگر در ردیف فراوانی های تجمعی عدد $\frac{N}{۲}$ عیناًوجود داشته باشد آنگاه کرانه بالای طبقه میانه دار را میانه بدانید.

مثال۶.

	۲-۴	۵-۷	۸-۱۰	۱۱-۱۳	۱۴-۱۶	۱۷-۱۹
F_i	۲	۳	۵	۱۵	۲۰	۵
FC_i	۲	۵	۱۰	۲۵	۴۵	۵۰

طبقه میانه دار↑

$$\frac{N}{۲}=\frac{۵۰}{۲}=۲۵$$

$$\tilde{X}=۱۳/۵$$

نکته: اگر در یک جدول توزیع فراوانیهای طبقه بندی شده مربوط به صفات پیوسته، مجموع فراوانیهای طبقه ماقبل میانه دار برابر فراوانیهای طبقات ما بعد طبقه میانه‌دار باشد آنگاه نماینده طبقه میانه دار را میانه خواهیم دانست.

مثال۷. جدول زیر مربوط به اندازه قد دانشجویان یک کلاس می باشد. میانه را مشخص کنید.

	۱۰-۱۴	۱۵-۱۹	۲۰-۲۴	۲۵-۲۹	۳۰-۳۴	۳۵-۶۹
F_i	۴	۱۰	۶	۱۶	۱۲	۸
CF_i	۴	۱۴	۲۰	۳۶	۴۸	۵۶

طبقه میانه دار↑

$$\frac{N}{۲}=\frac{۵۶}{۲}=۲۸$$

$$\tilde{X} = \frac{25-29}{2} = 27 \Rightarrow$$

$= 4+10+6 = 20$ مجموع فراوانی های قبل از طبقه میانه دار

$= 12+8 = 20$ مجموع فراوانی های بعد از طبقه میانه دار

۳-۳- مد یا نما

در اعداد آماری، عددی که بیشترین تکرار (فراوانی) را داشته باشند، نما نامیده می شود. لذا یک نمونه آماری می تواند نما داشته باشد یا بیش از یک نما داشته باشد.

مثال۸.

۱,۱,۱,۲,۲,۲,۳,۴,۵,۵
Mode = ۱,۲
۱,۱,۱,۲,۲,۲,۳,۳,۳
مد ندارد

۱,۱,۲,۲,۲,۳,۴
Mode = ۲
۱,۲,۳,۴,۵,۶,۷
مد ندارد

- تعیین مد در جدول توزیع فراوانی های دسته بندی شده

ابتدا طبقه ای که بیشترین فراوانی را دارد به عنوان طبقه نمادار مشخص می کنیم و سپس مد را از رابطه زیر به دست می آوریم:

$$\text{Mode} = L + \frac{d_۱}{d_۱ + d_۲} \times C$$

که در آن

M= نما

$d_۱$= تفاضل فراوانی طبقه نمادار با فراوانی طبقه ما قبل

$d_۲$= تفاضل فراوانی طبقه نمادار با فراوانی طبقه ما بعد

C= فاصله طبقات

L= کوچکترین عدد طبقه نمادار (کرانه پایین)

مثال۹.

	۱۰-۱۹	۲۰-۲۹	۳۰-۳۹	۴۰-۴۹	۵۰-۵۹
F_i	۱۲	۱۷	۲۰	۴۰	۱۰

طبقه مد دار↑

$$\text{Mode} = ۳۹/۵ + \frac{۲۰}{۲۰+۳۰} \times ۱۰ = ۴۳/۵$$

نکته: اگر در جدول توزیع فراوانی ها فراوانی طبقات ماقبل و مابعد طبقه نمادار مساوی باشند، نماینده طبقه نمادار را نما بدانید.

فراوانی طبقه مابعد= فراوانی طبقه مابعد

مثال۱۰.

	۱۰-۱۲	۱۳-۱۵	۱۶-۱۸	۱۹-۲۱	۲۲-۲۴
F_i	۱۰	۱۲	۸	۱۶	۸

$$\text{Mode} = \frac{۱۹+۲۱}{۲} = ۲۰$$

طبقه نما دار↑

۳-۴- چارک ها(Quantile)

سه نوع چارک داریم: چارک اول ($Q_۱$)، چارک دوم ($Q_۲$) و چارک سوم ($Q_۳$)

الف- چارک اول: عددی که در یک مجموعه از داده های آماری مرتب شده، مرز ۲۵٪ داده ها را مشخص کند چارک اول است. بنابراین می توان ادعا کرد که ۲۵٪ داده ها از نقطه $Q_۱$ کوچکتر و ۷۵٪ داده ها از این نقطه بزرگتراند.

ب- چارک دوم: همان میانه است.

ج- چارک سوم: نقطه یا عددی که در یک مجموعه از اعداد مرتب شده آماری مرز ۷۵٪ داده ها را نشان دهد چارک سوم است. یعنی نقطه ای که ۷۵٪ داده ها از آن کوچکتر و ۲۵٪ داده از آن بزرگتراند.

۳-۴-۱- تعیین چارک اول و سوم در یک سری داده

ابتدا داده های آماری را به صورت صعودی از چپ به راست مرتب می کنیم. سپس اعداد را به ۲ نیم تقسیم می کنیم. میانه نیمه سمت چپ را چارک اول و میانه اعداد سمت راست را چارک سوم می نامند و خود میانه اعداد همان چارک دوم می باشد.

مثال ۱۱.

۱۴,۱۶,۱۲,۱۷,۲۰,۱۹,۱۷,۱۱,۱۰,۱۸

۱۰,۱۱,۱۲,۱۴, ۱۶,۱۷,۱۷ ,۱۸,۱۹,۲۰

$Q_1=۱۲$ $Q_2=۱۶/۵$ $Q_3=۱۸$

۷,۴,۲,۱,۳,۵,۶

۱,۲,۳ , ۴,۵ , ۶,۷

$Q_1=۲$ $Q_2=۴$ $Q_3=۶$

الف – تعیین چارک ها در جدول توزیع فراوانی طبقه بندی نشده

ابتدا فراوانی تجمعی را حساب می کنیم. سپس اولین طبقه ای که فراوانی تجمعی آن بیشتر از $\frac{N}{۴}$ است طبقه چارک اول و داده مربوط به آن چارک اول، سپس اولین طبقه ای که فراوانی تجمعی آن بیشتر از $\frac{N}{۲}$ است طبقه چارک دوم و داده مربوط به آن چارک دوم و اولین طبقه ای که فراوانی تجمعی آن $\frac{۳N}{۴}$ است طبقه چارک سوم و داده مربوط به آن چارک سوم است.

مثال ۱۲.

X_i	۸	۱۰	۱۵	۱۶	۲۰	۲۸	۴۰	۴۲
F_i	۳	۸	۷	۱۳	۱۲	۲۳	۲۴	۱۰
CF_i	۳	۱۱	۱۸	۳۱	۴۳	۶۶	۹۰	۱۰۰

طبقه چارک اول ↑ $Q_1=۱۶$

طبقه چارک دوم ↑ $Q_2=\tilde{X}=۲۸$

طبقه چارک سوم ↑ $Q_3=۴۰$

$N=۱۰۰ \quad \frac{N}{۴}=۲۵ \quad \frac{N}{۲}=۵۰ \quad \frac{۳N}{۴}=۷۵$

ب- تعیین چارک ها در جدول توزیع فراوانی طبقه بندی شده

برای تعیین چارک اول ابتدا اولین طبقه ای را که فراوانی تجمعی آن بیشتر از $\frac{N}{۴}$ است را به عنوان طبقه چارک اول تعیین کرده و چارک اول را از فرمول زیر به دست می آوریم:

$$Q_1=L+\frac{\frac{N}{۴}-CF_{i-1}}{F_i}\times C$$

چارک دوم را از تعریف میانه به دست می آوریم.

برای تعیین چارک سوم ابتدا اولین طبقه ای را که فراوانی تجمعی آن بیشتر از $\frac{۳N}{۴}$ است را به عنوان طبقه چارک سوم تعیین کرده و چارک سوم را از فرمول زیر به دست می آوریم:

اگر داده ها از نوع پیوسته بود L کرانه پایین طبقه چارک دار است. و اگر داده ها از نوع گسسته بود Lحد پایین طبقه چارک دار است.

$$Q_۳ = L + \frac{\frac{۳N}{۴} - CF_{i-۱}}{F_i} \times C$$

مثال۱۳.

	۱۰-۱۴	۱۵-۱۹	۲۰-۲۴	۲۵-۲۹	۳۰-۳۴	۳۵-۳۹
F_i	۲	۸	۶	۱۴	۷	۳
CF_i	۲	۱۰	۱۶	۳۰	۳۷	۴۰

طبقه چارک اول ↑ طبقه چارک دوم و سوم ↑

$Q_۱$=۱۹/۵ $Q_۳$=۲۹/۵

$$N = ۴۰ \quad \frac{N}{۴} = ۱۰ \quad \frac{N}{۲} = ۲۰ \quad \frac{۳N}{۴} = ۳۰$$

$$Q_۲ = \tilde{X} = ۲۴/۵ + \frac{۲۰-۱۶}{۱۴} \times ۵ = ۲۵/۹۲$$

نکته: چون $\frac{N}{۴}$=۱۰ دقیقًادر ستون فراوانی تجمعی می باشد لذا $Q_۱$ کرانه بالای طبقه چارک اول است.

همین نکته در مورد چارک سوم صدق می کند.

فهرست

۱- تعاریف

۱-۱- تعریف جامعه(Population)

جامعه مجموعه عناصر مورد مطالعه است که ممکن است تعداد آن محدود یا نامحـدود باشـد. مـثلاً جامعه متولدین در یک سال و یا قیمت یک کالا در طول زمان معین.

۱-۲- تعریف پارامتر(Parameter)

مقدار ثابتی مربوط به جامعه آماری است که معمولاًمورد علاقه بررسی کننده واقع مـی شـود. مـثلاً در مورد لامپ ها، متوسط طول عمر لامپ ها.

نکته: موقعی روش های آماری مفید است که پارامتر مجهول داشته باشیم.

مدل آمار

X	۰	۱	۲
P	$\theta/۲$	$۱-\theta$	$\theta/۲$

مـــــــدل

X	۰	۱	۲
P	$۱/۴$	$۱/۲$	$۱/۴$

۱-۳- تعریف نمونه(Sample)

در حالاتی که به جامعه دسترسی نداریم و یا به علت محدودیت در زمان و هزینه، بناچار مطالعـه و بررسی بر روی بخشی از جامعه به عنوان نمونه انجام می‌شود. نمونه باید به گونه‌ای باشد که معـرف جامعه اصلی بوده و نتایج حاصل از آن بتواند قابل تعمیم به جامعه برگرفته از آن باشد.

الف- نمونه تصادفی از جامعه متناهی بدون جاگذاری

در این حالت نمونه باید طوری انتخاب شود که احتمال انتخاب تمام نمونه‌های ممکـن برابـر باشـد.

مثلا اگر جامعه دارای N عضو است انتخاب هرنمونه nتایی با احتمال $\frac{1}{\binom{N}{n}}$ رخ می‌دهد.

تذکر: معمولا اگر در جریان انتخاب هیچ عاملی یا محدودیت و شرطی دخالت نکند نمونه تصادفی خواهد بود.

ب- نمونه تصادفی از جامعه نامتناهی(متناهی با جاگذاری)

مقدار هر متغیر که در نمونه تصادفی ظاهر می‌شود مربوط به یک متغیر تصادفی است و این متغیر دارای یک توزیع است.

۱-۴- اندازه نمونه(Sample Size)

تعداد افراد نمونه را حجم نمونه یا اندازه نمونه می نامند.

۱-۵- تعریف نمونه تصادفی(Random Sample)

متغیرهای تصادفی $x_1, x_2, \ldots, x_n$ تشکیل یک نمونه تصادفی به اندازه n می دهند اگر:

۱- هم توزیع باشند.

۲- از یکدیگر مستقل باشند.

۱-۶- توزیع نمونه

اگر $x_1, x_2, \ldots, x_n$ نشان دهنده نمونه‌ای به حجم n باشد بنا به تعریف، تابع توزیع توام $x_1, x_2, \ldots, x_n$ را تابع توزیع نمونه می نامند. لذا اگر $x_1, x_2, \ldots, x_n$ یک نمونه تصادفی به حجم n از جامعه $f_x(x)$ باشد در این صورت توزیع نمونه تصادفی $x_1, x_2, \ldots, x_n$ عبارتست از:

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = f_{X_1}(x_1) f_{X_2}(x_2) \ldots f_{X_n}(x_n) = \prod_{i=1}^{n} f_{X_i}(x_i) = [f_X(x)]^n$$

۱-۷- تعریف آماره

تابعی است از نمونه تصادفی قابل مشاهده که شامل پارامتر مجهولی نیست (به پارامترهای نامعلوم

بستگی ندارد) مثلاً در یک نمونه گیری به اندازه n، $\overline{X}$ ، S^2 و S همه آماره‌اند. در این ارتباط توزیع آماره‌ها را توزیع نمونه‌ای می‌گویند و استنباطهای آماری معمولا بر آماره‌ها متکی است.

۱-۸- میانگین نمونه

اگر $x_1, x_2, ..., x_n$ یک نمونه تصادفی از جامعه ای به حجم n باشد:

$$\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$$

۱-۹- گشتاور نمونه

فرض می کنیم $x_1, x_2, ..., x_n$ یک نمونه تصادفی از جامعه با تابع چگالی احتمال $f_x(x)$ باشند. در این صورت r مین گشتاور نمونه حول مبدا برابر است با:

$$M'_r = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^r$$

که در حالت خاص r=1، میانگین نمونه بدست می آید.

۱-۱۰- گشتاور r ام حول میانگین

گشتاور r ام حول میانگین برابر است با: $M_r = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{X}\right)^r$

قضیه ۱: فرض کنید $x_1, x_2, ..., x_n$ یک نمونه تصادفی از جامعه با تابع چگالی $f_x(x)$ باشد و $\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ میانگین نمونه باشد در این صورت: $E[\overline{X}] = \mu \quad , \quad Var[\overline{X}] = \frac{\sigma^2}{n}$

که در آن μ و σ^2 به ترتیب میانگین و واریانس جامعه هستند.

اثبات:

$$E[\overline{X}] = E\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i\right] = \frac{1}{n}E\left[\sum_{i=1}^{n} x_i\right] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E(X_i) = \frac{1}{n}.n\mu = \mu$$

$$Var[\overline{X}] = Var\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i\right] = \frac{1}{n^2}Var\left[\sum_{i=1}^{n} x_i\right] = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} Var(x_i) = \frac{1}{n^2}.n\sigma^2 = \frac{\sigma^2}{n}$$

۱-۱۱- واریانس نمونه

فرض کنید $x_1, x_2, ..., x_n$ یک نمونه تصادفی از جامعه $f_x(x)$ باشد در این صورت:

$$S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2 \quad ; \; n > 1$$

واریانس نمونه نامیده می شود.

۱-۱۲- انحراف معیارنمونه

انحراف معیار n مشاهده $x_1, x_2, ..., x_n$ را به عنوان ریشه دوم واریانسهایشان تعریف می کنیم:

$$S = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2}{n-1}}$$

قضیه۲: اگر تمام نمونه های تصادفی به حجم n از یک جامعه نرمال با میانگین μ و واریانس σ^2 باشددر اینصورت $\overline{X}$ دارای توزیع نرمال با میانگین μ و واریانس $\frac{\sigma^2}{n}$ است.

$$M_{\overline{X}} = M_X[(\sum x_i / n)t] = (M_X(t/n))^n = (e^{\mu(t/n) + 1/2(t/n)^2\sigma^2})^n = e^{\mu t + \frac{1}{2}t(\sigma^2/n)}$$

قضیه۳: اگر تمام نمونه های تصادفی به حجم n از یک جامعه با میانگین μ و واریانس σ^2 با جایگذاری انتخاب شود، توزیع نمونه $\overline{X}$ تقریباًدارای توزیع نرمال با میانگین μ و واریانس $\frac{\sigma^2}{n}$ است.

نکته:

اگر $n \geq 30$ باشد، بدون توجه به نوع توزیع جامعه، توزیع $\overline{X}$ نرمال است.

اگر $n < 30$ باشد، توزیع $\overline{X}$ تقریباًنرمال است اگر توزیع جامعه تقریباًنرمال باشد.

۱-۱۳- قضیه حد مرکزی

اگر $x_1, x_2, \ldots, x_n$ نمونه‌ای تصادفی از یک جامعه نامتناهی با میانگین μ و واریانس σ^2 باشد در این صورت توزیع حدی متغیر

$$Z = \frac{\overline{X} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}}$$

وقتی $n \to \infty$، توزیع نرمال استاندارد است.

۱-۱۴- توزیع Gamma

اگر متغیر تصادفی گاما دارای تابع چگالی ذیل است:

$$f_X(x) = \frac{\lambda e^{-\lambda x} (\lambda x)^{s-1}}{\Gamma(s)} \quad ; \quad x > 0$$

$$\phi(t) = \left(\frac{\lambda}{\lambda - t}\right)^s ; E[x] = \frac{s}{\lambda} ; Var(x) = \frac{s}{\lambda^2}$$

۲- توزیع مربع‌کای (Chi Square)

توزیع مربع‌کای حالت خاصی از توزیع گاماست که در آن $s=\frac{\text{v}}{۲};\lambda=\frac{۱}{۲}$است و بـر ایـن اسـاس تـابع چگالی احتمال متغیر تصادفی مربع‌کای بشرح ذیل است.

$$f_x(x)=\frac{1}{2^{v/2}\Gamma\left(\frac{v}{2}\right)}x^{\left(\frac{v-2}{2}\right)}\ e^{-\frac{x}{2}} \qquad ;\ x>0$$

که Γ معرف تابع گاما و معرف درجه آزادی است و

$$E\left(\chi^{۲}\right)=\nu\ ,\mathrm{Var}\left(\chi^{۲}\right)=۲\nu\ ,M_X(t)=\phi(t)=(۱-۲t)^{\frac{-\nu}{۲}}$$

قضیه۴: اگر متغیر تصادفی $Z_۱$ دارای توزیع نرمال استاندارد باشد، آنگـاه متغیـر تـصادفی $Z_۱^۲$ دارای توزیع مربع‌کای با ۱ درجه آزادی خواهد بود. این قضیه در واقع بیانگر اهمیت توزیع مربع کای است.

قضیه۵: اگر $\chi_1^2,\ _2^2,\ ,.....,\chi_k^2$ متغیرهای تصادفی مستقل هر یک دارای توزیع مربـع‌کـای بـا درجـات آزادی به ترتیب $\nu_۱,\nu_۲,.....,\nu_k$ باشند، آنگـاه متغیـر تـصادفی $\chi^2=\chi_1^2+\chi_2^2+.......+\chi_k$ نیـز یـک توزیع مربع‌کای با $\nu=\sum_{i=1}^{k}\nu_i$ درجه آزادی دارد.

اثبات:

$$M_{x_i}(t)=(۱-۲t)^{-\nu_i/۲};M_{\sum x}(t)=\prod_{i=۱}^{n}(۱-۲t)^{-\nu_i/۲}=(۱-۲t)^{-\sum\nu_i/۲}$$

قضیه۶: اگر متغیرهای تصادفی مستقل $Z_1,Z_2,.....,Z_v$ دارای توزیع نرمال استاندارد باشـند، آنگـاه متغیر تصادفی $\chi^2=Z_1^2+Z_2^2+......+Z_v^2$ یک توزیع مربع‌کای با ν درجه آزادی خواهد بود.

تـذکر: اگـر $x_1,x_2,.....,x_v$ متغیرهـای تـصادفی مـستقل نرمـال بـه ترتیـب بـا میـانگین‌هـای $_۱\ ,_۲\ \ \mu_v$ و واریانسهای $\sigma_۱^۲,\sigma_۲^۲,........,\sigma_v^۲$ باشند، جمع مربعات Xها یک توزیع مربع‌کای ندارد.

قـضیه۷: اگـر متغیرهـای تـصادفی $x_1,x_2,.....,x_v$ دارای توزیـع نرمـال مـستقل بـا میـانگین‌هـای $_۱\ ,_۲\ \ \mu_v$ و واریانس های $\sigma_۱^۲,\sigma_۲^۲,........,\sigma_v^۲$ باشند در این صورت متغیر تـصادفی $Z=\frac{x_i-\mu_i}{\sigma_i}$

برای $i = 1,2,\dots,v$ دارای توزیع نرمال استاندارد می باشد و متغیر تصادفی:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{v}\left(\frac{x_i - \mu_i}{\delta_i}\right)^2$$

دارای توزیع مربع‌کای با v درجه آزادی است.

قضیه۸: اگر $Z_1, Z_2, \dots, Z_n$ نمونه های تصادفی حاصل از توزیع نرمال استاندارد $N(0,1)$ باشـند در این صورت:

۱- $\bar{Z}$ دارای توزیع نرمال $N\left(0,\frac{1}{n}\right)$ است.

۲- $\bar{Z}$ و $\sum_{i=1}^{n}(Z_i - \bar{Z})^2$ از هم مستقلند.

۳- $\sum_{i=1}^{n}(Z_i - \bar{Z})^2$ دارای توزیع Chi Square با n-1 درجه آزادی است.

نتیجه: اگر $x_1, x_2, \dots, x_n$ نمونه تصادفی حاصل از جامعه $N(\mu,\sigma^2)$ باشد در این صورت متغیر تصادفی $\chi^2 = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{X_i - \bar{X}}{\sigma}\right)^2$ دارای توزیع مربع‌کای با n-۱ درجه آزادی است.

قضیه۹: اگر $x_1, x_2, \dots, x_n$ یک نمونه تصادفی به اندازه n از یک جامعه نرمال با میانگین μ و واریانس σ^2 باشد در این صورت $\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}$ یک توزیع مربع‌کای با n-۱ درجه آزادی است.

اثبات: در ابتدا بدون اثبات می‌پذیریم که هرگاه $x_1, \dots, x_n$ یک نمونه تصادفی n تایی از یک جامعه نرمال با میانگین μ و واریانس σ^2 باشند آنگاه توزیع های $\bar{X}, S^2$ که به ترتیب میـانگین و واریـانس نمونه است از یکدیگر مستقل هستند. حال داریم:

$$S^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\overline{X}\right)^2$$

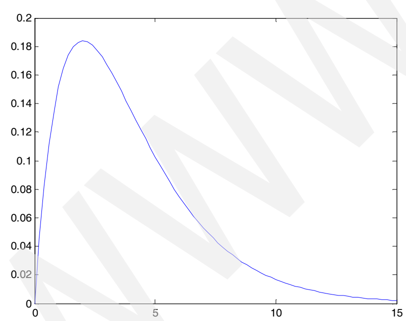
$$\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}=\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\overline{X}\right)^2}{\sigma^2}$$

$$\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}=\frac{\sum_{i=1}^{n}\left[(X_i-\mu)-(\overline{X}-\mu)\right]^2}{\sigma^2}=\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2}{\sigma^2}+\frac{n(\overline{X}-\mu)^2}{\sigma^2}-\frac{2(\overline{X}-\mu)\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)}{\sigma^2}$$

$$\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}=\underbrace{\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{X_i-\mu}{\sigma}\right)^2}_{\text{توزیع مربع کای با n درجه آزادی}}-\underbrace{\left(\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\right)^2}_{\text{توزیع مربع کای با یک درجه آزادی}}=\chi^2_{(n-1)}$$

تذکر: در یک نمونه تصادفی، احتمال اینکه مقدار عددی یک متغیر تصادفی مربع‌کای بزرگتر از عدد مشخصی شود عبارتست از سطح زیر چگالی مربع‌کای دم سمت راست آن عدد مشخص و این عـدد معمولاًتوسط χ_α نمایش داده می‌شود بطوری که سطح زیر چگالی توزیع مربع کای واقع در سمت راست آن عبارتست از α .

مثال توزیع مربع کای با چهار درجه آزادی.



قضیه۱۰: اگر $x_1, \ldots\ldots, x_n$ یک نمونه تصادفی از جامعه‌ای نامشخص $f_x(x)$ باشد آنگاه: $E[S^2] = \sigma^2$

اثبات:

$$E\left(S^2\right) = \left[\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{X}\right)^2\right] = \frac{1}{n-1}E\left[\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu) - \left(\overline{X} - \mu\right)\right]^2 =$$

$$\frac{1}{n-1}E\left[\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu)^2 - \left(\overline{X} - \mu\right)^2 - 2\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu)\left(\overline{X} - \mu\right)\right] =$$

$$\frac{1}{n-1}E\left[\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu)^2 + n\left(\overline{X} - \mu\right)^2 - 2\left(\overline{X} - \mu\right)\overbrace{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu)}^{n\left(\overline{X}-\mu\right)}\right] =$$

$$\frac{1}{n-1}E\left[\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu)^2 + n\left(\overline{X} - \mu\right)^2 - 2n(X_i - \mu)^2\right] = \frac{1}{n-1}E\left[\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu)^2 - n\left(\overline{X} - \mu\right)^2\right] =$$

$$\frac{1}{n-1}\left[\sum_{i=1}^{n}E\left[(X_i - \mu)^2\right] - nE\left[\left(\overline{X} - \mu\right)^2\right]\right] = \frac{1}{n-1}\left[\sum_{i=1}^{n}\sigma^2 - n\mathrm{Var}\left(\overline{X}\right)\right] =$$

$$\frac{1}{n-1}\left(n\sigma^2 - n\frac{\sigma^2}{n}\right) = \sigma^2$$

قضیه۱۱: اگر $x_1, \ldots\ldots, x_n$ یک نمونه تصادفی از یک جامعه نرمال $N\left(\mu, \sigma^2\right)$ باشد آنگاه:

$$\mathrm{Var}\left(S^2\right) = \frac{2\sigma^4}{n-1}$$

اثبات:

$$\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} = \chi^2(n-1)$$

$$\mathrm{Var}\left[\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\right] = 2(n-1)$$

$$\frac{(n-1)^2}{\sigma^4}\mathrm{Var}\left(S^2\right) = 2(n-1) \rightarrow \mathrm{Var}\left(S^2\right) = \frac{2\sigma^4}{n-1}$$

۳- توزیع t_student

توزیع t حاصل از تقسیم دو متغیر تصادفی است که صورت کسر متغیر تصادفی نرمال استاندارد و مخرج کسر جذر یک متغیر تصادفی دارای توزیع مربع کای تقسیم بر درجه آزادی آن است یعنی:

$$t_{(\nu)} = \frac{Z}{\sqrt{\frac{\chi^2_{(\nu)}}{\nu}}}$$

با استفاده از تکنیک تبدیل متغیر در تابع توزیع تابعی از یک متغیر تصادفی، تابع چگالی احتمال متغیر تصادفی t-student بشرح ذیل خواهد بود.

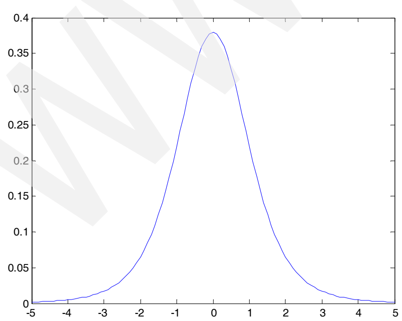
$$f_{t(\nu)} = \frac{1}{\sqrt{\pi\nu}} \frac{\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)} \left(1+\frac{x^2}{\nu}\right)^{-\left(\frac{\nu+1}{2}\right)} \qquad ; \quad -\infty < x < +\infty$$

$$E[x] = 0$$

$$Var(x) = \frac{\nu}{\nu-2}; \nu > 2$$

شکل تابع چگالی متغیر تصادفی t، مانند توزیع نرمال با میانگین صفر حول نقطه صفر متقارن است. تفاوت توزیع t با توزیع نرمال در آنست که توزیع t کمی پهن تراز توزیع نرمال است. در توزیع t با افزایش درجه آزادی، واریانس کمتر می شود.

مثال: توزیع t با ۵ درجه آزادی



نکته: در یک نمونه تصادفی، احتمال اینکه مقدار عددی یک متغیر تصادفی t بزرگتر از عدد مشخصی باشد عبارتست از سطح زیر چگالی t در سمت راست آن عدد مشخص و این عدد معمولاً

با t_α نمایش داده می شود بطوری که سطح زیر چگالی t واقع در سمت راست t_α عبارتست از α.

$$P(T \geq t_{\alpha,v}) = \alpha$$
$$P(T_{(۱۰)} \geq ۱.۸۱۲) = P(T \geq t_{(۱۰),\%۵}) = \%۵$$
$$P(T_{(۵)} \geq ۲.۰۱۵) = P(T \geq t_{(۵),\%۵}) = \%۵$$

قضیه۱۲: در توزیع t هر چه v بزرگتر باشد، توزیع t به سمت توزیع نرمال استاندارد میل خواهد کرد و وقتیکه $v = +\infty$ باشد توزیع t همان توزیع نرمال استاندارد است. یعنی: $t_{v,\alpha}$

$$\lim_{v \to \infty} t_{(v)} = Z$$

اهمیت توزیع t

در حالتیکه σ معلوم باشد بر اساس قضیه حد مرکزی، متغیر تصادفی $\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}$ دارای توزیع نرمال استاندارد است اما در عمل σ مجهول است لذا برای تصمیم‌گیری لازم است توزیع متغیر تصادفی $\frac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}$ را داشته باشیم که این مهم بر اساس توزیع t و قضیه ذیل برآورده می شود.

قضیه۱۳: اگر $x_1, x_2, \dots\dots, x_n$ نمونه تصادفی حاصل از جامعه $N(\mu, \sigma^۲)$ و $\overline{X}$ و S بترتیب میانگین و انحراف معیار نمونه مزبور باشد در این صورت متغیر تصادفی $\frac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}$ دارای توزیع t با n-1 درجه آزادی است.

$$t_{v=(n-۱)} = \frac{Z}{\sqrt{\frac{\chi^۲_{(n-۱)}}{n-۱}}}$$

$$t_{v=(n-۱)} = \frac{\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}}{\sqrt{\frac{(n-۱)S^۲}{\sigma^۲}/(n-۱)}} = \frac{\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}}{\frac{S}{\sigma}} = \frac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}$$

لذا متغیر تصادفی $\frac{\overline{X}-\mu}{\delta/\sqrt{n}}$ دارای توزیع t با (n-1) درجه آزادی است.

نکته: اگر از یک جامعه نرمال $X \sim N(\mu, \sigma)$ یک نمونه n_1 تایی بگیریم و $\overline{X}$ را بر اساس این نمونه n_1 تایی تعریف کنیم و پس یک نمونه n_2 تایی مستقل از n_1 گرفته و S^2 را بر اساس آن تعریف

کنیم داریم آنگاه:

$$\frac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{n_1}} \sim t_{(n_2-1)}$$

$$t_{\nu=(n-1)} = \frac{Z}{\sqrt{\frac{\chi^2_{(n-1)}}{n-1}}}$$

$$t_{\nu=(n_1-1)} = \frac{\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n_1}}}{\sqrt{\frac{(n_2-1)S^2}{\sigma^2}/(n_2-1)}} = \frac{\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n_1}}}{\frac{S}{\sigma}} = \frac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{n_1}}$$

نکته: اگر یک نمونه n_1 از جامعه $X \sim N(\mu_1,\sigma_1)$ گرفته و $\overline{X}$ را از روی آن تعریف کنیم و سپس یک نمونه n_2 از جامعه $Y \sim N(\mu_2,\sigma_2)$ مستقل از X گرفته و S_y را بر اساس آن تعریف کنیم داریم:

$$\frac{\sigma_2}{\sigma_1}.\frac{\overline{X}-\mu_1}{S_y/\sqrt{n_1}} \sim t_{(n_2-1)}$$

نکته: توزیع t با یک درجه آزادی یک توزیع کوشی است. توزیع کوشی دارای میانگین نیست همچنین این توزیع دارای واریانس نیست.

$$f_{t_{(1)}} = \frac{1}{\pi(1+x^2)} \qquad ; \quad -\infty < x < +\infty$$

۴- توزیع تفاوت بین دو میانگین نمونه

فرض کنید $X_1, X_2, ..., X_{n_x}$ یک نمونه تصادفی متشکل از n_x متغیر تصادفی مستقل با توزیع نرمال هر یک با میانگین μ_x و واریانس $\sigma^۲$ باشد و فرض کنید $Y_1, Y_2, ..., Y_{n_x}$ یک نمونه تصادفی متشکل از n_y متغیر تصادفی مستقل با توزیع نرمال هر یک با میانگین μ_y و واریانس $\sigma^۲$ باشد. همچنین فرض کنید که تمام Xها، Y ها مستقل باشند در این صورت:

الف- اگر σ معلوم باشد:

$$\overline{X} \sim N\left(\mu_X, \frac{\sigma^۲}{n_X}\right)$$
$$\overline{Y} \sim N\left(\mu_Y, \frac{\sigma^۲}{n_Y}\right)$$
$$\overline{X} - \overline{Y} \sim N\left(\mu_X - \mu_Y, \frac{\sigma^۲}{n_X} + \frac{\sigma^۲}{n_Y}\right)$$

آنگاه متغیر تصادفی $Z = \dfrac{(\overline{X} - \overline{Y}) - (\mu_X - \mu_Y)}{\sigma\sqrt{\dfrac{۱}{n_X} + \dfrac{۱}{n_Y}}}$ دارای توزیع نرمال استاندارد است

ب- اگر σ مجهول باشد:

$$\frac{(n_X - ۱)S_X^۲}{\sigma^۲} \sim \chi^۲_{(n_x - ۱)}$$
$$\frac{(n_Y - ۱)S_Y^۲}{\sigma^۲} \sim \chi^۲_{(n_y - ۱)}$$

آنگاه با استفاده از خاصیت جمع در توزیع مربع کای، متغیر تصادفی $\dfrac{(n_X - ۱)S_X^۲}{\sigma^۲} + \dfrac{(n_Y - ۱)S_Y^۲}{\sigma^۲}$ دارای توزیع مربع کای با $n_x + n_y - 2$ درجه آزادی است. از طرفی توزیع آن از $\overline{X} - \overline{Y}$ مستقل است. بنا به تعریف متغیر تصادفی t داریم:

$$\frac{\dfrac{(\overline{X} - \overline{Y}) - (\mu_X - \mu_Y)}{\sigma\sqrt{\dfrac{۱}{n_X} + \dfrac{۱}{n_Y}}}}{\sqrt{\dfrac{(n_X - ۱)S_X^۲ + (n_Y - ۱)S_Y^۲}{\sigma^۲} / (n_X + n_Y - ۲)}} = \frac{(\overline{X} - \overline{Y}) - (\mu_X - \mu_Y)}{\sqrt{\dfrac{(n_X - ۱)S_X^۲ + (n_Y - ۱)S_Y^۲}{n_X + n_Y - ۲}}\sqrt{\dfrac{۱}{n_X} + \dfrac{۱}{n_Y}}}$$

لذا متغیر تصادفی $\dfrac{(\overline{X}-\overline{Y})-(\mu_x-\mu_y)}{\sqrt{\dfrac{(n_x-1)S_x^2+(n_y-1)S_y^2}{n_x+n_y-2}}\sqrt{\dfrac{1}{n_x}+\dfrac{1}{n_y}}}$ دارای توزیع t با n_x+n_y-2 درجه آزادی است

مثال: نمونه های تصادفی مستقل به اندازه $n_1=30$ و $n_2=50$ از دو جامعه نرمال با میانگین های $\mu_1=78$ و $\mu_2=75$ و واریانس های $\sigma_1^2=۱۵۰$ و $\sigma_2^2=۲۰۰$ اختیار شده اند. احتمال اینکه میانگین نمونه اول از میانگین نمونه دوم حداقل 4.8 بیشتر باشد چقدر است؟

$$\frac{(\overline{X}_۱-\overline{X}_۲)-(\mu_۱-\mu_۲)}{\sqrt{\dfrac{\sigma_۱^۲}{n_۱}+\dfrac{\sigma_۲^۲}{n_۱}}}\sim Z$$

$$P(\overline{X}_۱-\overline{X}_۲\geq ۴.۸)=P\left[\frac{(\overline{X}_۱-\overline{X}_۲)-(۷۸-۷۵)}{\sqrt{\dfrac{۱۵۰}{۳۰}+\dfrac{۲۰۰}{۵۰}}}\geq\frac{۴.۸-(۷۸-۷۵)}{\sqrt{\dfrac{۱۵۰}{۳۰}+\dfrac{۲۰۰}{۵۰}}}\right]=P(Z\geq ۰.۵۳)$$

مثال: میانگین نمرات تست هوش دانشجویان سال اول یک دانشکده 540 و انحراف معیار آن 50 است. دو نمونه تصادفی با حجم $n_1=32$ و $n_2=50$ انتخاب می کنیم احتمال اینکه تفاضل میانگین نمرات این دو نمونه:

الف-بیش از 20 باشد چقدر است؟

$$P(\overline{X}_1-\overline{X}_2>20)=P\left[\frac{\overline{X}_1-\overline{X}_2}{50\sqrt{\dfrac{1}{32}+\dfrac{1}{50}}}>\frac{20}{50\sqrt{\dfrac{1}{32}+\dfrac{1}{50}}}\right]=$$

$$P(Z>1.76)=1-\phi(1.76)$$

ب-بین 5 و 10 باشد چقدر است؟

$$P(5<\overline{X}_1-\overline{X}_2<10)=P\left[\frac{5}{50\sqrt{\dfrac{1}{32}+\dfrac{1}{50}}}<Z<\frac{10}{50\sqrt{\dfrac{1}{32}+\dfrac{1}{50}}}\right]=P(0.44<Z<0.88)$$

نکته: نتایج بدست آمده از توزیع نمونه $\overline{X}_1 - \overline{X}_2$ ، نیز برای جمعیتهای محدود وقتیکه نمونه گیری به روش بدون جایگذاری انجام می پذیرد صادق باشد، مشروط بر آنکه اندازه جمعیت ها یعنی N_1 و N_2 به ترتیب در مقابل اندازه نمونه یعنی n_1 و n_2 بزرگ باشد. بهرحال اگر جمعیت ها کوچک باشند و نمونه گیری به روش بدون جایگذاری انجام پذیرد در آنصورت ما باید $\sigma_{\bar{x}_1}$ و $\sigma_{\bar{x}_2}$ را بتوسط رابطه زیر محاسبه نمائیم:

$$\sigma_{\bar{x}}^2 = \frac{\sigma^2}{n} \cdot \frac{N-n}{N-1}$$

۵- توزیع F

اگر متغیرهای تصادفی مستقل χ_1 و χ_2^2 دارای توزیع های مربع کای با درجات آزادی به ترتیب ν_1 و ν_2 باشند متغیر تصادفی:

$$F = \frac{\chi_1^2/\nu_1}{\chi_2^2/\nu_2}$$

توزیع F با ν_1 و ν_2 درجه آزادی دارد. بر این اساس تابع چگالی متغیر تصادفی F به صورت ذیل است:

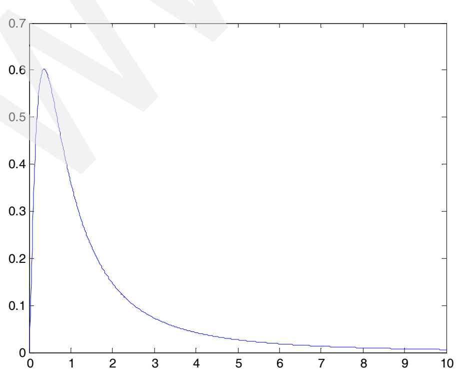
$$f_{F_{\nu 1,\nu_2}(x)} = \frac{\Gamma\left(\frac{\nu_1+\nu_2}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\nu_1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\nu_2}{2}\right)}(\nu_1)^{\frac{\nu_1}{2}}(\nu_2)^{\frac{\nu_2}{2}} \quad \frac{x^{\left(\frac{\nu_1}{2}-1\right)}}{(\nu_2+\nu_1 x)^{\frac{\nu_1+\nu_2}{2}}} \quad ; \quad x>0$$

که در ν_1 و ν_2 بترتیب درجه آزادی صورت و مخرج است. شکل تابع چگالی متغیر تصادفی F مانند توزیع مربع‌کای است. اهمیت توزیع F در آنست که برای مقایسه واریانسهای دو جامعه بکار می‌رود. میانگین و واریانس توزیع F با درجات آزادی ν_1 و ν_2 به ترتیب برابر است با:

$$E[x] = \frac{\nu_۲}{\nu_۲-۲} \quad ; \quad \nu_۲ > ۲$$

$$Var[x] = \frac{\nu_۲^۲(۲\nu_۲+۲\nu_۱-۴)}{\nu_۱(\nu_۲-۲)^۲(\nu_۲-۴)} \quad ; \quad \nu_۲>۴$$

مثال : توزیع F با ۵ درجه آزادی در صورت و ۳ درجه آزادی در مخرج



نکته: در یک نمونه تصادفی، احتمال اینکه مقدار عددی یک متغیر تصادفی F بزرگتر از عدد مشخصی باشد عبارتست از سطح زیر چگالی F در سمت راست آن عدد مشخص و این عدد معمولاً با $F_{v_1,v_2,\alpha}$ نمایش داده می شود بطوری که سطح زیر چگالی F واقع در سمت راست آن عبارتست از α یعنی $P\left(F > F_{\alpha;v_1,v_2}\right) = \alpha$

قضیه۱۴: اگر $X_1,\dots,X_{m+1}$ یک نمونه تصادفی به حجم m+1 از یک توزیع نرمال $N\left(\mu_X,\sigma^2\right)$ باشد، همچنین اگر $Y_1,\dots,Y_{n+1}$ یک نمونه تصادفی به حجم n+1 از یک توزیع نرمال $N\left(\mu_Y,\sigma^2\right)$ باشد و نمونه های تصادفی ناهمبسته باشند در این صورت:

$$\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{m+1}\left(X_i-\overline{X}\right)^2 \sim \chi^2_{(m)}$$

$$\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n+1}\left(Y_i-\overline{Y}\right)^2 \sim \chi^2_{(n)}$$

$$\frac{\sum_{i=1}^{m+1}\left(X_i-\overline{X}\right)/m}{\sum_{i=1}^{n+1}\left(Y_i-\overline{Y}\right)/n} \sim F_{m,n}$$

قضیه ۱۵: (توزیع نسبت دو واریانس) فرض کنید $X_1,X_2,\dots\dots,X_{n_x}$ یک نمونه تصادفی متشکل از n_x متغیر تصادفی با توزیع نرمال هر یک با میانگین μ_x و واریانس σ_X^2 باشد. همچنین فرض کنید $Y_1,Y_2,\dots\dots,Y_{n_x}$ یک نمونه تصادفی متشکل از n_y متغیر تصادفی با توزیع نرمال هر یک با میانگین μ_y و واریانس σ_Y^2 باشد. همچنین فرض کنید تمام X ها و Y ها مستقل باشند لذا:

$$\frac{\left(n_X-1\right)S_X^2}{\sigma_X^2} \sim \chi^2_{(n_x-1)}$$

$$\frac{\left(n_Y-1\right)S_Y^2}{\sigma_Y^2} \sim \chi^2_{(n_y-1)}$$

چون X ها و Y ها مستقل اند پس این دو متغیر تصادفی مربع کای مستقل از هم هستند.

اثبات: طبق تعریف متغیر تصادفی F داریم:

$$F_{v_1, v_2} = \frac{\chi^2_{(v_1)}/v_1}{\chi^2_{(v_2)}/v_2}$$

$$\frac{\frac{(n_x - 1)S_x^2}{\sigma_x^2}/(n_x - 1)}{\frac{(n_y - 1)S_y^2}{\sigma_y^2}/(n_y - 1)} = F_{n_x - 1, n_y - 1}$$

لذا متغیر تصادفی $\frac{S_x^2}{S_y^2}.\frac{\sigma_y^2}{\sigma_x^2}$ دارای توزیع F با درجات آزادی $n_x - 1$ و $n_y - 1$ است.

چند نکته مهم

۱- اگر x دارای توزیع F_{v_1, v_2} باشد آنگاه متغیر $Y = \frac{1}{X}$ نیز دارای توزیع F_{v_2, v_1} است.

۲- مربع توزیع $t_{(v)}$ دارای توزیع F با درجات آزادی $v,1$ است.

$$t_{(v)} = \frac{Z}{\sqrt{\frac{\chi^2_{(v)}}{v}}} \rightarrow t^2_{(v)} = \frac{Z^2/1}{\chi^2_{(v)}/v}$$

۳- $F_{1-\alpha; v_2, v_1} \frac{1}{F_{\alpha, v_1, v_2}}$ یا $F_{\alpha, v_1, v_2} = \frac{1}{F_{1-\alpha; v_2, v_1}}$

۴- اگر X_1 و X_2 یک نمونه تصادفی از پخش $x > 0 \quad ; \quad f(x) = e^{-x}$ باشد آنگاه $Z = \frac{x_1}{x_2}$ دارای پخش $F_{2,2}$ است. توزیع F با درجات آزادی ۲ و ۲ به صورت زیر است:

$$f_z(z) = \frac{1}{(1+z)^2}$$

۶- توزیع میانگین جامعه های متناهی

اگر آزمایش متشکل از انتخاب یک مقدار یا بیشتر از مجموعه ای متناهی از اعداد $\{c_1,........c_n\}$ باشد این مجموعه را جامعه‌ای متناهی با اندازه N می نامند. اگر انتخاب بدون جایگذاری باشد و x_1 اولین و x_n nامین عددی باشد که استخراج می شوند، این متغیرهای تصادفی، نمونه ای تصادفی به اندازه n این جامعه متناهی را تشکیل می دهند مشروط بر آنکه توزیع احتمال توأم آنها به ازای هر n تایی مرتب مقادیر انتخاب شده از مجموعه $\{c_1,........c_n\}$ به صورت زیر باشد:

$$f(x_1,.......,x_n)=\frac{1}{N(N-1).....(N-n+1)}$$

$$f(x_i)=\frac{1}{N},\ x_i=c_1,..........c_N,\ i=1,......,n$$

میانگین و واریانس آنرا میانگین و واریانس جامعه متناهی می نامیم. یعنی میانگین و واریانس جامعه متناهی $\{c_1,...............,c_N\}$ عبارتست از :

$$\mu=\frac{\sum_{i=1}^{N}c_i}{N},\ \sigma^2=\frac{\sum_{i=1}^{N}(c_i-\mu)^2}{N}$$

توزیع حاشیه ای توام هر دوتا از متغیرهای تصادفی $x_1,...,x_n$ برای هر زوج مرتب از مقادیر جامعه متناهی است و برابر است با:

$$g(x_i,x_j)=\frac{1}{N(N-1)}$$

و کوواریانس آنها عبارتست از:

$$Cov(x_i,x_j)=\frac{\sigma^2}{N-1}$$

اگر $\overline{X}$ میانگین یک نمونه تصادفی به اندازه n از جامعه ای متناهی به اندازه N با میانگین μ و واریانس σ^2 باشد آنگاه:

$$E(\overline{x})=\mu,\ Var(\overline{x})=\frac{\sigma^2}{n}.\frac{N-n}{N-1}$$

قضیه۱۶: اگر تمام نمونه های تصادفی n تـایی ممکنـه بـا روش بـدون جایگـذاری از یـک جمعیـت محدود N تایی با حد متوسط μ و انحراف معیار σ بیرون کشیده شود در آنصورت توزیـع نمونـه ای $\overline{X}$ به طور تقریبی یک توزیع نرمال با حد متوسط و انحراف معیار زیر خواهد بود.

$$\mu_{\bar{x}} = \mu$$

$$Var(\bar{x}) = \frac{\sigma^2}{n} . \frac{N-n}{N-1}$$

مثال:

جمعیت ۱و۱و۱ و ۳و۴و۵ و ۶و۶و۶و۷ داده شده است. نمونه تصادفی ۳۶ تایی بـه روش **جـایگزین** انتخاب شده است. احتمال اینکه میانگین نمونه بیشتر از ۳/۸ و کوچکتر از ۴/۵ باشد چقدر است؟

توزیع احتمال جمعیت مربوط به صورت زیر است:

x	1	3	4	5	6	7
P(x)	0.3	0.1	0.1	0.1	0.3	0.1

$$E(x) = \mu = ۴$$
$$Var(x) = \sigma^۲ = ۵$$
$$\bar{x} \sim N\left(۴, \frac{۵}{۳۶}\right)$$
$$P(۳.۸ < \bar{x} < ۴.۵) = P(-۰.۴۰۵ < z < ۱.۲۱۶) = ۰.۵۴۵۳$$

نکته: برای Nهایی که در مقابل تعداد نمونه n عدد بزرگی هستند، ضریب $\frac{N-n}{N-1}$ به سمت ۱ میـل می‌کند.

قضیه۱۷: اگر نمونه ای تصادفی به اندازه n از جامعه ای متناهی که متشکل از N عدد صحیح مثبـت است انتخاب شود آنگاه:

$$E(\bar{x}) = \frac{N-۱}{۲}$$
$$Var(\bar{x}) = \frac{(N+۱)(N-n)}{۱۲n}$$

$$E(y) = \frac{n(N+۱)}{۲}$$
$$Var(y) = \frac{n(N+۱)(N-n)}{۱۲}$$

$$\mu = E(\bar{x}) = \sum_{i=1}^{N} x_i . f(x_i) = \sum_{i=1}^{N} x_i . \frac{1}{N} = \frac{1}{N}(x_1 + x_2 + ...x_N) = \frac{1}{N} . \frac{N(N+1)}{2} = \frac{N+1}{2}$$

$$E(x^2) - (E(x))^2 = \sum_{i=1}^{N} x_i . f(x_i) - \frac{(N+1)^2}{4} = \frac{1}{N} . \frac{N(2N+1)(N+1)}{6} - \frac{(N+1)^2}{4} = \frac{N^2-1}{12}$$

$$Var(\bar{x}) = \frac{\sigma^2}{n}\left(\frac{N-n}{N-1}\right) = \frac{N^2-1}{12n} . \frac{N-n}{N-1} = \frac{(N+1)(N+n)}{12n}$$

۷- آماره‌های ترتیبی

فرض کنید از یک جامعه نامتناهی پیوسته یک نمونه تصادفی n تایی بشرح $X_1, \ldots, X_n$ انتخاب کرده‌ایم. اگر کوچکترین مقدار x ها را Y_1 ، بزرگترین مقدار بعد از آن را Y_2 و به همین ترتیب بزرگترین آنها را Y_n بنامیم در این صورت $Y_1 < Y_2 < \ldots < Y_N$ را آماره تریبی می‌نامیم.

قضیه۱۸: برای نمونه تصادفی به اندازه n از جامعه‌ای نامتناهی که که دارای تابع چگالی f(x) است. چگالی r امین آماره ترتیبی ،y_r، به ازای $-\infty < y_r < +\infty$ عبارتست از:

$$g_r(y_r) = \frac{n!}{(r-1)!(n-r)!}\left[\int_{-\infty}^{y_r} f(x)dx\right]^{r-1} f(y_r)\left[\int_{y_r}^{\infty} f(x)dx\right]^{n-1}$$

اثبات: فرض کنید که محور اعداد حقیقی را به سه بازه تقسیم کرده‌ایم یکی از $-\infty$ تا y_r، دومی از y_r تا y_r+h(که در آن h ثابت است) و سومی از y_r+h تا $+\infty$. در اینصورت اگر چگالی جامعه‌ای که از آن نمونه برگرفته شده است f(x) باشد، احتمال اینکه r-1 تا از نمونه ها در اولین باز قرار بگیرد ، یکی در بازه دوم و n-r تا در بازه سوم قرار بگیرند طبق فرمول توزیع چند جمله‌ای عبارتست از

$$g_r(y_r) = \frac{n!}{(r-1)!1!(n-r)!}\left[\int_{-\infty}^{y_r} f(x)dx\right]^{r-1}\left[\int_{y_r}^{y_r+h} f(x)dx\right]^{r-1}\left[\int_{y_r}^{\infty} f(x)dx\right]^{n-1}$$

با استفاده از قضیه میانگین در حسابان داریم:

$$\left[\int_{y_r}^{y_r+h} f(x)dx\right] = f(\xi).h \qquad y_r \le \xi \le y_r + h$$

و در زمانی که $h \to 0$ خواهیم داشت

$$\lim_{h \to 0} \int_{y_r}^{y_r+h} f(x)dx = f(y_r)$$

و سرانجام

$$g_r(y_r)=\frac{n!}{(r-1)!(n-r)!}\left[\int_{-\infty}^{y_r}f(x)dx\right]^{r-1}f(y_r)\left[\int_{y_r}^{\infty}f(x)dx\right]^{n-1}$$

بر این اساس توزیع اولین، آخرین و میانه آماره ترتیبی عبارتست از

الف – توزیع اولین آماره ترتیبی

$$g_1(y_1)=nf(y_1)\left[\int_{y_1}^{\infty}f(x)dx\right]^{n-1}\qquad -\infty\le y_1\le+\infty$$

ب- توزیع آخرین آماره ترتیبی

$$g_n(y_n)=nf(y_n)\left[\int_{-\infty}^{y_n}f(x)dx\right]^{n-1}\qquad -\infty\le y_n\le+\infty$$

ج – در نمونه‌ای تصادفی به اندازه $n=2m+1$ توزیع $\tilde{x}=y_{m+1}$ میانه آماره‌های ترتیبی عبارتست از

$$h(\tilde{x})=\frac{(2m+1)!}{m!m!}\left[\int_{-\infty}^{\tilde{x}}f(x)dx\right]^{m}f(\tilde{x})\left[\int_{\tilde{x}}^{\infty}f(x)dx\right]^{m}\qquad -\infty\le\tilde{x}\le+\infty$$

د - در نمونه‌ای تصادفی به اندازه $n=2m$ توزیع $\tilde{x}$ میانه آماره‌های ترتیبی عبارتست از

$$h(\tilde{x})=\frac{g_m(y_m)+g_{m+1}(y_{m+1})}{2}$$

ه- چگالی توام $g_{r,j}(y_1,y_j)$ عبارتست از

$$g_{r,j}(y_r,y_j)=\frac{n!}{(r-1)!(j-r-1)!(n-j)!}\left[\int_{-\infty}^{y_r}f(x)dx\right]^{r-1}f(y_r)\left[\int_{y_r}^{y_j}f(x)dx\right]^{j-1-1}f(y_j)\left[\int_{y_j}^{\infty}f(x)dx\right]^{n-j}$$

مثال: فرض کنید $X_1,\ldots\ldots,X_n$ یک نمونه تصادفی nتایی از یک جامعه‌ای نمایی با $\lambda=1$ باشد. تابع چگالی اولین و اخرین آماره ترتیبی را بدست آورید.

$$g_1(y_1)=ne^{-y_1}\left[\int_{y_1}^{\infty}e^{-x}dx\right]^{n-1}=ne^{-y_1}(e^{-y_1})^{n-1}=ne^{-ny_1}$$

$$g_n(y_n)=ne^{-y_n}\left[\int_{-\infty}^{y_n}e^{-x}dx\right]^{n-1}=ne^{-y_n}(1-e^{-y_n})^{n-1}$$

فهرست

۱- مقدمه

نظریه برآورد به دو موضوع برآورد نقطه‌ای و برآورد فاصله‌ای می‌پردازد. در برآورد نقطه‌ای یک آماره، تنها یک مقدار عددی بکار می‌رود تا بتوان به کمک آن یک پارامتر بخصوصی از جامعه را برآورد نمود در حالیکه در برآورد فاصله‌ای، یک فاصله مخصوصی معین می‌گردد که مقدار واقعی پارامتر در داخل این فاصله قرار دارد.

۲- برآورد نقطه‌ای(Point Estimator)

یک مقدار به خصوصی از یک آماره که برای برآورد یک پارامتر مشخص به کار می‌رود به نام برآورد نقطه ای نامیده می شود. می توان مساله کلی برآورد نقطه‌ای را به شرح ذیل بیان کرد:
متغیر تصادفی X، با تابع چگالی احتمال $f_X(x;\theta)$ مفروض است که در آن پارامتر θ مجهول می‌باشد. یک نمونه تصادفی، $x_1,x_2,.....,x_n$ از این جامعه انتخاب می‌نماییم و بر اساس تابعی از این نمونه تصادفی، $\hat{\theta}=\hat{\theta}(x_1,x_2,.....,x_n)$، مقدار پارامتر θ را برآورد می‌کنیم. در این صورت متغیر تصادفی $\hat{\theta}$ یک برآورد کننده برای پارامتر θ و مقداری که $\hat{\theta}$ می‌گیرد برآورد نقطه‌ای θ نامیده می‌شود.
بدیهی است، برای پارامتر θ، تعداد زیادی برآوردکننده وجود دارد. اما یک برآوردکننده خوب آن است که تا حد ممکن به مقدار واقعی پارامتر نزدیک باشد. در اینجا این سوال مطرح می‌شود که از بین تخمین زننده‌های مختلف برای پارامتر θ کدام بهتر است؟
از آنجایی که تخمین زننده‌ها، متغیرهای تصادفی هستند پس عملکرد آنها را نمی‌توان برای یک مورد خاص مدنظر قرار دارد. بنابراین برآوردکننده‌ها باید براساس عملکردشان در بلندمدت مورد ارزیابی قرار گیرند.

۳- ارزیابی یک تخمین زننده یا مقایسه برآوردکننده ها

در برآورد پارامتر θ که بر اساس مقادیر نمونه تعیین می شود، در ابتدا تابع ضرر (زیان) به صورت ذیل تعریف می کنیم:

$$\ell(\hat{\theta},\theta)=(\hat{\theta}-\theta)^2$$

از آنجایی که تابع زیان یک متغیر تصادفی است بنابراین منطقی بنظر می‌رسد از امید ریاضی تابع

زیان تحت عنوان تابع ریسک برای نیل به ارزیابی بهتر استفاده شود. تابع ریسک عبارتست از:

$$R(\hat{\theta},\theta)=MSE=E[\ell(\hat{\theta},\theta)]=E(\hat{\theta}-\theta)^2$$

۳-۱- مقایسه دو برآوردکننده از طریق سنجش کارآیی نسبی آنها

اگر برآورد کننده $\hat{\theta}_1$ دارای میانگین مربع خطای $E(\hat{\theta}_1-\theta)^2$ (که آنرا با MSE1 نشان می‌دهند) و برآوردکننده $\hat{\theta}_2$ دارای میانگین مربع خطای $E(\hat{\theta}_2-\theta)^2$ (که آنرا با MSE2 نشان می‌دهند) باشد در این صورت کارایی $\hat{\theta}_2$ نسبت به $\hat{\theta}_1$ بصورت $\frac{MSE_1}{MSE_2}$ یا $\frac{E(\hat{\theta}_1-\theta)^2}{E(\hat{\theta}_2-\theta)^2}$ تعریف می‌شود. اگر کارایی $\hat{\theta}_2$ نسبت به $\hat{\theta}_1$ کمتر از یک باشد، $\hat{\theta}_1$ برآورد کننده ای بهتر از $\hat{\theta}_2$ برای θ به شمار می آید. در غیر این صورت $\hat{\theta}_2$ برآوردکننده ای بهتر از $\hat{\theta}_1$ برای θ است.

۳-۲- تعریف تخمین زننده بهینه

تخمین زننده بهینه به تخمین زننده‌ای گفته می‌شود که MSE مربوط به آن، از MSE سایر تخمین زننده ها به ازای تمام مقادیر θ کمتر باشد. به عنوان مثال $\overline{X}$ یک تخمین زننده بهینه μ مربوط به توزیع نرمال می باشد.

۳-۳- برآوردکننده های نااریب

$\hat{\theta}$ یک برآوردکننده نااریب برای θ است اگر امید ریاضی آن با θ مساوی شود. یعنی اگر به ازای تمام مقادیر θ داشته باشیم:

$$E(\hat{\theta})=\theta$$

اگر یک برآوردکننده ناریب نباشد، اریب نامیده می شود و مقدار $b=E(\hat{\theta})-\theta$ به عنوان اریبی شناخته می شود. در اینصورت، اگر $b>0$ باشد اریبی مثبت و اگر $b<0$ باشد اریبی منفی است. در اینصورت میانگین مربعات خطا بر حسب مقدار اریبی عبارتست از:

$$MSE(\hat{\theta})=E(\hat{\theta}-\theta)^2=Var(\hat{\theta})+b^2$$

نکته: اگر متغیر تصادفی T یک برآوردکننده نااریب برای پارامتر مجهول θ باشد و $Var(T)\neq 0$ در این صورت T^2 همواره برای θ^2 اریب است.

مثال: دو برآوردکننده $\hat{\theta}_1$ و $\hat{\theta}_2$ برای پارامتر θ به شرح ذیل بیان شده است:

$$\begin{cases}E(\hat{\theta}_1)=\theta\\ Var(\hat{\theta}_1)=7\end{cases}\qquad\qquad \begin{cases}E(\hat{\theta}_2)=\frac{2}{3}\theta\\ Var(\hat{\theta}_2)=3\end{cases}$$

بر حسب مقادیر مختلف θ این دو تخمین زننده را مقایسه کنید.

$$MSE(\hat{\theta}) = Var(\hat{\theta}) + b^2$$

$$MSE(\hat{\theta}_1) = 7 + \left[E(\hat{\theta}_1) - \theta_1\right]^2 = 7 + (0)^2 = 7$$

$$MSE(\hat{\theta}_2) = 3 + \left[E(\hat{\theta}_2) - \theta_2\right]^2 = 3 + \left(\frac{2}{3}\theta - \theta\right)^2 = 3 + \frac{1}{9}\theta^2$$

اگر $\hat{\theta}_2$ برآورد کننده بهتری برای θ باشد آنگاه:

$$MSE(\hat{\theta}_1) > MSE(\hat{\theta}_2)$$

$$7 > 3 + \frac{\theta^2}{9} \rightarrow -6 < \theta < 6$$

مثال ۱: متغیر تصادفی X دارای توزیع نرمال با میانگین مجهول μ و واریانس مجهول σ^2 است. یک نمونه تصادفی ۹ تایی می‌گیریم و ۲ برآورد کننده نقطه‌ای $T_1 = 0.1\sum_{i=1}^{9}(x_i - \bar{x})^2$ و $T_2 = 0.125\sum_{i=1}^{9}(x_i - \bar{x})^2$ را برای σ^2 تعریف می‌کنیم اگر $Var(T_1) = 0.16\sigma^4$ و $Var(T_2) = 0.25\sigma^4$ باشد. کارایی T_1 نسبت به T_2 برابر است با:

$$\frac{T_1 \text{ کارایی}}{T_2 \text{ کارایی}} = \frac{MSE_2}{MSE_1} = \frac{Var(T_2) + \left(E(T_2) - \sigma^2\right)^2}{Var(T_1) + \left(E(T_1) - \sigma^2\right)^2} = \frac{0.25\sigma^4}{0.16\sigma^4 + 0.04\sigma^4} = 1.25$$

$$E(T_1) = 0.1 \times 8 \times \sigma^2 = 0.8\sigma^2$$

$$E(T_2) = 0.125 \times 8\sigma^2 = \sigma^2$$

مثال ۲: اگر X_1 و X_2 و X_3 یک نمونه تصادفی از جامعه نرمال با میانگین μ و واریانس σ^2 باشند، کارائی نسبی برآورد کننده $\bar{X}$ (میانگین نمونه) نسبت به برآوردکننده $\frac{x_1 + 2x_2 + x_3}{4}$ چقدر است؟

$$\frac{\bar{x} \text{ کارایی}}{y \text{ کارایی}} = \frac{MSE(y)}{MSE(\bar{x})} = \frac{Var(y)}{Var(\bar{x})} = \frac{\frac{1}{16} \times 6\sigma^2}{\frac{\sigma^2}{3}} = \frac{9}{8}$$

مثال ۳: فرض کنید T_1 و T_2 برآوردکننده های θ هستند و بصورت زیر بیان می‌شوند:

$$\begin{cases} E(T_1)=\theta \\ Var(T_1)=4 \end{cases} \qquad \begin{cases} E(T_2)>\theta \\ Var(T_2)=2 \end{cases}$$

و $[E(T_2)-\theta]^2=7$ است. کدام برآوردکننده بهتری برای θ است؟

$$MSE_{T_1}=Var(T_1)+b^2=4+0=4$$

$$MSE_{T_2}=Var(T_2)+[E(T_2)-\theta]^2=2+7=9$$

چون $\frac{MSE_{T_1}}{MSE_{T_2}}<1$ است لذا T_1 برآوردکننده بهتری برای θ است.

مثال ۴: فرض کنید T بر اساس یک نمونه تصادفی n تایی، برآوردکننده‌ای برای θ باشد. اگر $E(x_i)=\theta$ و $T=\sum a_i x_i$ باشد. a_i ها چه محدودیتی باید داشته باشند تا T یک برآوردکننده ناریب θ شود؟

$$T=\sum a_i x_i \rightarrow E(T)=E\left[\sum a_i x_i\right]=\sum\left[E(a_i x_i)\right]=\sum\left[a_i E(x_i)\right]$$

چون T یک برآوردکننده ناریب θ است لذا:

$$\theta=\sum(a_i\theta)=\theta=\theta\sum a_i \rightarrow \sum a_i=1$$

مثال ۵: فرض کنید $X\sim N(\mu,\sigma^2)$ باشد. اگر $\hat{\theta}_1$ و $\hat{\theta}_2$ دو تخمین زننده برای پارامتر σ^2 باشند، آنها را مقایسه کنید.

$$\hat{\theta}_1=\frac{\sum(x_i-\bar{x})^2}{n-1} \qquad ,\hat{\theta}_2=\frac{\sum(x_i-\bar{x})^2}{n+1}$$

$$E(\hat{\theta}_1)=E(S^2)=\sigma^2 \quad , \quad Var(\hat{\theta}_1)=Var(S^2)=\frac{2\sigma^4}{n-1} \quad , \quad MSE(\hat{\theta}_1)=\frac{2\sigma^4}{n-1}$$

$$E(\hat{\theta}_2)=E\left[\frac{(n-1)S^2}{(n+1)}\right]=\frac{n-1}{n+1}\sigma^2$$

$$Var(\hat{\theta}_2)=Var\left[\frac{(n-1)}{(n+1)}S^2\right]=\frac{2(n-1)}{(n+1)^2}\sigma^4$$

$$MSE(\hat{\theta}_2)=\frac{2(n-1)}{(n+1)^2}\sigma^4+\left[\frac{n-1}{n+1}\sigma^2-\sigma^2\right]^2=\frac{2\sigma^4}{n+1}$$

$MSE(\hat{\theta}_1)>MSE(\hat{\theta}_2)\Rightarrow$ $\hat{\theta}_2$ برآورد کننده بهتر از $\hat{\theta}_1$ برای پارامتر σ^2 است

۳-۴- برآوردکننده های سازگار

خاصیت نااریبی بر حسب تکرار آزمایش‌ها بیان شده است اما خاصیت سازگاری مربوط به رفتار یک تخمین زننده در یک آزمایش است وقتیکه حجم نمونه اجازه یابد بسیار بزرگ شود.

تعریف: گفته می شود برآورد کننده $\hat{\theta}_{(n)}$ یک برآورد کننده سازگار است هرگاه:

۱- $\hat{\theta}_{(n)}$ نااریب باشد.

۲-با بزرگ شدن اندازه نمونه (n) داشته باشیم:

$$\lim_{n\to\infty}\hat{\theta}_{(n)}=\theta \qquad , \qquad \lim_{n\to\infty}\operatorname{Var}\left(\hat{\theta}_{(n)}\right)=0$$

نماد $\hat{\theta}_{(n)}$ به کار می رود تا نشان دهد که ممکن است برآوردکننده تابعی از نمونه تصادفی باشد.

بطور کلی برآوردکننده‌هایی که تابع ریسک آنها، با بزرگ شدن اندازه نمونه به سمت صفر میل می‌گراید، برآوردکننده های سازگارند.

اگر این برآوردکننده ها اریب باشند، مقدار اریبی آنها نیز به سمت صفر میل می کند.

$$\lim_{n\to\infty}MSE_\theta\left(\theta_n\right)=0$$

مثال ۶: نمونه تصادفی $x_1,\ldots\ldots,x_n$ را از متغیر تصادفی دلخواه X با میانگین μ واریانس σ^2 در نظر می گیریم. فرض کنید:

$$\bar{x}_n=\frac{1}{n}\sum x_i; \qquad U_n=\bar{x}_n+1$$

نشان دهید که $\overline{X}_n$ یک برآوردکننده سازگار و U_n یک برآوردکننده ناسازگار برای μ می باشد.

$\overline{X}_n$ یک برآوردکننده سازگار نااریب برای μ است.

$$E\left(\overline{X}_n\right)=\mu\ ,\ \lim_{n\to\infty}\operatorname{Var}\left(\overline{X}_n\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{\sigma^2}{n}=0$$

U_n یک برآوردکننده ناسازگار است.

$$E\left(U_n\right)=E\left(\overline{X}_n+1\right)=\mu+1$$

نکته: سازگاری یک خاصیت مجانبی است یعنی خاصیت حدی یک برآوردکننده است. به عبارت دیگر وقتی n به حد کافی بزرگ است می توانیم عملاً مطمئن باشیم که خطایی که با یک برآوردکننده سازگار صورت می گیرد از هر ثابت مثبت مفروضی کمتر خواهد بود.

نکته: شرط کافی (نه لازم) برای اینکه آماده $\hat{\theta}$ یک برآوردکننده سازگار پارامتر θ باشد این است که:

۱) $\hat{\theta}$ نااریب باشد.

۲)وقتی $n \to \infty$، $Var(\hat{\theta}) \to 0$

این شرط، شرط کافی است و شرط لازم نیست. لذا یک برآوردکننده می تواند سازگار باشد بدون اینکه نااریب باشد.

مثال ۷: نشان دهید برآوردکننده $\frac{x+1}{n+2}$ یک برآوردکننده سازگار پارامتر θ جامعه دو جمله ای است.

نکته: یک برآوردکننده اریب تنها وقتی می تواند سازگار باشد که بطور مجانبی نااریب باشد یعنی وقتی $n \to \infty$ نااریب باشد.

مثال ۸: برآوردکننده مینیماکس پارامتر θ ی دو جمله ای یعنی $\frac{X+\frac{1}{2}\sqrt{n}}{n+\sqrt{n}}$ م جانبًانااریب است.

$$E\left(\frac{x+\frac{1}{2}\sqrt{n}}{n+\sqrt{n}}\right)=\frac{E(x)+\frac{1}{2}\sqrt{n}}{n+\sqrt{n}}+\frac{n\theta+\frac{1}{2}\sqrt{n}}{n+\sqrt{n}}\neq\theta$$

$$\lim_{n\to\infty} E\left(\frac{x+\frac{1}{2}\sqrt{n}}{n+\sqrt{n}}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{n\theta+\frac{1}{2}\sqrt{n}}{n+\sqrt{n}}=\theta$$

مثال ۹: نشان دهید که واریانس نمونه ای S، برآوردکننده سازگار σ برای یک نمونه تصادفی از جامعه های نرمال است.

۱) $E(S^2)=\sigma^2$ نااریب است S^2

۲) $Var(S^2)=\frac{2\sigma^4}{n-1}$

$$\lim_{n\to\infty} Var(S^2)=\lim_{n\to\infty}\frac{2\sigma^4}{n-1}=0$$

مثال ۱۰: نشان دهید که $\overline{x}^2$ یک برآوردکننده مجانبًانااریب μ^2 است.

$$E(\bar{x}^2) = Var(\bar{x}) + [E(\bar{x})]^2$$

$$E(\bar{x}^2) = \frac{\sigma^2}{n} + \mu^2$$

$$\lim_{n\to\infty} E(\bar{x}^2) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sigma^2}{n} + \mu^2\right) = \mu^2$$

پس $\bar{x}^2$ یک برآوردکننده مجانبًاناااریب است.

۳-۵- تخمین زننده های نااریب کارا

اگر برآوردکننده‌های پارامتر θ متعلق به طبقه برآوردکننده نااریب باشند تابع ریسک، همان واریانس برآوردکننده می‌شود. در صورت وجود، برآوردکننده بهینه، $\hat{\theta}_0$، در میان این طبقه برآوردکننده ای است که به ازای تمام مقادیر θ واریانس آن از واریانس هیچ برآوردکننده نااریب دیگر تجاوز نکند. اگر چنین تخمین زننده ای وجود داشته باشد تخمین زننده $\hat{\theta}_0$ به تخمین زننده نااریب با حداقل واریانس θ معروف بوده و نیز در این طبقه از همه کاراتر است.

برای جستجو برای یک چنین برآورد کننده‌ای، تعیین یک حد پائین برای واریانس تمام برآوردکننده های نااریب مفید خواهد بود. یک چنین حدی بوسیله یک نامساوی مشهور به نامساوی کرایمر- رائو ارائه می شود.

فرض کنید $\hat{\theta}$، یک برآورد کننده نااریب برای پارامتر θ از جامعه‌ای با تابع چگالی $f_x(x;\theta)$باشد. تحت شرایط بسیار کلی $\hat{\theta}$ در نامساوی ذیل صدق می‌کند.

$$Var(\hat{\theta}) \geq \frac{1}{nE\left[\left(\frac{\partial Lnf(x;\theta)}{\partial\theta}\right)^2\right]}$$

است. اگر X گسسته باشد، $f_x(x;\theta)$ را برداشته و به جای آن از $P(x,\theta)$ استفاده می کنیم.

متاسفانه همواره برآوردکننده‌ای که عملًا دارای حد پائین کریمر- رائو باشد وجود ندارد. اما در بسیاری از موارد می‌توان نشان داد که برآوردکننده‌ای مانند $\hat{\theta}_0$ دارای چنین حدی است در این صورت $\hat{\theta}_0$ باید برآوردکننده بهینه نااریب باشد. به عبارت دیگر حد پائین کریمر- رائو متعلق به

تخمین زننده نااریب بهینه است.

قضیه: اگر $\hat{\theta}$ یک برآوردکننده نااریب θ باشد و $\mathrm{Var}(\hat{\theta})=\dfrac{1}{nE\left[\left(\dfrac{\partial \mathrm{Lnf}(x;\theta)}{\partial\theta}\right)^2\right]}$ باشد، آنگاه $\hat{\theta}$ یک برآوردکننده نااریب با کمترین واریانس از θ است.

مثال۱۱: نشان دهید $\overline{X}$ یک برآوردکننده نااریب با کمترین واریانس برای میانگین جامعه نرمال است.

$$X \sim N(\mu,\sigma^2)$$

$$f_X(x;\mu)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2} \qquad ; \qquad -\infty < x < \infty$$

$$\mathrm{Ln}\, f_X(x;\mu)=\mathrm{Ln}\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2$$

$$\frac{d\,\mathrm{Ln}\, f_X(x;\mu)}{d\mu}=\frac{x-\mu}{\sigma^2}$$

$$E\left\{\frac{d\,\mathrm{Ln}\, f_X(x;\mu)}{d\mu}\right\}^2=\frac{E(x-\mu)^2}{\sigma^4}=\frac{\sigma^2}{\sigma^4}=\frac{1}{\sigma^2}$$

$$\frac{1}{nE\left\{\dfrac{d\,\mathrm{Ln}\, f_X(x;\mu)}{d\mu}\right\}^2}=\frac{\sigma^2}{n} \qquad (1)$$

$$\mathrm{Var}(\overline{x})=\frac{\sigma^2}{n} \qquad (2)$$

$$(1)=(2)$$

لذا واریانس میانگین نمونه به حد پائین کریمر-رائو می رسد. بنابراین $\overline{X}$ برآوردکننده نااریب کمترین واریانس برای میانگین توزیع نرمال با واریانس معلوم است.

۴- روش‌های برآورد نقطه‌ای

۴-۱- روش گشتاورها

فرض کنید $x_1,\dots\dots,x_n$ یک نمونه تصادفی n تایی از یک توزیع دلخواه باشد. در اینصورت k امین گشتاور نمونه M'_k حول مبدا امین گشتاور توزیع حول مبدا بترتیب عبارتست از $M'_k = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} X_i^k}{n}$ و $E(X^k)$ که گشتاور توزیع حول مبدا، عموماًتوابعی از p پارامتر مجهول است. در روش گشتاورها با برابر قرار دادن p گشتاور اول توزیع با گشتاورهای نظیر نمونه

$$M'_1 = E(x) \qquad \bar{x} = E(x)$$

$$M'_2 = E(x^2) \qquad \frac{\sum x_i^2}{n} = E(x^2)$$

$$\vdots \qquad \vdots$$

$$\vdots \qquad \vdots$$

$$M'_P = E(x^P) \qquad \frac{\sum x_i^p}{n} = E(x^P)$$

و حل دستگاه حاصل پارامترهای مجهول جامعه بدست می‌آید. بطور خلاصه: این روش عبارتست از مساوی قرار دادن گشتاورهای جامعه با گشتاورهای نمونه و بعد حل دستگاه معادلات حاصل.

مثال۱۲: برآورد کننده های μ و σ^2 یک جامعه نرمال با میانگین مجهول μ و واریانس مجهول σ^2 را به روش گشتاورها تعیین کنید.

برای یک متغیر تصادفی با توزیع نرمال داریم:

$$E(x) = \mu$$
$$E(x^2) = \sigma^2 + \mu^2$$

در این صورت با مساوی قرار دادن دو گشتاور اول نمونه با دو گشتاور اول توزیع داریم:

$$\bar{x} = \mu$$
$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \sigma^2 + \mu^2$$

می انجامد. از حل توام این معادلات، برآورد کننده های روش گشتاورها عبارتند از:

$$\hat{\mu} = \bar{x}$$

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{n} - \bar{x}^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}{n}$$

مثال۱۳: اگر $x_1,\dots\dots,x_n$ مقادیر یک نمونه تصادفی به اندازه n از جامعه‌ای با چگالی

$f(x;\theta)=\begin{cases} \frac{2(\theta-x)}{\theta^2} & ; \ 0<x<\theta \\ 0 & \text{سایر مقادیر} \end{cases}$ باشد. برآورد کننده ای برای θ به روش گشتاورها پیدا کنید.

$$E(x) = \int_0^\theta x \frac{2(\theta - x)}{\theta^2} dx = \frac{2}{\theta^2}\int_0^\theta (\theta x - x^2) dx = \frac{2}{\theta^2}\left[\frac{1}{2}\theta x^2 - \frac{1}{3}x^3\right]_0^\theta = \frac{2}{\theta^2}\left(\frac{1}{2}\theta^3 - \frac{1}{3}\theta^3\right) =$$

$$\frac{2}{\theta^2}\cdot\frac{1}{6}\theta^3 = \frac{1}{3}\theta$$

$$M_1' = E(x)$$

$$\bar{x} = \frac{1}{3}\theta \rightarrow \hat{\theta} = 3\bar{x}$$

مثال۱۴: اگر $x_1,\dots\dots,x_n$ مقادیر یک نمونه تصادفی به اندازه n از جامعه هندسی باشد. برآورد کننده پارامتر θ ی توزیع را به روش گشتاورها بدست آورید.

$$f_x(x;\theta) = \theta(1-\theta)^{x-1}$$

$$E(x) = \frac{1}{\theta} \qquad \bar{x} = \frac{1}{\theta} \rightarrow \theta = \frac{1}{x}$$

مثال۱۵: نمونه تصادفی به اندازه n از جامعه گاما داریم. برای برآورد کردن پارامترهای α و β روش گشتاورها را بکار ببرید.

$$\left.\begin{array}{l} \bar{x} = \alpha\beta \\ \frac{\sum x_i^2}{n} = \alpha\beta^2 + \bar{x}^2 \end{array}\right\} \rightarrow \hat{\alpha} = \frac{n\bar{x}^2}{\sum(x_i - \bar{x})^2} \quad , \quad \hat{\beta} = \frac{\sum(x_i - \bar{x})^2}{n\bar{x}}$$

مثال۱۶: اگر $x_1,\dots\dots,x_n$ مقادیر یک نمونه تصادفی به اندازه n از جامعه بتا با $\beta = 1$ باشد برآوردی برای پارامتر α به روش گشتاورها بدست آورید.

$$f_x(x)=\frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}$$

$$E(x)=\frac{\alpha}{\alpha+\beta} \qquad \bar{x}=\frac{\alpha}{\alpha+1}\rightarrow\hat{\alpha}=\frac{\bar{x}}{1-\bar{x}}$$

مثال۱۷: تابع چگالی زیر داده شده است که در آن θ پارامتر مجهول می باشد. θ را به روش گشتاورها تخمن بزنید.

$$f_x(x)=\theta x^{\theta-1} \quad ; \quad 0<x<1 \quad ; \; 0<\theta<\infty$$

$$E(x)=\int_0^1 x\theta x^{\theta-1}dx=\theta\int_0^1 x^{\theta}dx=\frac{\theta}{\theta+1}\left[x^{\theta+1}\right]_0^1=\frac{\theta}{\theta+1}$$

$$\frac{\theta}{\theta+1}=\bar{x}\rightarrow\hat{\theta}=\frac{\bar{x}}{1-\bar{x}}$$

۴-۲- روش حداکثر درستنمایی (روش MLE)

این روش عبارتست از حداکثر کردن درست نمایی احتمال بدست آوردن یک مجموعه از مقادیر نمونه تصادفی. فرض کنید $x_1,x_2,.....,x_n$ یک نمونه به حجم n از یک جامعه پیوسته با چگالی احتمال $f_x(x,\theta)$ یا گسسته با احتمال $P_x(x,\theta)$ باشد که θ یک پارامتر مجهول است و باید برآورد شود. در حقیقت می خواهیم بجای برآورنده θ، آن تابعی از مشاهدات نمونه ای را قرار دهیم که احتمال نمونه به ازای آن حداکثر شود. تابع احتمال L را بصورت:

$$L=P(x_1,x_2,....,x_n|\theta)=\prod_{i=1}^{n}P(x_i=x_i)$$

$$L=f_x(x_1,x_2,....,x_n|\theta)=\prod_{i=1}^{n}f_x(x_i,\theta)$$

تعریف می کنیم که همان احتمال توام برای مشاهدات نمونه است. تخمین θ باید به گونه‌ای صورت پذیرد که بیشترین احتمال برای مشاهده مقادیر $x_1,x_2,.....,x_n$ حاصل شود. به عبارت دیگر تخمین زننده بیشترین احتمال $\hat{\theta}$ مقداری خواهد بود که به ازای آن تابع L حداکثر شود. به تابع L، تابع درست نمایی می‌گویند و $\hat{\theta}$ حاصل از این روش را با نماد $\hat{\theta}=MLE(\theta)$ نمایش می دهیم.

توجه: اغلب در حداکثر کردن تابع $f(x_1,....,x_n|\theta)$ راحت‌تر است که Ln آن حداکثر شود زیرا

Ln(L) یک تابع صعودی یکنواخت از L است و θ که L را ماکزیمم می‌کند Ln(L) را نیز ماکزیمم می کند.

مثال۱۸: اگر $x_1, x_2, \ldots, x_n$ مقادیر یک نمونه تصادفی به اندازه n از یک جامعه نرمال $N(\mu,\sigma^2)$ باشد، برآورد کننده ای برای μ و σ بیابید.

$$L = f(x_1,\ldots,x_n|\theta) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i|\mu,\sigma) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x_i-\mu)^2} =$$

$$\left(\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\right)^n e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2}$$

$$LnL = -n\,Ln\,\sigma\sqrt{2\pi} - \frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2$$

$$\frac{\partial\,Ln\,L}{\partial\mu} = \frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu) = 0 \rightarrow \sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu) = 0 \rightarrow \hat{\mu} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} = \bar{x}$$

$$\frac{\partial LnL}{\partial\delta} = -\frac{n}{\delta} + \frac{1}{\delta^3}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2 = 0 \Rightarrow \hat{\sigma}^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}{n}$$

مثال۱۹: اگر x_1 . .. x_n مقادیر یک نمونه تصادفی به اندازه n از جامعه برنولی باشد. MLE پارامتر برنولی را بدست آورید.

$$p_x(x_i,p) = p^{x_i}(1-p)^{1-x_i},\ x_i = 0,1$$

$$L = p^{\sum x_i}(1-p)^{n-\sum x_i}$$

$$LnL = (Lnp)\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right) + [Ln(1-p)]\left(n - \sum_{i=1}^{n} x_i\right)$$

$$\frac{dLnL}{dp} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{p} - n - \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{1-p} = 0 \Rightarrow \frac{\sum x_i}{p} = \frac{n-\sum x_i}{1-p} \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} x_1 = np \Rightarrow p = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$$

$$\hat{p} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} = \bar{x}$$

مثال۲۰: اگر x_1 و... وx_2 نمونه ای به اندازه n از جامعه دو جمله ای با پارامتر $p=\theta$ باشد. MLE

پارامتر دوجمله‌ای را بدست آورید.

راه حل اول:

$$L(\theta)=f(x;\theta)=\binom{n}{n}\theta^{x}(1-\theta)^{n-x}$$

$$\frac{\partial f}{\partial\theta}=\binom{n}{x}\left[x\theta^{x-1}(1-\theta)^{n-x}-(n-x)\theta^{x}(1-\theta)^{n-x-1}\right]=0$$

$$f_X(x;\theta)\left[x\theta^{-1}-(n-x)(1-\theta)^{-1}\right]=0$$

$$\frac{x}{\theta}-\frac{n-x}{1-\theta}=0\Rightarrow x=n\theta\Rightarrow\hat{\theta}=\frac{x}{n}$$

راه حل دوم:

$$\operatorname{Ln}L(\theta)=\operatorname{Ln}\binom{n}{x}+x\operatorname{Ln}\theta+(n-x)\operatorname{Ln}(1-\theta)$$

$$\frac{d\operatorname{Ln}L(\theta)}{d\theta}=\frac{x}{\theta}-\frac{n-x}{1-\theta}=0\Rightarrow\hat{\theta}=\frac{x}{n}$$

خواص MLE

۱- با افزایش n توزیع MLE به توزیع نرمال میل می‌کند و درزمانیکه $MLE, n\to\infty$ توزیع نرمال دارد.

۲-در زمانیکه $n\to\infty$ ، MLE سازگار است و به تبع نااریب است.

۳- اگر $\hat{\theta}$ برآورد کننده به روش حداکثر درست نمایی برای θ باشد و n به سمت ∞ میل کند. انگاه واریانس $\hat{\theta}$برابر حد پایین نامساوی کرایمر – رائو خواهد شد.

۴- MLE دارای خاصیت پایایی است یعنی اگر فرض کنید $\hat{\theta}=(\hat{\theta}_1,\ldots,\hat{\theta}_k)$ که در آن $\hat{\theta}_j=\hat{f}(x_1,\ldots,x_n)$ است که برآوردکننده درستنمایی ماکزیمم $\theta=(\theta_1,\ldots,\theta_4)$ در چگالی $f(\theta_1,\ldots,\theta_n)$ باشد، آنگاه برآوردکننده درستنمایی ماکزیمم $\tau(\theta)=(\tau_1(\theta),\ldots,\tau_r(\theta))$ برابر است با $\tau(\hat{\theta})=(\tau_1(\hat{\theta}),\ldots,\tau_r(\hat{\theta}))$

مثال۲۱: فرض کنید $x\sim N(\mu,1)$ برآورد کننده MLE پارامتر $\alpha=\mu^2$ را پیدا کنید.

$$\hat{\mu}=\bar{x}\Rightarrow\hat{\alpha}=\hat{\mu}^2=\bar{x}^2$$

۵- برآوردکننده های کافی

برآورد کننده ای مانند $\hat{\theta}$ را کافی می نامیم در صورتی که از همه اطلاعات یک نمونه، مربوط به برآورد پارامتر θ یک جامعه بهره‌برداری کند. یعنی اگر تمام دانشی را که می توانیم با مشخص کردن مقادیر فردی نمونه ها و ترتیب آنها بدست آوریم، بتوانیم تنها با مشاهده مقدار آماره $\hat{\theta}$ هم بدست آوریم. این را می توان بر حسب توزیع شرطی مقادیر نمونه به فرض $\hat{\theta}$ بیان کرد. این کمیت با عبارت زیر داده می شود.

$$f\left(x_1, x_2 ......, x_n \middle| \hat{\theta}\right) = \frac{f\left(x_1, x_2 ...., x_n, \hat{\theta}\right)}{g\left(\hat{\theta}\right)}$$

اگر این عبارت به $\hat{\theta}$ بستگی داشته باشد، مقادیر خاص $x_n, ..., x_2, x_1$ که $\hat{\theta}$ را بدست می دهند برای برخی مقادیر θ محتملتر از سایر مقادیرند و دانستن این مقادیر نمونه ای به برآورد θ کمک خواهد کرد. اگر این عبارت به θ بستگی نداشته باشد، مقادیر خاص $x_n, ..., x_2, x_1$ که $\hat{\theta}$ را بدست می دهند برای هر مقدار θ به یک اندازه محتمل اند و دانستن این مقادیر نمونه ای به برآورد θ کمکی نخواهد کرد.

تعریف: آماره $\hat{\theta}$ یک برآوردکننده کافی پارامتر θ است اگر و تنها اگر به ازای هر مقدار $\hat{\theta}$، توزیع شرطی نمونه تصادفی $x_n, ..., x_2, x_1$ به فرض $\hat{\theta}$، مستقل از θ باشد.

مثال۲۲: اگر $x_n, ..., x_2, x_1$ متغیرهای تصادفی برنولی با پارامتر یکسان θ باشند. نشان دهید که آماره $\hat{\theta} = \frac{X}{n}$ که در آن $X = x_1 + ... + x_n$، برآورد کننده کافی برای θ است.

$$f(x;\theta) = \theta^{x_i}(1-\theta)^{1-x_i} \quad ; \quad x_i = 0,1$$

$$f(x_1, ..., x_n) = \prod_{i=1}^{n} \theta^{x_i}(1-\theta)^{1-x_i} = \theta^{\sum x_i}(1-\theta)^{n-\sum x_i} = \theta^{x}(1-\theta)^{n-x} = \theta^{n\hat{\theta}}(1-\theta)^{n-n\hat{\theta}}$$

X یک متغیر دو جمله ای با پارامترهای n و θ است لذا:

$$b(x;n,\theta)=\binom{n}{x}\theta^{x}(1-\theta)^{n-x}$$

$$g(\hat{\theta})=\binom{n}{n\hat{\theta}}\theta^{n\hat{\theta}}(1-\theta)^{n-n\hat{\theta}} \quad ; \qquad \hat{\theta}=0,\frac{1}{n},\ldots\ldots,1$$

$$f(x_1,\ldots.,x_n|\hat{\theta})=\frac{f(x_1,\ldots.,x_n)}{g(\hat{\theta})}=\frac{\theta^{n\hat{\theta}}(1-\theta)^{n-n\hat{\theta}}}{\binom{n}{n\hat{\theta}}\theta^{n\hat{\theta}}(1-\theta)^{n-n\hat{\theta}}}=\frac{1}{\binom{n}{x}}$$

که به θ بستگی ندارد.

مثال۲۳: نشان دهید که آماره $y=\frac{1}{6}(x_1+2x_2+3x_3)$ برای برآورد پارامتر θ ی جامعه برنولی، کافی نیست.

باید نشان دهیم $f(x_1,x_2,x_3|y)=\frac{f(x_1,x_2,x_3,y)}{g(y)}$ به ازای برخی مقادیر x_3,x_2,x_1 مستقل از θ نیست. بنابراین حالت خاصی را در نظر می گیریم که در آن $x_3=0,x_2=1,x_1=1$ بطوری که

$$f\left(1,1,0\middle|y=\frac{1}{2}\right)=\frac{P\left(x_1=1,x_2=1,x_3=0,y=\frac{1}{2}\right)}{p\left(y=\frac{1}{2}\right)}=\frac{f(1,1,0)}{f(1,1,0)+f(0,0,1)}=\frac{\theta^2(1-\theta)}{\theta^2(1-\theta)+\theta(1-\theta)^2}=\theta$$

که به θ بستگی دارد.

قضیه: آماره θ یک برآوردکننده کافی پارامتر θ است اگر و فقط اگر چگالی یا توزیع احتمال توام نمونه تصادفی را بتوان تجزیه کرد بطوری که

$$f(x_1,\ldots.,x_n;\theta)=g(\hat{\theta},\theta).h(x_1,\ldots.,x_n)$$

که در آن $g(\hat{\theta},\theta)$ تنها به $\hat{\theta}$ و θ بستگی دارد و $h(x_1,\ldots.,x_n)$ به θ بستگی ندارد.

مثال۲۴: نشان دهید که $\overline{x}$ یک برآورد کننده کافی μ جامعه نرمال یا واریانس معلوم σ^2 است.

$$f(x_1, x_2, ..., x_n, \mu) = \left(\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\right)^n .e^{-\frac{1}{2}\sum\left(\frac{x_i-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

$$\sum(x_i - \mu)^2 = \sum(x_i - \overline{x})^2 + n(\overline{x} - \mu)^2$$

$$f(x_1, ..., x_n; \mu) = \left\{\frac{\sqrt{n}}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\overline{x}-\mu}{\sigma\sqrt{n}}\right)^2}\right\} \times \left\{\frac{1}{\sqrt{n}}\left(\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\right)^{n-1} .e^{-\frac{1}{2}\cdot\sum\left(\frac{x_i-\overline{x}}{\sigma}\right)^2}\right\}$$

که در آن اولین عامل سمت راست تنها به برآورد $\overline{x}$ و به میانگین جامعه، μ، بستگی دارد و دومین عامل شامل μ نیست. بنابراین $\overline{x}$ یک برآورد کننده کافی μجامعه نرمال با واریانس معلوم σ است.