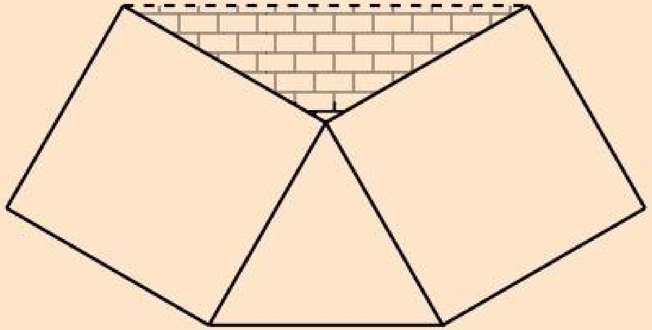
۱۲۵ـ در یک مثلث متساوی‌الاضلاع، بر روی دو ضلع آن دو مربّع ساخته شده است. مساحت مثلث سایه زده چند برابر مساحت مثلث اصلی است؟



۱) $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ ۲) $\frac{۲\sqrt{۳}}{۳}$ ۳) ۱ ۴) $\sqrt{۳}$

مثلث سایه‌زده، یک مثلث متساوی‌الساقین است.

$۱۲۰ = (۹۰ + ۹۰ + ۶۰) - ۳۶۰ =$ زاویه رأس

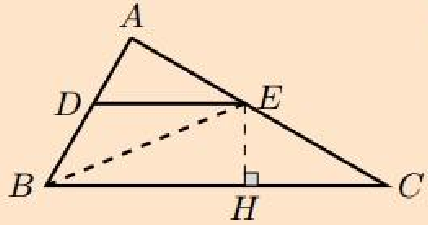
$$S_{\text{مثلث سایه‌زده}} = \frac{۱}{۲}a^۲ \sin ۱۲۰^\circ = (\frac{۱}{۲})(a^۲)(\frac{\sqrt{۳}}{۲}) = \frac{\sqrt{۳}}{۴}a^۲ = S_{\text{مثلث متساوی‌الاضلاع}}$$

$$\frac{S_{\text{مثلث سایه‌زده}}}{S_{\text{مثلث متساوی‌الاضلاع}}} = ۱$$

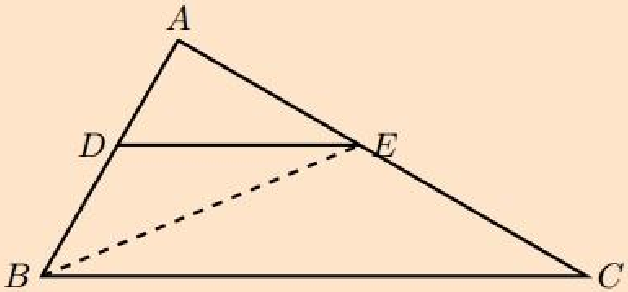
گزینه ۳

۱۲۶ـ در مثلث ABC پاره‌خط DE موازی ضلع BC و $AD = \frac{۴}{۵}DB$ است. مساحت مثلث EBC چند برابر مساحت مثلث EBD است؟

۱) ۲ ۲) ۲٫۲۵ ۳) ۲٫۵ ۴) ۲٫۷۵



گزینه ۲

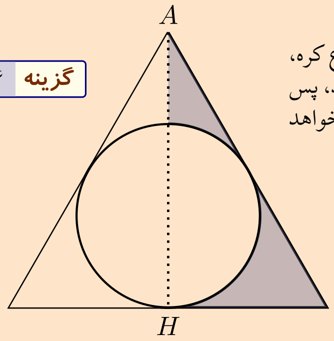


(چون DE و BC موازیند) EH ارتفاع هر دو مثلث EBC و EBD است، پس:

$$\frac{S_{EBC}}{S_{EBD}} = \frac{\frac{۱}{۲}BC \times EH}{\frac{۱}{۲}DE \times EH} = \frac{BC}{DE} \overset{\text{تالس}}{\Longrightarrow} = \frac{AB}{AD} = \frac{AD + DB}{AD} = \frac{\frac{۴}{۵}DB + DB}{\frac{۴}{۵}DB} = \frac{\frac{۴}{۵} + ۱}{\frac{۴}{۵}} = \frac{\frac{۹}{۵}}{\frac{۴}{۵}} = \frac{۹}{۴} = ۲٫۲۵$$

۱۲۷ـ در مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع $۲\sqrt{۳}$ واحد، حجم حاصل از دوران هر دو سطح سایه‌زده شده، در حول ارتفاع AH کدام است؟

۱) $\frac{۴\pi}{۳}$ ۲) $\frac{۳\pi}{۲}$ ۳) ۲π ۴) $\frac{۵\pi}{۳}$



گزینه ۴

$\frac{۱}{۳}\pi r^۲ h - \frac{۴}{۳}\pi R^۳ =$ حجم کره $-$ حجم مخروط $=$ حجم حاصل از دوران

شعاع قاعده مخروط نصف ضلع مثلث، و ارتفاع آن، همان ارتفاع مثلث می‌باشد، برای یافتن شعاع کره، چون محل برخورد میانه‌ها و نیمسازها و ارتفاع‌های مثلث متساوی الاضلاع، همه برهم منطبق‌اند، پس مرکز دایره‌ی محاطی نیز همین نقطه می‌باشد و شعاع آن یک‌سوم میانه(که همان ارتفاع است) خواهد بود.:

$$r = \sqrt{۳}, h = AH = \frac{\sqrt{۳}}{۲}(۲\sqrt{۳}) = ۳, R = \frac{۱}{۳}AH = \frac{۱}{۳}(۳) = ۱$$

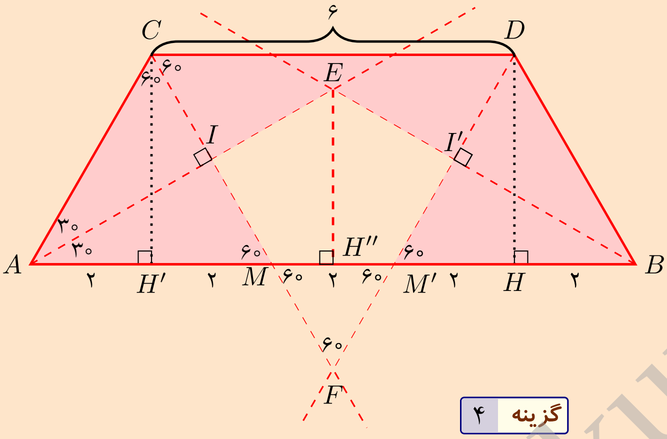
$$\Rightarrow V = \frac{۱}{۳}\pi(\sqrt{۳})^۲(۳) - \frac{۴}{۳}\pi(۱)^۳ = ۳\pi - \frac{۴}{۳}\pi = \frac{۵\pi}{۳}$$

۱۲۸ـ در یک ذوزنقه متساوی‌الساقین، یکی از زاویه‌ها ۶۰ درجه و اندازه قاعده‌ها ۶ و ۱۰ واحد است. مساحت چهارضلعی حاصل از برخورد نیم‌سازهای داخلی این ذوزنقه چند برابر $\frac{\sqrt{۳}}{۳}$ است؟

۱) ۸ ۲) ۱۰ ۳) ۱۴ ۴) ۱۶

مثلث‌های ACM و $DM'B$ و $MM'F$ متساوی الاضلاع هستند.

در مثلث AEB ارتفاع وارد بر ضلع AB برابر است با:



$$\tan ۳۰^\circ = \frac{EH''}{AH''} \Rightarrow EH'' = AH'' \times \tan ۳۰^\circ =$$

$$۵ \times \frac{\sqrt{۳}}{۳} = \frac{۵\sqrt{۳}}{۳} \Rightarrow EH'' = \frac{۵\sqrt{۳}}{۳} \Rightarrow$$

$$S_{IEI'F} = S_{IEI'M'M} + S_{MM'F} = S_{AEB} - ۲ \times S_{AIM} + S_{MM'F}$$

$$= S_{AEB} - S_{ACM} + S_{MM'F} =$$

$$\frac{۱}{۲}(AB)(EH'') - \frac{\sqrt{۳}}{۴}(۴)^۲ + \frac{\sqrt{۳}}{۴}(۲)^۲$$

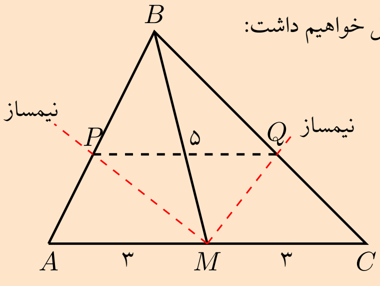
$$= \frac{۱}{۲}(۱۰)(\frac{۵\sqrt{۳}}{۳}) - ۴\sqrt{۳} + \sqrt{۳} = \frac{(۲۵ - ۱۲ + ۳)(\sqrt{۳})}{۳} = \frac{۱۶\sqrt{۳}}{۳}$$

گزینه ۴

۱۲۹ـ در مثلث ABC ضلع $AC = ۶$ و میانه $BM = ۵$ ، نیمسازهای دو زاویه AMB و CMB دو ضلع دیگر این مثلث را در P و Q قطع می‌کند. اندازه PQ کدام است؟

۱) ۳٫۲۵ ۲) ۳٫۵ ۳) ۳٫۷۵ ۴) ۴

با رسم شکل خواهیم داشت:



نکته

در هر مثلث، نیمساز هر زاویه داخلی، ضلع مقابل آن زاویه را به نسبت اضلاع مجاور آن، قطع می کند.

پس در مثلث‌های AMB و BMC خواهیم داشت:

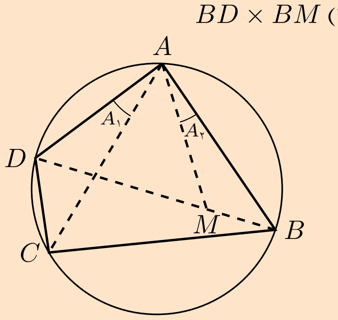
$$\begin{cases} \frac{BP}{AP} = \frac{۵}{۳} \\ \frac{BQ}{QC} = \frac{۵}{۳} \end{cases} \Rightarrow \frac{BP}{AP} = \frac{BQ}{QC} \xRightarrow{\text{عکس تالس}} PQ \parallel AC$$

$$\Rightarrow \frac{PQ}{AC} = \frac{BP}{AB} \xRightarrow{\frac{BP}{AP} = \frac{۵}{۳} \Rightarrow \frac{BP}{AB} = \frac{۵}{۵+۳} = \frac{۵}{۸}} \frac{PQ}{۶} = \frac{۵}{۸} \Rightarrow PQ = \frac{۳۰}{۸} = ۳٫۷۵$$

گزینه ۳

۱۳۰ـ در شکل مقابل $\hat{A}_۱ = \hat{A}_۲$ حاصل $AD \times BC$ برابر کدام است؟

۱) $DM \times AC$ ۲) $BM \times AC$ ۳) $AB \times CD$ ۴) $BD \times BM$



در این‌گونه مسائل، باید دو مثلث متشابه پیدا کنیم که هریک از پاره‌خط‌های داده شده، ضلعِ یکی از مثلث‌ها باشد.

$$\begin{cases} A\hat{D}M = A\hat{C}B = \frac{\overset{\frown}{AB}}{۲} \\ D\hat{A}M = \hat{A}_۱ + C\hat{A}M = \hat{A}_۲ + C\hat{A}M = C\hat{A}B \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \overset{\triangle}{ADM} \simeq \overset{\triangle}{ABC} \Rightarrow \frac{AD}{AC} = \frac{DM}{BC} \Rightarrow AD \times BC = DM \times AC$$

گزینه ۱

۱۳۱ـ تصویر خط به معادله $۲x+۳y=۶$ ، تحت تبدیل $T(x,y)=(۲y-۱,x+۳)$ ، از نقطه‌ای با کدام مختصات می‌گذرد؟

۱) $(-۳,۲)$ ۲) $(۱,-۱)$ ۳) $(۵,۰)$ ۴) $(۷,۰)$

معادله خط داده شده به صورت $y=۲-\frac{۲}{۳}x$ است، اگر تصویر هر نقطه به صورت (X,Y) باشد:

$$(X,Y)=T(x,y)=(۲y-۱,x+۳)=$$

$$(۴-\frac{۴}{۳}x-۱,x+۳)=(۳-\frac{۴}{۳}x,x+۳)\Rightarrow\begin{cases}X=۳-\frac{۴}{۳}x\\Y=x+۳\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}۳X=۹-۴x\\۴Y=۴x+۱۲\end{cases}\Rightarrow ۳X+۴Y=۲۱\Rightarrow(۷,۰)$$

گزینه ۴

۱۳۲ـ دو خط متنافر d و d' و نقطه A مفروض‌اند. می‌خواهیم از نقطه A خطی بگذرد و بر هر دو خط d و d' عمود باشد، تعداد جواب کدام است؟

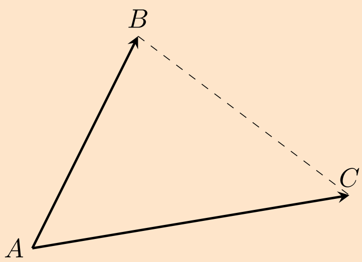
۱)فاقد جواب ۲)همواره یک جواب ۳)بیشمار جواب ۴)یک جواب یا فاقد جواب

می‌دانیم که هر دو خط متنافر دقیقا یک عمود مشترک دارند، پس جواب مسئله باید با این خط موازی باشد، و روشن است که همواره تنها یک خط وجود دارد که با عمود مشترک موازی باشد و از نقطه A بگذرد. نکته گمراه‌کننده این سوال این است که ممکن است این اشتباه ایجاد شود که خطی که از A می‌گذرد، باید دو خط داده شده را لزوماً قطع کند. در حالی که عمود بودن دوخط یعنی این دو خط، صرفاً بردارهای هادی عمود برهم داشته باشند.

گزینه ۲

۱۳۳ـ سه نقطه $A(۲,۱,۰)$ و $B(۳,-۱,۲)$ و $C(-۱,۱,۳)$ ، رأس‌های مثلثی هستند، $\cos A$ کدام است؟

۱) $\frac{\sqrt{۲}}{۶}$ ۲) $\frac{\sqrt{۲}}{۴}$ ۳) $\frac{\sqrt{۳}}{۶}$ ۴) $\frac{\sqrt{۳}}{۴}$



می‌توانیم از فرمول هندسی ضرب داخلی بردارها استفاده کنیم:

$$\cos A=\frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{|AB||AC|}\qquad\begin{cases}\overrightarrow{AB}=B-A=(۱,-۲,۲)\\\overrightarrow{AC}=C-A=(-۳,۰,۳)\end{cases}$$

$$\Rightarrow|AB|=\sqrt{۹}=۳\,,\ |AC|=\sqrt{۱۸}=۳\sqrt{۲}\,,\ \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=-۳+۰+۶=۳$$

$$\cos A=\frac{۳}{۳(۳\sqrt{۲})}=\frac{۱}{۳\sqrt{۲}}=\frac{\sqrt{۲}}{۶}$$

گزینه ۱

۱۳۴ـ دو بردار با تصاویر $a=(۱,-۲,۳)$ و $b=(۲,۱,-۱)$ مفروض هستند. حجم متوازی‌سطوح که بر روی سه بردار a و b و $a\times b$ ساخته می‌شود کدام است؟

۱) ۵۴ ۲) ۷۲ ۳) ۷۵ ۴) ۸۰

حجم متوازی‌السطوح ساخته شده روی سه بردار a و b و c برابر است با:
$|c\cdot(a\times b)|$

$$|c\cdot(a\times b)|=|(a\times b)\cdot(a\times b)|=|a\times b|^{۲}$$

$$\begin{vmatrix}\hat{i}&\hat{j}&\hat{k}\\۱&-۲&۳\\۲&۱&-۱\end{vmatrix}=(-۱,۷,۵)\Rightarrow|a\times b|^{۲}=(-۱)^{۲}+۷^{۲}+۵^{۲}=۷۵$$

گزینه ۳

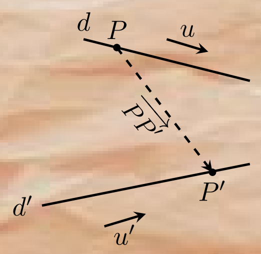
۱۳۵ـ طول عمود مشترک دو خط به معادلات $\frac{x-۲}{۱}=\frac{y+۲}{-۱}=\frac{z}{۳}$ و $\begin{cases}x=۲y-۱\\z=۳y-۲\end{cases}$ کدام است؟

۱) $\sqrt{۳}$ ۲) $\sqrt{۶}$ ۳) $۲\sqrt{۳}$ ۴) $۲\sqrt{۶}$

نکته

طول عمود مشترک دو خط متنافر d و d' از رابطه زیر بدست می‌آید:

$$\frac{\left|(u\times u')\cdot(\overrightarrow{PP'})\right|}{|u\times u'|}$$



P و P' دو نقطه دلخواه روی هر یک از خطها هستند.

ابتدا معادله خط دوم را به صورت متقارن می‌نویسیم:

$$d':\begin{cases}x=۲y-۱\\z=۳y-۲\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}y=\frac{x+۱}{۲}\\y=\frac{z+۲}{۳}\end{cases}\Rightarrow\frac{x+۱}{۲}=y=\frac{z+۲}{۳}$$

$$d:\frac{x-۲}{۱}=\frac{y+۲}{-۱}=\frac{z}{۳}\Rightarrow P=(۲,-۲,۰)\,,\ P'=(-۱,۰,-۲)$$

$$\overrightarrow{PP'}=P'-P=(-۳,۲,-۲)\,,\ u=(۱,-۱,۳)\,,\ u'=(۲,۱,۳)$$

$$u\times u'=\begin{vmatrix}\hat{i}&\hat{j}&\hat{k}\\۱&-۱&۳\\۲&۱&۳\end{vmatrix}=(-۶,۳,۳)\Rightarrow(u\times u')\cdot(\overrightarrow{PP'})=(-۶,۳,۳)\cdot(-۳,۲,-۲)=-۹+۶-۶=۱۸$$

$$|u\times u'|=\sqrt{۳۶+۹+۹}=\sqrt{۵۴}=۳\sqrt{۶}\Rightarrow \text{طول عمود مشترک}=\frac{|۱۸|}{۳\sqrt{۶}}=\frac{۶}{\sqrt{۶}}=\sqrt{۶}$$

گزینه ۲

۱۳۶ـ در بیضی به معادله $۳x^۲+۴y^۲+۱۸x-۱۶y=۵$ ، مجموع فواصل هر نقطه بیضی از دو کانون آن، کدام است؟

۱) $۴\sqrt{۲}$ ۲) ۶ ۳) $۴\sqrt{۳}$ ۴) ۸

طبق تعریف، در هر بیضی مجموع فاصله‌های هر نقطه از بیضی از دو کانون آن مقداری ثابت و برابر $۲a$ است که همان قطر بزرگ بیضی می باشد.

$$۳x^۲+۴y^۲+۱۸x-۱۶y=۵ \Rightarrow ۳(x^۲+۶x)+۴(y^۲-۴y)=۵ \Rightarrow ۳(x+۳)^۲+۴(y-۲)^۲=۵+۲۷+۱۶=۴۸ \Rightarrow$$
$$\frac{۳(x+۳)^۲}{۴۸}+\frac{۴(y-۲)^۲}{۴۸}=۱ \Rightarrow \frac{(x+۳)^۲}{۱۶}+\frac{(y-۲)^۲}{۱۲}=۱ \xrightarrow{\text{بیضی افقی}} a^۲=۱۶ \Rightarrow a=۴ \Rightarrow ۲a=۸$$

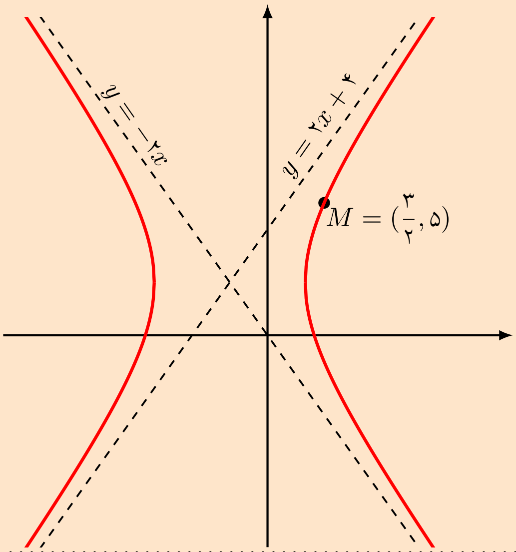
گزینه ۴

۱۳۷ـ دو خط به معادلات $y=-۲x$ و $y=۲x+۴$ ، مجانب‌های یک هذلولی و $M(\frac{۳}{۲},۵)$ یکی از نقاط آن است. فاصله دو کانون این هذلولی کدام است؟

۱) $۲\sqrt{۳}$ ۲) $۲\sqrt{۵}$ ۳) $۴\sqrt{۳}$ ۴) $۴\sqrt{۵}$

محل برخورد دو مجانب، مرکز هذلولی است: $\begin{cases} y=-۲x\\ y=۲x+۴\end{cases} \Rightarrow -۲x=۲x+۴ \Rightarrow -۴x=۴ \Rightarrow x=-۱, y=۲ \Rightarrow (\alpha,\beta)=(-۱,۲)$

برای اینکه بدانیم هذلولی افقی است یا قائم، کافی است بدانیم که نقطه M نسبت به دو مجانب کجا قرار می گیرد.



$x=\frac{۳}{۲} \Rightarrow y=\begin{cases} y=-۲x=-۲(\frac{۳}{۲})=-۳\\ y=۲x+۴=۲(\frac{۳}{۲})+۴=۷; -۳<۵<۷\end{cases}$ $\Rightarrow$ هذلولی افقی

$\Rightarrow \frac{(x-\alpha)^۲}{a^۲}-\frac{(y-\beta)^۲}{b^۲}=۱ \Rightarrow$ معادله دو مجانب: $\frac{x-\alpha}{a}=\pm\frac{y-\beta}{b}$

$\Rightarrow$ شیب دو مجانب: $\pm\frac{b}{a} \Rightarrow \frac{b}{a}=۲ \Rightarrow b=۲a \Rightarrow \frac{(x+۱)^۲}{a^۲}-\frac{(y-۲)^۲}{۴a^۲}=۱$

$\Rightarrow$ مختصات M در معادله هذلولی صدق می‌کند $\Rightarrow ۴(x+۱)^۲-(y-۲)^۲=۴a^۲$

$۴(\frac{۳}{۲}+۱)^۲-(۵-۲)^۲=۴a^۲ \Rightarrow ۲۵-۹=۱۶=۴a^۲$

$\Rightarrow a^۲=۴ \Rightarrow a=۲\ ,\ b=۴$ فاصله دو کانون $=۲c=۲\sqrt{a^۲+b^۲}=۲\sqrt{۲۰}=۴\sqrt{۵}$

گزینه ۴

۱۳۸ـ اگر دترمینان $\begin{vmatrix}۱&۱&۱\\bc&ac&ab\\ac&ab&bc\end{vmatrix}=D$ باشد، حاصل دترمینان $\begin{vmatrix}a+b&b&ab\\b+c&c&bc\\a+c&a&ac\end{vmatrix}$ کدام است؟

۱) $-D$ ۲) D ۳) $(a+b+c)D$ ۴) $abcD$

در دترمینان اولیه از abc در سطر دوم و سطر سوم فاکتور می‌گیریم:

$$D=\begin{vmatrix}۱&۱&۱\\bc&ac&ab\\ac&ab&bc\end{vmatrix}=(abc)^۲\begin{vmatrix}۱&۱&۱\\\frac{۱}{a}&\frac{۱}{b}&\frac{۱}{c}\\\frac{۱}{b}&\frac{۱}{c}&\frac{۱}{a}\end{vmatrix}\ ,\ \begin{vmatrix}a+b&b&ab\\b+c&c&bc\\a+c&a&ac\end{vmatrix}\xrightarrow{C_۱-C_۲\to C_۱}=\begin{vmatrix}a&b&ab\\b&c&bc\\c&a&ac\end{vmatrix}\xrightarrow{\text{از } ab \text{ در سطر اول، } bc \text{ در سطر دوم و } ac \text{ در سطر سوم فاکتور می‌گیریم}}$$

$$=(ab)(bc)(ac)\begin{vmatrix}\frac{۱}{b}&\frac{۱}{a}&۱\\\frac{۱}{c}&\frac{۱}{b}&۱\\\frac{۱}{a}&\frac{۱}{c}&۱\end{vmatrix}=(abc)^۲\begin{vmatrix}\frac{۱}{b}&\frac{۱}{a}&۱\\\frac{۱}{c}&\frac{۱}{b}&۱\\\frac{۱}{a}&\frac{۱}{c}&۱\end{vmatrix}\xrightarrow{\text{ترانهاده}}=(abc)^۲\begin{vmatrix}\frac{۱}{b}&\frac{۱}{c}&\frac{۱}{a}\\\frac{۱}{a}&\frac{۱}{b}&\frac{۱}{c}\\۱&۱&۱\end{vmatrix}=-(abc)^۲\begin{vmatrix}۱&۱&۱\\\frac{۱}{a}&\frac{۱}{b}&\frac{۱}{c}\\\frac{۱}{b}&\frac{۱}{c}&\frac{۱}{a}\end{vmatrix}=-D$$

گزینه ۱

۱۳۹ـ اگر A ماتریس تبدیل $T(x,y)=(۲x-y,۳x-۴y)$ باشد، و I ماتریس همانی، α و β دو عدد حقیقی باشند به طوری که $\alpha A+\beta I=A^{-۱}$ ، مقدار β کدام است؟

۱) $-\frac{۳}{۵}$ ۲) $-\frac{۱}{۵}$ ۳) $\frac{۲}{۵}$ ۴) $\frac{۴}{۵}$

$$A=\begin{bmatrix}۲&-۱\\۳&-۴\end{bmatrix}\Rightarrow A^{-۱}=-\frac{۱}{۵}\begin{bmatrix}-۴&۱\\-۳&۲\end{bmatrix}\Rightarrow \alpha\begin{bmatrix}۲&-۱\\۳&-۴\end{bmatrix}+\beta\begin{bmatrix}۱&۰\\۰&۱\end{bmatrix}=-\frac{۱}{۵}\begin{bmatrix}-۴&۱\\-۳&۲\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{سطر اول را در نظر می گیریم}}\begin{cases}۲\alpha+\beta=+\frac{۴}{۵}\\۳\alpha+۰=+\frac{۳}{۵}\end{cases}\Rightarrow\alpha=\frac{۱}{۵}\Rightarrow\frac{۴}{۵}-\frac{۲}{۵}=\frac{۲}{۵}$$

گزینه ۳

۱۴۰ـ سه صفحه با معادله ماتریسی زیر داده شده است. وضعیّت فصل مشترک دو به دو صفحات نسبت به هم چگونه است؟

$$\begin{bmatrix} ۲ & -۱ & ۱ \\ ۱ & ۳ & -۱ \\ ۱ & -۱۱ & ۵ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۶ \\ ۴ \\ ۲ \end{bmatrix}$$

۱)موازی هم ۲)منطبق بر هم
۳)عمود بر هم ۴)فاقد یکی از فصل مشترک‌ها

ابتدا دترمینان ضرایب را پیدا می کنیم:

$$\begin{vmatrix} ۲ & -۱ & ۱ \\ ۱ & ۳ & -۱ \\ ۱ & -۱۱ & ۵ \end{vmatrix} = ۲(۱۵-۱۱) - ۱(-۱-۵) + ۱(-۱۱-۳) = ۸ + ۶ - ۱۴ = ۰$$

وقتی دترمینان ضرایب صفر باشد، یعنی دستگاه جواب منحصر به فرد ندارد. همچنین، هیچ دو صفحه ای با هم موازی نیستند (بردارهای نرمال مضرب هم نیستند).
پس دو حالت کلی وجود دارد:

۱) سه صفحه به صورت مثلثی متقاطع‌اند و در این صورت فصل مشترک‌ها، سه خطِ دو به دو با هم موازی هستند که هیچ جوابی نداریم. $\Delta = ۰ \neq \Delta_x$ و Δ_y و Δ_z

۲)هر سه صفحه در یک خط با هم متقاطع‌اند که در این صورت بیشمار جواب خواهیم داشت. $\Delta = ۰ = \Delta_x = \Delta_y = \Delta_z = ۰$

(در هر دو مورد، اگر تنها یکی از سه دترمینانِ Δ_z و Δ_y و Δ_x را بررسی کنیم کافی است.)

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} ۶ & -۱ & ۱ \\ ۴ & ۳ & -۱ \\ ۲ & -۱۱ & ۵ \end{vmatrix} = ۶(۱۵-۱۱) - ۱(-۲-۲۰) + ۱(-۴۴-۶) = ۲۴ + ۲۲ - ۵۰ = -۴ \neq ۰ \Rightarrow \text{موازی}$$

گزینه ۱

۱۴۱ـ با توجه به جدول آماری دسته‌بندی شده زیر، مقدار ضریب تغییرات داده‌های x کدام است؟

$x-۴۴$	-۳	-۱	۱	۳	۵
فراوانی	۴	۷	۵	۳	۱

۱) ۰/۰۵ ۲) ۰/۰۸ ۳) ۰/۱ ۴) ۰/۲

اگر y_i را برابر $x_i - ۴۴$ فرض کنیم:

$$y_i = x_i - ۴۴ \Rightarrow x_i = y_i + ۴۴ \Rightarrow \bar{x}_i = \bar{y}_i + ۴۴ = \frac{-۱۲-۷+۵+۹+۵}{۴+۷+۵+۳+۱} + ۴۴ == ۰ + ۴۴ = ۴۴$$

$$, \sigma_{x_i} = \sigma_{(x_i-۴۴)} = \sigma_{(y_i)} = \sqrt{\frac{\sum_{i=۱}^{n} f_i(\bar{y}-y_i)^۲}{n}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=۱}^{n} f_i(۰-y_i)^۲}{n}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=۱}^{n} f_i(y_i)^۲}{n}}$$

نکته

کم یا زیاد کردن داده‌ها به همان میزان میانگین را کم یا زیاد می کند، اما در واریانس و انحراف معیار بی تأثیر است.

$$= \sqrt{\frac{۴(۹)+۷(۱)+۵(۱)+۳(۹)+۱(۲۵)}{۲۰}} = \sqrt{\frac{۳۶+۷+۵+۲۷+۲۵}{۲۰}} = \sqrt{\frac{۱۰۰}{۲۰}} = \sqrt{۵} \Rightarrow (C \cdot V)_x = \frac{\sigma_x}{\bar{x}} = \frac{\sqrt{۵}}{۴۴} \simeq ۰/۰۵$$

گزینه ۱

۱۴۲ـ نمرات آزمون مهارت فنی دو کارگر A و B به صورت زیر است، دقت عمل کدام بیشتر است؟

A :	۱۵	۱۴	۱۵	۱۶	۱۷	۱۹
B :	۱۶	۱۴	۱۷	۱۴	۱۷	۱۸

۱) A ۲) B
۳)یکسان ۴)غیر قابل پیش‌بینی

$$\bar{x}_A = \frac{۱۵+۱۴+۱۵+۱۶+۱۷+۱۹}{۶} = \frac{۶۰+۳۶}{۶} = \frac{۹۶}{۶} = ۱۶$$

$$\bar{y}_A = \frac{۱۶+۱۴+۱۷+۱۴+۱۷+۱۸}{۶} = \frac{۶۰+۳۶}{۶} = \frac{۹۶}{۶} = ۱۶ \Rightarrow y_A = \bar{x}_A$$

وقتی میانگین‌ها مساوی باشند، دقت کسی که واریانس کمتری دارد بیشتر است، زیرا ضریب تغییرات کمتری خواهد داشت.

$$\sigma_A^۲ = \frac{۲(۱۵-۱۶)^۲ + (۱۴-۱۶)^۲ + (۱۶-۱۶)^۲ + (۱۷-۱۶)^۲ + (۱۹-۱۶)^۲}{۶} = \frac{۲+۴+۰+۱+۹}{۶} = \frac{۱۶}{۶} = \frac{۸}{۳}$$

$$\sigma_B^۲ = \frac{۲(۱۴-۱۶)^۲ + ۲(۱۷-۱۶)^۲ + (۱۶-۱۶)^۲ + (۱۸-۱۶)^۲}{۶} = \frac{۸+۲+۰+۴}{۶} = \frac{۱۴}{۶} = \frac{۷}{۳} \Rightarrow$$ B دقت بیشتری دارد.

گزینه ۲

۱۴۳ـ هریک از اعداد ۱ تا ۳۰ را بر روی ۳۰ گوی یکسان نوشته در کیسه‌ای قرار می‌دهیم. حداقل چند گوی بیرون آوریم تا به طور یقین دست کم دو عدد با مقسوم‌علیه مشترک بزرگتر از ۱ داشته باشیم؟

۱) ۱۰ ۲) ۱۱ ۳) ۱۲ ۴) ۱۳

بدترین حالت وقتی اتفاق می افتد که همه اعداد بیرون آمده نسبت به هم اول باشند، یعنی همه اعداد اول کوچک‌تر از ۳۰ و همچنین عدد ۱، به عبارت بهتر مجموعه‌ی $\{۱, ۲, ۳, ۵, ۷, ۱۱, ۱۳, ۱۷, ۱۹, ۲۳, ۲۹\}$. هر عدد دیگری به جز اعضای این مجموعه انتخاب کنیم، حتما با حداقل یکی از اعضای این مجموعه مقسوم‌علیه مشترک بزرگتر از یک دارد، پس باید حداقل ۱ + ۱۱ یعنی ۱۲ عدد انتخاب شود.

گزینه ۳

۱۴۴ـ اگر $A=\{x\in\mathbb{N},\ 5<x^2<50\}$ و $B=\{3k-2|k\in\mathbb{Z},\ 1\le k\le 4\}$ باشند، تعداد زیرمجموعه‌های $(A\times B)\cap(B\times A)$ کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۸ ۳) ۱۶ ۴) ۳۲

$(A\times B)\cap(B\times A)=(A\cap B)^2\Rightarrow |(A\times B)\cap(B\times A)|=|A\cap B|^2,\ A=\{3,4,5,6,7\},\ B=\{1,4,7,10\}\Rightarrow$

$A\cap B=\{4,7\}\Rightarrow |A\cap B|^2=2^2=4\Rightarrow$ تعدا زیرمجموعه‌ها $=2^4=16$

گزینه ۳

۱۴۵ـ تعداد افرازهای مجموعه $\{a,b,c,d,e\}$ که شامل فقط یک مجموعه تک‌عضوی باشد، کدام است؟

۱) ۱۰ ۲) ۱۲ ۳) ۱۵ ۴) ۲۰

اگر افراز ما شامل فقط یک مجموعه تک‌عضوی باشد، دو حالت وجود دارد:

الف) مجموعه بعدی، ۴عضوی است. پس باید از این ۵ عضو، دو گروهِ ۱ و ۴ عضوی بسازیم:

$$\binom{5}{1}\times\binom{4}{4}=5\times 1=5$$

ب)چهار عضو دیگر به دو مجموعه ۲عضوی تقسیم شده است، پس باید از این ۵ عضو، سه گروه ۱ ، ۲ و ۲عضوی بسازیم:

$$\binom{5}{1}\times\frac{\binom{4}{2}\times\binom{2}{2}}{2}=5\times\frac{6\times 1}{2}=5\times 3=15\Rightarrow \text{تعداد کل}=5+15=20$$

تذکر:
دلیل تقسیم بر ۲ شدن در حالت (ب) این است که وقتی دو گروه ۲عضوی داریم، از آنجا که ترتیب قرارگیری این دو گروه اهمیت ندارد، پس هر دو حالت را، یکبار حساب می‌کنیم.

گزینه ۴

۱۴۶ـ آیا رابطه $(a,b)\mathrm{R}(c,d)\Leftrightarrow ad=bc$ روی مجموعه $\mathbb{R}^2$ هم‌ارزی است. در صورت هم‌ارزی، نمودار $[(2,6)]$ از کدام نقطه می‌گذرد؟

۱)هم‌ارزی نیست ۲) $(1,2)$ ۳) $(1,3)$ ۴) $(2,3)$

این رابطه هم ارزی نیست، زیرا خاصیت تعدّی را ندارد:

$$\begin{cases}(1,2)\mathrm{R}(0,0)\\(0,0)\mathrm{R}(5,-3)\end{cases}\not\Rightarrow (1,2)\mathrm{R}(5,-3)$$

گزینه ۱

۱۴۷ـ دو تاس را با هم می‌ریزیم، با کدام احتمال جمع دو عدد رو شده، یک عدد اوّل است؟

۱) $\frac{5}{12}$ ۲) $\frac{4}{9}$ ۳) $\frac{5}{9}$ ۴) $\frac{7}{12}$

باید جمع دو عدد رو شده یکی از اعداد ۲ ، ۳ ، ۵ ، ۷ ، ۱۱ باشد.

$$P(x=\text{عدد اول})=$$

$$\frac{6-|7-2|+6-|7-3|+6-|7-5|+6-|7-7|+6-|7-11|}{36}=$$

$$\frac{30-5-4-2-0-4}{36}=\frac{15}{36}=\frac{5}{12}$$

گزینه ۱

نکته ۵

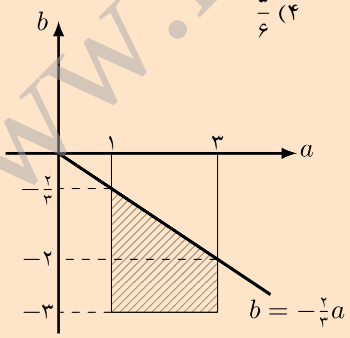
در پرتاب دو تاس، تعداد حالت‌هایی را که جمع دو عدد رو شده x شود، می‌توان از رابطه زیر بدست آورد:

$$n(x)=6-|7-x|$$

۱۴۸ـ در معادله $ax^2+bx=5$ ، ضریب a به تصادف عددی در بازه $[1,3]$ و ضریب b، به طور تصادفی عددی در بازه $[-3,0]$ انتخاب شده است. با کدام احتمال، مجموع جواب‌های این معادله بیشتر از $\frac{2}{3}$ است؟

۱) $\frac{4}{9}$ ۲) $\frac{5}{9}$ ۳) $\frac{7}{12}$ ۴) $\frac{5}{6}$

مجموع جواب‌های معادله درجه دو، از رابطه $x_1+x_2=-\frac{b}{a}$ بدست می‌آید، بنابراین:



$$-\frac{b}{a}>\frac{2}{3}\Rightarrow\frac{b}{a}<-\frac{2}{3}\xRightarrow{\times a\ (a>0)} b<-\frac{2}{3}a$$

$$\Rightarrow P=\frac{S_{\text{ذوزنقه}}}{S_{\text{مستطیل}}}=\frac{\frac{1}{2}(1+\frac{7}{3})\times 2}{2\times 3}=\frac{\frac{10}{3}}{6}=\frac{10}{18}=\frac{5}{9}$$

گزینه ۲

۱۴۹ـ درجه رأس‌های گراف ساده و همبند اعداد c ، b ، a ، ۱ ، ۳ ، ۴ هستند. اگر p تعداد رأس های گراف و q تعداد یال‌های گراف و $q=\frac{3}{2}p$ باشد، تعداد جواب‌های مجموعه $\{a,b,c\}$ کدام است؟

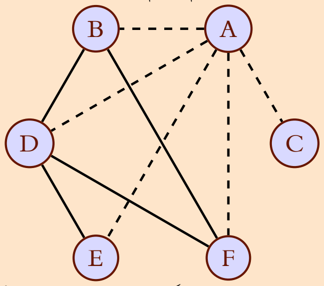
۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

این گراف ۶ رأس دارد، یعنی $p=6$ پس: $q=\frac{3}{2}p\Rightarrow 2q=3p=18\Rightarrow q=9$

بنابراین ۹ یال داریم. از آنجا که $p=6$، پس بیشترین درجه ممکن، $\Delta=5$ خواهد بود. اگر $\Delta=5$ ، از یکی از رأس‌ها (که حتماً یکی از سه رأس با درجه a یا b یا c است، فرض می‌کنیم c باشد) به همه رأس‌های دیگر یالی وجود دارد. پس شرط همبند بودن وجود دارد، اکنون اگر این رأس را با یال‌های متصل به آن کنار بگذاریم، گراف جدیدی با ۵ رأس و ۴ یال داریم که درجه رأس‌های آن باید به صورت زیر باشد:

$$3,2,0,a-1,b-1$$

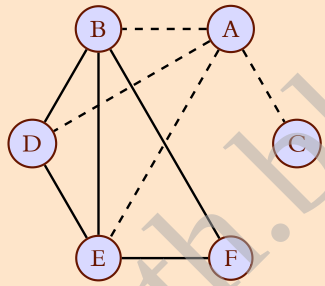
بنابراین گراف جدید باید یک رأس منفرد (ایزوله) ،یک رأس با درجه ۲ و یک رأس با درجه ۳ داشته باشد، می‌توانیم این گراف را به صورت زیر رسم کنیم



درجات رئوس گراف جدید : $۳, ۲, ۲, ۱, ۰ \Rightarrow \begin{cases} a-۱=۲ \Rightarrow a=۳ \\ b-۱=۱ \Rightarrow b=۲ \end{cases} \Rightarrow \{a,b,c\}=\{۳,۲,۵\}$

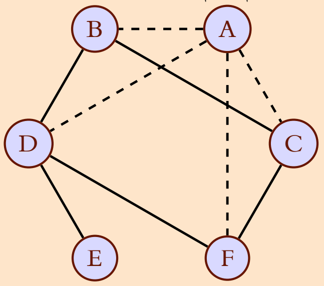
اگر بیشترین درجه $\Delta = ۴$ باشد، در این صورت یک رأس وجود دارد که از آن رأس به ۴ رأس دیگر، یک یال وجود دارد. رأس باقیمانده هم حتماً باید به یکی از آن ۴ رأس متصل باشد،زیرا گراف همبند است.(و البته روشن است که به رأس اول نمی‌تواند متصل شود، زیرا درجه آن ۵ می‌شود، و بیشترین درجه ۵ خواهد شد.). حال اگر این رأس ۴ یالی را با یال‌های متصل به آن کنار بگذاریم، ۵ رأس با پنج باقی می‌ماند، دو حالت داریم:

الف_ رأس با درجه ۱، یکی از آن ۴ رأس است (مثلا C) که در این صورت با حذف آن رأس ۴یالی، این رأس ایزوله می‌شود و باید ۵ یال جدید را بین ۴ رأس دیگر B و D و E و F تقسیم کنیم(البته با شرایط مسئله)



$۴,۴,۴,۳,۲,۱ \Rightarrow \{a,b,c\}=\{۴,۴,۲\}$

ب_ رأس با درجه ۱، هیچ یک از آن ۴ رأس نیست (یعنی E است) که در این صورت چون بین این رأس و یکی از رأس‌های دیگر حتما یک یال داریم،پس باید ۴ یال جدید را بین ۴ رأس B و D و C و F تقسیم کنیم(البته با شرایط مسئله)



$۴,۴,۳,۳,۳,۱ \Rightarrow \{a,b,c\}=\{۴,۳,۳\}$

گزینه ۳

۱۵۰_ هفت برابر عدد شش‌رقمی $\overline{abcabc}$ ، مربع کامل است. بیشترین مقدار مجموع ارقام عدد $\overline{abc}$ کدام است؟

۱) ۱۴ ۲) ۱۵ ۳) ۱۶ ۴) ۱۷

$$x = ۷ \times \overline{abcabc} = ۷ \times (\overline{abc} + ۱۰۰۰ \times \overline{abcabc}) = ۷ \times ۱۰۰۱ \times \overline{abc} = ۷ \times ۷ \times ۱۱ \times ۱۳ \times \overline{abc} = ۷^۲ \times ۱۱ \times ۱۳ \times \overline{abc} = k^۲$$

$$\xRightarrow{\text{باید مضرب ۱۳ × ۱۱ و یک مربع کامل باشد } \overline{abc}} \overline{abc} = ۱۱ \times ۱۳ \times q^۲ = ۱۴۳q^۲$$

$$\Rightarrow \overline{abc} \text{ برای سه رقمی شدن عدد } \Rightarrow \begin{cases} q^۲ = ۱ \Rightarrow \overline{abc} = ۱۴۳ \Rightarrow a+b+c = ۸ \\ q^۲ = ۴ \Rightarrow \overline{abc} = ۱۴۳ \times ۴ = ۵۷۲ \Rightarrow a+b+c = ۱۴\checkmark \end{cases}$$

گزینه ۱

۱۵۱_ دو برابر عدد طبیعی $N = \overline{abc}$ با تغییر مبنا به صورت $(a۰bc)_۶$ نوشته شده است. بیشترین مقدار N، از مربع کامل، حدّاقل چند واحد کمتر است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

a و b و c رقم عدد در مبنای ۶ هستند،پس باید از ۶ کوچکتر باشد. البته باید $a \neq ۰$ زیرا رقم اول است.

$$۲ \times \overline{abc} = (a۰bc)_۶ \Rightarrow ۲ \times (c + ۱۰b + ۱۰۰a) = c + ۶b + ۶^۲ \times ۰ + ۶^۳ \times a \Rightarrow ۲c + ۲۰b + ۲۰۰a = c + ۶b + ۲۱۶a \Rightarrow$$

$$\Rightarrow c = ۱۶a - ۱۴b \Rightarrow c = ۲(۸a - ۷b) \Rightarrow \text{.مضرب ۲ است } c \begin{cases} c = ۲ = ۲ \times (۸ \times ۱ - ۷ \times ۱) \\ c = ۴ = ۲ \times (۸ \times ۲ - ۷ \times ۲) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = ۱, b = ۱, c = ۲ \\ a = ۲, b = ۲, c = ۴ \checkmark \end{cases}$$

$\Rightarrow N = ۲۲۴ \Rightarrow$ نزدیک ترین مربع کامل، ۲۲۵ است که از N، ۱ واحد بیشتر است.

گزینه ۱

۱۵۲_ به ازای چند عدد طبیعی دو رقمی n، دو عدد به صورت‌های $۵n - ۲$ و $۷n + ۳$ ، نسبت به هم غیر اوّل‌اند؟

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

اگر ب.م.م دو عدد را d فرض کنیم:

$$\begin{cases} d \mid (۵n-۲) \\ d \mid (۷n+۳) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d \mid ۷ \times (۵n-۲) \\ d \mid ۵ \times (۷n+۳) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d \mid (۳۵n-۱۴) \\ d \mid (۳۵n+۱۵) \end{cases} \Rightarrow d \mid (۳۵n+۱۵) - (۳۵n-۱۴) = ۲۹ \Rightarrow \begin{cases} d = ۱ \\ d = ۲۹ \end{cases} \Rightarrow d = ۲۹$$

$$\begin{cases} ۲۹ \mid (۵n-۲) \\ ۲۹ \mid (۷n+۳) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ۲۹ \mid ۳ \times (۵n-۲) = ۱۵n - ۶ \\ ۲۹ \mid ۲ \times (۷n+۳) = ۱۴n + ۶ \end{cases} \Rightarrow ۲۹ \mid (n - ۱۲) \Rightarrow n - ۱۲ = ۲۹k \Rightarrow n = ۲۹k + ۱۲ = ۱۲, ۴۱, ۷۰, ۹۹$$

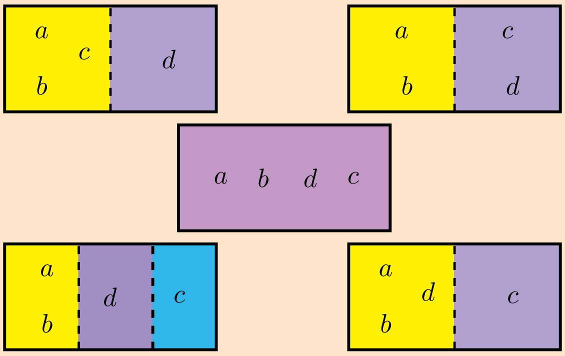
گزینه ۲

۱۵۳ـ تعداد رابطه‌های هم‌ارزی، روی مجموعه $\{a,b,c,d\}$ که شامل (a,b) باشد، کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

یادآوری

وقتی در رابطه هم‌ارزی، دو عضو مجموعه با هم رابطه دارند، یعنی این دو عضو در یک کلاس هم‌ارزی هستند و این بدان معنا است که در افراز مجموعه، این دو عضو ، در یک مجموعه می باشند.



پس در واقع باید تعداد افرازهایی را پیدا کنیم که در آن a و b در یک مجموعه باشند.

گزینه ۳

۱۵۴ـ تعداد سه تایی‌های مرتب، با مختص‌های صحیح و غیر منفی، به طوری که مجموع هر سه مختص برابر ۱۰ و هر مختص کمتر از ۶ باشد کدام است؟

۱) ۱۷ ۲) ۱۸ ۳) ۲۰ ۴) ۲۱

باید تعداد جواب‌های معادله $x_1+x_2+x_3=10$ را به طوری که $x_i<6$ باشد بدست آوریم. اگر A_1 مجموعه جواب‌هایی باشد که $x_1\geq 6$ در این صورت:

$$y_1=x_1-6,\ y_1\geq 0 \Rightarrow y_1+6+x_2+x_3=10 \Rightarrow y_1+x_2+x_3=4,\ \text{جواب‌های صحیح نامنفی}:\ \binom{4+3-1}{3-1}=\binom{6}{2}=15$$

متشابها برای x_2 و x_3 همین فرآیند را داریم، پس $|A_1|=|A_2|=|A_3|=15$

هیچ یک از این سه مجموعه با دیگری اشتراک ندارد، زیرا امکان ندارد همزمان دو تا از x_i ها بزرگتر یا مساوی ۶ باشد.

$$\text{تعداد جواب‌ها} = \text{تعداد کل جواب‌ها} - \Big(|A_1|+|A_2|+|A_3|-\underbrace{|A_1\cap A_2|}_{0}-\underbrace{|A_2\cap A_3|}_{0}-\underbrace{|A_1\cap A_3|}_{0}+\underbrace{|A_1\cap A_2\cap A_3|}_{0}\Big)$$

$$=\binom{10+3-1}{3-1}-(15+15+15)=\binom{12}{2}-(45)=66-45=21$$

گزینه ۲

۱۵۵ـ در ظرفی ۵ مهره سفید و ۳ مهره سیاه، در ظرف دیگر ۴ مهره سفید و ۲ مهره سیاه موجود است. به تصادف از هر ظرف دو مهره بیرون می‌آوریم. با کدام احتمال ۴ مهره خارج‌شده، همرنگ هستند؟

۱) ۰/۱۲ ۲) ۰/۱۵ ۳) ۰/۱۸ ۴) ۰/۲۴

یا دو مهره انتخابی از ظرف اول و دو مهره انتخابی از ظرف دوم سفید، و یا دو مهره انتخابی از ظرف اول و دو مهره انتخابی از ظرف دوم سیاه هستند.

$$P_{\text{هر دو ظرف همرنگ}}=P_{\text{هر دو ظرف سفید}}+P_{\text{هر دو ظرف سیاه}}=\frac{\binom{5}{2}}{\binom{8}{2}}\times\frac{\binom{4}{2}}{\binom{6}{2}}+\frac{\binom{3}{2}}{\binom{8}{2}}\times\frac{\binom{2}{2}}{\binom{6}{2}}=\frac{10\times 6}{28\times 15}+\frac{3\times 1}{28\times 15}=\frac{63}{28\times 15}=\frac{3}{20}=0/15$$

گزینه ۲

پاینده و پیروز باشید!

ابوالفضل معدنی پور

[redacted]

Email:
abolfazl.madanipour@gmail.com