سوالات مرتب نیستند و ارزش یکسان دارند.

۱. ثابت کنید هر چندوجهی محدب، دو وجه با تعداد یال‌های یکسان دارد.

راهنمایی: یک ایده این است که ببینید هر وجه حداکثر چند یال دارد. یک ایده‌ی دیگر این است که دوگان گراف این چندوجهی را بنگرید.

۲. فرض کنید $a_{n,k}$ نمایانگر تعداد جایگشت‌های σ از مجموعه‌ی $\{1, 2, \dots, n\}$ باشد که دقیقاً k تا نابه‌جایی دارند (منظور از نابه‌جایی، جفت $i < j$ است که $\sigma(i) > \sigma(j)$ باشد؛ مثلاً جایگشت ۳۲۴۱، چهار نابه‌جایی دارد). ثابت کنید

$$\sum_{k=0}^{\binom{n}{2}} a_{n,k}\, x^k = (1+x)(1+x+x^2)\cdots(1+x+x^2+\cdots+x^{n-1}).$$

راهنمایی: برای یک j ثابت، تعداد i هایی که $i < j$ و $\sigma(i) > \sigma(j)$ را σ_i بنامید. در این صورت تعداد کل نابه‌جایی‌ها برابر است با $\sigma_1 + \cdots + \sigma_n$. دقت کنید که $\sigma_i \leq i - 1$.

۳. در یک شبکه‌ی کامپیوتری، 2^k کامپیوتر با شماره‌های ۱ تا 2^k وجود دارد. هر یک از این کامپیوترها با یک کد یکتا، که دنباله‌ای k رقمی از اعداد ۰ و ۱ است، مشخص می‌شود. دو کامپیوتر به صورت مستقیم به هم متصلند اگر و فقط اگر کد مربوط به آن‌ها دقیقاً در یک رقم متمایز باشد [مکعب k-بعدی].

در ابتدای کار، هر یک از کامپیوترها دارای یک پیام است. پیامی که در ابتدا در کامپیوتر i وجود دارد باید در نهایت به کامپیوتر p_i برسد. فرض کنید در این p_iها عدد تکراری نداریم، یعنی در نهایت هر کدام از کامپیوترها باید یک پیام دریافت کنند.

در هر مرحله، هر کدام از کامپیوترها می‌تواند پیغامی که دارد را به یکی از کامپیوترهایی که مستقیماً به آن وصل است بدهد؛ به شرطی که هر کامپیوتری بعد از پایان آن مرحله بیش از یک پیغام نداشته باشد. (یعنی اگر در یک مرحله، کامپیوتر a پیام خود را به کامپیوتر b بدهد، کامپیوتر b هم باید پیامی که قبل از این مرحله داشته است، در همین مرحله به یک کامپیوتر دیگر بدهد. هم‌چنین هیچ کامپیوتر دیگری غیر از a نمی‌تواند پیام خود را در همین مرحله به b بدهد.) [سعی کنید یک تصور هندسی از فرایند انتقال پیام‌ها در ذهن خودتان ایجاد کنید و کمی لذت ببرید]

ثابت کنید در حداکثر $2^k - 1$ مرحله، کامپیوترها می‌توانند همه‌ی پیام‌ها را با توجه به شرایط فوق به مقصدشان برسانند.

راهنمایی: ساختار مسئله کاملاً استقرایی است. دقت کنید هر مکعب k-بعدی شامل دو مکعب $(k-۱)$-بعدی مجزاست: آن‌هایی که بیت اولشان صفر است و آن‌هایی که بیت اولشان یک است.

۴. به ازای هر عدد طبیعی n، فرض کنید $\phi(n) = \frac{n}{k}$ باشد که k بزرگترین مربع کاملی است که n را می‌شمارد. همچنین فرض کنید $a_۱, \ldots, a_n$، n عدد طبیعی با عوامل اول $p_۱, \ldots, p_n$ باشند طوری که $a_i = p_۱^{\alpha_{۱i}} \cdots p_n^{\alpha_{ni}}$ و $\alpha_{ij} \geq ۰$. علاوه بر این، فرض کنید $p_i|\phi(a_i)$ و اگر $p_i|\phi(a_j)$ آن‌گاه $p_j|\phi(a_i)$. ثابت کنید اعداد $k_۱, \ldots, k_m$ موجودند که $۱ \leq k_۱ < k_۲ < \cdots < k_m \leq n$ و

$$\phi(a_{k_۱} \times a_{k_۲} \times \cdots \times a_{k_m}) = p_۱ p_۲ \cdots p_n$$

راهنمایی: ابتدا ماتریس A با درایه‌های ۰ و ۱ را به این صورت بسازید که عنصر i, j آن ۱ است اگر α_{ij} فرد باشد، در غیر این صورت ۰ است. (زوجیت چرا مطرح شد؟) استنباط کنید که A ماتریسی متقارن با قطر تمام ۱ است. سپس مسئله‌ی زیر را به عنوان یک لم ثابت کنید و مسئله‌ی اصلی را از آن نتیجه بگیرید (در واقع این لم، ترجمه‌ی سوال به زبان راحت‌تریست):

اگر A ماتریسی متقارن با عناصر ۰, ۱ و با قطر اصلی تمام ۱ باشد، می‌توان اعداد $۱ \leq i_۱ < i_۲ < \cdots < i_k \leq n$ را پیدا کرد که

$$A_{i_۱} + \cdots + A_{i_k} \overset{۲}{\equiv} (۱, ۱, \ldots, ۱)$$

که در اینجا منظور از A_i، ستون i ام ماتریس A است.

موفق باشید

کریمی