ریاضی مهندسی

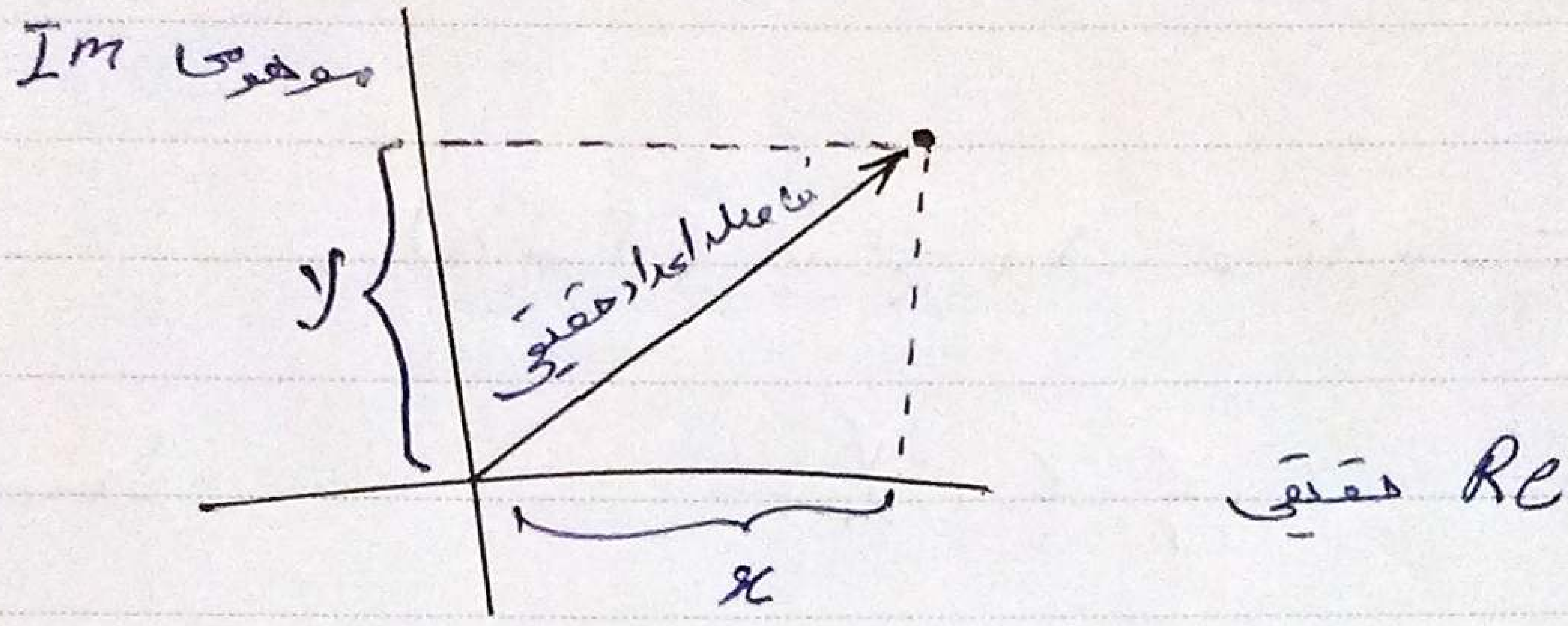
اعداد مختلط:

اعداد طبیعی $= 1, 2, 3, \ldots$

اعداد صحیح $= -\infty, \ldots, -2, -1, 0, 1, \ldots, +\infty$

اعداد اعشاری یا حقیقی $= \frac{3}{2}, -\frac{1}{8}$

اعداد گویا $= \frac{10}{3}$ دارای دوره تناوب



قسمت حقیقی $Re(z) = x$

$z = x + iy$

$i = \sqrt{-1}$

قسمت موهومی $Im(z) = y$

جمع و تفریق اعداد مختلط:

$z_1 = x_1 + iy_1$

$z_2 = x_2 + iy_2$

$z_1 + z_2 = x_1 + x_2 + i(y_1 + y_2)$

$z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2)$

اندازه اعداد حقیقی: $z = x + iy$

$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$

مثال: $z_1 = -2 + 3i$, $z_2 = \frac{2}{3} + 5i$, $z_3 = -2 - \frac{3}{4}i$

الف) $(z_1 + z_2) - z_3$

$z_1 + z_2 = -2 + \frac{2}{3} + i(3 + 5) =$

$(-\frac{4}{3} + 8i) - z_3 = (-\frac{4}{3} + 8i) - (-2 - \frac{3}{4}i) \Rightarrow$

Subject:
Date

$(-\frac{۴}{۳}) - (-۲) + i(۸ + \frac{۳}{۴}) = \frac{۲}{۳} + \frac{۳۵}{۴} i$

ب) $z_1 - z_2 - z_3 = (-۲ + ۳i) - (\frac{۲}{۳} + ۵i)$

ج) $z_1 + z_2 = \frac{-۴}{۳} + ۸i = -۲ + \frac{۲}{۳} + i(۳ + ۵) = -\frac{۴}{۳} + ۸i$

ضرب اعداد مختلط: $z_1 = x_1 + iy_1$ $\quad z_2 = x_2 + iy_2$

$z_1 \times z_2 = (x_1 + iy_1) \times (x_2 + iy_2) = x_1 x_2 + iy_1 x_2 + ix_1 y_2 + ii\, y_1$

$= (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + x_2 y_1)$ $\quad i^۲ = (+\sqrt{-۱})^۲ = -۱$

مثال $z_1 = i + ۱$ $\quad z_2 = -۳i + ۳$ $\quad z_3 = ۴$ $\quad z_4 = -۲i - ۲$

الف) $z_1 \times z_2 = (i + ۱) \times (-۳i + ۳) = -۳i^۲ + ۳i - ۳i + ۳ = ۳ + ۳ =$

ب) $z_1 \times (z_3 + z_4) = (z_3 + z_4) = ۴ + (-۲i - ۲) = (۲ - ۲i) \times (i +$

$۲i + ۲ - ۲i^۲ - \cancel{۲i} = ۴$

ج) $(z_3 \times z_1) + z_3 - z_4 = (-۳i + ۳) \times (i + ۱) = -۳i^۲ - ۳i + ۳i + ۳$

$= ۳ + ۳ = ۶$ $\quad (۶ + ۴) = ۱۰$ $\quad ۱۰ - (-۳i + ۲) = ۲i + ۱۲$

bject :

te

تقسیم اعداد مختلط:

$z_1 = x_1 + i y_1 \qquad z_2 = x_2 + i y_2$

$$z_1 / z_2 = z_1 \times \frac{1}{z_2} \qquad \frac{1}{z_2} = ? \qquad z_2 \times \frac{1}{z_2} = 1$$

فرض $\rightarrow \frac{1}{z_2} = A + iB \qquad (x_2 + i y_2) \times (A + iB) = 1$

$$x_2 A + i(x_2 B) + i y_2 A + \overset{-1}{\cancel{ii}}\, y_2 B$$

$$x_2 A - y_2 B + i(x_2 B + y_2 A) = 1 + 0i$$

$$\begin{array}{r} -y_2 \\ x_2 \end{array} \begin{cases} x_2 A - y_2 B = 1 \\ x_2 B + y_2 A = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} -y_2 x_2 A + y_2^2 B = -y_2 \\ x_2^2 B + x_2 y_2 = 0 \\ \hline 0 + x_2^2 B + y_2^2 B = -y_2 \end{array}$$

$$B(x_2^2 + y_2^2) = -y_2$$

$$B = \frac{y_2}{x_2^2 + y_2^2}$$

$$x_2 \left(\frac{-y_2}{x_2^2 + y_2^2} \right) + y_2 A = 0$$

$$\frac{-x_2 y_2}{x_2^2 + y_2^2} + y_2 A = 0$$

$$y_2 \frac{(-x_2 + A)}{x_2^2 + y_2^2} = 0 \qquad A = \frac{x_2}{x_2^2 + y_2^2}$$

مثال:

$z_1 = 3 + 4i \qquad z_2 = -2 - 2i$

الف) $z_1 \times z_2 = (3 + 4i) \times (-2 - 2i) = -6 - 6i - 8i - 8i^2 = -6 - 14i +$

$-۹-۱۴i+۸ = ۲+۱۴i$

ب) $z_1+z_2 = (۳+۴i)+(-۲-۲i) = ۳-۲+(۴i-۲i) = ۱+۲i$

ج) $\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1}{z_2} = z_1 \times \frac{۱}{z_2}$ $\quad ۱/z_2 = ؟ \Rightarrow \frac{۱}{z_2} \times z_2 = ۱$

$(-۲-۲i)\times\left(\frac{۱}{z_2}\right) = ۱$ $\quad$ فرض $\rightarrow \frac{۱}{z_2} = A+iB$

$\Rightarrow (-۲-۲i)\times(A+iB) = ۱ \Rightarrow -۲A-۲iB-۲iA-۲i^۲B = ۱$

$-۲A+۲B+i(-۲B-۲A) = ۱+۰i$ $\quad \begin{cases} -۲A+۲B = ۱ \\ -۲B-۲A = ۰ \end{cases}$

$-۴A = ۱ \quad A = -\frac{۱}{۴} \quad -۲B-۲A = ۰$

$-۲B-۲\left(\frac{-۱}{۴}\right) = ۰ \quad -۲B-۲\left(-\frac{۱}{۴}\right) = ۰ \quad -۲B+\frac{۱}{۲} = ۰$

$\cancel{-}۲B = \cancel{-}\frac{۱}{۲} \quad B = \frac{-۱}{۲}\times -۲ \quad B = \frac{۱}{۴}$

$(۳+۴i)\times\left(-\frac{۱}{۴}+i\frac{۱}{۴}\right) = \frac{-۳}{۴}+\frac{۳}{۴}i-i-۱ = -\frac{۷}{۴}-\frac{i}{۴}$

د) $z_1 = i+۱ \quad z_2 = ۲i+۳ \quad z_3 = i+\frac{۱}{۲}$

الف) $\frac{z_1+z_2}{z_3} = (z_1+z_2) = (i+۱)+(۲i+۳) = ۴+۳i$

$\frac{۴+۳i}{z_3} = \frac{۴+۳i}{i+\frac{۱}{۲}} = \frac{z_{12}}{z_3} = z_{12}\times\frac{۱}{z_3} = ۱$

$\left(i+\frac{۱}{۲}\right)\times(A+iB) = iA+i^۲B+\frac{۱}{۲}A+\frac{۱}{۲}iB = ۱$

$$1+(-B)+\frac{1}{2}A+\frac{1}{2}iB=1$$

$$-2\begin{cases}\frac{1}{2}A-B=1\\ A+\frac{1}{2}B=0\end{cases}$$

$$-A+2B=-2 \qquad \frac{5}{2}B=-2$$

$$A+\frac{1}{2}B=0 \qquad B=\frac{-4}{5} \qquad A=\frac{4}{10}=\frac{2}{5}$$

$$(4+3i)\left(\frac{2}{5}-i\frac{4}{5}\right)=\frac{8}{5}-\frac{16}{5}i+\frac{6}{5}i-\frac{-12}{5}i^2$$

$$\frac{8}{5}+\frac{12}{5}=\frac{20}{5}-\frac{10}{5}i$$

مثال:

$$Z_1=i+1 \qquad Z_2=2i+2 \qquad Z_3=i+\frac{1}{2}$$

الف) $\frac{Z_3}{Z_1}-\frac{1}{Z_1}=?$ $\qquad Z_1\times\frac{1}{Z_1}=1 \qquad (i+1)(A+iB)=1$

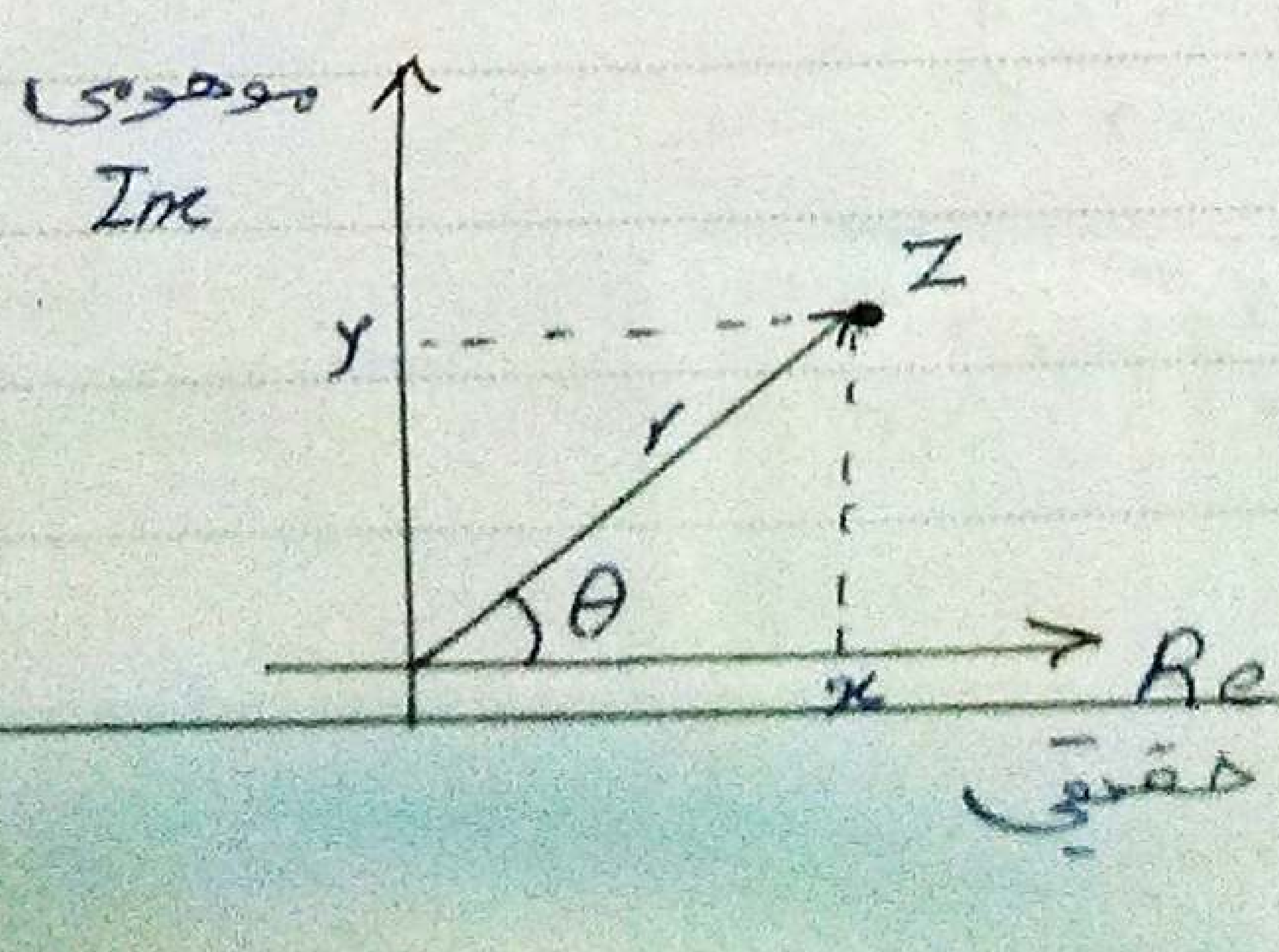
$$iA+i^2B+A+iB=1 \qquad -B+A+i(A+B)=1+0i$$

$$\begin{cases}-B+A=1\\ A+B=0\end{cases} \Rightarrow \begin{matrix}-B+A=1\\ -A-B=0\end{matrix} \qquad A=\frac{1}{2} \qquad B=-\frac{1}{2}$$

$$\frac{Z_3}{Z_1}=\left(i+\frac{1}{2}\right)\times\left(\frac{1}{2}\times\frac{i}{2}\right)=i\frac{1}{2}-i\frac{i}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}-\frac{i}{4}$$

$$i\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)\times\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=\frac{1}{4}+\frac{3}{4}$$

نمایش مثلثاتی اعداد مختلط:



$$r=\sqrt{x^2+y^2}$$

$$\theta=\operatorname{Arctan}\frac{y}{x}$$

Subject
Date

دا ورکا ۱:

$\sin\theta = \frac{\text{مقابل}}{\text{وتر}} = \frac{y}{r}$ $\cos\theta = \frac{\text{مجاور}}{\text{وتر}} = \frac{x}{r}$

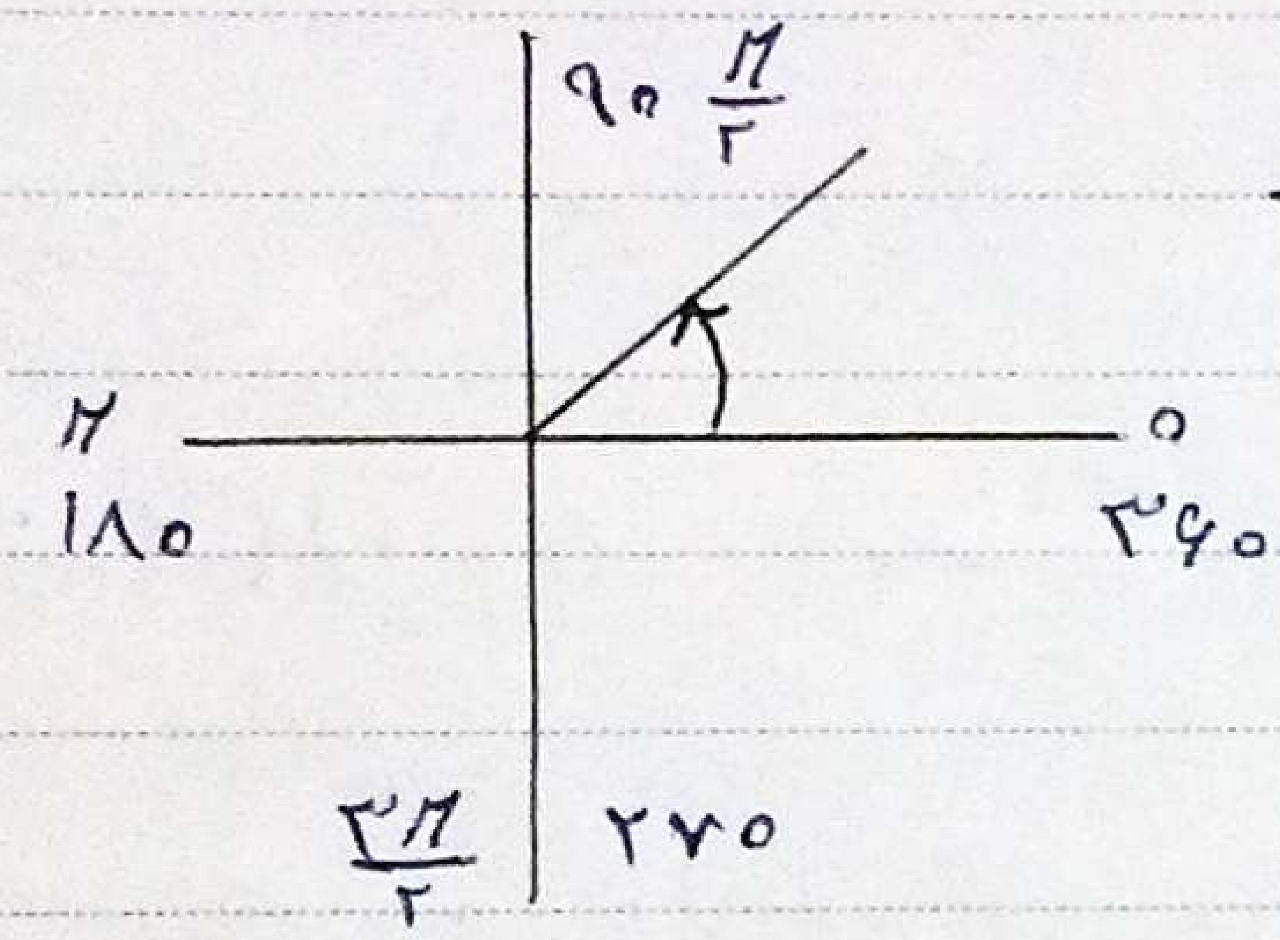
$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{y/r}{x/r} = \frac{y}{x}$

$\cot\theta = \frac{1}{\tan\theta} = \frac{x}{y}$

دا ورکا ۲:

$\tan\theta = \frac{y}{x}$ $\quad \text{Arctan}\,\frac{y}{x} = \theta$

دا ورکا ۳:



$-\pi \leqslant \theta \leqslant \pi$

اندازه زاویه { درجه
رادیان

$\frac{360^\circ}{2\pi} = \frac{D}{R}$

دیل نمایش مثلثاتی به دکارتی:

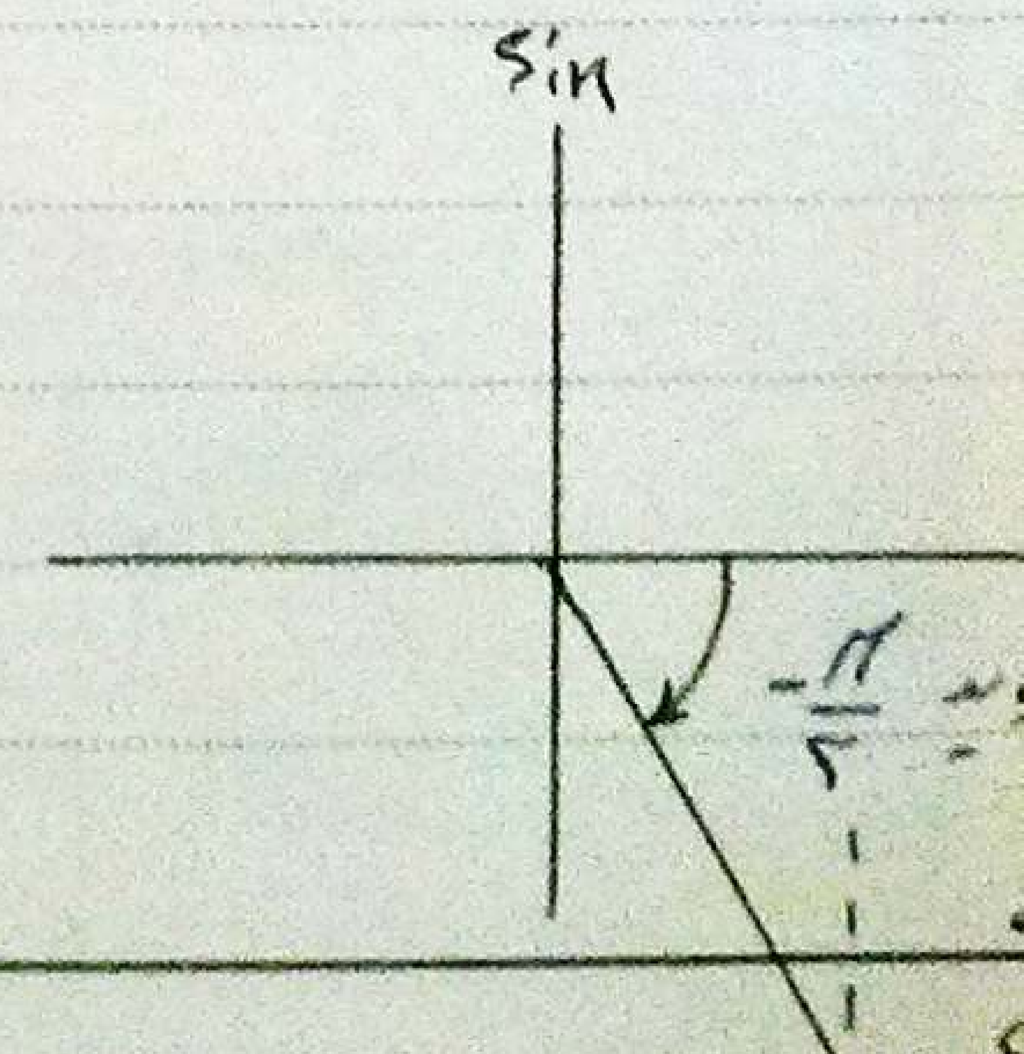
الف) $Z = 5\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$

$\sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ $\quad \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ $\quad Z = 5\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) =$

$\frac{5\sqrt{2}}{2} + i\,\frac{5\sqrt{2}}{2}$

ج) $Z = \sqrt{2}\left(\cos -\frac{\pi}{3} + i\sin -\frac{\pi}{3}\right)$

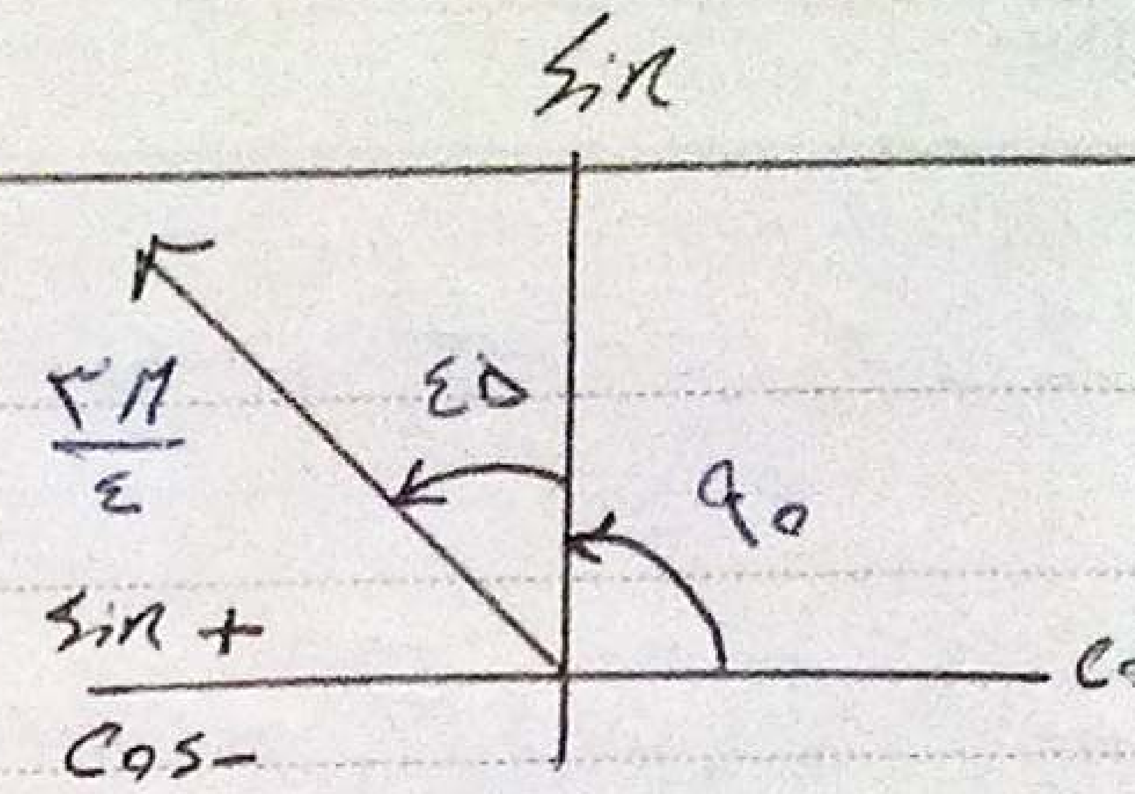
$= \sqrt{2}\left(\frac{1}{2} + i\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} - i\,\frac{\sqrt{6}}{2}$



PAPCO

oject

te



$) 5 (\cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4})$

$\sin \frac{3\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} \qquad \cos \frac{3\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\Longrightarrow \frac{-5\sqrt{2}}{2} + i \frac{5\sqrt{2}}{2}$

$) 10 (\cos -\pi + i \sin -\pi) = \qquad \sin -\pi = 0 \qquad \cos -\pi = -1 \qquad = -10$

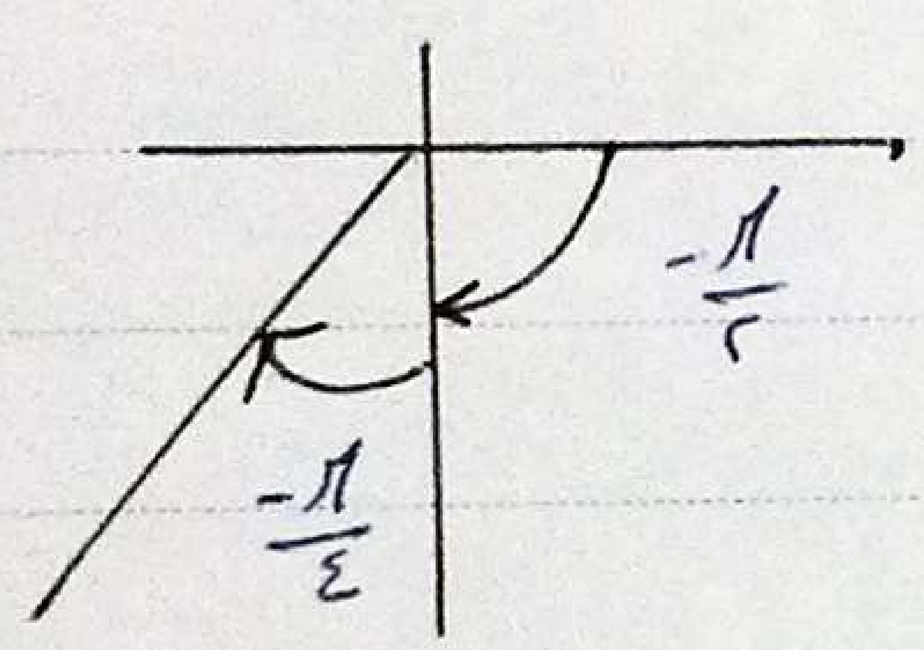
تبدیل نمایش دکارتی به مثلثاتی

الف) $Z = 1 + i \qquad \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases} \qquad r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{2}$

$\theta = \operatorname{Arctan} \frac{y}{x} = \operatorname{Arctan} 1 = \frac{\pi}{4} \qquad Z = \sqrt{2} (\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4})$

ب) $-1 - i \qquad \begin{cases} x = -1 \\ y = -1 \end{cases} \qquad r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{2} \qquad \theta = \operatorname{Arctan} \frac{-1}{-1} =$

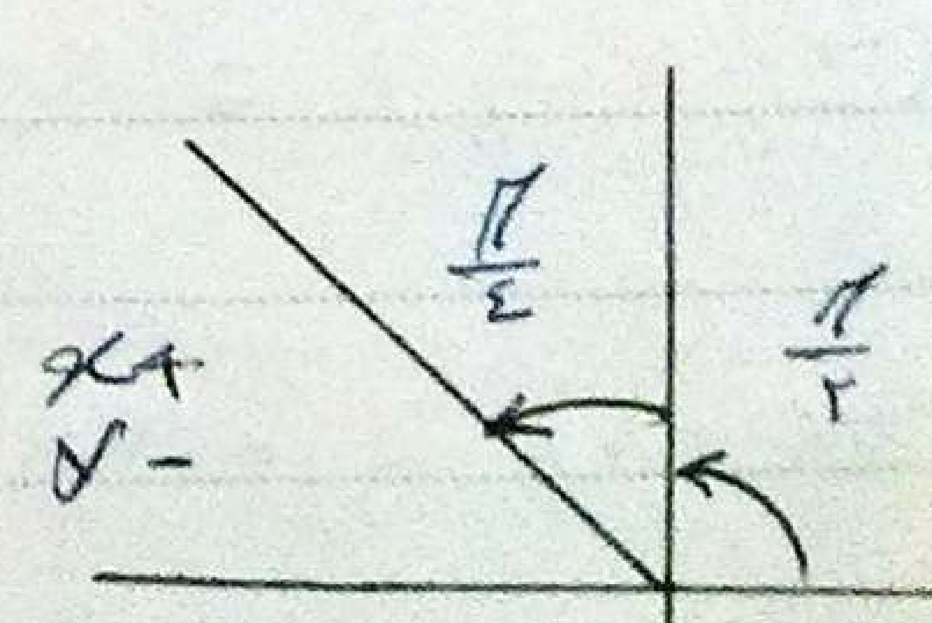
$\operatorname{Arctan} 1 = -\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2} = -3$



$Z = \sqrt{2} (\cos -\frac{3\pi}{4} + i \sin -\frac{3\pi}{4})$

ج) $-1 + i \qquad \begin{cases} x = -1 \\ y = 1 \end{cases} \qquad r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{2}$

$\theta = \operatorname{Arctan} -1 = \frac{3\pi}{4}$



$Z = \sqrt{2} (\cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4})$

جمع و تفریق مثلثاتی امکان پذیر نیست

ضرب وتقسیم مثلثاتی:

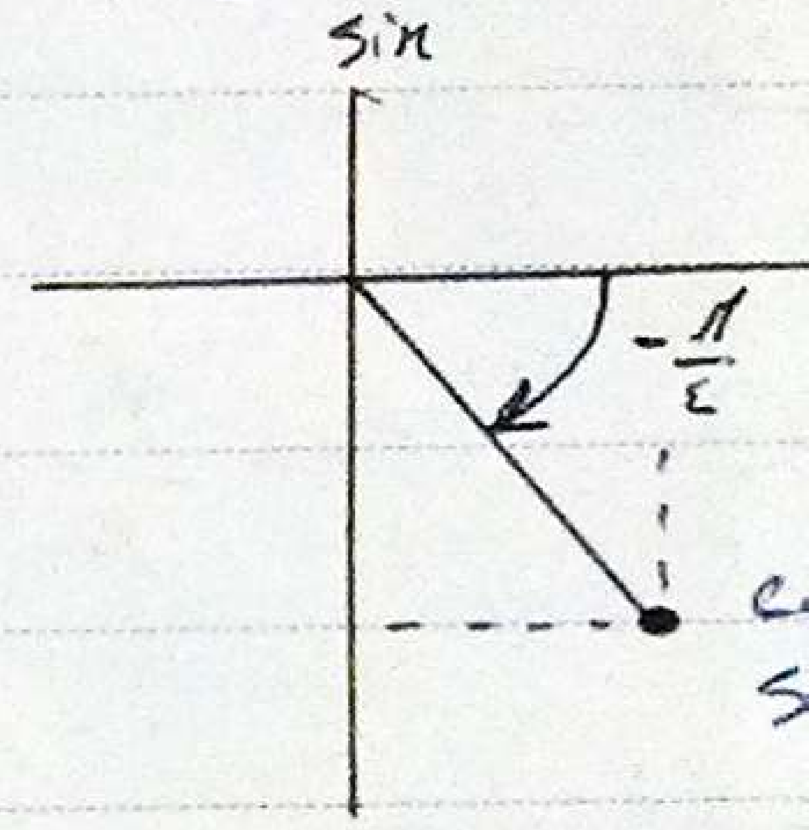
$Z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$

$Z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$

$Z_1 \times Z_2 = r_1 \times r_2 (\cos(\theta_1+\theta_2) + i\sin(\theta_1+\theta_2))$

$\frac{Z_1}{Z_2} = \frac{r_1}{r_2}(\cos(\theta_1-\theta_2) + i\sin(\theta_1-\theta_2))$

مثال: $Z_1 = 1+i \quad Z_2 = 1-i \quad Z_3 = \sqrt{2}(\cos -\frac{\pi}{4} + i\sin -\frac{\pi}{4})$



الف) $Z_1+Z_2+Z_3 \qquad \sqrt{2}(\cos -\frac{\pi}{4} + i\sin -\frac{\pi}{4}) =$

$Z = \sqrt{2}(\frac{\sqrt{2}}{2} + (-\frac{\sqrt{2}}{2}))i = \frac{\sqrt{2}\times\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}\times\sqrt{2}}{2}$

$Z_3 = 1-i \Rightarrow Z_1+Z_2+Z_3 = (1+1+1)+(1-1-1)i = 3-i$

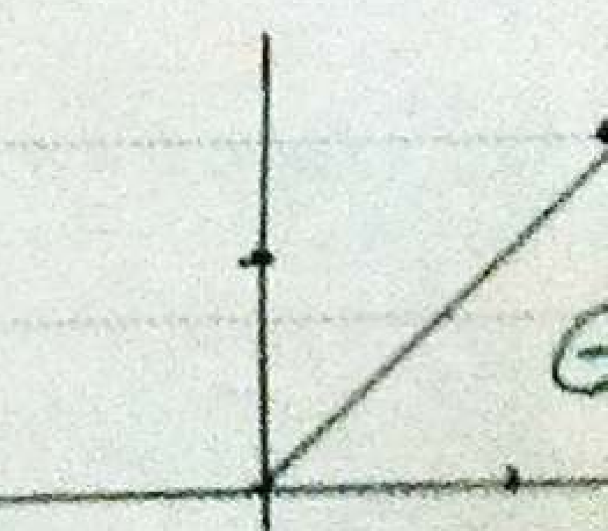
ج) $Z_1 \times Z_2 \times Z_3$

روش اول) $(1+i)(1-i) = 1-i+i-i^2 = 2$

$(Z_{12} \times Z_3) = 2\times(1-i) = 2-2i$

روش دوم) $Z_1 = 1+i$

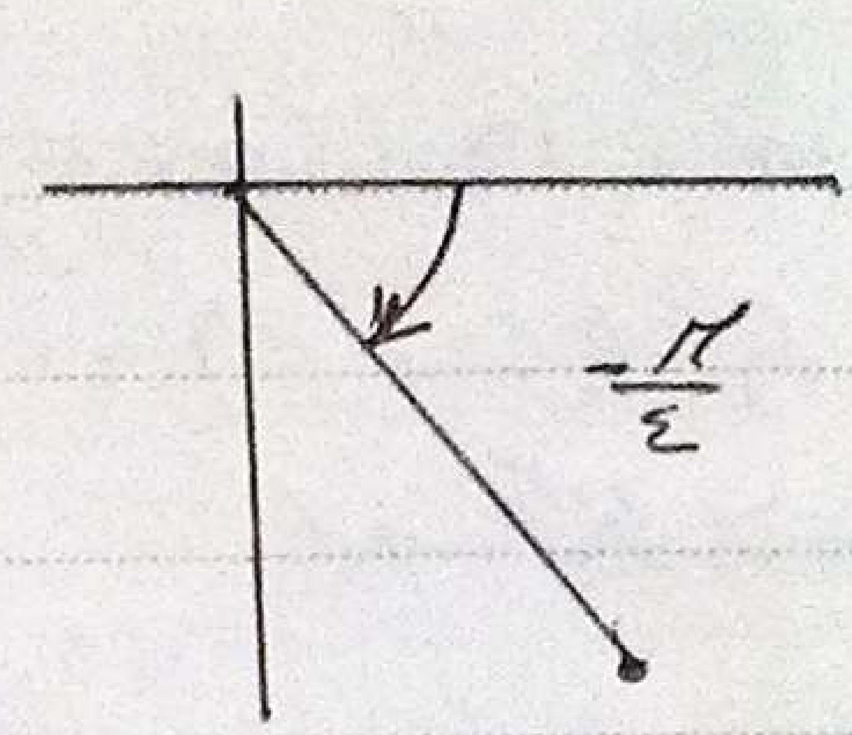
$$\begin{cases} r_1 = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{2} \\ \theta_1 = \text{Arctan}\ \frac{y}{x} = \text{Arctan} \\ \text{Arctan}\ \frac{\pi}{4} \end{cases}$$



bject

te

$$Z_٢ = 1 - i \qquad \begin{cases} r_٢ = \sqrt{x^٢ + y^٢} = \sqrt{٢} \\ \theta_٢ = \operatorname{Arctan} \frac{y}{x} = \operatorname{Arctan} \frac{-1}{1} \\ \theta = -\frac{\pi}{٤} \end{cases}$$



$$Z_٣ = \begin{cases} r_٣ = \sqrt{٢} \\ \theta = -\frac{\pi}{٤} \end{cases}$$

$$Z_1 \times Z_٢ = \begin{cases} r = r_1 + r_٢ = \sqrt{٢} \times \sqrt{٢} = ٢ \\ \theta = \theta_1 + \theta_٢ = \frac{\pi}{٤} + (-\frac{\pi}{٤}) = ٠ \end{cases}$$

$$(Z_1 \times Z_٢) \times Z_٣ = r = r \times r_٣ = ٢\sqrt{٢} \qquad \theta = \theta + \theta_٣ = ٠ - \frac{\pi}{٤} = -\frac{\pi}{٤}$$

$$Z_1 \times Z_٢ \times Z_٣ = r(\cos\theta + i \sin\theta) \Rightarrow ٢\sqrt{٢}(\cos -\frac{\pi}{٤} + i \sin -\frac{\pi}{٤})$$

$$\text{.)} \quad \frac{Z_1 \times Z_٢}{Z_٣} \qquad Z_1 \times Z_٢ \begin{cases} r_m = ٢ \\ \theta_m = ٠ \end{cases} \qquad Z_٣ \begin{cases} r_٣ = \sqrt{٢} \\ \theta = \frac{-\pi}{٤} \end{cases}$$

$$\frac{Z_1 \times Z_٢}{Z_٣} = \begin{cases} r = r_m / r_٣ = \frac{٢}{\sqrt{٢}} \\ \theta = \theta_m - \theta_٣ = ٠ - (-\frac{\pi}{٤}) = \frac{\pi}{٤} \end{cases}$$

$$\frac{٢}{\sqrt{٢}} (\cos \frac{\pi}{٤} + i \sin \frac{\pi}{٤})$$

$\sqrt[n]{Z}$

$$Z = r(\cos\theta + i \sin\theta)$$

$$w = \sqrt[n]{Z} \Rightarrow w^n = Z$$

PAPCO $w = R(\cos\gamma + i \sin\gamma)$

Subject

Date

$w^n = R^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi) = Z$

$R^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi) = r(\cos\theta + i\sin\theta)$

$\Rightarrow R^n = r \Rightarrow \underline{R = \sqrt[n]{r}}$

$n\varphi = \theta + 2k\pi \Rightarrow \varphi = \frac{\theta + 2k\pi}{n} \qquad 0 \le k \le n-1$

چون $\quad k=0 \Rightarrow \varphi_0 = \frac{\theta + 0}{n} = \frac{\theta}{n}$

$k=1 \Rightarrow \varphi_1 = \frac{\theta + 2\pi}{n}$

$k=2 \Rightarrow \varphi_2 = \frac{\theta + 4\pi}{n}$

$\vdots$

$k = n-1 \Rightarrow \varphi_{n-1} = \frac{\theta + 2(n-1)\pi}{n}$

$k = n \Rightarrow \varphi_n = \frac{\theta + 2n\pi}{n} = \frac{\theta}{n} + \frac{2n\pi}{n} =$

$\frac{\theta}{n} + 2\pi = \frac{\theta}{n}$

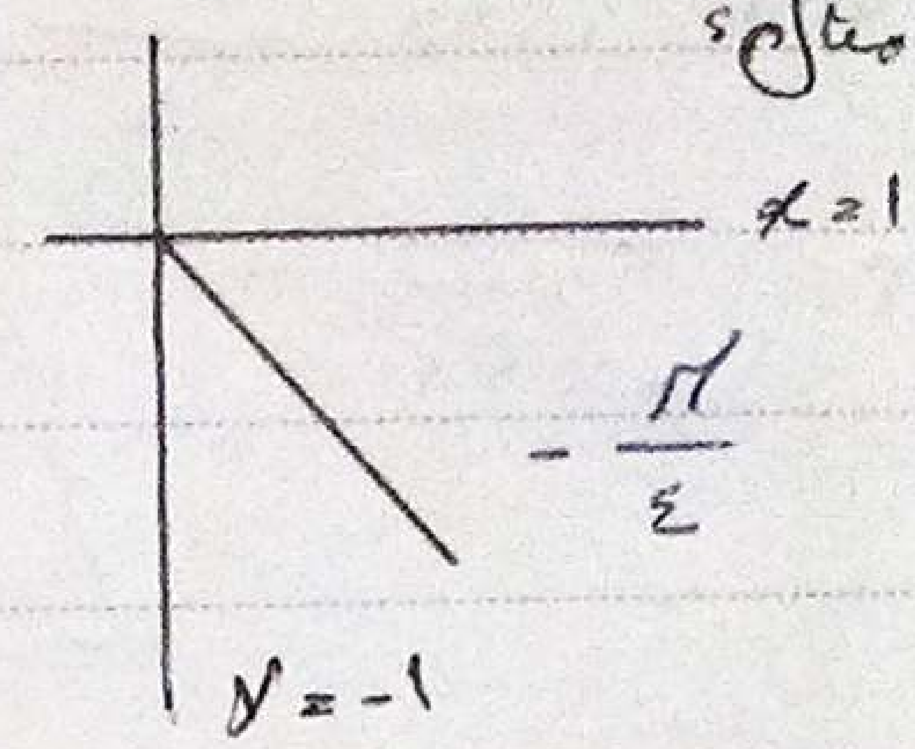
$\sqrt[n]{Z} = Z^{\frac{1}{n}} \qquad Z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$

$Z^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{Z}\left(\cos\frac{\theta + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\theta + i\sin}{n}\right)$

Z
- دکارتی : $x + iy$
- مثلثاتی : $r(\cos\theta + i\sin\theta)$
- نمایی : $re^{i\theta}$

ject

e



مثال

$\sqrt{1-i} = Z = 1-i \qquad r = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$

$\theta = \text{Arctan}\frac{y}{x} = \text{Arctan}\frac{-1}{1} \qquad \begin{cases} x=1 \\ y=-1 \end{cases}$

$= \sqrt{2}\left(\cos\frac{-\pi}{4} + i\sin\frac{-\pi}{4}\right)$

$^{\frac{1}{5}} = (\sqrt{2})^{\frac{1}{5}}\left(\cos\frac{\frac{-\pi}{4}+2k\pi}{5} + i\sin\frac{\frac{-\pi}{4}+2k\pi}{5}\right)$

$\underline{k=0}: \sqrt[10]{2}\left(\cos\frac{-\pi}{20} + i\sin\frac{-\pi}{20}\right)$

$\underline{k=1}: \sqrt[10]{2}\left(\cos\frac{\frac{-\pi}{4}+2\pi}{5} + i\sin\frac{\frac{-\pi}{4}+2\pi}{5}\right)$

$4\pi - \frac{\pi}{4} = \frac{8\pi-\pi}{4} = \frac{7\pi}{4}$ چون توان مسئله ۵ است

$\sqrt[10]{2}\left(\cos\frac{7\pi}{20} + i\sin\frac{7\pi}{20}\right)$ برای توان های کمتر از ۵ حساب میکنیم

$\underline{k=2}: \sqrt[10]{2}\left(\cos\frac{\frac{-\pi}{4}+4\pi}{5} + i\sin\frac{\frac{-\pi}{4}+4\pi}{5}\right)$

$\sqrt[10]{2}\left(\cos\frac{\frac{15\pi}{4}}{5} + i\sin\frac{\frac{15\pi}{4}}{5}\right)$

$\sqrt[10]{2}\left(\cos\frac{15\pi}{20} + i\sin\frac{15\pi}{20}\right)$

$\underline{k=3}: \sqrt[10]{2}\left(\cos\frac{\frac{-\pi}{4}+6\pi}{5} + i\sin\frac{\frac{-\pi}{4}+6\pi}{5}\right)$

$\sqrt[10]{2}\left(\cos\frac{23\pi}{20} + i\sin\frac{23\pi}{20}\right)$

$\underline{k=4}: \sqrt[10]{2}\left(\cos\frac{\frac{-\pi}{4}+8\pi}{5} + i\sin\frac{\frac{-\pi}{4}+8\pi}{5}\right)$

PAPCO

$\sqrt{2}\left(\cos\frac{21\pi}{5} + i\sin\frac{21\pi}{5}\right)$

حل:

$\sqrt[3]{1+\sqrt{3}i}$

$\begin{cases} x = 1 \\ y = \sqrt{3} \end{cases} \quad r = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{1^2+(\sqrt{3})^2} = \sqrt{4} = 2$

$\theta = \mathrm{Arctan}\,\frac{y}{x} = \mathrm{Arctan}\,\frac{\sqrt{3}}{1} = \frac{\pi}{3}$

$Z = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right) \Rightarrow Z^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{\frac{\pi}{3}+2k\pi}{3} + i\sin\frac{\frac{\pi}{3}+2k\pi}{3}\right)$

$\underline{K=0}:\ \sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{\pi}{9} + i\sin\frac{\pi}{9}\right)$

$\underline{K=1}:\ \sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{\frac{\pi}{3}+2\pi}{3} + i\sin\frac{\frac{\pi}{3}+2\pi}{3}\right)$

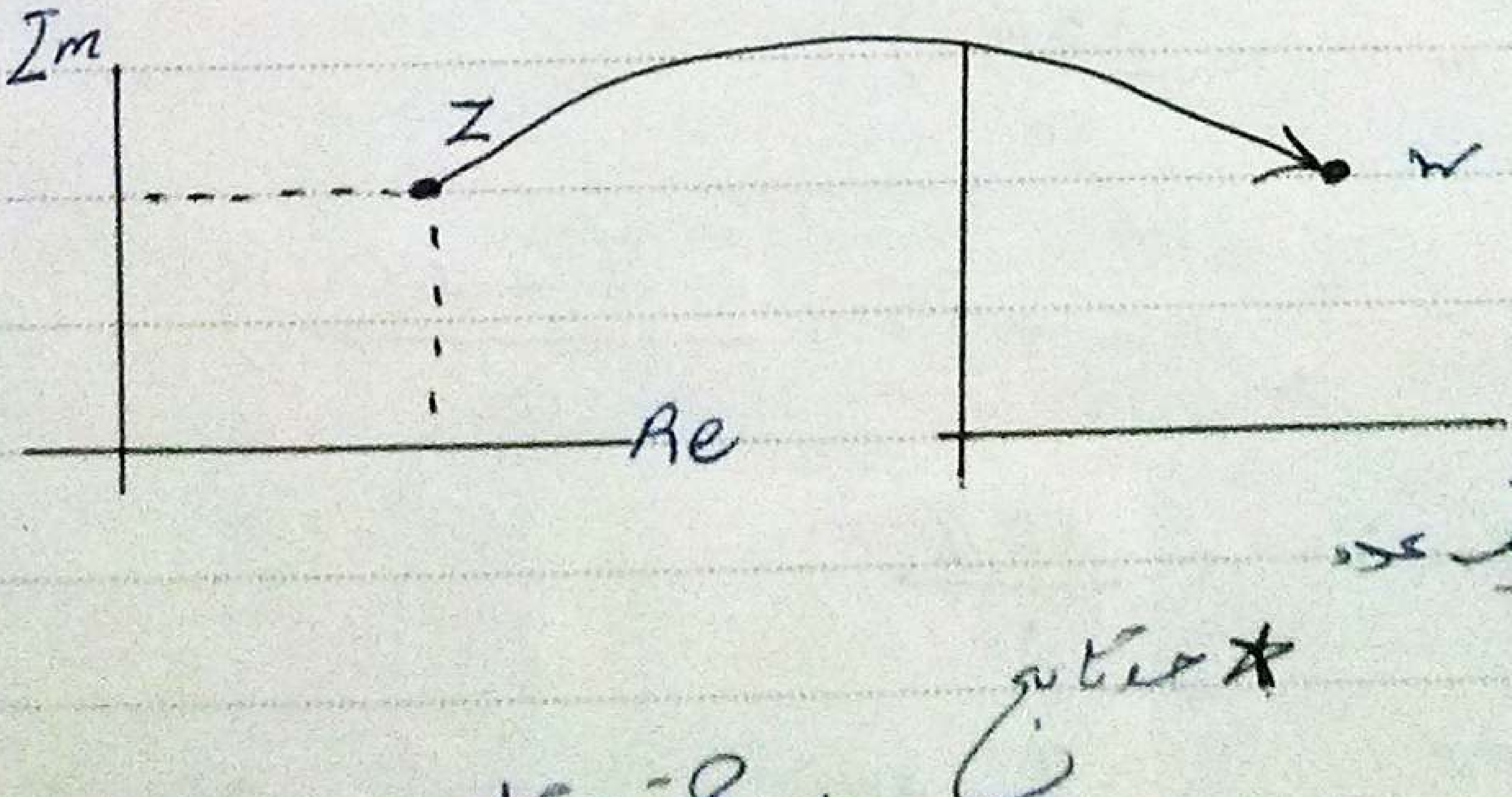
$\sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{\frac{7\pi}{3}}{3} + i\sin\frac{\frac{7\pi}{3}}{3}\right)$

$\sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{7\pi}{9} + i\sin\frac{7\pi}{9}\right)$

$\underline{K=2}:\ \sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{\frac{\pi}{3}+4\pi}{3} + i\sin\frac{\frac{\pi}{3}+4\pi}{3}\right)$

$\sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{13\pi}{9} + i\sin\frac{13\pi}{9}\right)$

توابع:



$f(Z) = w$

یعنی اثر تابع بر روی یک عدد

* حد تابع

* مشتق تابع

اگر تابع $f(z) = z^3$ باشد، این مقادیر یک عدد مختلط با r و θ مشخص را چگونه تغییر می

$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$

$f(z) = z^3 = (r(\cos\theta + i\sin\theta))^3$ $\qquad \begin{cases} r = r^3 \\ \theta = 3\theta \end{cases}$

$r^3(\cos 3\theta + i\sin 3\theta)$

تابع $f(z) = z^2$ مقادیر Re , Im اعداد z را چگونه تغییر می‌دهد $\qquad z = x + iy$

$f(z) = z^2 (x+iy)^2 = x^2 + (iy)^2 + 2ixy = x^2 - y^2 + 2ixy$

$Re: x^2 - y^2 \qquad Im: 2xy$

مثال: مثل مثال قبل $\qquad f(z) = z^3 + 2i$

$z = x + iy \qquad f(z) = z^3 + 2i \qquad f(z) = (x+iy)^3 + 2i$

$\underbrace{(x+iy)(x+iy)}(x+iy) + 2i$

$(x^2 - y^2 + 2ixy)(x+iy) + 2i$

$= x^3 + ix^2y - yx^2 - iy^3 + 2ix^2y + (\overset{-2xy^2}{\cancel{2i^2xy^2}}) + 2i$

$Re: x^3 - y^2x - 2xy^2 \qquad Im: x^2y - y^3 + 2x^2y + 2$

$f(z)=z+1$ $\qquad z=2+3i$ $\qquad$:...

$\Rightarrow f(z_1)=z_1+1=2+3i+1=3+3i$

$f(z)=z^2$ $\qquad z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ $\qquad$ ...: تابع مقادیر r , θ را چگونه تغییر می دهد؟

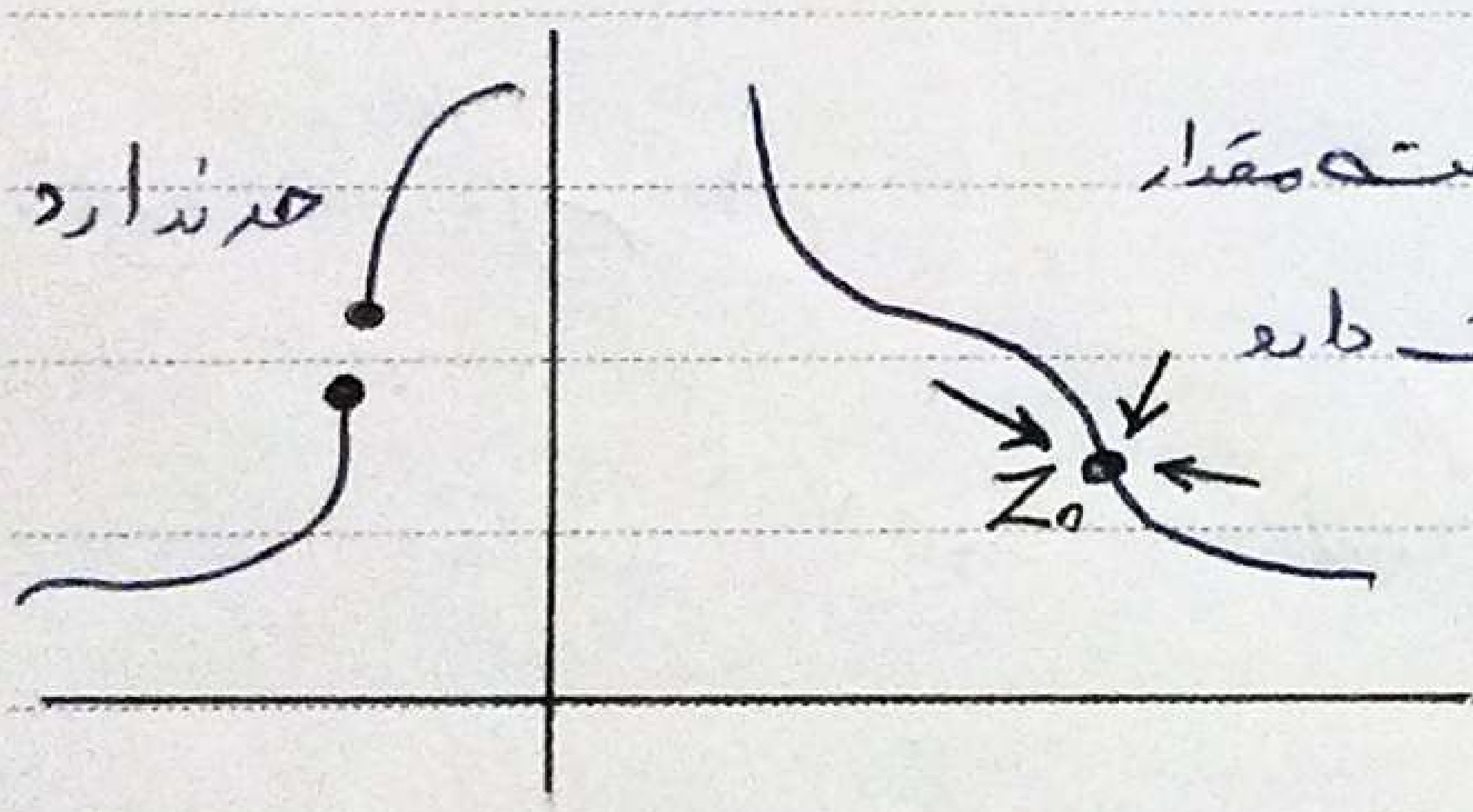
$f(z)=z^2 \Rightarrow (r(\cos\theta+i\sin\theta))^2 = r^2(\cos2\theta+i\sin2\theta)$ $\begin{cases} r \to \\ \theta \to \end{cases}$

...ل: تابع مقابل مقادیر حقیقی و موهومی یک عدد مختلط را چگونه تغییر می دهد؟

$f(z)=z^2$ $\qquad z=x+iy$ $\qquad f(z)=z^2=(x+iy)^2=x^2+(iy)^2+2xi)$

$x^2+i^2y^2+2ixy = x^2-y^2+2ixy$ $\qquad$ حقیقی $=x^2-y^2$

موهومی $=2xy$



حد تابع — آیا حد دارد

حد تابع را حساب کنید

$$\lim_{z\to z_0} f(z)=f(z_0)$$

...ل: $\lim_{z\to 2i+1} z^2+2z+i=?$ $\qquad (2i+1)^2+2(2i+1)+i=$

$(4i^2+1+4i)+(4i+2)+i=9i-1$

مشتق — آیا مشتق دارد

$f'(z)$ $\qquad$ مشتق را حساب کنید

* نقاط تحلیلی: نقاطی هستند که تابع در آن نقطه مشتق دارد.

* نقاط منفرد: نقاطی هستند که تابع در آن نقطه مشتق ندارد.

* توابع چند جمله‌ای نقاط منفرد ندارد (همیشه مشتق پذیر هستند)

* توابع کسری فقط در نقاطی که مخرج آن‌ها صفر می‌شود دارای نقاط منفرد هستند.

مثال: الف) $f(z)=\frac{z^3+z^2-2z+5}{z^2-1}$ $\qquad z^2-1=0 \qquad z^2=1 \qquad z=\pm 1$

ب) $f(z)=z^{11}+z^3+5$ نقاط منفرد ندارد

مثال: مشتق توابع زیر را حساب کنید

الف) $f(z)=z^3$

$f'(2i+1) \qquad f'(z)=3z^2+4z+0=3z^2+4z$

$f'(2i+1)=3(2i+1)^2+4(2i+1)=3(4i^2+1+4i)+8i+4$

$=3(-3+4i)+8i+4=-9+12i+8i+4=20i-5$

ب) $f(z)=\frac{z^2}{z+i}$ مخرج $z+i \to z=i-1 \quad i-1+1=0$

مشتق دارد

$f'(i-1) \qquad \left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-v'u}{v^2}$ یادآوری

$f'(z)=\frac{2z(z+i)-1\times z^2}{(z+i)^2}=\frac{2z^2+2z-z^2}{(z+i)^2}=\frac{z^2+2z}{(z+i)^2}$

$f'(i-1)=\frac{(i-1)^2+2(i-1)}{(i-1-i)^2}$

$$= \frac{(i^۲+۱-۲i)+(۲i-۲)}{(۲i-۱)^۲} = \frac{-۲}{۴i^۲+۱-۴i} = \frac{-۲}{-۳-۴i} = \frac{-۲}{۳+۴i}$$

مشتق جزئی:

$$\left.\begin{matrix} f(z) \\ z = x+iy \end{matrix}\right\} \quad f'_x(z)$$

مثال:

$$f(z) = ۲z^۲+i$$

مشتق: $f'(z) = ۴z \qquad f'_x(z) = ۲(x+iy)^۲+i$

$$۲(x^۲+i^۲y^۲+۲ixy)+i = ۲x^۲-۲y^۲+۴ixy+i$$

$$f'_x(z) = ۴x-۰+۴iy+۰$$

$$f'_y(z) = ۰-۴y+۴ix+۰$$

مثال:

$$f(z) = ۲z^۲+۳z-۲i$$

الف) $f'(z) = ۴z+۳-۰$

ب) $f_x(z) = f(z) = ۲(x+iy)^۲+۳(x+iy)-۲i$

$$= ۲(x^۲+i^۲y^۲+x^۲+۲ixy)+۳x+۳iy-۲i$$

$$= ۲x^۲-۲y^۲+۲x^۲+۴ixy+۳x+۳iy-۲i$$

$$f'_x(z) = ۴x-۰+۴x+۴iy+۳+۰-۰$$

Subject
Date

ج) $f_{xx}(z) = ۴ + ۴ + 0 + 0 + 0 = ۸$

د) $f_y(z) = 0 - ۴y + 0 + ۴ix + 0 + ۴i - 0$

ه) $f_{xy}(z) = 0 + 0 + ۴i + 0 + 0 = ۴i$

قضیه کشی - ریمان: اگر تابع $f(z)$ در نقطه‌ی (x_0, y_0) مشتق پذیر باشد باید قضیه کشی - ریمان صدق کند

$f(z) = u(x, y) + i\,v(x, y)$

$$\begin{cases} u_x = v_y \\ u_y = -v_x \end{cases}$$

مثال: نشان دهید تابع زیر در شرایط کشی ریمان صدق می‌کند

$f(z) = ۳z^۲ - ۲z + ۵$

$f(x+iy) = ۳(x+iy)^۲ - ۲(x+iy) + ۵$

$= ۳(x^۲ + i^۲y^۲ + ۲xiy) - ۲x - ۲iy + ۵$

$= ۳x^۲ - y^۲ + ۶xiy - ۲x - ۲iy + ۵ \Rightarrow$

$$\begin{cases} u = ۳x^۲ - ۳y^۲ - ۲x + ۵ \\ v = ۶xy - ۲y \end{cases}$$

$u_x = v_y$ ۱

$u_y = -v_x$ ۲

$$\begin{cases} u_x = ۶x - ۲ \\ v_y = ۶x - ۲ \end{cases} \checkmark$$

۲ $$\begin{cases} u_y = -۶y \\ v_x = ۶y \end{cases} \checkmark$$

Subject
Date

مثال:

$f(z) = 3z^2 + 2z \qquad f(z) = u(x,y) + i\,v(x,y)$

$z = x + iy \Rightarrow 3(x+iy)^2 + 2(x+iy)$

$z = 3(x^2 + i^2y^2 + 2i\,yx) + 2x + 2iy$

$z = 3x^2 - 3y^2 + 6ixy + 2x + 2iy$

$$\begin{cases} u = 3x^2 + 2x - 3y^2 \\ v = 6xy + 2y \end{cases}$$

$$\begin{cases} u_x = 6x + 2 + 0 \\ v_y = 6x + 2 \end{cases} \checkmark \qquad \begin{cases} u_y = 0 + 0 - 6y \\ v_x = 6y + 0 \end{cases} \checkmark$$

تابع همساز:

$u_{xx} + u_{yy} = 0$

مثال: کدام یک از توابع زیر همساز است؟

الف) $u(x,y) = x^3(2x - y) + xy$

$u = 2x^4 - x^3y + xy \qquad u_x = 8x^3 - 3x^2y + y$

$u_{xx} = 24x^2 - 6xy \qquad u_y = 0 - x^3 + x \qquad u_{yy} = 0$

$u_{xx} + u_{yy} = 24x^2 - 6xy$

ب) $u(x,y) = x^2 + y^2 - 2xy^2 \qquad u_x = 2x + 0 - 2y^2$

PAPCO $u_{xx} = 2 + 0 - 0$

ect

$u_{yy} = 0 + 2y - 4xy \qquad u_{xy} = 2 - 4x$

$u_{xx} + u_{yy} = 2 + 2 - 4x = 4 - 4x$ ✗ همساز نیست

$u(x,y) = x^2 + y^2 + 1 \qquad u_x = 2x + 0 + 0$

$u_{xx} = 2 \qquad u_y = 0 - 2y \Rightarrow \qquad u_{yy} = -2$

$u_{xx} + u_{yy} = 2 - 2 = 0$ ✓ همساز است

همساز مزدوج: اگر تابع $u(x,y)$ همساز باشد تابع $v(x,y)$ را همساز مزدوج گوییم اگر تابع ... قضیه کشی ریمان صدق کند.

مثال: همساز مزدوج

$u(x,y) = x(1+y)$

$u = x + xy \qquad u_x = 1 + y \qquad u_{xx} = 0$

$v_y = x \qquad v_{yy} = 0 \qquad u_{xx} + u_{yy} = 0$

$u_x = v_y \Rightarrow v_y = 1 + y \Rightarrow \int v_y \, dy$

$\int (1+y)\, dy \Rightarrow v = y + \frac{y^2}{2} + c \qquad u_y = -v_x$

$x = -(0 + 0 + c') \Rightarrow x = -c' \qquad c' = -x \qquad \int c\, dx = \int -x\, dx$

$c = \frac{-x^2}{2} + d \qquad v(x,y) = y + \frac{y^2}{2} - \frac{x^2}{2} + d$

عدد ثابت