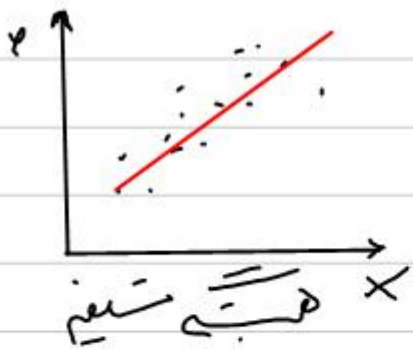


هفتے میں دو متغیر

زیر تین γ, X دو متغیر ہوا کرتے

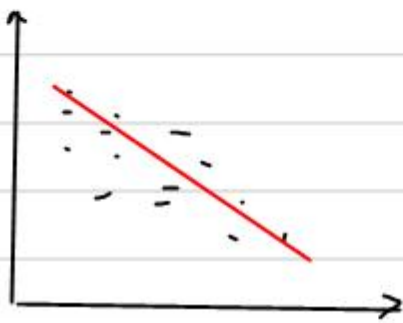
اگر با افزایش مقدار X ، مقدار γ نیز افزایش پائے کریم γ, X کے متعلق دارند



مثبت و باز دہی

بہرہ و کمزوری

اگر با افزایش مقدار X ، مقدار γ کم ہوتے کریم γ, X کے متعلق معکوس دارند

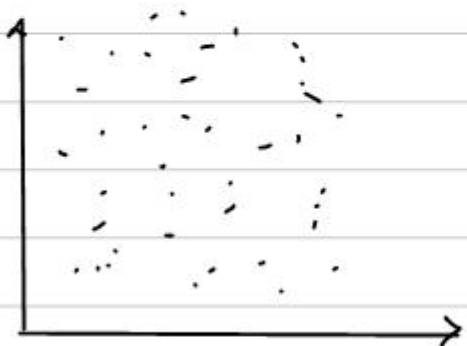


منفی و شمولی

بہرہ و کمزوری

اگر با افزایش یا کمزوری مقدار X ، مقدار γ نیز کمزوری یا کمزوری کریم γ, X کے متعلق

متعلق نداشت



ظاہر و بہرہ

شاخصی که نشانه جهت همبستگی بین دو متغیر را می‌دهد و اندازه ضریب همبستگی را دارد.

ضریب همبستگی پیرسون: اگر $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$

نمونه تصادفی n تایی از زوج متغیر (x, y) باشد ضریب همبستگی پیرسون به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$r(x, y) = \frac{\sum x_i y_i - \frac{\sum x_i \sum y_i}{n}}{\sqrt{\sum x_i^2 - \frac{(\sum x_i)^2}{n}}} \sqrt{\sum y_i^2 - \frac{(\sum y_i)^2}{n}}$$

مقدار r ضریب همبستگی و مقدار r^2 ضریب همبستگی را نشان می‌دهد

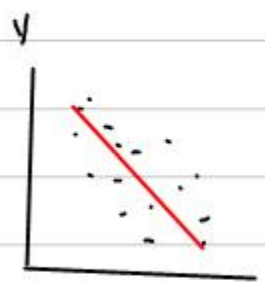
مقادیر

$$-1 \leq r(x, y) \leq 1$$

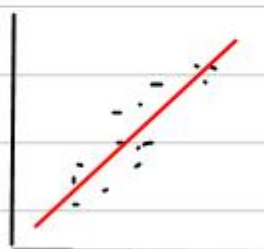
اگر $r = 1$ باشد همبستگی مثبت کامل است

اگر $r = -1$ باشد همبستگی منفی کامل است

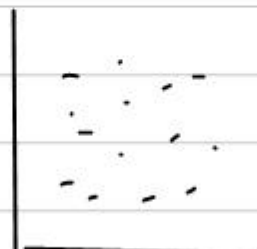
اگر $r = 0$ باشد عدم همبستگی است



$-1 < r < 0$
همبستگی منفی ضعیف



$0 < r < 1$
همبستگی مثبت ضعیف



$r = 0$
عدم همبستگی



$r = -1$
همبستگی منفی کامل



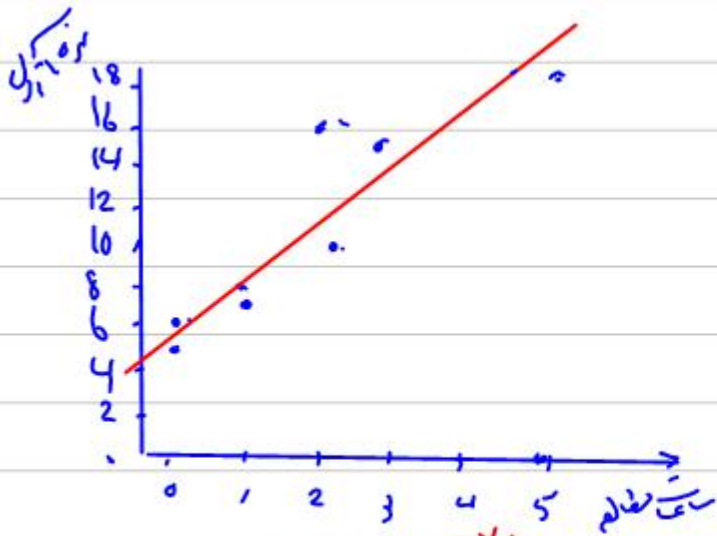
$r = 1$
همبستگی مثبت کامل

مثال: میزان مطالعه بر حسب رتبه آزمون 8 دانشجویان به صورت زیر بوده است.

رتبه آزمون	X_i	1	0	2	0	5	3	1	1
رتبه آزمون	Y_i	7	6	10	5	18	15	16	8

الف - بار همبستگی عددی را برآورد کنید و جهت و شدت همبستگی بین دو متغیر را حدس بزنید.

ب - ضریب همبستگی پیرسون را محاسبه کنید.



همبستگی مثبت و قدری منظم
و گسترده است

$$r(x,y) = \frac{\sum x_i y_i - \frac{\sum x_i \sum y_i}{n}}{\sqrt{\sum x_i^2 - \frac{(\sum x_i)^2}{n}}} \sqrt{\sum y_i^2 - \frac{(\sum y_i)^2}{n}}$$

$$= \frac{202 - \frac{14(85)}{8}}{\sqrt{44 - \frac{(14)^2}{8}}} \sqrt{1079 - \frac{(85)^2}{8}}$$

x_i	y_i	$x_i y_i$	x_i^2	y_i^2
1	7	7	1	49
0	6	0	0	36
2	10	20	4	100
0	5	0	0	25
5	18	90	25	324
3	15	45	9	225
1	16	16	1	256
1	8	8	1	64
14	85	202	44	1079
$\sum x_i$	$\sum y_i$	$\sum x_i y_i$	$\sum x_i^2$	$\sum y_i^2$

$= 0.91$ همبستگی بسیار قوی

کریل همبستگی پیرسون

رتبه دو متغیر x و y همبستگی وجود ندارد
" " " " " " دارد

$$\begin{cases} H_0: P(x,y) = 0 \\ H_1: P(x,y) \neq 0 \end{cases}$$

برای آزمون آزمون با استفاده از یک نمونه تصادفی n تایی از توزیع متغیر (x,y) مقدار

رابطه (x,y) را به کمک این فرمول محاسبه می کنند

$$t^* = r \sqrt{\frac{n-2}{1-r^2}}$$

در صورتی که H_0 را رد می کنیم α رد می کنیم

$$|t^*| > t_{\alpha/2, n-2}$$

مثال: در مثال مربوط به ساعت مطالعه، نمونه آزمون را در اینجا می توانیم از آنجا که در سطح
خطا 5٪ بین مطالعه و نمره آزمون همبستگی وجود دارد

$$\begin{cases} H_0: P(x,y) = 0 \\ H_1: P(x,y) \neq 0 \end{cases}$$

مقدار $r = 0.91$ در این مورد

$$t^* = r \sqrt{\frac{n-2}{1-r^2}} = 0.91 \sqrt{\frac{8-2}{1-(0.91)^2}} = 5.38$$

در جدول بحرانی $t_{0.025, 6} = 2.447$

H_0 رد می شود $t^* = 5.38 > 2.447$

در نتیجه یعنی بین نمره مطالعه و نمره آزمون همبستگی وجود دارد

گاهی متغیر X را نرمال بسازند یا متغیر Y را نرمال بسازند در این صورت
 نرمی آن از ضریب همبستگی و سرگردان استخراج می‌شود. در این حالت
 نرمی آن از ضریب همبستگی برآید و اگر نرمی آن استفا در نمودار

ضریب همبستگی رتبه‌ای اسپیرمن: اگر $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$ یک
 نمونه تصادفی از زوج‌های مرتب (x, y) باشد ضریب همبستگی رتبه‌ای اسپیرمن به
 صورت زیر تعریف می‌گردد.

$$r_s = 1 - \frac{6 \sum d_i^2}{n^3 - n}$$

که در آن $d_i = R(x_i) - R(y_i)$ ، $R(x_i)$ رتبه x_i و $R(y_i)$ رتبه y_i است.

لازم است که $n > 10$ باشد.

$$-1 \leq r_s \leq 1$$

مثال: میزان مطالعه بر حسب رتبه آزمون 8 داکنجو به صورت زیر بوده است.

x_i نمرات مطالعه	1	0	2	0	5	3	1	1
y_i رتبه آزمون	7	6	10	5	18	15	16	8

ضریب همبستگی پیرسون را بیابید.

x_i	y_i	$R(x_i)$	$R(y_i)$	d_i	d_i^2
1	7	3.5	3	0.5	0.25
0	6	1.5	2	-0.5	0.25
2	10	5.5	5	0.5	0.25
0	5	1.5	1	0.5	0.25
5	18	8	8	0	0
3	15	7	6	1	1
2	16	5.5	7	-1.5	2.25
1	8	3.5	4	-0.5	0.25
					4.5
					$\sum d_i^2$

اگر $R(x_i)$ و $R(y_i)$ را از جدول اول n بگیریم، اینها را در فرمول همبستگی پیرسون قرار می‌دهیم. اینها همبستگی پیرسون را می‌دهند.

$$r_s = 1 - \frac{6 \sum d_i^2}{n^3 - n} = 1 - \frac{6(4.5)}{8^3 - 8} = 0.95$$

همبستگی بسیار قوی است.

مثال: وضعیت مطالعه در مورد 8 داکنجو در یک آزمون به صورت زیر بوده است.

x_i وضعیت مطالعه	مکمل	زیاد	کم	کم	زیاد	زیاد	مکمل
y_i آزمون	بسیار خوب	خوب	بسیار خوب	مکمل	بسیار خوب	خوب	بسیار خوب

ضریب همبستگی پیرسون را بیابید.

$R(x)$	1	5	5	2.5	2.5	7.5	7.5	5
x_i و x_{i+1}	0-1	1-2	2-3	3-4	4-5	5-6	6-7	7-8
n_i و n_{i+1}	1	1	1	1	1	1	1	1
$R(y)$	1	4.5	6.5	3	2	8	6.5	4.5
d_i	0	0.5	-1.5	-0.5	0.5	-0.5	1	-0.5
d_i^2	0	0.25	2.25	0.25	0.25	0.25	1	0.25 = 2.5

$$r_s = 1 - \frac{6 \sum d_i^2}{n^3 - n} = 1 - \frac{6(2.5)}{8^3 - 8} = 0.97$$

آزمون فریب گتس بین دو سبک

$$\begin{cases} H_0: \rho_s = 0 \\ H_1: \rho_s \neq 0 \end{cases}$$

بین دو سبک X_1 و X_2 هیچ وجود ندارد
 " " " " دارد

این آزمون استفاده از آزمون r_s برای n نیاکی از توزیع (X_1, X_2) مقدار r_s

آزمون گتس بین دو سبک

$$Z^* = r_s \sqrt{n-1}$$

H_0 رد خطا α در سطح α رد خطا

$$|Z^*| > Z_{\alpha/2}$$

مثال: در مثال مربوط به جهت مطالعه عمر دوا بگردد وجود هر یک بین دو سبک را در

سطح خطا $\alpha = 0.05$ یا $\alpha = 0.05$ $Z^* = 0.97 \sqrt{8-1} = 2.57$

چون $Z^* = 2.57 > Z_{0.025} = 1.96$ پس H_0 رد می‌گردد یعنی تفاوت وجود دارد

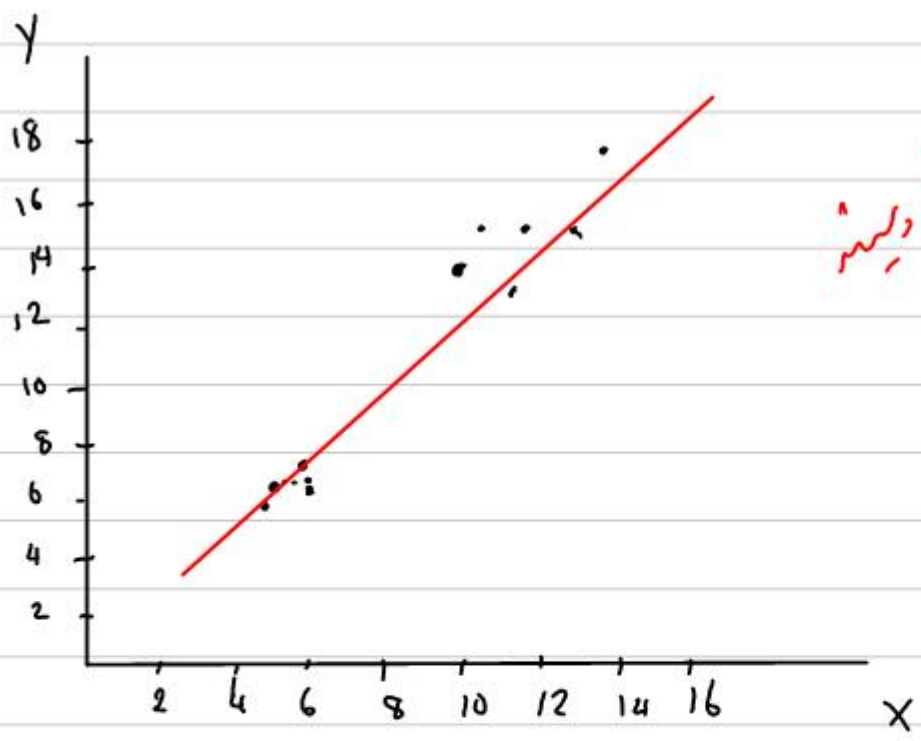
مثال: نمبر آف ریاضی دا کلاس، 10 دانشجوؤں دے درجے دے بارے میں معلومیت زرا درجہ آف

نمبر آف ریاضی	5	10	6	12	14	13	6	5	11	10
نمبر آف انگریزی	7	14	7	15	18	15	8	6	13	13

الف۔ ماہر آف نوڈار سٹاٹسٹکس کی تہت درجہ آف کلاسوں دے نمبر آف ریاضی دا کلاس، را حوالہ دینا

ب۔ چھپنے والے نمبر آف ریاضی دے بارے میں سٹاٹسٹکس دے استعمال دے بارے میں درجہ آف ریاضی دے نمبر آف انگریزی دے نمبر آف ریاضی دا کلاس، را حوالہ دینا

ج۔ چھپنے والے نمبر آف انگریزی دے بارے میں سٹاٹسٹکس دے استعمال دے بارے میں درجہ آف ریاضی دے نمبر آف انگریزی دے نمبر آف ریاضی دا کلاس، را حوالہ دینا



اس کا مطلب ہے کہ

x_i	5	10	6	12	14	13	6	5	11	10	92
y_i	7	14	7	15	18	15	8	6	13	13	116
$x_i y_i$	35	140	42	180	252	195	48	30	143	130	1195
x_i^2	25	100	36	144	196	169	36	25	121	100	952
y_i^2	49	196	49	225	324	225	64	36	169	169	1506

$$r(x,y) = \frac{1195 - \frac{92(116)}{10}}{\sqrt{952 - \frac{(92)^2}{10}} \sqrt{1506 - \frac{(116)^2}{10}}} = 0.982$$

$$\begin{cases} H_0: \rho(x,y) = 0 \\ H_1: \rho(x,y) \neq 0 \end{cases}$$

$$t^* = r \sqrt{\frac{n-2}{1-r^2}} = 0.982 \sqrt{\frac{10-2}{1-0.982^2}} = 4.69$$

برای H_0 ، $t^* = 14.69 > t_{0.025, 8} = 2.306$ پس فرضیه H_0 رد می‌شود.

x_i	5	10	6	12	14	13	6	5	11	10	
y_i	7	14	7	15	18	15	8	6	13	13	
$R(x_i)$	1.5	5.5	3.5	8	10	9	3.5	1.5	7	5.5	
$R(y_i)$	2.5	7	2.5	8.5	10	8.5	4	1	5.5	5.5	
d_i	-1	-1.5	1	-0.5	0	0.5	-0.5	0.5	1.5	0	
d_i^2	1	2.25	1	0.25	0	0.25	0.25	0.25	2.25	0	7.5

$$r_s = 1 - \frac{6 \sum d_i^2}{n^3 - n} = 1 - \frac{6(7.5)}{10^3 - 10} = 0.95$$

$$\begin{cases} H_0: \rho_s = 0 \\ H_1: \rho_s \neq 0 \end{cases}$$

$$Z^* = r_s \sqrt{n-1} = 0.95 \sqrt{10-1} = 2.85$$

برای H_0 ، $|z^*| = 2.85 > z_{0.05} = 1.96$ پس فرضیه H_0 رد می‌شود.

بصفتیٰ ہنس لہجے سے کہتا ہوں کہ داد بکر ہوتی ہے