

به نام مهربان بی همتا

آزمون تئوری هفتم - دسته‌ی دوم

7 آذر 92 - 4 ساعت

پرسش نخست : صفر؟!

برای همه‌ی مقادیر  $n \geq 5$ ، یک گراف  $n$  راسی 2-همبند با  $2n-5$  یال و قطر 2 ارائه کنید.

پرسش دوم : همیلتون و اینا

فرض کنید  $G$  گراف ساده‌ی نابديهی با دنباله‌ی درجه‌های  $(d_1 \leq d_2 \leq \dots \leq d_n)$  باشد. نشان دهید اگر مقدار  $m$  ایی کمتر از  $\frac{(n+1)}{2}$  موجود نباشد که برای آن  $d_m < m$  و  $d_{n-m+1} < n - m$  آنگاه  $G$  مسیر همیلتونی دارد.

پرسش سوم : مجموعه‌ی طلایی

ثابت کنید در هر گراف بدون طوقه‌ی جهت دار  $D$  یک زیر مجموعه از رئوس دو به دو غیر مجاور مثل  $S$  وجود دارد به طوری که هر راس بیرون از  $S$ ، با یک مسیر به طول حداکثر 2 با شروع از  $S$  قابل دسترس باشد.

پرسش چهارم : تورنمت

در یک تورنمت 15 تیم دو به دو با هم مسابقه می‌دهند، یک بازی را فرد می‌نامیم اگر تعداد همه‌ی بازی‌های هر دو تیم شرکت کننده در آن تا قبل از آن بازی فرد باشد.  
الف) نشان دهید دست کم یک بازی فرد وجود دارد.  
ب) آیا ممکن است دقیقاً یک بازی فرد وجود داشته باشد.

پرسش پنجم : گردالی با طعم لیمو

دور یک دایره  $n$  تا جعبه داریم که داخل هر کدام تعدادی توپ است، هر دفعه از یک جعبه 2 توپ برمی‌داریم و هر کدام را داخل یکی از جعبه‌های مجاور جعبه‌ی قبلی‌شان می‌گذاریم، ثابت کنید اگر بعد از  $m$  مرحله با حالت اولیه برسیم،  $m$  مضربی از  $n$  است.

مه و ستاره درد من می‌دانند  
که همچو من پی تو سرگردانند  
شی کنار چشمه پیدا شو  
میان اشک من چو گل وا شو  
توای پری کجایی؟ که رخ نمی‌نمایی  
از آن بهشت پنهان، دری نمی‌گشایی  
ه. الف سایه