مؤسسهٔ انتشارات علمی

آشنایی با
المپیاد ریاضی

یحیی تابش

رامین تکلوبیغش، امیر جعفری، کسری رفیع

پیمان کسایی، رضاناصر عصر، بهرنگ نوحی

آشنایی با المپیاد ریاضی

یحیی تابش
رامین تکلوبیغش، امیر جعفری، کسری رفیع
پیمان کسایی، رضاناصر عصر، بهرنگ نوحی

مؤسسهٔ انتشارات علمی دانشگاه صنعتی شریف

مؤسسهٔ انتشارات علمی

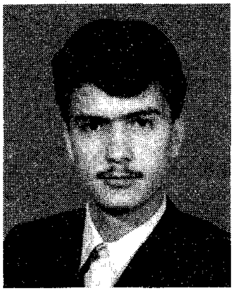
دانشگاه صنعتی شریف

آشنایی با المپیاد ریاضی
تألیف دکتریحیی تابش
رامین تکلوبیغش، امیر جعفری، کسری رفیع
پیمان کسایی، رضاناصر عصر، بهرنگ نوحی
ویراستهٔ بردیا حسام
چاپ دوم، ۱۳۸۰
شمارگان: ۲۰۰۰
بها: ۱۰۰۰۰ ریال
لیتوگرافی، چاپ، وصحافی: چاپخانهٔ دانشگاه صنعتی شریف

شابِک: ۹-۱۰-۶۳۷۹-۹۶۴ ISBN 964-6379-10-9

آشنایی با المپیاد ریاضی /یحیی تابش ... [ودیگران]؛ویراستهٔ بردیا حسام. - تهران :دانشگاه صنعتی شریف، مؤسسهٔ انتشارات علمی، ۱۳۷۸۰.
پنج، ۲۰۱ص.: مصور، جدول.
ISBN 964-6379-10-9 چاپ اول: ۱۳۷۷. بها: ۸۰۰۰ ریال .
فهرستنویسی بر اساس اطلاعات فیپا (فهرستنویسی پیش از انتشار)
چاپ دوم: ۱۳۸۰. بها: ۱۰۰۰۰ ریال
۱. المپیادها(ریاضیات). ۲. ریاضیات - مسائل، تمرینها وغیره. ۳.ریاضیات - مسابقه‌ها. الف . تابش، یحیی، ۱۳۲۹ - . ب. حسام، بردیا، ۱۳۵۶ - ،ویراستار. ج . دانشگاه صنعتی شریف. مؤسسهٔ انتشارات علمی.
LB ۳۰۶۰/۲۴/آ۵ ۳۷۳/۲۳۸
کتابخانهٔ ملی ایران ۳۴۸-۷۷م

این‌کتاب با استفاده ازسهمیهٔ کاغذ تخصیص دادهٔ شدهٔ وزارت‌فرهنگ‌وارشاداسلامی چاپ‌شده‌است.



رضا صادقی
(۱۳۷۶-۱۳۵۶)

این کتاب به یاد و باگرامیداشت خاطرهٔ عزیز از دست رفته‌مان زنده‌یاد **رضا صادقی** دانشجوی دانشکدهٔ علوم ریاضی دانشگاه صنعتی شریف که در سانحهٔ دلخراش تصادف نخبگان ریاضی کشور جان سپرد منتشر می‌شود.

گزیده‌ای از زندگی پرافتخار رضا صادقی

- دریافت مدال طلای یازدهمین المپیاد ملّی ریاضی، ۱۳۷۲.
- دریافت مدال نقره سی‌وپنجمین المپیاد بین‌المللی ریاضی، هنگ‌کنگ، ۱۳۷۳.
- دریافت مدال طلای دوازدهمین المپیاد ملّی ریاضی، ۱۳۷۳.
- دریافت مدال طلای سومین المپیاد ملّی ریاضی، ۱۳۷۳.
- دریافت مدال طلای سی‌وششمین المپیاد بین‌المللی ریاضی، کانادا، ۱۳۷۴.
- دانشجوی برگزیده دانشکدهٔ علوم ریاضی دانشگاه صنعتی شریف، ۷۷-۱۳۷۶.
- بورسیه مرکز تحقیقات فیزیک نظری و ریاضیات، ۱۳۷۶-۱۳۷۴.
- مدرس دوره‌های آموزشی المپیاد ریاضی، باشگاه دانش‌پژوهان جوان، ۷۶-۱۳۷۴.
- مدرس تمرین ریاضی عمومی ۱، دانشکدهٔ علوم ریاضی دانشگاه صنعتی شریف، ۷۶-۱۳۷۵.
- ارائهٔ مقالهٔ «اعداد ساختنی-جهان متناهی» در اولین سمینار ریاضی دانشجویان کشور، ۷۶/۱۲/۲۴، دانشگاه شهید چمران اهواز.

برای یاد بود و گرامیداشت خاطرهٔ رضا صادقی تصمیم گرفته شد از سال ۱۳۷۷ به بعد هر ساله جایزه‌ای به‌نام جایزهٔ رضا صادقی در مورد مسائل برگزیده برای ارسال به المپیاد بین‌المللی ریاضی از طرف باشگاه دانش‌پژوهان جوان و دانشکدهٔ علوم ریاضی دانشگاه صنعتی شریف به برگزیدگان اهدا شود.

فهرست مطالب

بسم‌الله‌الرحمن‌الرحیم

پیشگفتار مؤلفان

المپیاد ریاضی آوردگاه حل مسأله است. در واقع مسأله سرچشمهٔ جوشان ریاضیات و موجب شادابی و سر زندگی محیط علمی است و با توجه به نقشی که حل مسأله در فراگیری ریاضیات دارد، ایجاد زمینه و انگیزه برای حل مسائلی که به‌دقت طرح شده‌اند، فرآیند فراگیری ریاضیات را شتاب می‌بخشد. در این راستا احساس رضایتِ حاصل از یک تلاش فکری بزرگ است که ذهنهای جوان را به خلاقیت و نوآوری رهنمون می‌شود.

سابقهٔ تاریخی مسابقات ریاضی به ۱۸۹۴ میلادی بازمی‌گردد که مسابقات ریاضی دانش‌آموزی در کشور مجارستان آغاز شد و پس از آن رفته‌رفته، کشورهای دیگر به منظور تشویق و ترغیب دانش‌آموزان به فراگیری ریاضیات به برگزاری مسابقات ریاضی دست زدند تا اینکه در سال ۱۹۵۹ میلادی کشور رومانی به ابتکار برگزاری اولین المپیاد بین‌المللی ریاضی دست زد، در اولین المپیاد فقط ۶ کشور حضور داشتند ولی به مرور کشورهای بیشتری به المپیاد پیوستند به‌طوری که در حال حاضر بیش از ۸۰ کشور با تیمهایی متشکل از ۶ دانش‌آموز دبیرستانی در المپیاد شرکت می‌کنند، و المپیاد بین‌المللی ریاضی معتبرترین مسابقهٔ بین‌المللی دانش‌آموزی است.

مسابقات دانش‌آموزی در کشور ما نیز جایگاه ویژه‌ای یافته است. اولین مسابقهٔ ریاضی دانش‌آموزی در فروردین ۱۳۶۲ بین دانش‌آموزان برگزیدهٔ سرتاسر کشور برگزار شد و برای اولین بار در سال ۱۳۶۶ تیمی به المپیاد بین‌المللی ریاضی اعزام شد، توفیق تیمهای اعزامی در المپیاد بین‌المللی ریاضی موجب رونق این مسابقات و علاقه‌مندی دانش‌آموزان زیادی به شرکت در المپیاد ملّی ریاضی شده است، این امر نوعی آموزش غیررسمی بسیار ارزنده را بین دانش‌آموزان کشور ما رایج کرده است که دستاوردهای بسیار ارزنده‌ای در تقویت بنیهٔ علمی و ایجاد روحیهٔ دانشوری به همراه داشته است، روحیه‌ای که نویدبخش آینده است.

کتاب حاضر مجموعه‌ای است که برای آشنایی با مباحث المپیاد ریاضی بسیار مفید است و در واقع حاصل تجربهٔ دست‌اندرکاران المپیاد و کسانی است که سابقهٔ عضویت در تیمهای المپیاد ریاضی را در سالهای قبل داشته‌اند. این کتاب به دانش‌آموزان علاقه‌مند تقدیم می‌شود.

۱

هنر حل مسأله

استراتژی‌ها و شگردهای حل مسأله را «مکاشفه» می‌نامند. هر چند که این استراتژی‌ها را نمی‌توان به‌طور دقیق و کامل طبقه‌بندی کرد ولی، تجربه‌های حل مسأله را می‌توان مورد بررسی و تجزیه و تحلیل قرار داد. عمده‌ترین تجربه‌های حل مسأله را در ۱۲ بخش زیرین ذکر می‌کنیم:

۱. جستجو برای الگو
۲. رسم شکل
۳. صورتبندی مسألهٔ معادل
۴. تغییر مسأله
۵. انتخاب نمادهای مناسب
۶. استفاده از تقارن
۷. تجزیه به حالتهای ساده‌تر
۸. کار عقب‌رونده
۹. بررسی نقیض
۱۰. زوجیّت
۱۱. بررسی حالتهای حدّی
۱۲. تعمیم

۱-۱ جستجو برای الگو

همواره کار حل مسأله را با نوعی ادراک شهودی از مسأله شروع می‌کنیم و با بررسی چند حالت خاص به‌سوی الگوسازی برای حل کامل آن جلو می‌رویم.

■ **مثال ۱-۱**

فرض کنید $S_{n,0}$، $S_{n,1}$ و $S_{n,2}$ نشان‌دهندهٔ حاصل‌جمع سه‌جمله سه‌جمله از روی سطر nام مثلث خیام باشد که از چپ و با عنصر اول، دوم، و سوم شروع می‌کنیم. بر اساس این روند حدسی برای مقدار $S_{100,1}$ ارائه کنید.

حل. چند سطر از مثلث خیام را در نظر می‌گیریم و با بررسی آن دنبال الگویی می‌گردیم که قابل تعمیم باشد.

جدول ۱-۱

$S_{n,2}$	$S_{n,1}$	$S_{n,0}$	n	مثلث خیام
۰	۰	۱+	۰	۱
۰-	۱	۱	۱	۱ ۱
۱	۲+	۱	۲	۱ ۲ ۱
۳	۳	۲-	۳	۱ ۳ ۳ ۱
۶+	۵	۵	۴	۱ ۴ ۶ ۴ ۱
۱۱	۱۰-	۱۱	۵	۱ ۵ ۱۰ ۱۰ ۵ ۱
۲۱	۲۱	۲۲+	۶	۱ ۶ ۱۵ ۲۰ ۱۵ ۶ ۱
۴۲-	۴۳	۴۳	۷	۱ ۷ ۲۱ ۳۵ ۳۵ ۲۱ ۷ ۱

با بررسی جدول فوق می‌بینیم که در هر سطر دو عدد مساوی وجود دارد و عدد سوم یا یک واحد بیشتر است یا یک واحد کمتر. از طرف دیگر داریم

$$S_{n,0} + S_{n,1} + S_{n,2} = 2^n$$

و با در نظر گرفتن دورهٔ افزایش و کاهش، که طول آن ۶ است، به‌دست می‌آید

$$S_{100,0} = S_{100,1} = S_{100,2} - 1$$

و همچنین نتیجه می‌شود

$$S_{100,1} + S_{100,1} + S_{100,1} + 1 = 2^{100}$$

پس

$$S_{100,1} = \frac{2^{100} - 1}{3}$$

■

■ **مثال ۱-۲**

فرض کنید x_1، x_2، x_3، ... دنباله‌ای از اعداد حقیقی ناصفر باشد که در رابطه زیر صدق می‌کند

$$x_n = \frac{x_{n-2}x_{n-1}}{2x_{n-2} - x_{n-1}} \qquad n = 3, 4, 5, \ldots$$

شرط لازم و کافی روی x_1 و x_2 به‌دست آورید برای اینکه به ازای nهای به اندازهٔ کافی بزرگ، x_n عدد صحیح باشد.

حل. برای درک بهتر مسأله چند جمله از دنباله را محاسبه می‌کنیم

$$x_3 = \frac{x_1x_2}{2x_1 - x_2}, \quad x_4 = \frac{x_1x_2}{3x_1 - 2x_2}, \quad x_5 = \frac{x_1x_2}{4x_1 - 3x_2}$$

با بررسی جملات فوق می‌توانیم یک الگوی کلی حدس بزنیم که به سادگی با استقرا قابل اثبات است:

$$x_n = \frac{x_1x_2}{(n-1)x_1 - (n-2)x_2}$$

به عبارت دیگر

$$x_n = \frac{x_1x_2}{(x_1 - x_2)n + (2x_2 - x_1)}$$

حال اگر $x_1 \neq x_2$، می‌بینیم که (به ازای nهای بزرگ) قدرمطلق مخرج از صورت بیشتر می‌شود و لذا x_n نمی‌تواند عدد صحیح باشد. در نتیجه اگر $x_1 = x_2$، آنگاه کلیهٔ جملات دنباله مساوی است. بدین ترتیب به ازای هر n، x_n عدد صحیح است اگر و فقط اگر $x_1 = x_2$. ■

تمرین

۱. دنبالهٔ $\ldots ,۸ ,۲ ,۴ ,۷ ,۴ ,۱ ,۷ ,۲$ بدین ترتیب ساخته می‌شود که با ۷ ,۲ شروع می‌کنیم و حاصل‌ضرب جملات متوالی را تشکیل می‌دهیم و برحسب آنکه حاصل یک‌رقمی یا دورقمی باشد، یک جمله یا دو جمله به دنباله اضافه می‌شود. ثابت کنید رقم ۶ بینهایت بار در این دنباله ظاهر می‌شود.

۲. فرض کنید S_1 دنبالهٔ اعداد صحیح و مثبت $\ldots ,۴ ,۳ ,۲ ,۱$ باشد. S_{n+1} را بدین‌گونه تعریف می‌کنیم که با افزودن ۱ به جملاتی که بر n بخش‌پذیرند، از S_n حاصل شود. پس مثلاً

$$S_2 : ۲, ۳, ۴, ۵, ۶, \ldots$$

$$S_3 : ۳, ۳, ۵, ۵, ۷, ۷, \ldots$$

مقادیر n را طوری تعیین کنید که $(n-1)$ جملهٔ اول S_n برابر n باشد.

۱-۲ رسم شکل

در هر مسأله‌ای که امکانپذیر باشد، رسم یک شکل (اعم از هندسی، یا یک نمودار و غیره) می‌تواند در یافتن حل مسأله الهام‌بخش باشد و رابطهٔ بین اجزاءِ مسأله را بهتر نمایان سازد.

■ **مثال ۱-۳**

اگر a و b اعدادی صحیح و مثبت و بدون عامل مشترک باشند، نشان دهید

$$\left[\frac{a}{b}\right]+\left[\frac{۲a}{b}\right]+\left[\frac{۳a}{b}\right]+\cdots+\left[\frac{(b-۱)a}{b}\right]=\frac{۱}{۲}(a-۱)(b-۱)$$

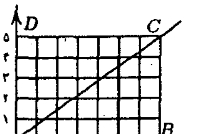
($[x]$ جزء صحیح x است).

حل. اگر $b=۱$، آنگاه تساوی به‌طور بدیهی برقرار است، ولی اینکه چگونه شکل ۱-۱ می‌تواند به حل این مسأله کمک کند چندان روشن نیست. با کمی دقت می‌بینیم که دو متغیر مستقل a و b وجود دارد و مقادیر a/b، $۲a/b$، $۳a/b$، ... ، مقادیر تابع $f(x)=ax/b$، در اعداد صحیح و مثبت می‌باشند. آیا می‌توانیم مقادیر $[a/b]$، $[۲a/b]$، ... را به‌طور هندسی توجیه کنیم؟

برای مثال مقادیر $a=۵$ و $b=۷$ را در نظر می‌گیریم. هر یک از نقاط $P_k=(k,۵k/۷)$، $k=۱,۲,\ldots,۶$ روی خط $y=۵x/۷$ قرار دارند. مقدار $[۵k/۷]$ برابر با تعداد نقاط مربوط روی خط عمودی گذرا بر P_k است که بالای محور xها و زیر P_k قرار می‌گیرد، بنابراین $\sum_{k=۱}^{۶}[۵k/۷]$ برابر تعداد نقاطی است که درون مثلث ABC قرار می‌گیرد، که برابر $۱۲=\frac{۱}{۲}(۶\times ۴)$ است.

در حالت کلی نیز نتیجهٔ به‌دست آمده درست است و این فرض که a و b عامل مشترک ندارند نتیجه می‌دهد که هیچ نقطه‌ای از شبکه روی خط $y=ax/b$ قرار نمی‌گیرد. اکنون روشن است که

$$\sum_{k=۱}^{b-۱}\left[\frac{ka}{b}\right]=\frac{۱}{۲}(\text{تعداد نقاط درون مستطیل } ABCD)$$
$$=\frac{۱}{۲}(a-۱)(b-۱)$$



شکل ۱-۱

■

تمرین

۱. با استفاده از شکل، صحت روابط زیر را نشان دهید

$$\sum_{i=۰}^{n}\sum_{j=۰}^{n}a_ia_j=\sum_{j=۰}^{n}\sum_{i=۰}^{n}a_ia_j,\qquad \sum_{j=۰}^{n}\sum_{i=j}^{n}a_ia_j=\sum_{i=۰}^{n}\sum_{j=i}^{n}a_ia_j$$

$$\left(\sum_{i=0}^{n} a_i\right)^2 = \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n} a_i a_j = 2\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{i} a_i a_j - \sum_{i=0}^{n} a_i^2$$

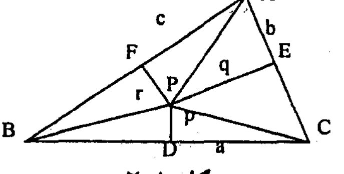
۲. پاره خطی با طول ثابت، روی یک نیمدایره تغییر وضعیت می‌دهد به‌طوری که وسط پاره‌خط و تصویر ابتدا و انتهای پاره‌خط، روی قطر نیمدایره تشکیل یک مثلث می‌دهند. ثابت کنید این مثلث متساوی‌الساقین است.

۱-۳ صورتبندی مسألهٔ معادل

در دو بخش قبل دیدیم که گام نخست در حل مسأله عبارت است از جمع‌آوری داده‌ها، جستجو، فهمیدن مسأله، برقراری ارتباط بین اجزاء، حدس زدن، و تجزیه و تحلیل؛ ولی اگر همهٔ این کارها به روش معقولی میسر نباشند چه‌کنیم؟ یعنی اینکه، ممکن است کارهای محاسباتی خیلی پیچیده باشد و یا به سادگی نتوانیم حالتهای خاص را مطرح کنیم تا به بینش لازم برسیم. آنچه در چنین شرایطی توصیه می‌شود این است که مسأله را با مسأله‌ای معادل ولی ساده‌تر جایگزین کنیم. راه کلی در این‌گونه معادل‌سازی به بینش و تجربه‌های عمومی باز می‌گردد، ولی کارهایی از قبیل دستکاریهای جبری یا مثلثاتی ، و تفسیر مجدد مسأله با زبانی دیگر می‌تواند مؤثر باشد.

■ مثال ۱-۴

P نقطه‌ای دلخواه داخل یک مثلث ABC است. پای عمودهای واصل از P بر ضلعهای BC، CA، و AB را به ترتیب D، E، و F می‌نامیم. کلیهٔ Pهایی را پیدا کنید که $\frac{BC}{PD} + \frac{CA}{PE} + \frac{AB}{PF}$ مینیمم باشد.



شکل ۱-۲

حل. طولهای BC، AC، و AB را به ترتیب با a، b، و c، و همچنین طولهای PD، PE، و PF را نیز به ترتیب با p، q، و r نشان می‌دهیم. می‌خواهیم مقدار $a/p + b/q + c/r$ را مینیمم کنیم. دقت کنید که

$$\text{مساحت}\,\triangle ABC = \text{مساحت}\,\triangle BCP + \text{مساحت}\,\triangle CAP + \text{مساحت}\,\triangle ABP$$

$$= \frac{1}{2}ap + \frac{1}{2}bq + \frac{1}{2}cr = \frac{1}{2}(ap + bq + cr)$$

پس $ap+bq+cr$، مستقل از محل نقطه p ، مقدار ثابتی است. پس به‌جای مینیمم کردن $a/p+b/q+c/r$ کافی است مقدار $(ap+bq+cr)(a/p+b/q+c/r)$ را مینیمم کنیم. می‌دانیم که

$$\begin{aligned}(ap+bq+cr)\left(\frac{a}{p}+\frac{b}{q}+\frac{c}{r}\right) &= a^۲+b^۲+c^۲+ab\left(\frac{p}{q}+\frac{q}{p}\right)\\ &\quad +bc\left(\frac{q}{r}+\frac{r}{q}\right)+ac\left(\frac{p}{r}+\frac{r}{p}\right)\\ &\geq a^۲+b^۲+c^۲+۲ab+۲bc+۲ac\\ [۲mm] &=(a+b+c)^۲\end{aligned}$$

(نامساوی از آنجا ناشی می‌شود که به ازای هر دو عدد مثبت x و y، $۲ \geq \frac{x}{y}+\frac{y}{x}$، و تساوی وقتی است که $x=y$.) در نتیجه مقدار $(ap+bq+cr)(\frac{a}{p}+\frac{b}{q}+\frac{c}{r})$ وقتی مینیمم است که برابر $(a+b+c)^۲$ باشد، و این فقط هنگامی است که $p=q=r$. لذا مقدار موردنظر، یعنی $\frac{a}{p}+\frac{b}{q}+\frac{c}{r}$، وقتی مینیمم می‌شود که p مرکز دایرهٔ محیطی مثلث باشد.

■

■ **مثال ۱-۵**

عدد صحیح و مثبت n مفروض است. تعداد چهارتاییهای (a,b,c,d) از اعداد صحیح و مثبت را تعیین کنید که در آنها $۰ \leq a \leq b \leq c \leq d \leq n$.

حل. ایدهٔ کلیدی که مسأله را روشن می‌سازد این است که تناظر یک به یکی بین چهارتاییهای موردنظر و زیرمجموعه‌های چهار عضوی مجموعهٔ $\{۰,۱,\ldots,n+۳\}$ وجود دارد. فرض کنید چهارتایی (a,b,c,d) که $۰ \leq a \leq b \leq c \leq d \leq n$، با زیرمجموعهٔ $\{a,b+۱,c+۲,d+۳\}$ متناظر شده باشد؛ به سادگی دیده می‌شود که این تناظر یک‌به‌یک است، یعنی هر چهارتایی موردنظر ما دقیقاً با یک زیر مجموعهٔ چهار عضوی مجموعهٔ $\{۰,۱,\ldots,n+۳\}$ متناظر می‌شود و برعکس. لذا عدد موردنظر عبارت است از $\binom{n+۴}{۴}$. ■

تمرین

۱. به چند طریق عدد ۱۰ را می‌توان به‌صورت مجموع ۵ عدد صحیح غیر منفی (با در نظر گرفتن ترتیب) نوشت؟

۲. فرض کنید $a(n)$ نشاندهندهٔ تعداد روشهای بیان یک عدد صحیح و مثبت n به‌صورت مجموعی از ۱ها و ۲ها (با در نظر گرفتن ترتیب) باشد و $b(n)$ نشانگر تعداد روشهای بیان یک عدد صحیح و مثبت n به‌صورت مجموعی از اعداد صحیح بزرگتر از ۱، بازهم با در

نظر گرفتن ترتیب. مثلاً جدول زیر نشان می‌دهد که $a(۴) = ۵$ و $b(۶) = ۵$.

aـ جمع	bـ جمع
۱ + ۱ + ۲	۴ + ۲
۱ + ۲ + ۱	۳ + ۳
۲ + ۱ + ۱	۲ + ۴
۲ + ۲	۲ + ۲ + ۲
۱ + ۱ + ۱ + ۱	۶

الف) با یافتن تناظر یک‌به‌یکی بین aـجمعها و bـجمعها نشان دهید که به ازای هر n، $a(n) = b(n + ۲)$.

ب) نشان دهید $a(۱) = ۱$ و $a(۲) = ۲$، و به ازای هر $n > ۲$،

$$a(n) = a(n - ۱) + a(n - ۲)$$

۱-۴ تغییر مسأله

در بعضی مسائل می‌توانیم مسألهٔ موردنظر را به مسألهٔ دیگری تبدیل کنیم؛ این دو مسأله لزوماً معادل یکدیگر نیستند، ولی حل مسألهٔ دوم، حل مسألهٔ اول را نتیجه می‌دهد (عکس این رابطه لزوماً برقرار نیست). به مثالی از این دست توجه می‌کنیم.

■ **مثال ۱-۶**

اعداد مثبت a، b، c، و d مفروض‌اند. ثابت کنید

$$\frac{a^۳+b^۳+c^۳}{a+b+c}+\frac{b^۳+c^۳+d^۳}{b+c+d}+\frac{c^۳+d^۳+a^۳}{c+d+a}+\frac{d^۳+a^۳+b^۳}{d+a+b} \geq a^۲+b^۲+c^۲+d^۲$$

حل. نظر به تقارنی که در مسأله وجود دارد کافی است ثابت کنیم به ازای کلیهٔ مقادیر صحیح x، y، و z

$$\frac{x^۳+y^۳+z^۳}{x+y+z} \geq \frac{۱}{۳}(x^۲+y^۲+z^۲)$$

برای حل این نامساوی هم، بدون از دست دادن عمومیت مسأله، می‌توانیم فرض کنیم $x+y+z = ۱$، زیرا در غیر این صورت کافی است مقادیر زیر را در نظر بگیریم

$$x = x/(x+y+z), \qquad Y = y/(x+y+z), \qquad Z = z/(x+y+z)$$

پس مسألهٔ اصلی به مسألهٔ زیر تبدیل می‌شود:

اعداد مثبت X، Y، و Z که $X + Y + Z = ۱$ مفروضند. ثابت کنید

$$X^۳ + Y^۳ + Z^۳ \geq \frac{۱}{۳}(X^۲ + Y^۲ + Z^۲)$$

حل مسألهٔ اخیر به خواننده واگذار می‌شود. ■

تمرین

۱. ثابت کنید اعداد صحیح و مثبت x، y، و z وجود ندارند که

$$x^۲ + y^۲ + z^۲ = ۲xyz$$

۱-۵ انتخاب نمادهای مناسب

از نخستین گامها در حل مسأله‌های ریاضی، تبدیل مسأله به‌صورتی «نمادین» می‌باشد. در انتخاب نمادها باید هر ایدهٔ کلیدی را ملحوظ داشته، آن را با نمادی بیان کنیم. بی‌دقتی در انتخاب نمادها ممکن است به از بین رفتن یا مُبهم شدن بعضی از روابط منجر شود.

■ **مثال ۱-۷**

اگر n عدد صحیح و مثبتی باشد که $۲n + ۱$ مربع کامل است، نشان دهید $n + ۱$ به‌صورت مجموع دو مربع کامل متوالی قابل بیان است.

حل. انتخاب نمادهای مناسب، مسأله را بسیار ساده می‌کند. فرض کنید $۲n + ۱ = s^۲$، که s یک عدد صحیح است. چون $s^۲$ یک عدد فرد است، پس s نیز فرد است. فرض کنید t نیز یک عدد صحیح باشد که $s = ۲t + ۱$؛ در این صورت

$$۲n + ۱ = (۲t + ۱)^۲$$

و از اینجا

$$n = ۲t^۲ + ۲t$$

پس

$$n + ۱ = t^۲ + (t + ۱)^۲$$

■

■ **مثال ۱-۸**

فرض کنید $۱ > a_۰ > -۱$ و

$$a_n = \left(\frac{۱ + a_{n-۱}}{۲}\right)^{۱/۲}, \quad n > ۰$$

اگر $A_n = 4^n(1 - a_n)$، آنگاه وقتی $n \to +\infty$، A_n به چه مقداری میل خواهد کرد؟

حل. تلاش برای اینکه a_n را بر حسب a_0 بنویسیم به محاسبات پیچیده‌ای می‌انجامد. در اینجا ایدهٔ کلیدی این است که متوجه شویم یک زاویهٔ یکتای $0 < \theta < \pi$ وجود دارد که $a_0 = \cos\theta$، و در نتیجه

$$a_1 = \left(\frac{1 + \cos\theta}{2}\right)^{1/2} = \cos\frac{\theta}{2}$$

$$a_2 = \left(\frac{1 + \cos(\theta/2)}{2}\right)^{1/2} = \cos\frac{\theta}{4}$$

$$a_n = \cos\left(\frac{\theta}{2^n}\right)$$

پس

$$A_n = 4^n\left(1 - \cos\frac{\theta}{2^n}\right)$$

$$= \frac{4^n \sin^2\frac{\theta}{2^n}}{1 + \cos\frac{\theta}{2^n}} = \frac{\theta^2}{1 + \cos\frac{\theta}{2^n}}\left(\frac{\sin\frac{\theta}{2^n}}{\frac{\theta}{2^n}}\right)^2$$

که در نتیجه وقتی که n به $+\infty$ میل نماید، A_n به $\frac{\theta^2}{2}$ همگرا می‌شود. ■

۱-۶ استفاده از تقارن

وجود تقارن در یک مسأله موجب می‌شود که با عملیات کمتری مسأله را به جواب برسانیم. مثلاً حاصل‌ضرب زیر را در نظر بگیرید

$$(a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc)$$

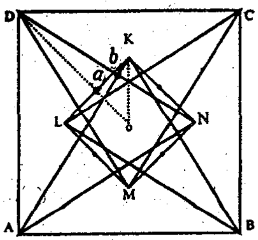
چون هر یک از فاکتورها نسبت به a، b، و c تقارن دارد، پس در حاصل‌ضرب نیز باید چنین تقارنی موجود باشد. پس مثلاً اگر a^3 در حاصل‌ضرب موجود باشد، باید b^3 و c^3 نیز موجود باشد. مشابهاً اگر a^2b نیز در حاصل‌ضرب موجود باشد، باید a^2c، b^2c، b^2a، c^2a، و c^2b نیز با ضرایب یکسانی ظاهر شوند. پس واضح است که حاصل‌ضرب به شکل زیر است

$$A(a^3 + b^3 + c^3) + B(a^2b + a^2c + b^2a + b^2c + c^2a + c^2b) + C(abc)$$

که به سادگی دیده می‌شود $A = 1$، $B = 0$ و $C = -3$.

■ **مثال ۱-۹**

مثلثهای متساوی‌الاضلاع ABK، BCL، CDM، و DAN را درون مربع $ABCD$ بنا می‌کنیم. ثابت کنید وسطهای چهار پاره‌خط KL، LM، MN، و NK و وسطهای ۸ پاره‌خط AK، BK، BL، CL، CM، DM، DN، و AN، دوازده رأس یک دوازده ضلعی منتظم می‌باشند.



شکل ۱-۳

حل. دوازده رأس موردنظر روی شکل ۱-۳ مشخص شده‌اند؛ دوتا از این رأسها را با a و b علامت گذاشته‌ایم.

با در نظر گرفتن تقارن شکل کافی است نشان دهیم $\angle bOK = 15^\circ$، $\angle aOb = 30^\circ$، و $|aO| = |bO|$.

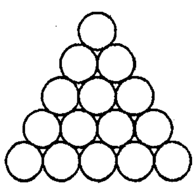
دقت کنید که AN بخشی از عمودمنصف BK است و لذا $|NB| = |KN|$. با استفاده از تقارن نتیجه می‌شود که MBN یک مثلث متساوی‌الاضلاع است و لذا $\angle CBN = 15^\circ$. حال مثلث DBN را در نظر می‌گیریم. دقت کنید که Ob وسطهای اضلاع DB و DN را به یکدیگر وصل می‌کند، پس Ob با BN موازی است و طول آن نصف طول BN است. پس، اگر طول BN را s بگیریم، $|Ob| = s/2$ و $\angle bOK = 15^\circ$. اکنون به سادگی دیده می‌شود که

$$\angle aOb = \angle DOK - \angle bOK = 45^\circ - 15^\circ = 30^\circ$$

و $|Oa| = |KN|/2 = s/2$. ■

تمرین

۱. ۱۵ سکه را مطابق شکل زیر روی هم چیده‌ایم. این سکه‌ها را به‌طور دلخواه رنگ سیاه یا سفید می‌زنیم. ثابت کنید ۳ سکهٔ همرنگ وجود دارد که مرکزهای آنها رأسهای یک مثلث متساوی‌الاضلاع است.



شکل ۱-۴

۲. نقطهٔ P داخل یک مثلث متساوی‌الاضلاع ABC قرار دارد. از P بر سه ضلع عمودهایی رسم می‌کنیم و پای عمودها را D، E، و F می‌نامیم. جای قرارگرفتن P را طوری تعیین کنید که مقدار $PD + PE + PF$، (الف) ماکزیمم شود، (ب) مینیمم شود.

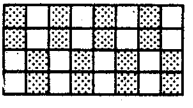
۱-۷ تجزیه به حالتهای ساده‌تر

گاهی اوقات می‌توان یک مسألهٔ را به تعدادی مسألهٔ ساده‌تر و کوچکتر تبدیل کرد که هرکدام از این مسائلِ ساده‌تر را می‌توان جداگانه در نظر گرفت.

■ **مثال ۱-۱۰**

یک مستطیل را در یک صفحهٔ شبکه‌بندی شده(نظیر کاغذ شطرنجی) طوری قرار می‌دهیم که رأسهای آن بر نقاط شبکه منطبق باشد. ثابت کنید مساحت مستطیل برابر است با $I + \frac{1}{2}B - 1$، که I و B به ترتیب برابر تعداد نقاط شبکه در داخل و روی محیط مستطیل است.

حل. هر مثلث در صفحهٔ شبکه‌بندی شده در یکی از این دسته‌ها قرار می‌گیرد



شکل ۱-۵

دستهٔ۱. مثلثهایی قائم‌الزاویه که اضلاعشان موازی محورهای مختصات است.
دستهٔ۲. مثلثهایی با زوایای حاده که یک ضلعشان موازی یکی از محورهاست (چنین مثلثی را می‌توان به‌صورت حاصل‌جمع دو مثلث از دستهٔ اول در نظر گرفت).
دستهٔ ۳. مثلثهایی که می‌توان آنها را به‌صورت تفاضل دو مثلث از دستهٔ ۱ در نظر گرفت.
دستهٔ ۴ و دستهٔ ۵. مثلثهایی هستند که هیچ یک از اضلاع آنها موازی محور xها نیست.

اثبات مسألهٔ اصلی را با در نظر گرفتن حالتهای ساده‌تر جلو می‌بریم. نخست مستطیل $ABCD$ از دستهٔ ۱ را در نظر بگیرید. فرض کنید اضلاع AB و AD به ترتیب مشتمل بر تعداد a و b نقطه از شبکه باشند (بدون در نظرگرفتن نقاط انتهایی آنها). در این صورت

$$
\begin{aligned}
I + \frac{1}{2}B - 1 &= ab + \frac{1}{2}(2a + 2b + 4) - 1 \\
&= ab + a + b + 1 = (a+1)(b+1) \\
&= \text{مساحت } ABCD
\end{aligned}
$$

هر یک از حالات دیگر را نیز می‌توان به‌صورت مجموعه‌ای از حالت ۱ در نظر گرفت، و از آنجا نتیجهٔ مطلوب حاصل می‌شود. جزئیات را به خواننده واگذار می‌کنیم. ■

تمرین

۱. فرض کنید

$$S = \{i(۳,۸) + j(۴,-۱) + k(۵,۴) \mid i,j,k \in \mathbf{Z}\}$$

و

$$T = \{m(۱,۵) + n(۰,۷) \mid m,n \in \mathbf{Z}\}$$

ثابت کنید $S = T$.

۲. $F(x)$ را طوری پیدا کنید که به ازای هر x و y،

$$F(x)F(y) - F(xy) = x + y$$

۱-۸ کار عقب‌رونده

کار عقب‌رونده یعنی اینکه نتیجهٔ موردنظر را مفروض گرفته شروع به استنتاجهایی از آن کنیم تا به یک مسألهٔ حل شده برسیم؛ در این صورت می‌توانیم گامهای معکوسی را در نظر بگیریم تا به نتیجهٔ مطلوب دست پیدا کنیم.

■ **مثال ۱-۱۱**

اگر a، b، c طول اضلاع یک مثلث باشند، نشان دهید

$$۳(ab + bc + ca) \le (a+b+c)^۲ \le ۴(ab + bc + ca)$$

حل. نامساوی سمت چپ را در نظر می‌گیریم

$$۳(ab + bc + ca) \le (a+b+c)^۲$$

پس

$$ab + bc + ca \le a^۲ + b^۲ + c^۲$$
$$a^۲ + b^۲ + c^۲ - ab - bc - ca \ge ۰$$
$$۲a^۲ + ۲b^۲ + ۲c^۲ - ۲ab - ۲bc - ۲ca \ge ۰$$
$$(a-b)^۲ + (b-c)^۲ + (c-a)^۲ \ge ۰$$

که این رابطهٔ اخیر برای هر سه مقدار a، b، و c درست است.

حال نامساوی سمت راست را در نظر بگیرید

$$(a+b+c)^۲ \leq ۴(ab+bc+ca)$$
$$a^۲+b^۲+c^۲ \leq ۲(ab+bc+ca)$$
$$a^۲+b^۲+c^۲ \leq a(b+c)+b(a+c)+c(b+a)$$

رابطهٔ اخیر از آنجا برقرار است که مجموع هر دو ضلع در مثلث از اندازهٔ ضلع سوم بزرگتر است. ■

■ **مثال ۱-۱۲**

در یک مسابقهٔ دوره‌ای با n بازیکن $p_۱$، ...، p_n $(n > ۱)$، هر بازیکن یک مسابقه با هر یک از بازیکنان دیگر برگزار می‌کند. قوانین مسابقه به گونه‌ای است که حالت تساوی به‌وجود نمی‌آید. فرض کنید W_r و L_r به ترتیب تعداد بردها و باختهای بازیکن p_r باشد. نشان دهید

$$\sum_{r=۱}^{n} W_r^۲ = \sum_{r=۱}^{n} L_r^۲$$

حل. فرض کنید $\sum\limits_{r=۱}^{n} W_r^۲ = \sum\limits_{r=۱}^{n} L_r^۲$. در این صورت

$$\sum_{r=۱}^{n}(W_r^۲ - L_r^۲) = ۰$$
$$\sum_{r=۱}^{n}(W_r - L_r)(W_r + L_r) = ۰$$

ولی $W_r + L_r = n - ۱$، پس به ازای هر r،

$$(n-۱)\sum_{r=۱}^{n}(W_r - L_r) = ۰$$
$$\sum_{r=۱}^{n}(W_r - L_r) = ۰$$
$$\sum_{r=۱}^{n} W_r = \sum_{r=۱}^{n} L_r$$

رابطهٔ اخیر درست است چون تعداد کل بردهای n بازیکن برابر تعداد کل باختهاست. ■

تمرین

۱. a، b، و c سه عدد حقیقی مثبت هستند که $a < b + c$. نشان دهید

$$\frac{a}{۱+a} < \frac{b}{۱+b} + \frac{c}{۱+c}$$

۲. اگر a، b، و c طول اضلاع یک مثلث باشند ثابت کنید $\frac{1}{a+c}$، $\frac{1}{b+c}$، و $\frac{1}{a+b}$ نیز می‌توانند طول اضلاع یک مثلث باشند.

۱-۹ بررسی نقیض

استفاده از تناقض، یعنی مفروض گرفتن نادرستی حکم و با استنتاج به نتیجهٔ نادرست یا متناقضی رسیدن، از روشهای آشنا در ریاضیات است.

■ **مثال ۱-۱۳**

a، b، و c اعدادی صحیح و فرد هستند؛ ثابت کنید معادلهٔ $ax^2 + bx + c = 0$ نمی‌تواند ریشهٔ گویا داشته باشد.

حل. فرض کنید p/q یک ریشهٔ گویا باشد. بدون از دست دادن کلیت مسأله فرض می‌کنیم p و q هر دو اعداد زوجی نباشند. نخست نشان می‌دهیم که هیچ یک از دو مقدار p و q زوج نیستند. فرض کنید p زوج باشد؛ از $a(p/q)^2 + b(p/q) + c = 0$ درمی‌یابیم که $ap^2 + bpq + cq^2 = 0$. چون $ap^2 + bpq$ زوج است پس cq^2 نیز باید زوج باشد، که غیرممکن است چون c و q هر دو فرد هستند. با فرض اینکه q زوج باشد نیز به تناقض مشابهی می‌رسیم. پس p و q هر دو فرد هستند و $ap^2 + bpq + cq^2 = 0$، ولی این رابطه یعنی اینکه حاصل‌جمع سه عدد فرد برابر صفر شده است، که غیرممکن است. ■

تمرین

۱. ثابت کنید اعداد صحیح و مثبت a، b، c، و n وجود ندارند که $a^2 + b^2 + c^2 = 2^n abc$.

۱-۱۰ زوجیّت

ایدهٔ سادهٔ زوج و فرد بودن یکی از ابزارهای بسیار قوی در حل مسأله است که کاربردهای وسیعی دارد.

■ **مثال ۱-۱۴**

تعداد ۹ نقطه را روی شبکه‌ای در فضای سه‌بعدی در نظر می‌گیریم. ثابت کنید دست‌کم یکی از خطوط واصل بین این نقاط از یکی از نقاط شبکه خواهد گذشت.

حل. فقط ۸ شکل مختلف از لحاظ زوج بودن و فرد بودن مختصات نقاط روی شبکه وجود دارد

(زوج ، زوج ، زوج)، (زوج ، زوج ، فرد)، . . . ، (فرد ، فرد ، فرد)

چون تعداد نقاط ۹ است، پس دست‌کم دوتا از آنها یک شکل از لحاظ زوج و فرد بودن دارند؛ نقطهٔ وسط خط واصل بین این دو نقطه نیز یک نقطهٔ شبکه خواهد بود، که نقطهٔ مطلوب است.

■

■ **مثال ۱-۱۵**

فرض کنید n یک عدد فرد بزرگتر از یک، و A یک ماتریس متقارن $n \times n$ باشد. فرض کنید در هر سطر و در هر ستون A جایگشتی از اعداد صحیح ۱، . . .، n قرار گرفته باشد. ثابت کنید اعداد ۱، . . .، n باید در روی قطر اصلی A ظاهر شوند.

حل. چون A متقارن است، عناصر خارج از قطر دوبار ظاهر می‌شوند و هر عددی دقیقاً n مرتبه ظاهر می‌شود. اکنون این مطلب که می‌دانیم n فرد است نتیجهٔ مطلوب را حاصل می‌کند.

■

تمرین

۱. فرض کنید a_1، a_2، . . .، a_{2n+1} مجموعه‌ای از اعداد صحیح با خاصیت زیر باشند:

اگر هر یک از a_iها از دستهٔ فوق حذف شوند، می‌توانیم باقیمانده را به دو دسته تقسیم کنیم که حاصل‌جمع اعضای دو دسته مساوی باشند.

ثابت کنید $a_1 = a_2 = \ldots = a_{2n+1}$.

۲. فرض کنید a_1، a_2، . . .، a_n جایگشت دلخواهی از ۱، ۲، . . .، n باشند. ثابت کنید اگر n فرد باشد، آنگاه حاصلضرب

$$(a_1 - 1)(a_2 - 2)\ldots(a_n - n)$$

یک عدد زوج است.

۱-۱۱ بررسی حالتهای حدّی

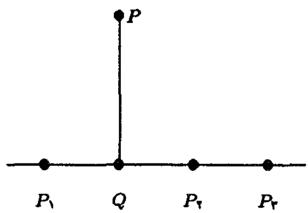
در برخورد اولیه با مسأله بعضی اوقات تغییر دادن پارامترها بین حدهای پایین و بالای ممکن آنها، ایده‌هایی برای حل مسأله به همراه خواهد داشت.

■ **مثال ۱-۱۶**

تعدادی متناهی نقطه در صفحه مفروض است که همهٔ آنها روی یک خط قرار ندارند. ثابت کنید خطی وجود دارد که دقیقاً از دو تا از آن نقاط می‌گذرد.

حل. فرض کنید P یک نقطه و L یک خط باشد؛ فاصلهٔ P از L را با $d(P,L)$ نشان می‌دهیم. فرض کنید S مجموعهٔ فاصله‌های مثبت $d(P,L)$ باشد که P روی مجموعهٔ نقاط مفروض، و L روی مجموعهٔ خطهایی که دست‌کم از دو نقطهٔ مفروض می‌گذرند ولی از P نمی‌گذرند، تغییر می‌کنند. مجموعهٔ S غیرتهی و مُتناهی است (زیرا کلیهٔ نقاط روی یک خط قرار ندارند و تعدادشان متناهی است)، پس S دارای عضو مینیمال است؛ این عضو مینیمال را $d(P,M)$ می‌گیریم. نشان می‌دهیم که M خط مطلوب است و دقیقاً از دو نقطه می‌گذرد.

فرض کنید M از سه نقطه مثل $P_۱$، $P_۲$، و $P_۳$ بگذرد، و فرض کنید Q نقطه‌ای روی M باشد که نزدیکترین فاصله را به P دارد. لااقل دوتا از نقطه‌ها، مثل $P_۲$ و $P_۳$، در یک سمت Q قرار می‌گیرند (یا ممکن است یکی از آنها بر Q منطبق باشد)؛ فرض می‌کنیم $P_۲$ به Q نزدیکتر است تا $P_۳$ (شکل ۱-۶ را ببینید). حال اگر خط گذرا بر P و $P_۳$ را با N نشان دهیم، آنگاه $d(P_۲,N) < d(P,M)$، که متناقض با انتخاب P و M است، لذا نتیجه می‌شود که M فقط می‌تواند از دو نقطه بگذرد.



شکل ۱-۶

■

■ مثال ۱-۱۷

فرض کنید A مجموعهٔ $۲n$ نقطه در صفحه باشد که هیچ سه‌تایی از آنها روی یک خط قرار ندارند. فرض کنید n تا از نقطه‌ها به رنگ قرمز و nتای دیگر به رنگ آبی هستند. درستی یا نادرستی گزارهٔ زیر را ثابت کنید.

«n پاره خط راست بسته وجود دارد که هیچ‌کدام نقطهٔ مشترکی ندارند و ابتدا و انتهای هر کدام نقاطی از A با رنگهای متفاوت هستند.»

حل. اگر تقاطع خطوط را کنار بگذاریم راههای متعددی وجود دارد که می‌توانیم n نقطهٔ قرمز رنگ را با نقاط آبی رنگ جفت کرده، n پاره‌خط بسته تشکیل دهیم. به هر چنان جفتهایی مجموع کل طول پاره‌خطهای آن پیکربندی را نسبت می‌دهیم. چون فقط تعدادی متناهی از این جفت‌سازیها وجود دارد، لذا یکی از این پیکربندیها طول مینیمال را داراست. این مجموعه از پاره‌خطها نقطه مشترکی نخواهند داشت : اگر پاره‌خطهای $R_۱B_۱$ و $R_۲B_۲$ متقاطع باشند که $R_۱$ و $R_۲$ قرمز و

B_1 و B_2 آبی هستند، آنگاه می‌توانیم پیکربندی جدید R_1B_2 و R_2B_1 را در نظر بگیریم که طول کمتری دارا خواهد بود. ■

تمرین

۱. ثابت کنید حاصل‌ضرب n عدد صحیح متوالی همواره بر $n!$ بخش‌پذیر است.

۲. نشان دهید یک عدد گویای c/d، $d < ۱۰۰$، وجود دارد که به ازای $k = ۱, ۲, \ldots, ۹۹$

$$\left[k\frac{c}{d}\right] = \left[k\frac{۷۳}{۱۰۰}\right]$$

۱-۱۲ تعمیم

معمولاً ساده‌سازی یک مسأله راهگشای حل آن است، ولی در بعضی مسائل حالت تعمیم یافتهٔ مسأله سهلتر قابل حل است و حالت موردنظر را می‌توان به‌عنوان یک حالت خاص نتیجه گرفت. در واقع ایدهٔ تعمیم، و درکنار آن مجردسازی، ویژگی خاص ریاضیات نوین است.

■ مثال ۱-۱۸

مطلوب است محاسبهٔ مقدار $\sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{2^k}$.

حل. به‌جای محاسبهٔ مجموع موردنظر، مقدار $S(x) = \sum_{k=1}^{n} k^2x^k$ را حساب می‌کنیم؛ مقدار $S(\frac{1}{2})$ مقدار مطلوب خواهد بود. داریم

$$\sum_{k=1}^{n} x^k = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}, \quad x \neq 1$$

با مشتق‌گیری از طرفین نتیجه می‌شود

$$\sum_{k=1}^{n} kx^{k-1} = \frac{1 - (n+1)x^n + nx^{n+1}}{(1-x)^2}$$

طرفین را در x ضرب می‌کنیم، مجدداً مشتق می‌گیریم، و دو مرتبه طرفین را در x ضرب می‌کنیم؛ به‌دست می‌آید

$$S(x) = \sum_{k=1}^{n} k^2x^k = \frac{x(1+x) - x^{n+1}(nx - x - 1)^2 - x^{n+2}}{(1-x)^3}$$

$$S\left(\frac{1}{2}\right) = \sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{2^k} = 6 - \left(\frac{n^2 + 4n + 6}{2^n}\right)$$

■

تمرین

۱. کدامیک از دو مقدار زیر بزرگتر است:

$\sqrt[۳]{۶۰}$ یا $\sqrt[۳]{۷} + ۲$؟

۲

اصل استقرا و اصل لانه‌کبوتری

۲-۱ استقرا با $P(k)$

فرض کنید $P(n)$ گزاره‌ای دربارهٔ n باشد و a عددی صحیح باشد. بنابر اصل استقرای ریاضی، اگر

الف) $P(a)$ درست باشد؛

ب) به ازای هر عدد صحیح $k \geq a$، درستی $P(k+۱)$ از درستی $P(k)$ نتیجه شود،

آنگاه $P(n)$ به ازای هر $n \geq a$ درست است.

■ **مثال ۲-۱**

ثابت کنید

$$(a+b)^n = \sum_{i=۰}^{n} \binom{n}{i} a^i b^{n-i}, \qquad n \in \mathrm{N}$$

حل. درستی رابطه به ازای $n = ۱$ به سادگی مشهود است. فرض کنید رابطه برای k درست باشد؛ می‌خواهیم درستی آن را برای $k+۱$ نتیجه‌گیری کنیم

$$(a+b)^k = \sum_{i=۰}^{k} \binom{k}{i} a^i b^{k-i}$$

$$(a+b)^k(a+b) = \left[\sum_{i=۰}^{k} \binom{k}{i} a^i b^{k-i}\right](a+b)$$

$$[۲pt] = \sum_{i=۰}^{k} \binom{k}{i} a^{i+۱} b^{k-i} + \sum_{i=۰}^{k} \binom{k}{i} a^i b^{k-i+۱}$$

در مجموع اول تغییر $j = i + 1$ را وارد می‌کنیم؛ به‌دست می‌آید

$$= \sum_{j=1}^{k+1} \binom{k}{j-1} a^j b^{k+1-j} + \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} a^i b^{k+1-i}$$
$$= \left[\sum_{j=1}^{k} \binom{k}{j-1} a^j b^{k+1-j} + a^{k+1}\right] + \left[\sum_{i=1}^{k} \binom{k}{i} a^i b^{k+1-i} + b^{k+1}\right]$$
$$= a^{k+1} + \left[\sum_{i=1}^{k} \left[\binom{k}{i-1} + \binom{k}{i}\right] a^i b^{k+1-i}\right] + b^{k+1}$$
$$= a^{k+1} + \sum_{i=1}^{k} \binom{k+1}{i} a^i b^{k+1-i} + b^{k+1}$$
$$= \sum_{i=0}^{k+1} \binom{k+1}{i} a^i b^{k+1-i}$$

(با توجه به رابطهٔ $\binom{k+1}{i} = \binom{k}{i} + \binom{k}{i-1}$). حال با توجه به اصل استقرا اثبات کامل است. ■

■ مثال ۲-۲

عدد صحیح و مثبت n و عدد حقیقی x مفروض است. ثابت کنید

$$[x] + \left[x + \frac{1}{n}\right] + \left[x + \frac{2}{n}\right] + \ldots + \left[x + \frac{n-1}{n}\right] = [nx]$$

حل. هرچند که عدد صحیح n به‌عنوان یک پارامتر در این مسأله ظاهر شده است، ولی استقرا روی n برای یک x ثابت راه به‌جایی نخواهد برد (البته روی x هم که نمی‌توانیم استقرا به‌کار بریم).

ایدهٔ اصلی عبارت است از اینکه حکم موردنظر را به ازای هر x در زیربازهٔ $[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}]$، $k = 0; \pm 1, \pm 2, \ldots$، اثبات کنیم. ابتدا فرض کنید x به زیربازهٔ $(0, \frac{1}{n}]$ تعلق داشته باشد. در این صورت به ازای $i = 0, 1, \ldots, n-1$، $[x + \frac{i}{n}] = 0$، و در نتیجه $\sum_{i=0}^{n-1}[x + \frac{i}{n}] = 0$. علاوه بر این می‌دانیم که $[nx] = 0$، لذا حکم در «نخستین» زیربازه درست است. حال فرض کنید که حکم در زیربازهٔ $[\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}]$ که k عددی صحیح و مثبت است برقرار باشد، و البته x عددی حقیقی است که در این زیربازه تغییر می‌کند. در این صورت

$$[x] + \left[x + \frac{1}{n}\right] + \left[x + \frac{2}{n}\right] + \cdots + \left[x + \frac{n-1}{n}\right] = [nx]$$

با اضافه کردن $\frac{1}{n}$ به x (حاصل عددی است در بازهٔ $[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}]$)، هر یک از جملات فوق، بجز آخرین جمله، به جمله‌ای در سمت راستشان تبدیل می‌شوند، و جملهٔ آخری هم به $[x+1]$ تبدیل می‌شود که مقدار $[x]$ را یک واحد اضافه می‌کند؛ لذا در مجموع به سمت چپ یک واحد اضافه

شده است. حال با تغییر x در $[nx]$ به $x + \frac{۱}{n}$ نیز سمت راست را یک واحد اضافه کرده‌ایم؛ لذا به ازای هر x در بازهٔ $[\frac{k}{n}, \frac{k+۱}{n}]$ رابطه درست است. با بحث مشابهی برای مقادیر منفی x نیز نتیجهٔ موردنظر اثبات می‌شود و لذا بنابر اصل استقرا اثبات کامل می‌گردد. ■

تمرین

۱. ثابت کنید به ازای $n = ۱, ۲, ۳, \ldots$، معادلهٔ $x^۲ + y^۲ = z^n$ دارای یک جواب صحیح و مثبت (x, y, z) می‌باشد.

۲-۲ استقرا با $P(k+۱)$

گاهی اوقات در استفاده از استقرا بهتر است که ابتدا $P(k+۱)$ را در نظر گرفته، سپس به‌طور بازگشتی به $P(k)$ برسیم. هر چند که معمولاً روشهای جلورونده و عقب‌رونده قابل تبدیل به یکدیگرند، ولی بعضی اوقات یکی از روشها سهولت کار را بیشتر می‌کند.

■ **مثال ۲-۳**

ثابت کنید $\frac{n^۵}{۵} + \frac{n^۴}{۲} + \frac{n^۳}{۳} - \frac{n}{۳۰}$ به ازای هر $n = ۰, ۱, ۲, \ldots$ یک عدد صحیح است.

حل. به ازای $n = ۰$ صحت حکم واضح است. فرض کنید حکم به ازای $n = k$ درست باشد؛ باید ثابت کنیم

$$\frac{(k+۱)^۵}{۵} + \frac{(k+۱)^۴}{۲} + \frac{(k+۱)^۳}{۳} - \frac{k+۱}{۳۰}$$

یک عدد صحیح است. داریم

$$\frac{k^۵ + ۵k^۴ + ۱۰k^۳ + ۱۰k^۲ + ۵k + ۱}{۵} + \frac{k^۴ + ۴k^۳ + ۶k^۲ + ۴k + ۱}{۲} + \frac{k^۳ + ۳k^۲ + ۳k + ۱}{۳} - \frac{k+۱}{۳۰}$$

که برابر است با

$$\left(\frac{k^۵}{۵} + \frac{k^۴}{۲} + \frac{k^۳}{۳} - \frac{k}{۳۰}\right) + (k^۴ + ۲k^۳ + ۲k^۲ + k) + (k^۳ + ۳k^۲ + ۲k) + (k^۲ + k) + ۱$$

که پرانتز سمت چپ بنابر فرض استقرا عدد صحیح است و بقیه هم که اعداد صحیح هستند. پس بنابر اصل استقرا اثبات کامل است (دقت کنید که اگر با $P(k)$ شروع می‌کردیم کار خیلی دشوار می‌شد). ■

تمرین

۱. فرض کنید $\mathbf{Q}$ مجموعهٔ اعداد گویا باشد. کلیهٔ توابع f از $\mathbf{Q}$ به $\mathbf{Q}$ را پیدا کنید که در دو رابطه زیر صدق کند:

الف) $f(1) = 2$؛

ب) به ازای هر x و y در $\mathbf{Q}$،

$$f(xy) = f(x)f(y) - f(x+y) +$$

۲-۳ استقرای قوی و تعمیم

فرض کنید $P(n)$ گزاره‌ای دربارهٔ n باشد و a یک عدد صحیح باشد. طبق استقرای قوی، اگر

الف) $P(a)$ درست باشد؛

ب) به ازای هر $k \geq a$، درستی $P(k+1)$ از درستی $P(a)$، $P(a+1)$، ...، $P(k)$ نتیجه شود؛

آنگاه $P(n)$ به ازای هر $n \geq a$ درست است.

در اینجا در واقع از فرض قویتری که عبارت است از درستی $P(a)$، $P(a+1)$، ...، $P(k)$ استفاده می‌شود. هر چند که این نوع استقرا با استقرایی که قبلاً ذکر کردیم معادل است، ولی پاره‌ای اوقات صورت اخیر موجب سهلتر شدن کار می‌شود.

بعضی اوقات در حل یک مسأله اگر صورت تعمیم یافتهٔ آن را مدنظر قرار دهیم خیلی ساده‌تر به راه حل اصلی آن دسترسی پیدا می‌کنیم. در به‌کارگیری استقرا نیز چنین است: چون ممکن است مثلاً عبارتهای $P(1)$، $P(2)$، $P(3)$، ... اطلاعات کافی به همراه نداشته باشند تا نتیجه‌گیری استقرایی را امکان‌پذیر سازند، در چنین مواردی باید حکم موردنظر را به‌صورت تعمیم یافته‌ای، مثلاً $Q(n)$ (به‌طوری که $Q(n)$، $P(n)$ را نتیجه دهد)، بیان کنیم و آنگاه با توجه به $Q(1)$، $Q(2)$، ... روش استقرایی را اعمال کنیم.

■ **مثال ۲-۴**

فرض کنید F_i، iامین جملهٔ دنبالهٔ فیبوناچی باشد؛ ثابت کنید

$$F_{n+1}^2 + F_n^2 = F_{2n+1}$$

حل. این رابطه به ازای $n = 1$ درست است. فرض کنید رابطه به ازای عدد صحیح k نیز درست باشد؛ در این صورت

$$\begin{aligned} F_{k+2}^2 + F_{k+1}^2 &= (F_{k+1} + F_k)^2 + F_{k+1}^2 \\ &= F_{k+1}^2 + 2F_{k+1}F_k + F_k^2 + F_{k+1}^2 \end{aligned}$$

$$= (F_{k+1}^2 + F_k^2) + (2F_{k+1}F_k + F_{k+1}^2)$$
$$= F_{2k+1} + (2F_{k+1}F_k + F_{k+1}^2)$$

مرحلهٔ آخر البته از فرض استقرا نتیجه شده است. حال کار تمام می‌شود اگر بتوانیم نشان دهیم که $2F_{k+1}F_k + F_{k+1}^2 = F_{2k+2}$، زیرا در این صورت $F_{2k+1} + F_{2k+2} = F_{2k+3}$، و اثبات کامل می‌شود. حال برای اثبات رابطهٔ $2F_{k+1}F_k + F_{k+1}^2 = F_{2k+2}$ مجدداً از استقرا استفاده می‌کنیم. به ازای $n = 1$ رابطه درست است. حال فرض کنید رابطه برای k درست باشد؛ داریم

$$\begin{aligned} 2F_{k+2}F_{k+1} + F_{k+2}^2 &= 2(F_{k+1} + F_k)F_{k+1} + F_{k+2}^2 \\ &= 2F_{k+1}^2 + 2F_{k+1}F_k + F_{k+2}^2 \\ &= (2F_{k+1}F_k + F_{k+1}^2) + (F_{k+1}^2 + F_{k+2}^2) \\ &= F_{2k+2} + (F_{k+1}^2 + F_{k+2}^2) \end{aligned}$$

می‌بینیم که به مسألهٔ قبلی بازگشته‌ایم: آیا $F_{2k+3} = F_{k+1}^2 + F_{k+2}^2$؟ اگر این رابطه برقرار باشد آنگاه

$$F_{2k+2} + (F_{k+1}^2 + F_{k+2}^2) = F_{2k+2} + F_{2k+3} = F_{2k+4}$$

و استقرا کامل خواهد بود. ولی مسأله دوری شده است: درستی اولی به درستی دومی بستگی دارد و برعکس، درستی دومی به درستی اولی ربط دارد.

حال به طریق زیر می‌توان این دشواری را برطرف کرد: گزاره‌های زیر را در نظر بگیرید

$$P(n) : F_{n+1}^2 + F_n^2 = F_{2n+1}$$
$$Q(n) : 2F_{n+1}F_n + F_n^2 = F_{2n+2}$$

$P(1)$ و $Q(1)$ هر دو درست هستند. با توجه به بحث فوق می‌دانیم که $P(k)$ و $Q(k)$ هردو $P(k+1)$ را نتیجه می‌دهند و $Q(k)$ و $P(k+1)$، $Q(k+1)$ را نتیجه خواهد داد؛ لذا نتیجه می‌شود که $P(k)$ و $Q(k)$، $P(k+1)$ و $Q(k+1)$ را نتیجه می‌دهند و اثبات کامل می‌شود. ■

تمرین

۱. نشان دهید هر عدد صحیح و مثبت را می‌توان به‌صورت حاصل‌جمع جملات متمایزی از دنبالهٔ فیبوناچی نوشت.

۲. ثابت کنید که اگر $A_1 + \cdots + A_n = \pi$ و $0 < A_i \leq \pi$، $i = 1, \ldots, n$، آنگاه

$$\sin A_1 + \cdots + \sin A_n \leq n \sin \frac{\pi}{n}$$

۲-۴ رابطه‌های بازگشتی

رابطه‌های بازگشتی به‌صورت «حلقه» یا الگوریتم‌هایی مطرح می‌شوند که می‌گویند چگونه می‌توانیم جملهٔ $(n+۱)$ام رابطه‌ای را که به عدد صحیح n مرتبط می‌شود به‌دست بیاوریم. در واقع از مهمترین فایده‌هایی که از روابط بازگشتی حاصل می‌شود کم شدن تعداد پارامترهاست.

■ **مثال ۲-۵**

فرض کنید Q_n نمایش‌دهندهٔ تعداد راههایی باشد که n مهرهٔ رخ را می‌توانیم در یک صفحهٔ شطرنج $n \times n$ قرار دهیم به‌طوری که یکدیگر را نزنند (یعنی در هر سطر و هر ستون فقط یک مهره قرار گیرد). بدین ترتیب، ترتیب چیدن مهره‌ها نسبت به قطر صفحه، که از گوشهٔ چپ و پایین به گوشهٔ راست و بالا در نظر گرفته می‌شود، تقارن دارد. نشان دهید

$$Q_n = Q_{n-۱} + (n-۱)Q_{n-۲}$$

حل. مهرهٔ رخ در اولین سطر، ممکن است در اولین خانهٔ سمت چپ قرار داشته باشد و ممکن است قرار نداشته باشد؛ اگر قرار گیرد آنگاه $Q_{n-۱}$ راه برای قرار دادن $n-۱$ مهرهٔ رخ وجود دارد و اگر قرار نگیرد، ممکن است هر یک از $n-۱$ خانهٔ دیگر را در سطر اول اشغال نماید و در این صورت با توجه به تقارن (نسبت به قطر موردنظر)، $n-۲$ رخ باقیمانده ممکن است $Q_{n-۲}$ وضعیت متفاوت داشته باشند. با توجه به این نکات نتیجهٔ مطلوب حاصل است. ■

نکته. در واقع مثال فوق نوعی نگرش هندسی به جایگشتهای ۱، ۲، . . . ، n می‌باشد.

تمرین

۱. فرض کنید P_n تعداد نواحی حاصل از قرارگرفتن n خط راست در صفحه باشد به طوری‌که هیچ سه‌خطی از یک نقطه نگذرند و هیچ دوتایی با یکدیگر موازی نباشند. ثابت کنید

$$P_{n+۱} = P_n + (n+۱)$$

۲. اعداد ۱، ۲، . . .، n در جهت حرکت عقربه‌های ساعت روی یک دایره قرار گرفته‌اند. از عدد ۱ شروع می‌کنیم و در جهت حرکت عقربه‌های ساعت یک در میان اعداد را حذف می‌کنیم تا فقط یک عدد باقی بماند(مثلاً اگر $n=۵$، به ترتیب اعداد ۲،۴،۱، و ۵ حذف می‌شوند و ۳ باقی می‌ماند). فرض کنید $f(n)$ آخرین عدد باقیمانده باشد. نشان دهید

$$f(۲n) = ۲f(n) - ۱$$

$$f(۲n+۱) = ۲f(n) + ۱$$

۲-۵ اصل لانه‌کبوتری

وقتی تعداد زیادی شیء را بخواهیم بین تعداد کمی مجموعه تقسیم کنیم، به یکی از مجموعه‌ها یک حداقلی می‌رسد؛ این امر در واقع مبتنی بر اصل لانه‌کبوتری می‌باشد.

اصل لانه‌کبوتری

اگر $kn + 1$ شیء $(k \geq 1)$ بین n جعبه تقسیم شود، یکی از جعبه‌ها لااقل مشتمل بر $k + 1$ شیء خواهد بود.

این اصل حتی وقتی k برابر یک باشد نیز ابزاری قوی در اثبات قضایای وجودی است. مثالهای زیر ایده‌هایی از چگونگی کاربرد این اصل به‌دست می‌دهند.

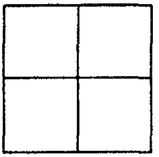
■ مثال ۲-۶

مجموعه‌ای از $n + 1$ عدد صحیح و مثبت که هیچ‌کدام از $2n$ بزرگتر نیست، مفروض است. ثابت کنید حداقل یکی از اعضای این مجموعه بر عضو دیگری از مجموعه بخش‌پذیر است.

حل. اعداد مفروض را با x_1، x_2، ...، x_{n+1} نشان می‌دهیم و فرض می‌کنیم که به ازای هر i، $x_i = 2^{n_i} y_i$، که n_i یک عدد صحیح غیر منفی است و y_i عددی فرد است. فرض می‌کنیم $T = \{y_i \mid i = 1, 2, \ldots, n\}$، یعنی T مجموعه‌ای از $n + 1$ عدد فرد می‌باشد که هرکدام از $2n$ کوچکتر است. ولی تعداد اعداد فرد کوچکتر از $2n$ فقط nتاست، لذا بنابر اصل لانه‌کبوتری دو عضو این مجموعه باید با یکدیگر مساوی باشند، مثلاً فرض می‌کنیم $y_i = y_j$ ، $i < j$. پس $x_i = 2^{n_i} y_i$ و $x_j = 2^{n_j} y_i$. اگر $n_i \leq n_j$ آنگاه x_i بر x_j بخش‌پذیر است، و اگر $n_i > n_j$ برعکس. ■

■ مثال ۲-۷

پنج نقطهٔ P_1، P_2، P_3، P_4، و P_5 داخل مربعی به ضلع ۱ مفروض‌اند. فاصلهٔ بین نقطهٔ P_i و نقطهٔ P_j را با d_{ij} نشان می‌دهیم. ثابت کنید دست‌کم یکی از d_{ij}ها کمتر از $\frac{\sqrt{2}}{2}$ است.



شکل ۲-۱

حل. با رسم محورهای تقارن مربع، که موازی اضلاع آن می‌باشند، مربع را به چهار مربع مساوی یکدیگر تقسیم می‌کنیم (شکل ۲-۱). بنابر اصل لانه‌کبوتری دوتا از نقطه‌ها به یکی از مربعها تعلق

دارند (نقطه‌ای که روی مرز قرار گیرد، به هر دو مربع متعلق است)؛ فاصلهٔ بین این دو نقطه کمتر از $\frac{\sqrt{2}}{2}$ است.

■

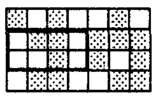
■ **مثال ۲-۸**

مجموعهٔ دلخواهی از ۱۰ عدد طبیعی بین ۱ تا ۹۹ را مفروض می‌گیریم. ثابت کنید دو زیرمجموعهٔ مجزا و غیرتهی از این مجموعه وجود دارد که مجموع اعضایشان مساوی است.

حل. با ۱۰ عدد انتخاب شده می‌توانیم $1023 = 1 - 2^{10}$ زیر مجموعهٔ متمایز و غیر تهی بسازیم. مجموع اعضای هر یک از این زیرمجموعه‌ها کمتر از ۱۰۰۰ است زیرا حتی $1000 > 99 + \cdots + 91 + 90$. پس بنابر اصل لانه‌کبوتری دو زیرمجموعه متمایز A و B وجود دارند که دارای مجموع یکسانی هستند. با کنار گذاشتن اعضای مشترک این دو مجموعه، دو مجموعهٔ متمایز $X = A - (A \cap B)$ و $Y = B - (A \cap B)$ به‌دست می‌آیند که مجموع یکسانی دارند. البته دقت می‌کنیم که X و Y هیچ‌کدام تهی نیستند زیرا اگر A یا B تهی باشد، باید یا $A \subset B$ و یا $B \subset A$، که غیرممکن است. ■

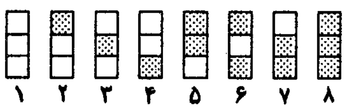
■ **مثال ۲-۹**

یک صفحهٔ شبکه‌ای 7×4 را در نظر می‌گیریم و خانه‌های آن را به‌طور دلخواه رنگ سیاه یا سفید می‌زنیم. ثابت کنید که این رنگ‌آمیزی به هر ترتیبی که باشد شامل مستطیلی است (شکل ۲-۲) که مربعهای ۴ گوشهٔ آن از یک رنگ هستند.



شکل ۲-۲

حل. چنین مستطیلی حتی روی صفحه 13×7 نیز وجود دارد؛ ترکیب رنگ‌آمیزی هر ستون شبکه غیر از صورتهای زیر نمی‌تواند باشد.



شکل ۲-۳

فرض کنید یکی از ستونها از نوع ۱ باشد؛ اگر یکی از ۶ ستون باقی‌مانده از نوع ۱،۲،۳، و یا ۴ باشد کار تمام می‌شود. پس فرض کنید هر یک از ستونهای ۶ گانه از نوع ۵،۶،۷، و یا ۸ باشد؛

در این صورت بنابر اصل لانه‌کبوتری دوتا از این ستونها یکسان می‌شوند و لذا کار تمام است. اگر ستون ۸ را هم در آغاز در نظر می‌گرفتیم با بحث مشابهی به نتیجه می‌رسیدیم. پس فرض کنید ستونهای ۱ و ۸ اصلاً ظاهر نگردند؛ در این صورت ۷ ستون را باید با ۶ نوع بپوشانیم، که بازهم با استفاده از اصل لانه‌کبوتری نتیجه می‌شود که دوستون باید مشابه باشند، وکار تمام می‌شود. ■

تمرین

۱. فرض کنید x یک عدد حقیقی باشد. ثابت کنید بین اعداد

$$x, ۲x, \ldots, (n-۱)x$$

یک عدد وجود دارد که با یک عدد صحیح حداکثر $\frac{۱}{n}$ فاصله دارد.

۲. ثابت کنید اگر در یک مهمانی n نفر حضور داشته باشند، دو نفر از آنها یک تعداد از مهمانان حاضر را می‌شناسند.

تمرینهای تکمیلی

۱. اگر $u_۰ = ۲$، $u_۱ = ۳$ و به ازای همه مقادیر طبیعی k، $u_{k+۱} = ۳u_k - ۲u_{k-۱}$، ثابت کنید به ازای هر n

$$u_n = ۲^n + ۱$$

۲. اگر $i^۲ = -۱$، ثابت کنید

$$\forall n \in \mathbf{Z} \qquad (\cos x + i\sin x)^n = \cos nx + i\sin(nx)$$

۳. اگر $a + b > ۰$ و n عددی طبیعی باشد، ثابت کنید

$$(a+b)^n \leq ۲^{n-۱}(a^n + b^n)$$

۴. اگر $f(\alpha x + \beta y) \leq \alpha f(x) + \beta f(y)$ و $\alpha + \beta = ۱$ و $\forall x, y, \ \ \forall \alpha, \beta > ۰$، ثابت کنید

$$\forall \alpha_۱, \alpha_۲, \ldots, \alpha_n > ۰, \ \alpha_۱ + \alpha_۲ + \ldots + \alpha_n = ۱, \ \forall x_۱, x_۲, \ldots, x_n \in \mathbf{R}$$
$$f(\alpha_۱ x_۱ + \alpha_۲ x_۲ + \ldots + \alpha_n x_n) \leq \alpha_۱ f(x_۱) + \alpha_۲ f(x_۲) + \ldots + \alpha_n f(x_n)$$

۵. تعدادی شکل محدب در صفحه قرار دارند به‌طوری که هر سه‌تای آنها اشتراک دارند. ثابت کنید همهٔ آنها اشتراک دارند.

۶. ثابت کنید در مجموعهٔ عددهای صحیح به شکل $۲^k - ۳$ که $k = ۲, ۳, \ldots$، زیرمجموعه‌ای نامتناهی وجود دارد که هر دو عضو آن نسبت به هم اول هستند.

۷. تعداد $n \geq ۳$ نقطه در صفحه داده شده است. d را بیشترین فاصلهٔ بین دو نقطهٔ دلخواه از این n نقطه می‌گیریم. فاصله‌ای از دو نقطه را که برابر d باشد، قطر این دستگاه نقطه‌ها می‌نامیم. ثابت کنید تعداد این قطرها نمی‌تواند از n تجاوز کند.

۸. ثابت کنید هر عدد طبیعی را که از $n!$ بزرگتر نباشد می‌توان به‌صورت مجموعی از عددهای طبیعی متمایز نوشت، به نحوی که تعداد جمله‌های مجموع از n تجاوز نکند و در ضمن هر جملهٔ مجموع، مقسوم علیهی از $n!$ باشد.

۹. تعداد s نقطه در فضا داده شده است. اگر آنها را بر صفحات مختصات تصویر کنیم تعداد آنها $s_۱$، $s_۲$، $s_۳$ می‌شود. ثابت کنید $s^۲ \leq s_۱ s_۲ s_۳$.

۱۰. N نفر با هم آشنا نیستند. می‌خواهیم بعضی از آنها را طوری با هم آشنا کنیم که وقتی سه نفر را به دلخواه از بین این N نفر انتخاب کنیم، تعداد آشنایان آنها یکسان نباشد. ثابت کنید این کار به ازای هر N ممکن است.

۱۱. تعداد $n > ۴$ نقطه داده شده است. ثابت کنید می‌توان این نقطه‌ها را با پیکان چنان به‌هم وصل کرد که بتوان به کمک یک یا دو پیکان از هر نقطه به هر نقطهٔ دیگر رسید (هر دو نقطه را می‌توان با پیکانی به هم وصل کرد که تنها یک جهت داشته باشد و حرکت روی هر پیکان تنها در مسیری ممکن است که با جهت آن مشخص شده است).

۱۲. نقطهٔ O بر خط راست g واقع است. $\overrightarrow{OP}_۱$، $\overrightarrow{OP}_۲$، ...، $\overrightarrow{OP}_n$ بردارهای واحدی هستند به نحوی که نقاط $P_۱$، $P_۲$، ...، P_n در صفحه‌ای شامل g و در یک طرف g قرار دارند. ثابت کنید به ازای هر عدد فرد n،

$$|\overrightarrow{OP}_۱ + \overrightarrow{OP}_۲ + \cdots + \overrightarrow{OP}_n| \geq ۱$$

۱۳. n بردار به طول واحد در صفحه قرار دارند که مجموع آنها برابر صفر است. ثابت کنید این بردارها را می‌توان طوری شماره‌گذاری کرد که مجموع k بردار اول، $k = ۱, ۲, \ldots, n$، از $\sqrt{۲}$ کمتر باشد [با استدلالی مشکلتر می‌توان ثابت کرد که این حکم برای $\frac{\sqrt{۵}}{۲}$ به‌جای $\sqrt{۲}$ نیز برقرار است].

۱۴. به استقرا ثابت کنید اگر $x_۱, x_۲, \ldots, x_n$ اعداد حقیقی و مثبتی باشند، آنگاه

$$\frac{x_۱ + x_۲ + \ldots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_۱ x_۲ \ldots x_n}$$

۱۵. به استقرا ثابت کنید که

الف) n خط که هیچ سه‌تایی از یک نقطه نگذرند صفحه را به $\frac{۱}{۲}(n^۲ + n + ۲)$ قسمت تقسیم می‌کنند.

ب) n صفحه که هر سه صفحه در یک نقطه مشترک‌اند و هیچ چهار صفحه‌ای نقطهٔ مشترک ندارند، فضا را به $\frac{(n+۱)(n^۲-n+۶)}{۶}$ قسمت تقسیم می‌کند.

۱۶. تعدادی نقطه در صفحه داریم که به وسیلهٔ تعدادی یال به هم وصل شده‌اند به‌طوری که اولاً تعداد یالها زوج است، ثانیاً از هر نقطه می‌توان در امتداد یالها به هر نقطهٔ دیگر رفت. ثابت کنید این یالها را می‌توان طوری جهتدار کرد که از هر رأس تعداد زوجی پیکان خارج شده باشد.

۱۷. نشان دهید در هر مهمانی دو نفر وجود دارند که تعداد آشناهای آنها در آن مهمانی برابر است. (اگر A، B را بشناسد، B نیز A را می‌شناسد.) نشان دهید اگر این شرط را برداریم برای هر n، مهمانی‌ای با n نفر وجود دارد که تعداد آشناهای هیچ دونفری مساوی نیست.

۱۸. یک گروه ۴۰ جلسه تشکیل دادند که در هر جلسه ۱۰ نفر شرکت می‌کردند، به‌طوری که هیچ دونفری در بیشتر از ۱ جلسه با هم نبودند. نشان دهید تعداد افراد گروه از ۶۳ نفر بیشتر است.

۱۹. ۱۷ دانشمند در سه زمینه علمی به هم نامه نوشتند (هر دو دانشمندی در یک زمینه علمی به هم نامه نوشته‌اند). نشان دهید سه دانشمند وجود دارد که هر سه در یک زمینه به هم نامه نوشته‌اند.

۲۰. ۱۹۷۸ نفر از ۶ کشور با شماره‌های از ۱ تا ۱۹۷۸ شماره‌گذاری شدند. نشان دهید سه نفر از یک کشور وجود دارند که شمارهٔ یکی از آنها برابر مجموع دو شمارهٔ دیگر است؛ یا شماره یکی، دو برابر شمارهٔ دیگری است.

۲۱. ۹ نقطه با مختصات صحیح در فضا داده شده‌اند. نشان دهید دو نقطه از آنها وجود دارد که روی پاره‌خطی که آن دو نقطه را به هم وصل می‌کند نقطه با مختصات صحیح دیگری موجود باشد.

۲۲. ۱۰۰ عدد در اختیار داریم. نشان دهید می‌توان تعدادی از آنها را انتخاب کرد به‌طوری که مجموع آنها به دو صفر ختم شود.

۲۳. یک مجموعهٔ ۱۰ عضوی از اعداد دو رقمی مفروض است. نشان دهید همیشه می‌توان دو زیرمجموعهٔ جدا از هم از این مجموعه انتخاب کرد که مجموع اعضای دو مجموعه مساوی باشد.

۲۴. $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_{10}$ اعداد طبیعی دلخواه هستند. نشان دهید $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_{10}$ چنان وجود دارند که $\lambda_i \in \{-1, 0, 1\}$ و $\lambda_0 a_0 + \lambda_1 a_1 + \cdots + \lambda_{10} a_{10}$ بر ۱۹۹۳ بخش‌پذیر باشد، و همهٔ λ_iها با هم صفر نباشند.

۲۵. اداره راهنمایی و رانندگی می‌خواهد ماشینها را با شماره‌های ۶ رقمی شماره‌گذاری کند به‌طوری که هر دو ماشین حداقل در دو مکان دارای شماره‌های متفاوت باشند. حداکثر تعداد ماشینهایی را که می‌تواند شماره‌گذاری کند پیدا کنید.

۲۶. در یک جمع n نفری بین هر ۴ نفر یکی وجود دارد که سه نفر بقیه را می‌شناسد. حداقل تعداد افرادی را پیدا کنید که همه $n - ۱$ نفر بقیه را می‌شناسند.

۲۷. ۹ نقطه داخل یک مثلث داده شده‌اند. نشان دهید سه نقطه از آنها مثلثی تشکیل می‌دهد که مساحت آن از $\frac{۱}{۴}$ مساحت مثلث کمتر است.

۲۸. نشان دهید مسأله فوق برای ۵ نقطه هم درست است. نشان دهید برای ۴ نقطه که تشکیل یک چهار ضلعی محدب دهد نیز درست است!

۲۹. ۶ نقطه داخل یک مستطیل ۳×۴ مفروض است. نشان دهید دو نقطه وجود دارد که فاصله آنها کمتر یا مساوی $\sqrt{۵}$ است.

۳۰. ۱۹۸۵ عدد که مقسوم علیه‌های اول هیچ کدام از ۲۳ تجاوز نمی‌کند مفروضند. نشان دهید ۴ عدد وجود دارد که حاصل‌ضرب آنها توان چهارم عددی طبیعی باشد.

۳۱. $n + ۱$ عدد از بین اعداد ۱، ۲،...، $۲n$ انتخاب می‌کنیم. نشان دهید در بین آنها دو عدد وجود دارد که یکی بر دیگری بخش‌پذیر باشد.

۳

دنباله‌ها

۳-۱ دنباله‌های اعداد

▲ تعریف۳-۱

$\{f(1), f(2), \ldots\}$ را یک دنبالهٔ حقیقی می‌نامیم که در آن f تابعی از N به R است. ▲
معمولاً $f(n)$ را با نمادهایی نظیر a_n نمایش می‌دهند و دنباله را به‌طور خلاصه به‌صورت $\{a_n\}$ نشان می‌دهند.

توضیح. اگر دنباله را با یک مجموعه نشان دهیم باید توجه شود ترتیب عناصر و تکرار آنها برخلاف تعریف مجموعه اهمیت دارد.
به نکات زیر توجه کنید

۱. اگر تابع f از N به C تعریف شود یک دنباله مختلط به وجود می‌آید.

۲. اگر تابع f از $\{1, 2, \ldots, n\}$ به R یا C تعریف شود یک دنباله حقیقی یا مختلط متناهی به وجود می‌آید.

۳. گاهی با دنباله‌های مضاعف که به $\{a_{m,n}\}$ نمایش می‌دهیم سروکار داریم. در این دنباله‌ها تابع f از $N \times N$ به R یا C تعریف می‌شود.

۴. گاهی به‌جای اینکه دنباله را از a_1 شروع کنیم از a_0 یا حتی از اندیسهای منفی شروع می‌کنیم.

■ مثال ۳-۱

تابع $f: \mathbf{N} \to \mathbf{R}$ با ضابطهٔ $f(n) = \frac{۱}{n}$ دنباله زیر را به وجود می‌آورد

$$\left\{۱, \frac{۱}{۲}, \frac{۱}{۳}, \cdots\right\}$$

که به اختصار آن را به $\{\frac{۱}{n}\}$ نمایش می‌دهیم. ■

■ مثال ۳-۲

تابع $f: \mathbf{N} \times \mathbf{N} \to \mathbf{C}$ با ضابطهٔ $f(n, m) = n + im$ یک دنباله مضاعف مختلط به وجود می‌آورد. ■

■ مثال ۳-۳

به مجموعه‌هایی شمارا می‌گوییم که یک تابع یک به یک و پوشا از $\mathbf{N}$ به آنها وجود داشته باشد. بنابراین هر مجموعه شمارا را می‌توان به‌صورت یک دنباله آراست. مثلاً Q را می‌توان به‌صورت دنباله نمایش داد. ■

■ مثال ۳-۴

دنبالهٔ مضاعف $a_{m,n} = \frac{m}{m+n}$ دارای خاصیت جالبی است:

$$\lim_{m\to\infty}\left(\lim_{n\to\infty} a_{m,n}\right) = ۰$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\lim_{m\to\infty} a_{m,n}\right) = ۱$$

■

▲ تعریف ۳-۲

دنباله $\{a_n\}$ را کراندار می‌گویند هرگاه عددی مانند $M > ۰$ وجود داشته باشد که به ازای هر n، $|a_n| \leq M$. ▲

توضیح. تعریف را به راحتی می‌توان به دنباله‌های مضاعف تعمیم داد.

■ مثال ۳-۵

دنبالهٔ مثالهای ۳-۱ و ۳-۴ کراندار و دنبالهٔ مثال ۳-۲ بیکران است (قدر مطلق یک عدد مختلط مثلاً $a + bi$ به‌صورت $\sqrt{a^۲ + b^۲}$ تعریف می‌شود). ■

▲ تعریف ۳-۳

دنباله حقیقی $\{a_n\}$ را صعودی گوییم هرگاه

$$a_۱ \leq a_۲ \leq \cdots$$

و نزولی گوییم هرگاه

$$a_۱ \geq a_۲ \geq \cdots$$

و یکنوا گوییم هرگاه یا صعودی باشد یا نزولی. ▲

توضیح. اگر علامت تساوی‌ها در تعریف فوق حذف شوند به تعاریف دنباله‌های اکیداً صعودی، اکیداً نزولی و اکیداً یکنوا می‌رسیم.

▲ تعریف۳-۴

اگر $\sigma : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ تابعی اکیداً صعودی باشد و $\{a_n\}$ دنباله‌ای دلخواه، آنگاه $\{a_{\sigma(n)}\}$ یک زیردنبالهٔ آن نام دارد.

یعنی اگر زیر مجموعه‌ای نامتناهی از اعضای دنباله را با همان ترتیب که در دنباله ظاهر می‌شود بنویسیم یک زیردنباله از آن را ساخته‌ایم. ▲

▲ تعریف۳-۵

دنباله $\{a_n\}$ را متناوب گوییم هرگاه $N \geq ۰$ و $T \in \mathbf{N}$ باشد که

$$n > N \Rightarrow a_{n+T} = a_n$$

اگر $N = ۰$ باشد دنباله را اکیداً متناوب می‌گوییم.

کوچکترین مقدار T را دوره تناوب اصلی دنباله می‌نامند. ▲

■ مثال ۳-۶

دنباله‌های $\{n(\mathrm{mod}\ ۱۰)\}$ و $\{n^۳ + n(\mathrm{mod}\ ۵)\}$ متناوب هستند (چرا؟). ■

تمرین

۱. ثابت کنید دنبالهٔ $a_n = (۱ + \frac{۱}{n})^n$ صعودی و کراندار است.

۲. ثابت کنید هر دنبالهٔ از اعداد حقیقی یک زیردنباله یکنوا دارد.

۳. ثابت کنید هر دنباله متناهی $mn + ۱$ عضوی یا یک زیردنبالهٔ $m + ۱$ عضوی صعودی دارد یا یک زیر دنباله $n + ۱$ عضوی نزولی.

۴. دنباله فیبوناچی به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$f_۱ = f_۲ = ۱, \qquad f_n = f_{n-۱} + f_{n-۲}, \qquad n > ۲$$

الف) فرمول غیر بازگشتی دنباله را به‌دست آورید.

ب) ثابت کنید $\{f_n(\mathrm{mod}\ m)\}$ تناوبی است (به ازای هر $m \in \mathbf{N}$). آیا این دنباله اکیداً تناوبی است؟

۳-۲ همگرایی دنباله‌ها

▲ تعریف۳-۶

دنباله $\{a_n\}$ به α همگراست هرگاه برای هر $\varepsilon > ۰$، $N > ۰$ وابسته به ε وجود داشته باشد که

$$n > \mathbf{N} \Rightarrow |a_n - \alpha| < \varepsilon$$

گاهی می‌نویسیم $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \alpha$. ▲

■ مثال ۳-۷

دنباله $\{\frac{۱}{n}\}$ به صفر همگراست زیرا برای هر $\varepsilon > ۰$، کافی است $N = \frac{۱}{\varepsilon}$ بگیریم

$$n > \frac{۱}{\varepsilon} \Rightarrow \left|\frac{۱}{n} - ۰\right| = \frac{۱}{n} < \varepsilon$$

■

■ مثال ۳-۸

دنبالهٔ $a_n = \begin{cases} n & n \text{ زوج} \\ \frac{۱}{n} & n \text{ فرد} \end{cases}$ همگرا نیست؛ چون $a_{۲n}$ از هر مقداری بیشتر می‌شود ولی دارای زیر دنباله همگرای $\{a_{۲n+۱}\}$ است. ■

● قضیه۳-۱

اگر $\{a_n\}$ به α و α' همگرا باشد آنگاه $\alpha = \alpha'$ یعنی حد دنباله در صورت وجود یکتاست.

اثبات. اگر $\alpha \neq \alpha'$ آنگاه ε را برابر $\frac{۱}{۲}|\alpha - \alpha'|$ می‌گیریم، آنگاه $N_۱$ و $N_۲$ وجود دارند که

$$n > N_۱ \Rightarrow |a_n - \alpha| < \frac{۱}{۲}|\alpha - \alpha'|$$

$$n > N_۲ \Rightarrow |a_n - \alpha'| < \frac{۱}{۲}|\alpha - \alpha'|$$

از جمع دو نامساوی فوق و استفاده از نامساوی مثلث به تناقض زیر می‌رسیم که حکم را ثابت می‌کند:

$$|\alpha - \alpha'| < |\alpha - \alpha'|$$

●

● قضیه۳-۲

اگر دنبالهٔ $\{a_n\}$ همگرا باشد آنگاه کراندار است.

اثبات. $N > ۰$ وجود دارد که

$$n \geq N \Rightarrow |a_n - \alpha| < ۱ \Rightarrow |a_n| < |\alpha| + ۱$$

پس کافی است M را به‌صورت زیر تعریف کنیم

$$M = \max\{|a_۱|, |a_۲|, \dots, |a_{N-۱}|, |\alpha| + ۱\}$$

آنگاه به ازای هر n داریم

$$|a_n| \leq M$$

●

● **قضیه۳-۳**

اگر $\{a_n\}$و $\{b_n\}$ به ترتیب به α و β همگرا باشند آنگاه

الف) $a_n + b_n \longrightarrow \alpha + \beta$

ب) $a_n b_n \longrightarrow \alpha\beta$

ج) $\frac{a_n}{b_n} \longrightarrow \frac{\alpha}{\beta}$ (اگر $\beta \neq ۰$)

برهان به‌عهدهٔ خواننده است. ●

*** خاصیت تمامیت R (اصل کمال)**

هر زیرمجموعهٔ ناتهی A از بالا کراندار $\mathbf{R}$ کوچکترین کران بالایی دارد که آن را سوپریمم مجموعه گوییم و به $\sup A$ نشان می‌دهیم.

● **قضیه۳-۴**

(بدون اثبات) هر دنباله کراندار $\{a_n\}$ دارای یک زیر دنباله همگراست. ●

● **قضیه۳-۵**

هر دنباله یکنوا همگراست اگر و فقط اگر کراندار باشد.

اثبات. اگر همگرا باشد بنابر قضیه ۳-۲ کراندار است. حال فرض می‌کنیم $\{a_n\}$ صعودی و کراندار باشد؛ چون از بالا کراندار است بنا به خاصیت کمال اعداد حقیقی کوچکترین کران بالایی دارد که آن را a می‌نامیم.

برای هر $\varepsilon > ۰$، $N > ۰$ وجود دارد که $a - \varepsilon < a_N \leq a < a + \varepsilon$ پس $|a_N - a| < \varepsilon$.

پس بنابر صعودی بودن دنباله داریم

$$\forall n > N \Rightarrow |a_n - a| < \varepsilon$$

پس $\{a_n\}$ به a همگراست. ●

● **قضیه۳-۶**

(کوشی) $\{a_n\}$ همگراست اگر و فقط اگر

$$\forall \varepsilon > ۰ \qquad \exists N > ۰ : \ n, m > N \Rightarrow |a_n - a_m| < \varepsilon$$

توضیح. دنباله‌ای که در شرط فوق صدق کند دنباله کوشی گفته می‌شود.

اثبات. اگر دنباله $\{a_n\}$ همگرا باشد (مثلاً به α) آنگاه برای هر $\varepsilon > ۰$، $N > ۰$ وجود دارد که

$$n > N \Rightarrow |a_n - \alpha| < \frac{\varepsilon}{۲}$$

پس اگر $m, n > N$ آنگاه

$$|a_n - a_m| \leq |a_n - \alpha| + |\alpha - a_m| < \frac{\varepsilon}{۲} + \frac{\varepsilon}{۲} = \varepsilon$$

برای اثبات طرف دوم دو لم زیر را اثبات می‌کنیم:

لم۱.(قضیه بسته‌های تودرتو)

اگر $I_n = [a_n, b_n]$ بازه‌هایی تودرتو باشند (یعنی $I_۱ \supseteq I_۲ \supseteq I_۳ \supseteq \cdots$) و طول بازه‌ها به صفر میل کند (یعنی $b_n - a_n \longrightarrow ۰$) آنگاه $\cap_{n=۱}^{\infty} I_n$ تنها و تنها از یک نقطه تشکیل می‌شود.

اثبات. اگر $\cap I_n$ شامل دو نقطه متمایز باشد طول I_nها از فاصله آن دو نقطه کمتر نمی‌شود که با فرض لم تناقض دارد. پس کافی است ثابت کنیم $\cap I_n$ تهی نیست چون به ازای هر m, n، $a_n < b_m$. پس $\{a_n\}$ مجموعه‌ای است که از بالا کراندار است. کوچکترین کران بالا یعنی a باید در تمام I_nها باشد زیرا در غیر این صورت از یکی از کرانهای بالا (یعنی b_nها) بزرگتر می‌شود که تناقض است.

لم۲.

هر مجموعه نامتناهی کراندار دارای نقطه‌ای است مانند α که هر همسایگی آن بینهایت نقطه از مجموعه را شامل است.

اثبات. فرض می‌کنیم مجموعه در بازهٔ بسته $I_۱ = [a, b]$ باشد؛ آن را نصف می‌کنیم. بینهایت نقطه در یکی از این دو نصفه که آن را $I_۲$ می‌نامیم وجود دارد. به همین ترتیب $I_۳$، $I_۴$، ... به‌دست می‌آیند. ادامه اثبات با استفاده از لم قبل را به خواننده واگذار می‌کنیم.

حال به اثبات قضیه برمی‌گردیم. بنابر تمرین ۲ بخش ۳-۲ هر دنباله که در شرایط قضیه صدق کند کراندار است. پس بنابر لم ۲ یک نقطه α دارد. برای هر $\varepsilon > ۰$، $N > ۰$ وجود دارد که

$$n, m > N \qquad |a_n - a_m| < \frac{\varepsilon}{۲}$$

و همسایگی به شعاع $\frac{\varepsilon}{۲}$، حول α نیز شامل یک a_p است که $p > N$. پس

$$n > N \Rightarrow |a_n - \alpha| \leq |a_n - a_p| + |a_p - \alpha| < \frac{\varepsilon}{۲} + \frac{\varepsilon}{۲} = \varepsilon$$

یعنی دنباله $\{a_n\}$ به α می‌گراید. ●

■ **مثال ۳-۹**

ثابت کنید $a_n = ۱ + \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۳} + \cdots + \frac{۱}{n}$ همگرا نیست.

می‌دانیم

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2n} > 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\cdots+\frac{1}{2n}+\frac{1}{2n}$$
$$= 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}$$
$$\Rightarrow \left|\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}\right| > \frac{1}{2}$$

پس دنباله نمی‌تواند کوشی باشد! یعنی دنباله همگرا نیست. ■

■ مثال ۳-۱۰

اگر $\{a_n\}$ همگرا باشد و $\sigma : \mathrm{N} \longrightarrow \mathrm{N}$ یک تابع یک به یک و پوشا، ثابت کنید $\{a_{\sigma(n)}\}$ همگراست.

برای هر $\varepsilon > 0$، $N > 0$ وجود دارد که

$$n, m > N \Rightarrow |a_n - a_m| < \varepsilon$$

اگر N_1 را آنقدر بزرگ بگیریم که $\{1, 2, \ldots, N\} \subseteq \{\sigma(1), \sigma(2), \ldots, \sigma(N_1)\}$ آنگاه

$$m, n > N_1 \Rightarrow \sigma(n), \sigma(m) > N \Rightarrow |a_{\sigma(n)} - a_{\sigma(m)}| < \varepsilon$$

پس $\{a_{\sigma(n)}\}$ کوشی است پس همگراست.

توضیح. $\{a_{\sigma(n)}\}$ را بازآرایی دنبالهٔ $\{a_n\}$ گویند.

■

تمرین

۱. ثابت کنید هر دنبالهٔ کوشی کراندار است.

۲. نشان دهید اگر یک زیردنبالهٔ دنبالهٔ کوشی همگرا باشد، دنباله همگرا می‌شود. و از اینجا با استفاده از قضیه ۳-۴ اثبات دیگری برای قضیه کوشی بیاورید.

۳. ثابت کنید حد دنباله $\{a_n\}$ در صورت وجود با حد هر بازآرایی آن مساوی است.

۴. a_1، a_2، ...، a_n اعداد حقیقی مثبتی هستند و

$$b_k = \sqrt[k]{\frac{a_1^k + a_2^k + \cdots + a_n^k}{n}}$$

ثابت کنید $\lim\limits_{k\to\infty} b_k = \max\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$.

۵. (مهم) اگر تابع $f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ در نقطه a پیوسته باشد و $\{a_n\}$ دنباله‌ای باشد که به a می‌گراید آنگاه $\{f(a_n)\}$ به $f(a)$ میل می‌کند.

۶ . ثابت کنید $a_n = (1 + \frac{1}{n})^n$ همگراست.

۷ . ثابت کنید $\sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \cdots}}}$ همگراست.

۸ . ثابت کنید اگر $\{a_n\}$ به α همگرا باشد آنگاه $\{|a_n|\}$ به $|\alpha|$ همگراست. مثالیْ از دنباله $\{a_n\}$ بزنید که همگرا نباشد ولی $\{|a_n|\}$ همگرا باشد.

۹ . کلیه دنباله‌های $\{a_n\}$ را چنان معین کنید که

$$a_1 = 1, \qquad |a_n - a_m| < \frac{2mn}{m^2 + n^2}$$

۱۰ . مثالی از بازه‌های باز تودرتو بزنید که طول بازه‌ها به صفر میل کند و اشتراک آنها تهی باشد.

۱۱ . با استفاده از لم ۲، قضیه ۳-۴ را ثابت کنید.

۳-۳ دنباله‌های همگرای مهم

الف) $\lim_{n\to\infty} q^n = 0$ اگر و فقط اگر $|q| < 1$.

ب) $\lim_{n\to\infty} n^\alpha = 0$ اگر و فقط اگر $\alpha < 0$.

ج) $\lim_{n\to\infty} \frac{n^\alpha}{(1+\varepsilon)^n} = 0$، $\varepsilon > 0$ و α عددی حقیقی دلخواه.

د) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$، $a > 0$

ه) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$

و) $\lim_{n\to\infty} \frac{(\log n)^\alpha}{n^\beta} = 0$، $\beta > 0$ و α دلخواه.

ز) $\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{a^n} = \infty$، $a > 0$

ح) $\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{\sqrt{2\pi n}(\frac{n}{e})^n} = 1$ (فرمول استرلینگ) (تقریب خوب برای $n!$)

ط) $\lim_{n\to\infty} n \sin \frac{1}{n} = 1$

ی) $\lim_{n\to\infty} \frac{1^k + 2^k + \cdots + n^k}{n^{k+1}} = \frac{1}{k+1}$

تمرین

۱ . روابط فوق را با دقت کافی ثابت کنید! (بجز فرمول استرلینگ!)

۳-۴ دنباله‌های بازگشتی

دنباله‌ای که جمله nام آن بر حسب روابطی از جملات قبلی معلوم باشد دنباله بازگشتی نام دارد. یکی از صورتهای کلی دنباله بازگشتی به‌صورت زیر است:

$$a_1, a_2, \ldots, a_k \text{ و معلوم} \quad n > k: \quad a_n = f(a_{n-1}, \ldots, a_{n-k})$$

که f تابعی k متغیره است. اکثر مواقع a_n بر حسب ترکیب خطی از k جملهٔ قبل تعریف می‌شود:

$$a_1, \ldots, a_k \text{ معلوم} \quad a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \cdots + c_k a_{n-k} \quad n > k \qquad (۳-۱)$$

واضح است که برای a_1، ...، a_k مشخص، دنباله به‌صورت یکتا به وجود می‌آید. پس اگر جمله عمومی را حدس بزنیم کار تمام است.

به معادلهٔ (۳-۱) معادله زیر را نسبت می‌دهیم:

$$x^k - c_1 x^{k-1} - \cdots - c_k = 0 \qquad (۳-۲)$$

حال چند حالت ممکن است اتفاق بیافتد:

الف) معادله k ریشه متمایز حقیقی α_1، α_2، ...، α_k را داشته باشد؛ آنگاه دنبالهٔ

$$a_n = \lambda_1 \alpha_1^n + \lambda_2 \alpha_2^n + \cdots + \lambda_k \alpha_k^n$$

در رابطه بازگشتی مزبور صدق می‌کند (چرا؟)؛ پس کافی است ضرایب λ_1، ...، λ_k از k معادله، k مجهول زیر به‌دست بیاوریم:

$$\begin{cases} \lambda_1 \alpha_1 + \lambda_2 \alpha_2 + \cdots + \lambda_k \alpha_k = a_1 \\ \lambda_1 \alpha_1^2 + \lambda_2 \alpha_2^2 + \cdots + \lambda_k \alpha_k^2 = a_2 \\ \vdots \\ \lambda_1 \alpha_1^k + \lambda_2 \alpha_2^k + \cdots + \lambda_k \alpha_k^k = a_k \end{cases}$$

ب) ریشه‌های معادله (۳-۲) حقیقی باشند ولی متمایز نباشند.

ابتدا قضیه زیر را که در دبیرستان خوانده‌ایم یادآوری می‌کنیم

● **قضیه۳-۷**

اگر چند جمله‌ای $P(x)$ ریشه مرتبه kام داشته باشد یعنی $P(x) = (x-\alpha)^k Q(x)$ که $Q(\alpha) \neq 0$ آنگاه

$$P(\alpha) = P'(\alpha) = P''(\alpha) = \cdots = P^{(k-1)}(\alpha) = 0$$

فرض می‌کنیم معادله (۳-۲) ریشه‌های α_1، α_2، ...، α_r به ترتیب از مرتبه‌های m_1، m_2، ...، m_r داشته باشد ($m_1+m_2+\cdots+m_r = k$)، آنگاه دنباله‌های زیر در معادله (۳-۱) صدق می‌کنند

$$a_n = \alpha_i^n$$

$$a_n = n\alpha_i^n$$

$$\vdots$$

$$a_n = n(n-1)\ldots(n-m_i+1)\alpha_i^n \overset{\text{تعریف}}{=} P(n,m_i)\alpha_i^n$$

به ازای $1 \leq i \leq r$

پس جواب کلی دستگاه از رابطه زیر به‌دست می‌آید:

$$\begin{aligned} a_n = {} & \lambda_1\alpha_1^n + \lambda_2 n\alpha_1^n + \cdots + \lambda_{m_1}P(n,m_1)\alpha_1^n + \cdots \\ & + \lambda_{n-m_r}\alpha_r^n + \cdots + \lambda_k P(n,m_r)\alpha_r^n \end{aligned}$$

که برای به‌دست آوردن λ_1، λ_2، ...، λ_k باز باید یک دستگاه k معادله k مجهول را حل کنیم

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2\alpha_1 + \cdots + \lambda_k P(1,m_r)\alpha_r = a_1 \\ \vdots \\ \lambda_1\alpha_1^k + \lambda_2 k\alpha_1^k + \cdots + \lambda_k P(k,m_r)\alpha_r^k = a_k \end{cases}$$

ج) اگر ریشه‌های معادله مختلط باشند و بتوانیم دنباله‌ای بسازیم که در شرایط صدق کند بنابر یکتایی دنباله ضرایب باید وقتی که به توان می‌رسند حقیقی شوند.

د) اگر دستگاه k معادله k مجهول جواب نداشته باشد باید از روشهای ابتکاری استفاده کنیم.

■ **مثال ۳-۱۱**

دنباله فیبوناچی، $f_1 = f_2 = 1, f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$ به معادله زیر منجر می‌شود:

$$x^2 - x - 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

$$\Rightarrow f_n = \lambda_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \lambda_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

$$\begin{cases} \lambda_1(\frac{1+\sqrt{5}}{2}) + \lambda_2(\frac{1-\sqrt{5}}{2}) = 1 \\ \lambda_1(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^2 + \lambda_2(\frac{1-\sqrt{5}}{2})^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \lambda_1 = -\lambda_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$\Rightarrow f_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right)$$

■

■ **مثال ۳-۱۲**

دنباله زیر را به‌طور صریح پیدا کنید:

$$f_۱ = ۰, \qquad f_۲ = ۱, \qquad f_n = ۲f_{n-۱} - f_{n-۲}$$

حل.

$$x^۲ - ۲x + ۱ = ۰ \Rightarrow x = ۱ \text{ مضاعف}$$

$$f_n = \lambda_۱ ۱^n + n\lambda_۲ ۱^n = \lambda_۱ + \lambda_۲ n$$

$$\begin{cases} \lambda_۱ + \lambda_۲ = ۰ \\ \lambda_۱ + ۲\lambda_۲ = ۱ \end{cases} \Rightarrow \lambda_۱ = -۱, \quad \lambda_۲ = ۱ \Rightarrow f_n = n - ۱$$

■

■ **مثال ۳-۱۳**

f_n را به‌صورت صریح بیان کنید:

$$f_۱ = ۲, \qquad f_۲ = ۵, \qquad f_۳ = ۱۲$$

$$f_n = ۵f_{n-۱} - ۷f_{n-۲} + ۳f_{n-۳}$$

حل. باید معادله زیر را حل کنیم:

$$x^۳ - ۵x^۲ + ۷x - ۳ = (x-۱)^۲(x-۳) = ۰ \Rightarrow \underset{\text{مضاعف}}{x = ۱}, \; x = ۳$$

$$f_n = \lambda_۱ ۱^n + \lambda_۲ n ۱^n + \lambda_۳ ۳^n$$

$$\begin{cases} \lambda_۱ + \lambda_۲ + ۳\lambda_۳ = ۲ \\ \lambda_۱ + ۲\lambda_۲ + ۹\lambda_۳ = ۵ \\ \lambda_۱ + ۳\lambda_۲ + ۲۷\lambda_۳ = ۱۲ \end{cases} \Rightarrow \lambda_۱ = ۰, \qquad \lambda_۲ = ۱, \qquad \lambda_۳ = \frac{۱}{۳}$$

$$f_n = n + ۳^{n-۱}$$

■

روش حل دنباله‌های بازگشتی که به‌صورت دستگاه معادلات هستند

فرض-کنید $\{x_{۱n}\}_{n=۱}^{\infty}$، $\{x_{۲n}\}_{n=۱}^{\infty}$، ...، $\{x_{kn}\}_{n=۱}^{\infty}$، k دنباله باشند که در رابطه زیر صدق

کنند (x_{11}، x_{21}، ...، x_{k1} معلومند)

$$\begin{cases} x_{1,n+1} = a_{11}x_{1n} + a_{12}x_{2n} + \cdots + a_{1k}x_{kn} \\ x_{2,n+1} = a_{21}x_{1n} + a_{22}x_{2n} + \cdots + a_{2k}x_{kn} \\ \vdots \\ x_{k,n+1} = a_{k1}x_{1n} + a_{k2}x_{2n} + \cdots + a_{kk}x_{kn} \end{cases}$$

به راحتی دیده می‌شود

$$\begin{pmatrix} x_{1,n+1} \\ x_{2,n+1} \\ \vdots \\ x_{k,n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kk} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{1,n} \\ x_{2,n} \\ \vdots \\ x_{k,n} \end{pmatrix}$$

$$X_{n+1} = AX_n$$

اگر بخواهیم دنباله به‌صورت صریح به‌دست آوریم باید A^n را به‌دست آوریم، چون

$$X_{n+1} = AX_n = A^2X_{n-1} = \cdots = A^nX_1$$

حال روشهایی را برای به‌دست آوردن توان nام یک ماتریس بیان می‌کنیم.

▲ تعریف ۳-۷

λ را یک مقدار ویژه ماتریس $A_{n\times n}$ می‌نامند هرگاه

$$\det(A - \lambda I_n) = 0$$

▲

پس هر معادله $n \times n$، n مقدار ویژه دارد (ممکن است تکراری، مختلط یا حقیقی باشند)، و باید یک معادلهٔ درجه n را حل کنیم.

▲ تعریف ۳-۸

λ_1، λ_2، ...، λ_n مقادیر ویژه ماتریس A هستند. $Y = \begin{pmatrix} y_{1i} \\ y_{2i} \\ \vdots \\ y_{ni} \end{pmatrix}$ یک بردار ویژه متناظر λ_i برای A نامیده می‌شود هرگاه

$$AY = \lambda_i Y$$

▲

● **قضیه۳-۸**

با نمادگذاری تعاریف قبل

$$A = \underbrace{\begin{pmatrix} y_{11} & y_{12} & \cdots & y_{1n} \\ y_{21} & y_{22} & \cdots & y_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_{n1} & y_{n2} & \cdots & y_{nn} \end{pmatrix}}_{V} \underbrace{\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & O \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ O & & & \lambda_n \end{pmatrix}}_{\text{D: ماتریس قطری}} \underbrace{\begin{pmatrix} y_{11} & \cdots & y_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ y_{n1} & \cdots & y_{nn} \end{pmatrix}^{-1}}_{V^{-1}}$$

پس

$$A^k = VD^kV^{-1}$$

و

$$D^k = \begin{pmatrix} \lambda_1^k & & & O \\ & \lambda_2^k & & \\ & & \ddots & \\ O & & & \lambda_n^k \end{pmatrix}$$

●

تذکر. چند مثال عددی برای ماتریسهای ۲ × ۲ و ۳ × ۳ حل کنید تا به فرایند کار مسلط شوید.

حل چند دنباله بازگشتی غیراستاندارد

برای حل بعضی از دنباله‌های بازگشتی می‌توان با تغییر صورت جمله‌های دنباله آن را به‌صورتهای استاندارد قبلی تبدیل کرد. در اینجا چند مثال مهم را می‌آوریم

الف) حل دنباله بازگشتی

$au_nu_{n+1} + bu_{n+1} + au_n = d$ و u_0 و u_1 معلوم هستند. جمله‌ها را به‌صورت $(au_n + b)u_{n+1} + au_n = d$ مرتب می‌کنیم. فرض می‌کنیم $\frac{x_n}{x_{n-1}} = au_n + b$ (بدیهی است که با یافتن فرمول صریح برای x_n، برای u_n نیز فرمولی پیدا می‌شود). با جایگذاری نتیجه می‌شود

$$\frac{x_n}{x_{n-1}}\left(\frac{x_{n+1}}{ax_n} - \frac{b}{a}\right) + \frac{x_n}{x_{n-1}} - b = d$$

که رابطه فوق به‌صورت زیر ساده می‌شود

$$x_{n+1} = (b - a^2)x_n + a(d + b)$$

که قابل محاسبه است.

تذکر. برابر بودن ضرایب $u_nu_{n+۱}$ و u_n لازم نیست (فقط برای راحتی محاسبه مساوی گرفته‌ایم).

■ مثال ۳-۱۴

$u_n + ۶u_{n+۱} + u_nu_{n+۱} = -۱۲$ را به‌صورت صریح بنویسید ($u_۱ = -\frac{۷}{۲}, u_۲ = -\frac{۱۷}{۵}$).

حل. در مثال ۱ $a = ۱$ و $b = ۶$ و $d = -۱۲$ است و x_n کمکی به‌صورت زیر به‌دست می‌آید

$$x_{n+۱} = ۵x_n - ۶x_{n-۱}$$
$$\Rightarrow x^۲ - ۵x + ۶ = ۰ \Rightarrow x = ۲,۳$$
$$\Rightarrow x_n = A \times ۲^n + B \times ۳^n$$

چون $\frac{x_۱}{x_۰} = \frac{۵}{۲}$ می‌توان فرض کرد $x_۰ = ۲$ و $x_۱ = ۵$. پس $A = B = ۱$، پس

$$\frac{۲^n + ۳^n}{۲^{n-۱} + ۳^{n-۱}} = u_n + ۶ \Rightarrow \quad u_n = \frac{۲^n + ۳^n}{۲^{n-۱} + ۳^{n-۱}} - ۶$$

■

ب) حل دنباله‌های بازگشتی با ضرایب متغیر

در بعضی از دنباله‌های بازگشتی ضرایب معادله بازگشتی توابعی از n می‌باشند.

■ مثال ۳-۱۵

$a_n - a_{n-۱} = f(n)$ که به راحتی $a_n = \sum_{i=۱}^{n} f(i) + a_۰$ در می‌آید. ■

■ مثال ۳-۱۶

$a_n - ka_{n-۱} = f(n)$، می‌توان $b_n = k^n a_n$ گرفت و در نتیجه به‌صورت زیر ساده می‌شود

$$b_n - b_{n-۱} = \frac{f(n)}{k^n}$$

که با استفاده از مثال ۳-۱۵ قابل محاسبه است. ■

یک حالت کلی

گاهی به دنباله‌های بازگشتی به فرم کلی زیر برخورد می‌کنیم:

$$a_۰u_n + a_۱u_{n+۱} + \cdots + a_ku_{n-k} = f(n)(*) \quad \text{[معادله اصلی]}$$

با شرط اولیه $u_۰$، $u_۱$، $u_۲$، . . .، u_k.

اگر بتوانیم دنباله‌ای مانند b_n بیابیم که در شرط (*) صدق کند ولی احتمالاً شرایط اولیه را برآورده نکند، و دنباله c_n را که از رابطه زیر قابل محاسبه است با شرایط اولیه $c_۰ = a_۰ - b_۰$،

$c_\text{۱} = a_\text{۱} - b_\text{۱}$، ...، $c_k = a_k - b_k$ حساب کنیم:

$$a_\circ c_n + a_\text{۱} c_{n+\text{۱}} + \cdots + a_k c_{n-k+\text{۱}} = \circ$$

آنگاه دنباله اصلی به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$u_n = a_n + c_n$$

■ مثال ۳-۱۷

فرمول صریح دنباله زیر را به‌دست آورید:

$$(*) u_n - f(n) u_{n-\text{۱}} = g(n) \qquad \text{و } u_\circ \text{ معلوم}$$

تابع $t(n)$ را بدین صورت تعریف می‌کنیم

$$t(n) = \prod_{i=\text{۱}}^{n} f(i)$$

همچنین دنباله a_n را به‌صورت $a_n = u_n / t(n)$ تعریف می‌کنیم. با جایگذاری a_n به‌جای u_n در معادله (*) به‌دست می‌آوریم

$$a_n t(n) - f(n) t(n-\text{۱}) a_{n-\text{۱}} = g(n)$$

اما می‌دانیم $t(n) - f(n)t(n-\text{۱}) = \circ$ (چرا؟). پس

$$a_n - a_{n-\text{۱}} = \frac{g(n)}{t(n)}$$

که با استفاده از مثال (۳-۱۵)، a_n به‌دست می‌آید. پس

$$u_n = t(n) a_n$$

■

تمرین برای دنباله‌های بازگشتی غیراستاندارد

الف) در قسمت «یک حالت کلی»، برای $f(n)$های زیر b_n را حساب کرده‌ایم؛ فرایند کار را ثابت کنید.

۱. $f(n) = \text{ثابت} \leftarrow b_n = \text{ثابت}$

۲. $f(n) = n \leftarrow b_n = An + B$ (A و B ثابت)

۳. $f(n) = n^k \leftarrow b_n = A_k n^k + A_{k-\text{۱}} n^{k-\text{۱}} + \cdots + A_\circ$ ($A_\text{۱}$، ...، A_k ثابت)

۴. $f(n) = r^n \leftarrow b_n = Ar^n$

۵. $f(n) = n^k r^n \leftarrow b_n = r^n(A_k n^k + \cdots + A_\circ)$

۶. $f(n) = r^n \cos n\alpha$ یا $f(n) = r^n \sin n\alpha \leftarrow b_n = Ar^n \sin n\alpha + Br^n \cos n\alpha$

۷. اگر جواب b_n برای $f(n)$، $\alpha(n)$ باشد و برای $g(n)$، $\beta(n)$ باشد ثابت کنید برای $f(n)+g(n)$، جواب $\beta(n)+\alpha(n)$ است.

ب) برای این دنباله‌ها فرمول صریح به‌دست آورید:

۱. $a_{n+۲} + ۳a_{n+۱} + ۲a_n = ۳^n$، $a_۱ = ۱$، $a_۰ = ۰$

۲. $a_{n+۲} - a_n = \sin(\frac{n\pi}{۲})$، $a_۰ = a_۱ = ۱$

۳. $a_{n+۳} - ۳a_{n+۲} - ۳a_{n+۱} - a_n = ۳ - ۵a_n$، $a_۰ \cdots a_۴$ معلوم

۴. $a_{n+۲}^۲ - ۵a_{n+۱}^۲ + ۶a_n^۲ = ۷n$، $a_۰ = a_۱ = ۱$

۵. $a_n^۲ - ۲a_{n-۱} = ۰$، $a_۰ = ۲$

تمرین

۱. $a_n > ۰$ و $۰ < \alpha < ۱$. آیا دنباله‌ای از اعداد وجود دارد که

$$۱ + a_{n+۱} \leq a_n + \frac{\alpha}{n} a_n$$

۲. U_n و V_n را به‌دست آورید ($U_۰$ و $V_۰$ معلومند)

$$U_{n+۱} = \frac{۲U_n + V_n}{۳}, \quad V_{n+۱} = \frac{۲V_n + U_n}{۳}$$

۳. a_n و b_n را بیابید ($a_۰$ و $b_۰$ معلومند)

$$\begin{cases} a_{n+۱} = a_n^۲ + ۲b_n^۲ \\ b_{n+۱} = ۲a_n b_n \end{cases}$$

۴. اگر $a_n a_{n+۱} = ۲a_n - ۱$، ($a_n > ۰$) ثابت کنید $\lim_{n\to\infty} a_n = ۱$ (در این دنباله «۲» وجود ندارد).

۵. ثابت کنید رقم یکان $[(۲+\sqrt{۳})^n]$ عددی است فرد.
راهنمایی: $a_n = (۲+\sqrt{۳})^n + (۲-\sqrt{۳})^n$ را به‌صورت بازگشتی بنویسید.

۶. رقم یکان $(\sqrt{۲}+\sqrt{۳})^{۱۹۸۰}$ را پیدا کنید.
راهنمایی: $a_n = (\sqrt{۲}+\sqrt{۳})^{۲n} + (\sqrt{۲}-\sqrt{۳})^{۲n}$ را به‌صورت بازگشتی بنویسید.

۷. در دنباله فیبوناچی ثابت کنید

الف) $f_۱^۲ + f_۲^۲ + \cdots + f_n^۲ = f_n f_{n-۱}$

ب) $a_{m+n} = a_{n-۱}a_m + a_n a_{m+۱}$ جملات فیبوناچی

ج) $(a_n, a_m) = a_{(m,n)}$ جملات فیبوناچی

۸ . ثابت کنید هر عدد طبیعی مجموع چند جمله متمایز از جملات دنباله فیبوناچی است.

۹ . اگر a بزرگترین ریشه مثبت $x^۳ - ۳x^۲ + ۱ = ۰$ باشد، ثابت کنید $[a^{۱۹۸۸}]$ و $[a^{۱۷۸۸}]$ بر ۱۷ بخش‌پذیرند (راهنمایی: از دنباله‌های بازگشتی استفاده کنید).

۱۰ . روشی برای محاسبه

$$\underbrace{f(f(\cdots(f(x))}_{n \text{ بار}}$$

که $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ است ارائه دهید.

۱۱ . الف) فرمول صریح دنباله بازگشتی زیر را به‌دست آورید:

$$a_۱ = ۰, \qquad ۲a_{n+۱} = ۳a_n + \sqrt{۵a_n^۲ + ۴}$$

ب) ثابت کنید $a_{۲n}$ به ازای هیچ n بر ۱۳۷۱ بخش‌پذیر نیست.

۳-۵ دنباله‌های متناوب عددی

مطالب اصلی

▲ تعریف۳-۹

اگر $\{a_n\}$ دنباله‌ای از اعداد صحیح باشد $\{a_n (\mathrm{mod}\ m)\}$ یک دنباله همنهشتی گفته می‌شود. ▲

▲ تعریف۳-۱۰

اگر $\{a_n\}$ دنباله‌ای از اعداد صحیح باشد که N و T طبیعی وجود داشته باشند که

$$a_{n+T} \equiv a_n (\mathrm{mod}\ m), \qquad n \geq N$$

آنگاه گوییم دنباله $\{a_n (\mathrm{mod}\ m)\}$ یک دنباله همنهشتی متناوب است، و T یک دوره تناوب آن و کوچکترین دوره تناوب که به $T(m)$ نشان داده می‌شود دوره تناوب اصلی دنباله گفته می‌شود. اگر $N = ۱$ آنگاه دنباله اکیداً متناوب است. ▲

● قضیه۳-۹

دنباله $\{a_n\}$ از اعداد صحیح به ازای یک چند جمله‌ای r متغیری با ضرایب صحیح مانند P در شرط زیر صدق می‌کنند

$$a_{n+r} = P(a_{n+r-۱}, \ldots, a_n), \qquad n \geq ۱$$

آنگاه $\{a_n (\mathrm{mod}\ m)\}$ یک دنباله متناوب است.

اثبات. $a_n \equiv \bar{a}_n (\mathrm{mod}\ m)$ که $۰ \leq \bar{a}_n \leq m - ۱$، سپس r تاییهای مرتب زیر را در

نظر می‌گیریم

$$(\bar{a}_1, \bar{a}_2, \ldots, \bar{a}_r), (\bar{a}_2, \bar{a}_3, \ldots, \bar{a}_{r+1}), \ldots, (\bar{a}_n, \bar{a}_{n+1}, \ldots, \bar{a}_{n+r-1})$$

حداکثر m^r، rتایی مرتب متمایز از اعداد بین صفر و $m-1$ وجود دارد، پس در m^r+1 عضو اول از دنباله فوق دو عضو مساوی مثلاً

$$(\bar{a}_N, \ldots, \bar{a}_{N+r-1}) = (\bar{a}_{N+T}, \ldots, \bar{a}_{N+r-1+T})$$

وجود دارند. پس $a_{N+r+T} \equiv P(\bar{a}_{N+r-1}, \ldots, \bar{a}_N) \equiv a_{N+r} (\mathrm{mod}\ m)$ پس $n \geq N$ آنگاه $\bar{a}_{n+T} = \bar{a}_n$، پس دنباله $\{a_n (\mathrm{mod}\ m)\}$ متناوب است. ●

● **قضیه۳-۱۰**

اگر $T(m)$ دوره تناوب اصلی دنباله $\{a_n (\mathrm{mod}\ m)\}$ و T یک دوره تناوب آن باشد، آنگاه $T(m) \mid T$. ●

● **قضیه۳-۱۱**

اگر $T(m)$ و $T(m')$ دوره تناوب اصلی دنباله‌های $\{a_n (\mathrm{mod}\ m)\}$ و $\{a_n (\mathrm{mod}\ m')\}$ باشند آنگاه $m \mid m'$ نتیجه می‌دهد $T(m) \mid T(m')$. ●

● **قضیه۳-۱۲**

$M = [m_1, m_2]$ و $T(m_1)$، $T(m_2)$ و $T(M)$ دورهٔ تناوبهای اصلی دنباله‌های $\{a_n (\mathrm{mod}\ m_1)\}$، $\{a_n (\mathrm{mod}\ m_2)\}$ و $\{a_n (\mathrm{mod}\ M)\}$ باشند، آنگاه

$$T(M) = [T(m_1), T(m_2)]$$

اثبات. از قضیه ۳-۱۱ نتیجه می‌شود $T(m_i) \mid T(M)$، $(i = 1, 2)$ پس

$$[T(m_1), T(m_2)] \mid T(M)$$

به راحتی می‌توان نشان داد $[T(m_1), T(m_2)]$ یک دوره تناوب دنباله $\{a_n (\mathrm{mod}\ M)\}$ است پس بنابر قضیه ۳-۱۰ $T(M) \mid [T(m_1), T(m_2)]$ و از آنجا حکم ثابت خواهد شد. بخصوص اگر $(m_1, m_2) = 1$ آنگاه $T(m_1 m_2) = [T(m_1), T(m_2)]$. ●

● **قضیه۳-۱۳**

دنبالهٔ $\{n^k (\mathrm{mod}\ m)\}$ یک دنباله متناوب اکید، با دوره تناوب m است. ●

● **قضیه۳-۱۴**

اگر دنباله‌های $\{a_n (\mathrm{mod}\ m)\}$ و $\{b_n (\mathrm{mod}\ m)\}$ دوره تناوبهای T_1 و T_2 داشته باشند، آنگاه $\{a_n + b_n (\mathrm{mod}\ m)\}$ و $\{a_n b_n (\mathrm{mod}\ m)\}$ متناوب با دوره تناوب $[T_1, T_2]$ خواهند بود.

●

■ مثال ۳-۱۸

ثابت کنید رقم آخر اعضای دنبالهٔ $\{n(n+۱)(n+۲)\}$ یک دنباله متناوب می‌سازد.

حل. $\{n^i(\mathrm{mod}\ ۱۰)\}$ بنابر قضیه ۳-۱۳ متناوب است و حکم مسأله بنابر قضیه ۳-۱۴ صادق خواهد بود زیرا $n(n+۱)(n+۲)=n^۳+۳n^۲+۲n$. ■

■ مثال ۳-۱۹

فرض کنید ۱، ۹، ۸، ۳، ۴، ۳، ... دنباله‌ای باشد که $a_{n+۴}$ رقم آخر $a_{n+۳}+a_n$ است. ثابت کنید

$$۴ \mid a_{۱۹۸۵}^۲+\cdots+a_{۲۰۰۰}^۲$$

بنابر قضیه ۳-۹ دنباله $\{a_n(\mathrm{mod}\ ۲)\}=\{b_n\}$ دنباله متناوب است. چند جمله آن را می‌نویسیم

$$۱,۱,۰,۱,۰,۱,۱,۰,۰,۱,۰,۰,۰,۱,۱,۱,۱,۰,۱,۰,\ldots$$

پس $\{b_n\}$ یک دنباله اکیداً متناوب با دوره تناوب ۱۵ است. پس

$$a_{۱۹۸۵}\equiv b_۵,\quad a_{۱۹۸۶}\equiv b_۶,\ \ldots,\ a_{۲۰۰۰}\equiv b_{۲۰}(\mathrm{mod}\ ۲)$$

مشاهده می‌کنیم ۸ جمله فرد و ۸ جمله زوج است، پس

$$۴ \mid a_{۱۹۸۵}^۲+\cdots+a_{۲۰۰۰}^۲$$

■

■ مثال ۳-۲۰

$\{a_n\}$ را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم: $a_۱=۱۹۸۹^{۱۹۸۹}$ و a_n مجموعه رقمهای $a_{n-۱}$ است. مقدار $a_۵$ را به‌دست آورید.

حل. می‌دانیم مجموع ارقام یک عدد همنهشت خودش به هنگ ۹ است(چرا؟). پس از آنجایی که $a_۱\equiv ۰(\mathrm{mod}\ ۹)$ پس $a_۲\equiv a_۳\equiv a_۴\equiv a_۵\equiv ۰$ به هنگ ۹ ولی

$$a_۱=۱۹۸۹^{۱۹۸۹}<(۱۰^۴)^{۲۰۰۰}=۱۰^{۸۰۰۰}$$

$$a_۲<۹\times ۸۰۰۰<۱۰^۵$$

$$a_۳<۵\times ۹=۴۵$$

$$a_۴<۴+۹=۱۳$$

$$a_۵\leq ۹$$

چون $a_5 \equiv 0 \pmod 9$ و $a_5 \neq 0$ پس $a_5 = 9$. ■

■ **مثال ۳-۲۱**

$a_1 = 1$، $a_2 = 2$ و

$$a_{n+1} = \begin{cases} 5a_{n+1} - 3a_n & (\text{اگر } a_n a_{n+1} \text{ زوج باشد}) \\ a_{n+1} - a_n & (\text{اگر } a_n a_{n+1} \text{ فرد باشد}) \end{cases}$$

ثابت کنید جملات دنباله ناصفر هستند.

حل. به استقرا ثابت می‌کنیم $a_n \equiv 2^{n-1} \pmod 3$. درستی حکم به راحتی برای $n = 1, 2$ بررسی می‌شود. اگر حکم برای k و $k+1$ درست باشد، آنگاه

$$a_{k+2} \equiv \begin{cases} 2a_{k+1} \\ a_{k+1} - a_k \end{cases} \pmod 3$$

که در هر حالت داریم

$$\text{حالت اول:} \quad a_{k+2} \equiv 2a_{k+1} \equiv 2^{k+1} \pmod 3 \quad (\text{از فرض استقرا})$$

$$\text{حالت دوم:} \quad a_{k+2} \equiv a_{k+1} - a_k \equiv 2^k - 2^{k-1} = 2^{k-1}$$

$$\equiv 2^2 \times 2^{k-1} = 2^{k+1} \pmod 3$$

و حکم به استقرا ثابت شد. چون $2^k \not\equiv 0 \pmod 3$ پس جملات دنباله ناصفرند! ■

■ **مثال ۳-۲۲**

آرایش مثلثی زیر از اعداد را در نظر بگیرید

۱

۱ ۱ ۱

۱ ۲ ۳ ۲ ۱

۱ ۳ ۶ ۷ ۶ ۳ ۱

....

که قاعده ساخت آن این است که هر عدد مجموع عدد بالای سرش و دو عدد مجاور آن است. اگر در جایی عددی نباشد آن را صفر بگیرید. ثابت کنید از سطر سوم به بعد اعداد زوج در هر سطر وجود خواهند داشت.

حل. دنباله را به هنگ ۲ در نظر می‌گیریم

$$\begin{array}{ccccccc} & & & & & & 1 \\ & & & & & 1 & 1 \quad 1 \\ & & & \to 1 & 0 & 1 & 0 \\ & & & 1 & 1 & 0 & 1 \\ & & 1 & 0 & 0 & 0 & \\ & 1 & 1 & 1 & 0 & & \\ \to 1 & 0 & 1 & 0 & & & \end{array}$$

پس دنباله تکرار شده و اعداد زوج در ۵ سطر اولیه وجود دارند. ■

دنباله‌های اکیداً متناوب همنهشتی

● **قضیه۳-۱۵**

دنباله $\{a_n\}$ با تعریف بازگشتی زیر تعریف می‌شود

$$a_{n+r} = c_1 a_{n+r-1} + c_2 a_{n+r-2} + \cdots + c_{r-1} a_{n+1} + c_r a_n$$

که همهٔ اعداد c_iها فوق طبیعی‌اند.

دنباله $\{a_n (\text{mod } m)\}$ اکیداً متناوب است اگر $(c_r, m) = 1$.

اثبات. دنباله $\{a_n (\text{mod } m)\}$ بنابر قضیه ۳-۹ دنباله‌ای متناوب است پس N و T طبیعی وجود دارند که $n \geq N \Rightarrow a_{n+T} \equiv a_n (\text{mod } m)$ ولی داریم

$$\begin{aligned} c_r a_{N-1+T} &= a_{N+r-1+T} - (c_1 a_{N-r-2+T} + \cdots + c_{r-1} a_{N+T}) \\ &\equiv a_{N+r-1} - (c_r a_{N+r-2} + \cdots + c_{r-1} a_N) \\ &= c_r a_{N-1} (\text{mod } m) \end{aligned}$$

از آنجایی که $(c_r, m) = 1$ آنگاه $a_{N-1+T} \equiv a_N (\text{mod } m)$؛ با ادامه این روش N یکی‌یکی کم شده و حکم ثابت می‌شود. ●

نتیجه۱. اگر $c_r = \pm 1$ باشد آنگاه $\{a_n (\text{mod } m)\}$ دنبالهٔ اکیداً متناوب است.

نتیجه۲. اگر $c_r \not\equiv 0$ به هنگ عدد اول p آنگاه $\{a_n (\text{mod } p)\}$ دنباله اکیداً متناوب است.

● **قضیه۳-۱۶**

اگر $(a, m) = 1$ دنباله $\{a^n (\text{mod } m)\}$ یک دنباله اکیداً متناوب است و $\varphi(m)$ یک دوره تناوب است.

اثبات. $a_{n+1} = a^{n+1} = a a_n$ پس بنابر قضیه۳-۱۵، $\{a_n\}$ به هنگ m یک دنباله اکیداً یکنواست. قسمت دوم از رابطه $a^{\varphi(m)} \equiv 1 (\text{mod } m)$ به راحتی اثبات می‌شود. ●

نتیجه۱. دوره تناوب $\{a^n (\text{mod } ۱۰)\}$، ۴ است.

نتیجه۲. دوره تناوب $\{n^n (\text{mod } ۱۰)\}$، ۲۰ است.
هر دو دنباله فوق اکیداً متناوب هستند. (چرا؟)

■ **مثال ۳-۲۳**
تمام اعداد طبیعی n را بیابید که $۷ \mid ۲^n - ۱$. همچنین ثابت کنید به ازای هر n، $۷ \nmid ۲^n + ۱$.

حل. قضیه ۳-۱۶ می‌گوید $\{۲^n (\text{mod } ۷)\}$ اکیداً متناوب است. از آنجایی که دنباله مذکور به‌صورت $۲, ۴, ۱, ۲, ۴, ۱, \ldots$ است، پس دوره تناوب آن ۳ است. پس بداهتاً $۷ \mid ۲^n - ۱$ اگر و فقط اگر $n = ۳k$ و به ازای هر n، $۷ \nmid ۲^n + ۱$. ■

■ **مثال ۳-۲۴**
همه اعداد $M \in \mathrm{N}$ را بیابید که $۵ \mid ۱۹۸۹^M + M^{۱۹۸۹}$.

حل. می‌دانیم $۱۹۸۹ \equiv -۱ (\text{mod } ۵) \Rightarrow ۱۹۸۹^M \equiv (-۱)^M (\text{mod } ۵)$.
همچنین چون M نمی‌تواند بر ۵ بخش‌پذیر باشد(چرا؟) پس بنابر قضیه فرما

$$M^{۱۹۸۹} \equiv M (\text{mod } ۵)$$

یعنی باید تمام Mهایی را به‌دست آورید که $M + (-۱)^M$ بر ۵ بخش‌پذیر باشد. دو حالت دارد
الف) M زوج: که در این حالت $M = ۵k - ۱$ باید به‌صورت $M = ۱۰k + ۴$ باشد؛
ب) M فرد: که در این حالت $M = ۵k + ۱$ باید به‌صورت $M = ۱۰k + ۱$ باشد. ■

■ **مثال ۳-۲۵**
اعداد $m > n > ۱$ را چنان بیابید که سه رقم آخر ۱۹۷۸^m و ۱۹۷۸^n مساوی باشند و $m + n$ مینیمم باشد.

حل. $\{۱۹۷۸^n (\text{mod } ۸)\} = ۲, ۴, ۰, ۰, ۰, \ldots$ یک دنباله متناوب از جمله سوم با دوره تناوب ۱ است، $\{۱۹۷۸^n (\text{mod } ۱۲۵)\}$ نیز یک دنباله متناوب با دوره تناوب $۱۰۰ = \varphi(۱۲۵)$ است. حال به‌عنوان یک تمرین در نظریه اعداد ثابت کنید ۲، ۴، ۵، ۱۰، ۲۰، ۲۵، ۵۰ دورهٔ تناوب نیستند.
پس $\{۱۹۷۸^n (\text{mod } ۱۰۰۰)\}$ یک دنباله متناوب از $n \geq ۳$ با دوره تناوب ۱۰۰ است.
پس $m = ۳$ و $n = ۱۰۰ + ۳$ و مقدار مینیمم برابر ۱۰۶ است. ■
حال چند تمرین زیر را حل نمایید.

تمرین

۱. $\{a_n\}$ با تعریف $a_۱ = ۳$ و $a_{n+۱} = ۳^{a_n}$ را در نظر گرفته، بگویید کدام اعداد در

$\{a_n(\text{mod } ۱۰۰)\}$ نامتناهی بار تکرار می‌شوند.

۲ . $\{f_n\}$ دنباله فیبوناچی است. ثابت کنید $\{f_n(\text{mod } m)\}$ دوره تناوبی زوج دارد $(m \geq ۳)$.

۳ . $a_\circ = \circ$، $a_۱ = ۱$ و $a_{n+۱} = ۸a_n - a_{n-۱}$. ثابت کنید هیچ جمله به‌صورت $۳^\alpha \times ۵^\beta$ نیست. (راهنمایی: $\{a_n(\text{mod } ۳)\}$ و $\{a_n(\text{mod } ۵)\}$ را با هم بررسی کنید).

۴ . دو دنباله $\{x_n\}$ و $\{y_n\}$ به‌صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$x_\circ = x_۱ = ۱,\ x_{n+۱} = x_n + ۲x_{n-۱}$$

$$y_\circ = ۱,\ y_۱ = ۷,\ y_{n+۱} = ۲y_n + ۳y_{n-۱}$$

ثابت کنید $\{x_n\}$ و $\{y_n\}$ مقدار برابر ندارند (بجز در اولین جمله) (راهنمایی: $\{x_n(\text{mod } ۸)\}$ و $\{y_n(\text{mod } ۸)\}$ را بررسی کنید).

*۵ . ثابت کنید $a_n = \sum_{k=\circ}^{n} ۲^{۳k}\binom{۲n+۱}{۲k+۱}$ به ازای هیچ n بر ۵ بخش‌پذیر نیست (راهنمایی: ثابت کنید $a_n = ۱۸a_{n-۱} - ۴۹a_{n-۲}$).

۶ . فرض کنید $\{a_n(\text{mod } m)\}$ یک دنباله متناوب از جمله Nام با دوره تناوب اصلی T باشد و

$$a_N + a_{N+۱} + \cdots + a_{N+T-۱} \equiv A(\text{mod } m)$$

ثابت کنید دنباله $\{S_n(\text{mod } m)\}$ که $S_n = a_۱ + \cdots + a_n$ یک دنباله متناوب از جمله $N - ۱$ام است و دوره تناوب اصلی آن $\frac{m}{(A,m)} \times T$ است. خصوصاً دوره تناوب T دارد اگر $A \equiv \circ(\text{mod } m)$ و دوره تناوب mT دارد اگر $(A, m) = ۱$.

۷ . دنباله $\{a_n\}$ را با تعریف $a_n = ۱ + ۲^۲ + ۳^۳ + \cdots + n^n$ در نظر بگیرید. ثابت کنید در این دنباله نامتناهی عدد فرد آمده است.

۸ . دنباله $\{a_n(\text{mod } ۱۰)\}$ که در آن $a_n = ۱^۲ + ۲^۲ + \cdots + n^۲$ است در نظر بگیرید. ثابت کنید عدد $\circ/a_۱a_۲a_۳,\ldots$ یک عدد گویاست.

۳-۶ دو دنبالهٔ خاص

دنباله‌های بتی

● **تضیه۳-۱۷ (قضیه بتی)**

شرط لازم و کافی برای آنکه دنباله‌های $\{[n\alpha]\}$ و $\{[n\beta]\}$ مجموعهٔ اعداد طبیعی را افراز کنند، یعنی

$$\{[n\beta]\} \cap \{[n\alpha]\} = \emptyset, \qquad \{[n\beta]\} \cup \{[n\alpha]\} = N$$

آن است که α و β گنگ باشند و

$$\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=1$$

(که البته فرض شده است $\alpha > 1$ و $\beta > 1$).

اثبات. شرط گنگ بودن α و β ساده است (آن را ثابت کنید). حال ثابت می‌کنیم شرط $\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\alpha}=1$ لازم و کافی است.

بزرگترین m و n که $m\alpha < k+1$ و $n\beta < k+1$ به ترتیب $[\frac{k+1}{\alpha}]$ و $[\frac{k+1}{\beta}]$ هستند. پس تعداد اعداد کوچکتر یا مساوی k در $\{[n\alpha]\} \cup \{[n\beta]\}$ برابر است با

$$M=\left[\frac{k+1}{\alpha}\right]+\left[\frac{k+1}{\beta}\right]$$

پس

$$\frac{k+1}{\alpha}+\frac{k+1}{\beta}-2 < M < \frac{k+1}{\alpha}+\frac{k+1}{\beta}$$

فرض می‌کنیم $r=\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\alpha}$ پس

$$(k+1)r-2 < M < (k+1)r$$

الف) اگر $r < 1$ آنگاه به ازای k به اندازه کافی بزرگ $(k+1)r < k$، پس $M < k$ یعنی اعداد کوچکتر یا مساوی k در دو دنباله از k کمتر است، پس دست‌کم یک عدد در آنها ظاهر نشده است که خلاف فرض است.

ب) اگر $r > 1$ آنگاه به ازای k به اندازه کافی بزرگ $(k+1)r-2 > k$ پس $M > k$ پس دست‌کم یک عدد کوچکتر یا مساوی k دو بار ظاهر شده چون جملات هر دنباله متمایز هستند (چرا؟)، پس یک جمله در دو دنباله مشترک است که تناقض است از (الف) و (ب) نتیجه می‌شود که $r=1$.

حال ثابت می‌کنیم اگر $\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\alpha}=1$ آنگاه $\{[n\alpha]\}$ و $\{[n\beta]\}$، $\mathbf{N}$ را افراز می‌کنند.

$$M=\left[\frac{k+1}{\alpha}\right]+\left[k+1-\frac{k+1}{\alpha}\right]=\left[\frac{k+1}{\alpha}\right]+k-\left[\frac{k+1}{\alpha}\right]=k$$

چون به ازای هر k درست است به راحتی با استقرا روی k حکم ثابت می‌شود.

●

تمرین

۱. تابعهای f و g توابعی اکیداً صعودی از $\mathbf{Z}^+$ به $\mathbf{Z}^+$ هستند که برد آنها، $\mathbf{Z}^+$ را افراز می‌کند؛ و $g(m)=f[f(m)+1]$. مقدار $f(2m)$ را بیابید.

دنباله‌های چگال

$\{a_n\}$ درمجموعه A چگال است هرگاه هر همسایگی هر نقطه از مجموعه A نقطه‌ای از $\{a_n\}$ را داشته باشد یا اگر $A=[a,b]$ آنگاه بین هر دو نقطه A ولو خیلی نزدیک، یک نقطه از $\{a_n\}$ وجود داشته باشد.

■ مثال ۳-۲۶

اعداد گویا در اعداد حقیقی یک دنباله چگال می‌سازند چون بین هر دو عدد حقیقی عددی گویا وجود دارد. (چرا؟) ■

یکی از دنباله‌های چگال خیلی مهم دنباله زیر است:

● قضیه۳-۱۸

$\{\{n\alpha\}\}_{n=1}^{\infty}$، ({ } یعنی جزء کسری عدد و α عددی گنگ است) در $[0,1]$ چگال است. یعنی بین هر دو عدد $a,b \in [0,1]$، $a < b$، $n \in \mathbb{N}$ وجود دارد که $a < \{n\alpha\} < b$.

اثبات. دایره‌ای به محیط ۱ در نظر گرفته و یک نقطه آن را مبدأ اختیار کرده و آن را تقسیم‌بندی کنید و سپس نقاط A_1، A_2، ... که فاصله آنها از مبدأ α، 2α، 3α، ... هستند در نظر بگیرید. هیچ دو نقطه‌ای بر هم منطبق نمی‌شوند زیرا در این صورت α گویا می‌شود (چرا؟). پس برای هر بازه I هرقدر کوچک دو نقطه A_p و A_{p+q} وجود دارد که فاصله آنها از هم از طول بازه I کمتر باشد زیرا اگر فاصله هر دو نقطه از طول بازه I بیشتر باشد تنها تعداد متناهی نقطه روی دایره می‌توان پیدا کرد. ولی از آنجا که فاصله نقاط A_{p+q} و A_{p+2q} از هم از طول بازهٔ I کمتر است و به همین ترتیب A_{p+2q}، A_{p+3q} و همچنین A_{p+3q}، A_{p+4q} و ... . این مطلب از آنجا نتیجه می‌شود که

$$(p+q)\alpha - p\alpha = (p+2q)\alpha - (p+q)\alpha = (p+3q)\alpha - (p+2q)\alpha = \cdots$$

پس $\{A_{p+qi}\}_{i=1}^{\infty}$ دست‌کم یک نقطه درون بازهٔ I دارد؛ زیرا در غیر این صورت فاصله دو نقطه متوالی این دنباله از طول بازهٔ I بیشتر می‌شود و این تناقض است و از اینجا حکم ثابت می‌شود.

●

تمرین

*۱. ثابت کنید برای هر a طبیعی، $a > 1$ و هر M طبیعی، $n \in \mathbb{N}$ وجود دارد که ارقام اولیه a^n، M باشد. مثلاً برای $M = 13711992$، $n \in \mathbb{N}$ وجود دارد که

$$2^n = 13711992\underbrace{\ldots\ldots\ldots\ldots}_{\text{رقمهای دیگر}}$$

۲. ثابت کنید برای هر عدد اول p و هر عدد حقیقی مثبت α در $\{[n\alpha]\}_{n=1}^{\infty}$ بینهایت عدد مضرب p وجود دارد.

۳. اگر برای هر عدد طبیعی n داشته باشیم $[n(\alpha+\beta)] = [n\alpha] + [n\beta]$، ثابت کنید α و β صحیح هستند.

---

*. مسائل دشوار

۴ . ثابت کنید اگر α گنگ باشد، دنباله $a_{m,n} = m + n\alpha$ در $\mathbf{R}$ چگال است.

۵ . تابع پیوسته $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ و تابع $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ مفروض است و A یک مجموعه چگال در $\mathbf{R}$ است که $\forall x \in A,\ f(x) = g(x)$. ثابت کنید $f = g$.

۶ . با استفاده از مسأله بالا ثابت کنید تنها تابع $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ که

$$\forall x, y \in \mathbf{R} \qquad f(x+y) = f(x) + f(y)$$
$$f(xy) = f(x)f(y)$$

تابع همانی است (توجه: شرط پیوستگی ذکر نشده است).

*۷ . ثابت کنید $\{\frac{\varphi(n)}{n}\}_{n=1}^{\infty}$ در $[0, 1]$ چگال است.

۸ . ثابت کنید $\mathbf{R}^k$ یک زیر دنباله چگال شمارا دارد.

۹ . ثابت کنید مجموعه A در $\mathbf{R}$ چگال است اگر و فقط اگر برای هر نقطه از $\mathbf{R}$ دنباله‌ای از عناصر A باشد که به آن میل نماید.

۱۰ . $f : A \to B$ پیوسته است و X یک مجموعهٔ چگال در A است. ثابت کنید $f(X)$ در B چگال است (تابع پوشاست).

۳-۷ سریها

▲ تعریف۳-۱۱

دنباله حقیقی $\{a_n\}$ را در نظر بگیرید. گوییم $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ همگراست هرگاه $\{S_n\}$ که با جملهٔ عمومی $S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ تعریف می‌شود همگرا باشد و حد S_n را مقدار سری در نظر می‌گیریم. ▲

با توجه به آنکه سری را به‌صورت دنباله تعریف کردیم تمام قضایای دنباله دربارهٔ آن صادق است. محک کوشی در اینجا به قضیه زیر تبدیل می‌شود:

● قضیه۳-۱۹

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ همگراست هرگاه برای هر $\varepsilon > 0$، $N > 0$ وجود داشته باشد که اگر $n \geq m > N$ آنگاه

$$|S_n - S_m| = |a_{m+1} + \cdots + a_n| < \varepsilon \quad \text{یا} \quad \left|\sum_{k=m}^{n} a_k\right| < \varepsilon$$

●

هرگاه $m > N$، $n = m + 1$ در نظر بگیریم آنگاه به قضیه زیر می‌رسیم:

● قضیه ۳-۲۰

اگر $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ همگرا باشد آنگاه $a_n \to 0$. ●

■ مثال ۳-۲۷

در مثال ۳-۷ دیدیم که $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ همگرا نیست در حالی که $a_n = \frac{1}{n} \to 0$. ■

■ مثال ۳-۲۸

ثابت کنید سری $\sum_{n=1}^{\infty} n \sin \frac{1}{n}$ همگرا نیست.

حل.

$$\lim_{n\to\infty} n \sin \frac{1}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sin \frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} = 1 \neq 0$$

■

■ مثال ۳-۲۹

ثابت کنید سری $\sum_{n=1}^{\infty} q^n$ همگراست اگر و فقط اگر $|q| < 1$.

حل. اگر $|q| > 1$ آنگاه $\lim_{n\to\infty} q^n = \infty$ و اگر $|q| < 1$ آنگاه $\sum_{n=1}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$ و اگر $|q| = 1$ آنگاه $\lim_{n\to\infty} |q|^n = 1$. ■

▲ تعریف ۳-۱۲

سری $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ به‌طور مطلق همگراست وقتی $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ همگرا باشد.

واضح است که اگر $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ همگرا باشد آنگاه $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ همگراست (چرا؟). ولی در مثال ۳-۳۳ نشان خواهیم داد که عکس گزارهٔ فوق درست نیست. حال به بیان چند آزمون برای تشخیص همگرایی یا واگرایی سریها می‌پردازیم. ▲

آزمون مقایسه

● قضیه ۳-۲۱

سری $\sum c_n$ همگرا و سری $\sum d_n$ واگرا هستند.

الف) اگر به ازای $n > N$ داشته باشیم $|a_n| \leq c_n$ آنگاه می‌توان نتیجه گرفت $\sum_{1}^{\infty} |a_n|$ همگراست.

ب) اگر به ازای $n > N$ داشته باشیم $a_n \geq d_n > 0$ آنگاه می‌توان نتیجه گرفت $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ واگراست.

اثبات.

الف) برای هر $\varepsilon > 0$، $N > 0$ وجود دارد که

$$n \geq m > N \Rightarrow |c_{m+1} + \cdots + c_n| < \varepsilon$$

پس برای $m, n > N$ داریم

$$|a_{m+1} + \cdots + a_n| \leq |a_{m+1}| + \cdots + |a_n| \leq |c_{m+1} + \cdots + c_n| < \varepsilon$$

پس $\sum a_n$ همگراست.

ب) اگر $\sum a_n$ همگرا باشد بنا بر قسمت (الف)، $\sum d_n$ همگرا می‌شود که تناقض است.

●

● **قضیه ۳-۲۲**

سری $\sum c_n$ همگرا و سری $\sum d_n$ واگرا و برای هر n، c_n و d_n مثبت هستند؛

الف) اگر به ازای $N > n$ داشته باشیم $|\frac{a_{n+1}}{a_n}| \leq \frac{c_{n+1}}{c_n}$ آنگاه می‌توان نتیجه گرفت $\sum a_n$ همگراست.

ب) اگر به ازای $n > N$ داشته باشیم $|\frac{a_{n+1}}{a_n}| \geq \frac{d_{n+1}}{d_n}$ آنگاه می‌توان نتیجه گرفت $\sum a_n$ واگراست.

اثبات. تمرین! ●

آزمون ریشه

● **قضیه ۳-۲۳**

$\{a_n\}$ دنباله‌ای حقیقی و با جملات مثبت است؛

الف) اگر $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} > 1$ آنگاه $\sum a_n$ واگراست.

ب) اگر $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} < 1$ آنگاه $\sum a_n$ همگراست.

ج) اگر $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = 1$ نمی‌توان نتیجه‌ای گرفت!

اثبات. اگر $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} > 1$ می‌توان نتیجه گرفت $n > N$، $\sqrt[n]{a_n} > 1$ یا $a_n > 1$ و این با $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ در تضاد است. فرض می‌کنیم $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \alpha$ و $\alpha < \beta < 1$ پس $N > 0$ وجود دارد که

$$n > N \Rightarrow \quad \sqrt[n]{a_n} < \beta \Rightarrow a_n < \beta^n$$

ولی $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \beta^n$ همگراست و همگرایی $\sum a_n$ از آزمون مقایسه نتیجه می‌شود.

دو سری $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ و $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ اولی واگرا و دومی همگراست (مثال ۳-۳۱) ولی در هر دو $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = 1$. ●

آزمون نسبت

● **قضیه۳-۲۴**

$\{a_n\}$ دنباله‌ای حقیقی با جملات مثبت است. آنگاه

الف) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$ آنگاه $\sum a_n$ واگراست.

ب) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$ آنگاه $\sum a_n$ همگراست.

ج) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$ نمی‌توان نتیجه‌ای گرفت!

اثبات. می‌توان ثابت کرد $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} \le \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$ یعنی آزمون ریشه از آزمون نسبت قویتر است. ●

توضیح. در قضایای فوق به‌جای $\lim$ می‌توان از $\overline{\lim}$ استفاده کرد، یعنی تمام زیردنباله‌هایی که در آنها مثلاً $\sqrt[n]{a_n}$ همگراست را در نظر می‌گیریم و کوچکترین کران بالای حد آنها را به‌صورت $\overline{\lim}$ نمایش می‌دهیم.

آزمون کوشی

قضیه

$\sum a_n$ که $a_1 \ge a_2 \ge \cdots \ge 0$ همگراست اگر و فقط اگر $\sum\limits_{k=0}^{\infty} 2^k a_{2^k}$ همگرا باشد.

آزمون انتگرال

قضیه

دنبالهٔ نزولی $a_n = f(n)$ از جملات مثبت را در نظر بگیرید. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ همگراست اگر و فقط اگر $\int_1^\infty f(x)dx$ همگرا باشد.

■ **مثال ۳-۳۰**

ثابت کنید $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{\pi^n \cdot n^n}$ همگراست.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{(n+1)!}{\pi^{n+1}(n+1)^{n+1}}}{\frac{n!}{\pi^n n^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(1-\frac{1}{n})^n}{\pi} = \frac{1}{\pi e} < 1 \quad \text{(آزمون نسبت)}$$

■

■ **مثال ۳-۳۱**

ثابت کنید $\sum \frac{1}{n^p}$ همگراست اگر و فقط اگر $p > 1$.

حل. چون دنباله در شرط آزمون کوشی صدق می‌کند پس همگراست اگر و فقط اگر

$$\sum_{k=1}^{\infty} 2^k \cdot \frac{1}{2^{kp}} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^{k(p-1)}} = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2^{(p-1)}}\right)^k$$

همگرا باشد پس $\frac{1}{2^{p-1}} < 1$ یا $p > 1$. ■

■ **مثال ۳-۳۲**

ثابت کنید $\sum \frac{1}{f_0(n)\cdots f_{k-1}(n)\cdot(f_k(n))^p}$ همگراست اگر و فقط اگر $p > 1$ که f_iها به‌صورت زیر تعریف می‌شوند

$$k > 0, \qquad f_k(n) = \log f_{k-1}(n), \;\; f_0(n) = n$$

حل. اثبات با استفاده از آزمون انتگرال به‌عنوان تمرین به خواننده واگذار می‌شود. ■

روش جمع‌زنی آبل

فرمول زیر برای محاسبهٔ مجموع بعضی سریها مورد استفاده زیاد دارد و منسوب به آبل است

$$\sum_{k=m}^{n} a_k b_k = \sum_{k=m}^{n-1} A_{k+1}(b_k - b_{k+1}) + A_{n+1} b_n - A_m b_m \qquad (۳\text{-}۳)$$

که در فرمول فوق $A_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$. اثبات رابطه فوق ساده و با قرار دادن $A_n - A_{n-1}$ به‌جای a_n و بسط دادن آن است.

فرمول ۳-۳ را می‌توان به‌صورت زیر نیز نوشت

$$\sum_{k=1}^{n} a_k(b_{k+1} - b_k) = a_n b_{n+1} - a_1 b_1 - \sum_{k=1}^{n-1} b_{k+1}(a_{k+1} - a_k) \qquad (۴\text{-}۳)$$

تذکر. سعی کنید تمرین ۲۹ از مسائل تکمیلی همین بخش را همین الان حل کنید!

حال به اثبات یک قضیه سودمند می‌پردازیم.

● **قضیه ۳-۲۵**

$\{a_n\}$ و $\{b_n\}$ در شرایط زیر صدق می‌کنند:

الف) مجموعهای جزئی سری $\sum a_n$ کراندار است.

ب) $b_1 \geq b_2 \geq \cdots$

ج) $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$

آنگاه $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ همگراست.

اثبات. ثابت می‌کنیم سری در شرط کوشی صدق می‌کند. کران A_nها را M می‌گیریم یعنی $\forall n \in \mathbb{N} : |A_n| < M$ چون $b_n \to 0$ پس $N > 0$ وجود دارد که $n > N$ آنگاه $b_n < \frac{\varepsilon}{2M}$ ($\varepsilon > 0$ داده شده است). اگر $n > m > N$ آنگاه

$$\left|\sum_{k=m}^{n} a_k b_k\right| = \left|\sum_{k=m}^{n-1} A_{k+1}(b_k - b_{k+1}) + A_{n+1}b_n - A_m b_m\right|$$
$$\leq \sum_{k=m}^{n-1} |A_{k+1}|(b_k - b_{k+1}) + |A_{n+1}|b_n + |A_m|b_m$$
$$\leq M\left(\sum_{k=m}^{n-1}(b_k - b_{k+1}) + b_n + b_m\right) = 2Mb_m < \varepsilon$$

نتیجه. (لایب نیتز) دنبالهٔ $\{a_n\}$ در شرایط زیر صدق می‌کند:

الف) $|a_1| \geq |a_2| \geq |a_3| \geq \cdots$

ب) $a_{2n} \geq 0$ و $a_{2n-1} \leq 0$

ج) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$

آنگاه $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ همگراست.

اثبات. کافی است در قضیه قبل به‌جای a_n، $(-1)^n$ و به‌جای b_n، $|a_n|$ را قرار دهیم.

●

■ **مثال ۳-۳۳**

سری $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \cdots$ همگراست (بنابر قضیه لایب‌نیتز). ولی به‌طور مطلق همگرا نیست. ■

▲ **تعریف ۳-۱۳**

اگر $\{a_{\sigma(n)}\}$ یک بازآرایی دنباله $\{a_n\}$ باشد (به مثال ۳-۱۰ نگاه کنید) آنگاه $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)}$ یک بازآرایی سری $\sum a_n$ است. ▲

اگر به مجموعهای جزئی نگاه کنیم متوجه می‌شویم آنقدر بدیهی نیست که سری بی‌تغییر بماند، و در واقع نیز چنین است ولی در مورد سریهای به‌طور مطلق همگرا قضیه زیر را داریم:

● **قضیه ۳-۲۶**

اگر $\sum a_n$ یک سری به‌طور مطلق همگرا باشد هر بازآرایی آن نیز همگرا به همان حد $\sum a_n$ خواهد بود.

اثبات. $\sum |a_n|$ همگراست پس در شرط کوشی صدق می‌کند و به ازای هر $\varepsilon > 0$، $N > 0$ وجود دارد که $n > m > N$ آنگاه

$$\sum_{k=m}^{n} |a_k| < \varepsilon$$

حال فرض می‌کنیم دنباله باز آرایش شده $\{a_{\sigma(n)}\}$ باشد. N_1 را آنقدر بزرگ می‌گیریم که

$$\{1,2,3,\dots,N\} \subseteq \{\sigma(1),\sigma(2),\dots,\sigma(N_1)\}$$

پس $n > m > N_1$ داریم $|S'_n - S'_m| < \varepsilon$، ($S'_k = \sum_{i=1}^{k} a_{\sigma(i)}$) چون تمام جملات a_1، a_2، ...، a_N می‌روند و بقیه از رابطه (۳-۵) به‌دست می‌آید پس هر دو به یک حد همگرا هستند. m را ثابت و n را به بینهایت بفرستید! ●

تذکر. به مسأله ۲۶ از مسائل تکمیلی همین بخش مراجعه کنید.

تمرینهای تکمیلی

۱. اگر $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^k$ همگرا ($k > 1, a_n \geq 0$)، ثابت کنید $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n}$ همگراست.

۲. اگر برای $\{a_n\}$ زیر دنباله‌های $\{a_{2n}\}$، $\{a_{2n+1}\}$ و $\{a_{pn}\}$ که p عدد اول فرد است همگرا باشند، ثابت کنید $\{a_n\}$ همگراست.

۳. ثابت کنید سریهای $\{a_n\}$ و $\{b_n\}$ با تعاریف زیر هر دو به یک حد همگرا هستند و ثابت کنید این حد عددی گویا نیست.

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n, \qquad b_n = 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!}$$

۴* . برای سری واگرای $\sum a_n$ از جملات مثبت با مجموع جزئی S_n، ($S_n = a_1 + \dots + a_n$)، ثابت کنید $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{S_n^p}$ همگراست اگر و فقط اگر $p > 1$.

۵* . برای سری همگرای $\sum a_n$ از جملات مثبت با باقیماندهٔ جزئی ($r_n = \sum_{k=n}^{\infty} a_k$) ثابت کنید $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{r_n^p}$ همگراست اگر و فقط اگر $p < 1$.

۶. $\{a_n\}$ به a همگراست. ثابت کنید دنباله A_n با تعریف زیر نیز به a همگراست:

$$A_n = \frac{a_1 + \dots + a_n}{n}$$

با ذکر مثال نشان دهید عکس این قضیه درست نیست.

۷. دنباله $\{x_n\}$ به‌صورت ($\alpha > 0$)، $x_{n+1} = \frac{p-1}{p}x_n + \frac{\alpha}{p x_n^{p-1}}$ تعریف می‌شود که در آن p عددی طبیعی است. ثابت کنید

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \sqrt[p]{\alpha}$$

۸. $0 < x_1 < 1$ و $x_{n+1} = x_n(1 - x_n)$. ثابت کنید $\lim_{n\to\infty} n x_n = 1$.

۹ . ثابت کنید $۳ = \sqrt{۱ + ۲\sqrt{۱ + ۳\sqrt{۱ + ۴\sqrt{۱ + \cdots}}}}$.

۱۰ . ثابت کنید اگر سری $\sum_{n=۱}^{\infty} \frac{۱}{p_n}$ با جملات مثبت همگرا باشد سری زیر نیز همگراست

$$\sum_{n=۱}^{\infty} \frac{n^۲}{(p_۱ + p_۲ + \cdots + p_n)^۲} \cdot p_n$$

۱۱ . دنباله $\{x_n\}$ مفروض است و $y_n = x_{n-۱} + ۲x_n$. ثابت کنید اگر دنبالهٔ $\{y_n\}$ همگرا باشد، دنباله $\{x_n\}$ نیز همگراست.

۱۲ . فرض کنید $\{a_n\}$ دنباله‌ای اکیداً صعودی از اعداد طبیعی است که $\sum \frac{۱}{a_n}$ همگراست. $f(x)$ را تعداد a_nهایی در نظر می‌گیریم که از x تجاوز نمی‌کنند. ثابت کنید:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} = ۰$$

۱۳ . فرض کنید $\{x_n\}$ دنباله‌ای باشد که $\{x_n - x_{n-۲}\}$ به صفر همگرا باشد. ثابت کنید

$$\lim_{n \to \infty} \frac{x_n - x_{n-۱}}{n} = ۰$$

۱۴ . دنباله $\{x_n\}$ را دارای «حد جالب» می‌گوییم هرگاه $\lim_{n \to \infty} \frac{x_۱ + \cdots + x_n}{n}$ وجود داشته باشد. تابع f را روی بازهٔ $[۰, ۱]$ قدرتمند گوییم هرگاه اگر $\{x_n\}(۰ \leq x_n \leq ۱)$، دارای حد جالب باشد، $\{f(x_n)\}$ نیز دارای حد جالب باشد. مطلوب است به‌دست آوردن تمام توابع قدرتمند روی بازه $[۰, ۱]$.

۱۵ . سری نامتناهی را در نظر بگیرید که nامین جمله آن $\pm \frac{۱}{n}$ است که علامت $\pm$ از یک چیدن دلخواه هشت‌تایی از آنها به‌دست می‌آید که به‌طور تناوبی تکرار می‌شود. مثلاً سری نظیر $++----++$ عبارت است از

$$۱ + \frac{۱}{۲} - \frac{۱}{۳} - \frac{۱}{۴} - \frac{۱}{۵} - \frac{۱}{۶} + \frac{۱}{۷} + \frac{۱}{۸} + \frac{۱}{۹} + \frac{۱}{۱۰} - \frac{۱}{۱۱} - \frac{۱}{۱۲} - \frac{۱}{۱۳} - \frac{۱}{۱۴} + \cdots$$

الف) ثابت کنید شرط کافی برای همگرایی سری آن است که چهار علامت مثبت و چهار علامت منفی باشد.

ب) آیا شرط فوق شرط لازم نیز می‌باشد؟

۱۶ . ثابت کنید $\prod_{n=۱}^{\infty} (۱ + a_n)$ همگراست اگر و فقط اگر $\sum_{n=۱}^{\infty} a_n$ همگرا باشد $(a_n > ۰)$.

۱۷ . ثابت کنید اگر a_n و b_n همواره مثبت باشند و $\lim_{n \to \infty} \frac{a_n}{b_n} = L \neq ۰$ آنگاه $\sum a_n$ و $\sum b_n$ یا هر دو همگرایند یا هر دو واگرا.

۱۸ . ثابت کنید $\sum_{n=1}^{\infty} \ln(n \sin \frac{1}{n})$ همگراست.

۱۹ . ثابت کنید دنباله $\{a_n\}$ با تعریف زیر همگراست:

$$a_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n$$

*۲۰ . ثابت کنید $\sum_{p \text{ اول}} \frac{1}{p}$ واگراست.

۲۱ . ثابت کنید $\prod_{p \text{ اول}} (1 - \frac{1}{p})$ به صفر همگراست.

*۲۲ . ثابت کنید دنباله مانند $\{x_n\}$ وجود دارد که در شرط زیر صدق می‌کند($\alpha > 1$ یک عدد ثابت)

$$|x_i - x_j| > \frac{1}{|i-j|^\alpha}$$

(راهنمایی: سری $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ همگراست. دنباله را استقرایی بسازید. لزومی ندارد فرمولی برای آن ارائه دهید.)

۲۳ . تابعی صعودی مثال بزنید که در تمام نقاط گویا ناپیوسته و در تمام نقاط گنگ پیوسته باشد. (راهنمایی: Q شماراست و همچنین می‌توان تابع را به‌صورت یک سری تعریف کرد.)

۲۴ . دنباله‌ای از اعداد صحیح به این صورت تعریف می‌شود:

$$a_0 = 0, \quad a_1 = 1, \quad a_n = 2a_{n-1} + a_{n-2}$$

ثابت کنید a_n بر 2^k بخش‌پذیر است اگر و فقط اگر n بر 2^k بخش‌پذیر باشد.

۲۵ . اگر a_0 عدد حقیقی و مثبتی باشد $\{a_n\}$ به‌صورت زیر تعریف می‌شود

$$a_{n+1} = \frac{a_n^2 - 1}{n+1}$$

نشان دهید عدد حقیقی مانند a وجود دارد که

الف) به ازای هر $a_0 \geq a$ داشته باشیم $a_n \to +\infty$.

ب) به ازای هر $a_0 < a$ داشته باشیم $a_n \to 0$.

**۲۶ . (قضیهٔ ریمان) اگر سری $\sum a_n$ همگرا باشد ولی به‌طور مطلق هَمگرا نباشد و $-\infty \leq \alpha \leq +\infty$ (حتی می‌تواند $+\infty$ یا $-\infty$ باشد) آنگاه یک بازآرایی از $\{a_n\}$ مانند $\{a_{\sigma(n)}\}$ وجود دارد که $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)} = \alpha$! (راهنمایی: دست به‌کار شوید. شما باید این بازآرایی را بسازید!).

**۲۷ . $S_{n,k}$ کوچکترین مقدار مثبت $\pm 1^k \pm 2^k \pm 3^k \pm \cdots \pm n^k$ است (علامتهای $\pm$ به‌طور مناسب انتخاب می‌شوند). ثابت کنید به ازای هر $k \in \mathbb{N}$، $\{S_{n,k}\}_{n=1}^{\infty}$ یک دنباله متناوب است.

**. مسائل دشوارتر

۲۸ . با ذکر مثالی نشان دهید قسمت اول قضیه لایب‌نیتز(یعنی شرط نزولی بودن $|a_n|$ها) لازم است.

۲۹ . مقدار سریهای زیر را به‌دست آورید:

الف) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{k}}{(k+1)(k+2)}$

ب) $\sum_{k=1}^{\infty}(2k+1)(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{k})$

ج) $\sum_{k=1}^{\infty} k^2 q^k$ که $|q|<1$

د) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin k}{k^2}$

۳۰ . دنباله‌های $\{n_k\}$ و $\{m_k\}$ را از اعداد طبیعی چنان بیابید که $\sqrt[3]{n_k}-\sqrt[3]{m_k}$ به $\sqrt{2}$ میل کند.

۳۱ . آیا دنباله با خواص زیر موجود است؟

الف) $a_n \in \mathbf{N}$

ب) $\forall m \in \mathbf{N}$، $\{a_n(\mathrm{mod}\ m)\}$ تناوبی باشد.

ج) هر عدد طبیعی بینهایت بار در دنباله ظاهر شود.

۳۲ . u_1 و u_2 دلخواه و $u_{n+2}=\frac{2}{u_n+u_{n+1}}$. ثابت کنید $\{u_n\}$ همگراست.

۳۳ . اتحادهای زیر را ثابت کنید

$$\sum_{k_1+k_2+\cdots+k_n=m} \frac{1}{k_1!(k_1!+k_2!)\ldots(k_1!+k_2!+\cdots+k_n!)}=\frac{n^m}{n!m!}$$

$$\sum_{k_1+\cdots+k_n=m} \frac{1}{2^{k_1}(2^{k_1}+2^{k_2})\ldots(2^{k_1}+\cdots+2^{k_n})}=\frac{1}{n!2^n}\binom{m+n-1}{m}$$

۳۴ . فرض کنید $\sum_{i=1}^{\infty} a_i=1$ و $\forall n \in \mathbf{N}, 0<a_n<\sum_{i=n+1}^{\infty} a_i$. ثابت کنید برای هر $x \in]0,1[$ یک زیردنباله از $\{a_n\}$ موجود است که $\sum_{i=1}^{\infty} a_{n_i}=x$.

۳۵ . تمام اعداد n را بیابید که تنها از ۱ها و یک عدد ۷ تشکیل شده باشند و اول باشند.

۳۶ . برای kی داده شده فرض کنید $f_1(k)$ مجموع مربعات ارقام k در پایه ۱۰ باشد و

$$f_{n+1}(k)=f_1(f_n(k))$$

• ثابت کنید $f_{1991}(2^{1990})=256$.

۳۷. فرض کنید $f(۱) + f(۰) = ۰$ و

$$f(n+۲) = ۴^{n+۲} f(n+۱) - ۱۶^{n+۱} f(n) + n \times ۲^{n^۲}$$

ثابت کنید $f(۱۹۹۱)$، $f(۱۹۹۰)$ و $f(۱۹۸۹)$ بر ۱۳ بخش‌پذیر هستند.

۳۸. اگر $x_۰$ و $x_۱$ داده شده باشند و $x_{n+۲} = \frac{x_n + x_{n+۱}}{۲}$ مقدار $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ را حساب کنید.

۳۹. اگر $\sum\limits_{i=۱}^{\infty} a_i$ همگرا باشد ثابت کنید دنباله $b_n = \sqrt[n]{\Pi_{i=۱}^{n} a_i}$ نیز همگراست ($a_n \geq ۰$).

۴۰. ثابت کنید دنباله $\{[(۱+\sqrt{۲})^n]\}$ در هنگ ۲ تناوبی است.

۴۱. اعداد را به‌صورت زیر غربال می‌کنیم: $a_۱ = ۱$ قرار می‌دهیم و $a_۱ + ۱ = ۲$ را خط می‌زنیم. در هر مرحله a_n را برابر اولین عدد خط نخورده می‌گیریم و $a_n + n$ را خط می‌زنیم؛ دنباله زیر به‌وجود می‌آید

$$۱, ۳, ۴, ۶, ۸, ۹, ۱۱, ۱۲, ۱۴, ۱۶, ۱۷, \ldots$$

فرمولی صریح برای a_n پیدا کنید.

۴۲. $a_۰ = ۰$، $a_۱ = ۱$ و $a_n = a_{n-۱} + \frac{۱}{۲} a_{n-۲}$. ثابت کنید برای $n > ۸$، $a_n \notin \mathbb{N}$.

۴۳. $\{n_i\}$ را از اعداد طبیعی با خاصیت زیر داریم

$$n_{k+۱} > n_{n_k}$$

ثابت کنید $n_i = i$.

۴۴. اگر $x_۰ = ۱$ و $x_{n+۱} = x_n + \frac{۱}{n}$ ثابت کنید

$$\sqrt{۲n} < x_n < \sqrt{۲n + \log\sqrt{n}}$$

۴۵. فرض کنید $S = \{۲^a ۳^b | a, b \in \mathbb{N}\}$. حال a_n را nامین عضو S که به ترتیب صعودی مرتب شده‌اند می‌گیریم. ثابت کنید

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+۱}}{a_n} = ۱$$

۴۶. n نقطه در مربع واحد موجودند. برای این n نقطه کوتاه‌ترین مسیر که از همه این نقاط بگذرد وجود دارد. ثابت کنید حداکثر طول این مسیر برابر $۲\sqrt{n} + ۴$ است.

۴۷. f_n، nامین جمله دنباله فیبوناچی و $P(x)$ یک چند جمله‌ای از درجه ۹۹۲ است به‌طوری که

$$۹۹۲ \leq n \leq ۱۹۸۲, \qquad P(n) = f_n$$

ثابت کنید $P(۱۹۸۳) = f_{۱۹۸۳} - ۱$.

۴۸ . $\{a_n\}$، $n \geq 1$ با تعریف $a_{n+1} = \frac{1}{2-a_n}$ را در نظر بگیرید (در جملات این دنباله ۲ وجود ندارد). $\lim_{n\to\infty} a_n$ چقدر است؟

۴۹ . اگر $a_{2n+1}^{1992} = \cdots = a_3^{a_3} = a_2^{a_2} = 1992^{a_1}$ (a_iها طبیعی باشند) مقدار a_{2n+1} چقدر می‌تواند باشد؟

۵۰ . ثابت کنید

الف) $1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} < \frac{7}{4}$

ب) $\frac{1}{2} < \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{2n} < \frac{3}{4}$

ج) $1 < \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{3n+1} < 2$

پیوست ۳-۱ چند جمله‌ایهای تیلور-بسط تیلور

در آنالیز، قضیه بسیار زیبایی درباره تقریب توابع پیوسته با چندجمله‌ایها وجود دارد که به استون-وایرشتراس مشهور است. این قضیه می‌گوید:

برای هر تابع پیوسته f دنباله‌ای از چندجمله‌ایهای P_n وجود دارد که

$$\lim_{n\to\infty} P_n(x) = f(x)$$

البته مفهوم حد فوق، مفهوم دقیقی است و فعلاً آن را به‌صورت شهودی که P_nها در همه‌جا خیلی‌خیلی به f نزدیک می‌شوند بپذیرید.

تیلور دربارهٔ بعضی توابع پیوسته بینهایت مشتق‌پذیر روشی برای به‌دست آوردن P_nها داده است که در زیر به اختصار می‌آوریم:

اگر تابع f تابعی پیوسته و بینهایت مشتق‌پذیر باشد، چندجمله‌ای تیلور مرتبه n آن حول صفر به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$P_n(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

به راحتی می‌توان رابطهٔ زیر را بررسی کرد:

$$p_n^{(k)}(0) = f^{(k)}(0), \qquad k = 0, 1, 2, \ldots, n$$

● **قضیه۳-۲۷**

$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)-P_n(x)}{x^{n+1}} = 0$ یعنی $f(x)$ به وسیله $P_n(x)$ خیلی خوب تقریب زده می‌شود.

(شاید اکثر اوقات خیلی خوب! به تمرین ۱ این فصل مراجعه کنید.) ●

● **قضیه۳-۲۸**

برای هر $x \in \mathbf{R}$ نقطه مانند α بین صفر و x وجود دارد که

$$f(x) = P_n(x) + \frac{f^{(n+1)}(\alpha)}{(n+1)!}x^{n+1}$$

یعنی اگر ثابت کنیم به ازای هر α و x، $\lim_{n\to\infty} \frac{f^{(n+1)}(\alpha)\cdot x^{n+1}}{(n+1)!} = 0$ ثابت کرده‌ایم:

$$\lim_{n\to\infty} P_n(x) = f(x)$$

در این صورت می‌نویسیم $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k$. به عبارت دیگر اگر ثابت شود $M > 0$ وجود دارد که $|f^{(k)}(x)| < M$ به ازای هر $k \in \mathbf{Z}^+$ و هر $x \in \mathbf{R}$ با توجه به اینکه $\lim_{n\to\infty} \frac{x^n}{n!} = 0$ نتیجه می‌شود $f(x)$ با حد چندجمله‌ای تیلور خود حول صفر برابر است. ●

حال چند بسط تیلور مهم را که به‌دست آوردن آنها چندان مشکل نیست می‌آوریم:

الف) $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$؛ $-\infty < x < +\infty$

ب) $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots$؛ $-1 < x \leq +1$

ج) $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots$؛ $-\infty < x < +\infty$

د) $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots$؛ $-\infty < x < +\infty$

ه) $\operatorname{Arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots$؛ $|x| \leq 1$

و) $(1+x)^r = 1 + rx + \frac{r(r-1)}{2!}x^2 + \frac{r(r-1)(r-2)}{3!}x^3 + \cdots$ که اگر $|x| < 1$ آنگاه رابطه فوق به ازای هر $r \in \mathbf{R}$ درست است!

تمرین

۱. ثابت کنید $f^{(n)}(0) = 0$ به ازای هر n که در آن

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

پس چند جمله تیلور حول صفر از هر مرتبه‌ای برابر صفر است ولی خود تابع صفر نیست.

۲. ثابت کنید

الف) $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots = \ln 2$

ب) $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots = \frac{\pi}{4}$

۳. قضیه ۳-۲۷ و ۳-۲۸ را ثابت کنید.

پیوست ۳ـ۲. حل مسأله با استفاده از دنباله‌ها

۱. قورباغه‌ای از نردبانی که n پله دارد بالا می‌آید. او می‌تواند در هر پرش یک پله یا دو پله را طی کند. چند روش برای بالا آمدن قورباغه وجود دارد؟

۲. شخصی n ریال پول دارد. او به چند طریق می‌تواند پول خود را با خریدن تمبرهای ۱ و ۲ و ۵ ریالی خرج کند؟

۳. اگر $f(n)$ تعداد روشهای پوشاندن یک صفحه شطرنجی $n \times ۳$ باشد (به وسیله مستطیلهای ۲×۱) نشان دهید:

$$f(n)=\begin{cases} ۰ & n \text{ فرد} \\ \frac{۱}{۲\sqrt{۳}}[(\sqrt{۳}+۱)(۲+\sqrt{۳})^{\frac{n}{۲}}+(\sqrt{۳}-۱)(۲-\sqrt{۳})^{\frac{n}{۲}}] & n \text{ زوج} \end{cases}$$

۴. چند کلمه به طول n به وسیله حروف a، b، c و d می‌توان نوشت به‌طوری که a و b مجاور نباشند؟

۵. قرار دهید $a_n = \sum_{k=۰}^{[n/۲]} \binom{n-k}{k} z^k$. نشان دهید اگر $z \neq -\frac{۱}{۴}$ آنگاه

$$a_n = \frac{۱}{\sqrt{۱+۴z}}\left[\left(\frac{۱+\sqrt{۱+۴z}}{۲}\right)^{n+۱} - \left(\frac{۱-\sqrt{۱+۴z}}{۲}\right)^{n+۱}\right]$$

و اگر $z = -\frac{۱}{۴}$ آنگاه $a_n = \frac{(n+۱)}{۲^n}$.

۶. اگر $f(n,k)$ تعداد زیرمجموعه‌های k عضوی $\{۱,۲,\ldots,n\}$ باشد که هیچ دو عدد متوالی را شامل نباشد و همچنین $n, ۱$ را با هم شامل نباشد:

الف) ثابت کنید $f(n,k) = \frac{n}{n-k}\binom{n-k}{k}$ $\quad (۰ \leq k < n)$

ب) اگر $L_n = \sum_{k=۰}^{n} f(n,k)$ نشان دهید

$$L_۱ = ۱, \quad L_۲ = ۳, \quad L_n = L_{n-۱} + L_{n-۲}, \quad n > ۲$$

۷. فرض کنید S_n تعداد مسیرهایی در صفحه باشد که به وسیله سه بردار $(۱,۰)$ و $(۰,۱)$ و $(۱,۱)$ از نقطه $(۰,۰)$ به نقطه (n,n) می‌روند و هیچ یک از نقاط مسیر بالای خط $y = x$ نیست. مثلاً $S_۰ = ۱$، $S_۱ = ۱$، $S_۲ = ۶$، $S_۳ = ۶$ و $S_۴ = ۹۰$. ثابت کنید S_n برای nهای زوج بر ۳ بخش‌پذیر است.

۸. فرض کنید a_n تعداد اعداد طبیعی باشد که:

الف) مجموع ارقام آنها n است؛

ب) ارقام آنها تنها از ۱ و ۳ و ۴ تشکیل شده است؛

ثابت کنید $a_{۲n}$ مربع کامل است.

۹. A و E را دو رأس روبه‌روی یک ۸ ضلعی منتظم می‌گیریم. قورباغه‌ای از رأس A آغاز به جهیدن می‌کند و هر بار به رأس مجاور می‌پرد؛ ولی وقتی به رأس E رسید، همانجا توقف می‌کند. a_n را تعداد مسیرهایی می‌گیریم که قورباغه از طریق آنها با n جهش به E می‌رسد. ثابت کنید

$$a_{۲n-۱} = ۰, \qquad a_{۲n} = \frac{۱}{\sqrt{۲}}(x^{n-۱} - y^{n-۱})$$

که در آن $x = 2 + \sqrt{2}$ و $y = 2 - \sqrt{2}$.

۱۰ . $\{a_n\}$ به‌صورت زیر تعریف شده است

$$a_1 = 1, \qquad a_{n+1} = a_n + \frac{1}{a_n^2}$$

مطلوب است محاسبه

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{\sqrt[3]{n}}$$

۱۱ . برای هر $n \geq 0$ تعداد دنباله‌های nتایی از اعداد ۲ ,۱ ,۰ را بیابید که در آنها هیچگاه دو صفر متوالی موجود نباشد.

۱۲ . مسأله پیش را برای اعداد k , . . . ,۲ ,۱ ,۰ حل کنید که دو صفر متوالی نداشته باشد.

۱۳ . برای هر n می‌توان n را به‌صورت مجموع اعداد بزرگتر یا مساوی ۲ نوشت $(n \geq 2)$. تعداد روشهای این نوع جمع‌زنی را به‌دست آورید.

۱۴ . دترمینان ماتریسی را که درآیه‌های آن به‌صورت زیر تعریف می‌شوند حساب کنید:

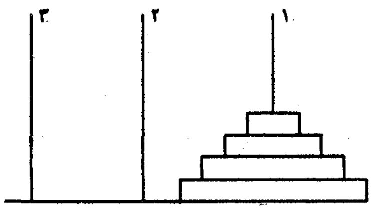
$$a_{ij} = \begin{cases} 2 & i = j \\ 1 & |i-j| = 1 \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

۱۵ . فرمولی صریح برای a_n به‌دست آورید

$$a_{n+2}^2 - 5a_{n+1} + 4a_n = 0, \quad a_0 = 4, \quad a_1 = 13$$

۱۶ . (برجهای هانوی) دریکی از ۳ برج موجود n مهره نامساوی از بزرگ به کوچک قرار داده‌ایم. می‌خواهیم آنها را به برج مجاور حرکت دهیم به‌طوری که در آخر به همین ترتیب باشد و

الف) در هر حرکت یک مهره را از روی یک ستون برداریم و روی یک ستون دیگر بگذاریم.



شکل ۳-۱

ب) در هیچ لحظه‌ای مهره بزرگتر روی مهره کوچکتر زیر مهرهٔ بزرگتر قرار نگیرد.
حداقل چند حرکت لازم است؟

۱۷ . اگر n خط در صفحه رسم شده باشد به‌طوری که هیچ سه‌تایی همرس و هیچ دوتایی موازی نباشند؛

الف) تعداد کل قطعات به‌وجود آمده را محاسبه کنید.

ب) تعداد قطعات متناهی را محاسبه کنید.

۱۸ . عدد مثلثی به‌صورت $t_n = \frac{n(n+1)}{2}$ تعریف می‌شود. فرمول صریح $S_n = \sum_{i=1}^{n} t_i$ را حساب کنید (مسأله بدیهی است!).

۱۹ . اگر دو خط موازی و n خط متمایز ناموازی که هیچ سه‌تایی از یک نقطه نمی‌گذرند موجود باشند صفحه به چند قسمت تقسیم می‌شود؟

۲۰ . اگر یک سکه را $2n$ بار بیاندازیم احتمال اینکه n بار شیر و n بار خط بیاید چقدر است؟ (a_n تعداد حالات مطلوب است.)

اگر b_n تعداد حالتهایی باشد که تعداد شیرها و خطها بعد از $2n$ پرتاب مساوی شوند ثابت کنید

$$a_n = \sum_{i=0}^{n} b_i a_{n-i}, \qquad b_0 = 0$$

و b_n را حساب کنید.

۴

یادآوریهایی از نظریهٔ اعداد مقدماتی

بخش‌پذیری

گوییم عدد صحیح a بر عدد صحیح b بخش‌پذیر است یا b، a را عاد می‌کند و می‌نویسیم $b|a$ هرگاه عدد صحیحی مانند q وجود داشته باشد که $a = qb$.

خواص بخش‌پذیری:

۱. $a|b,\ a|c \Rightarrow \forall x, y \in \mathbf{Z}, \quad a|bx + cy$

۲. $\forall k \in \mathbf{Z} \qquad a|b \Longleftrightarrow a|ka + b$

۳. $a|b,\ a, b > 0 \Longrightarrow b \geq a$

۴. $a|1 \Longrightarrow a = \pm 1$

۵. $a|b,\ b|a \Longrightarrow |a| = |b|$

بزرگترین مقسوم‌علیه دو عدد صحیح a و b را d گوییم و می‌نویسیم $(a, b) = d$، هرگاه $d|a$ و $d|b$، $d > 0$ و برای هر x که $x|a$ و $x|b$ داشته باشیم $x|d$.

دو عدد a و b را نسبت به هم اول یا متباین گویند هرگاه $(a, b) = 1$.

خواص ب.م.م:

۱. $\forall a, b \in \mathbf{Z}, \forall k \in \mathbf{Z} \qquad (ka, kb) = |k|(a, b)$

۲. $\forall a, b \in \mathbf{Z}, \forall k \in \mathbf{Z} \quad (a, b) = (a, ka + b)$ بخصوص

$$(a, b) = (a, a + b) = (a, a - b)$$

۳. $(a, b) = (a, c) = 1 \Longleftrightarrow (a, bc) = 1$

۴. لم اقلیدس $a|bc,\ (a, b) = 1 \Rightarrow a|c$ (مهم)

۵. نتیجه: (p عدد اول است) $p|bc \Longrightarrow p|b \quad \vee \quad p|c$

۶. $(a, b) = 1,\ x^n = ab \Rightarrow \exists a', b', a = a'^n, b = b'^n \qquad (n, x, a, b, a', b' \in \mathbf{N})$

۷. $d = ra + sb$ ،$(a,b) = d \Rightarrow \exists r,s \in \mathbb{Z}$ (بسیار مهم)

۸. $ra + sb = 1$ ،$(a,b) = 1 \Longleftrightarrow \exists r,s \in \mathbb{Z}$ (بسیار مهم)

۹. $k,k' \in \mathbb{Z}$ $(a,b) \leq (k'a, kb)$

۱۰. $(a,b) \leq \min\{a,b\}$ ،$\forall a,b \in \mathbb{Z} \geq 0$

۱۱. $a|b \Longleftrightarrow (a,b) = |a|$

۱۲. $a|c,\ b|c,\ (a,b) = 1 \Rightarrow ab|c$

۱۳. الگوریتم اقلیدسی

$$\left.\begin{array}{lll} a > b > 0, & a=bq_0 + r_1 & 0 \leq r_1 < b \\ \exists q_0, q_1, \cdots, q_n & b=r_1q_1 + r_2 & 0 \leq r_2 < r_1 \\ \exists r_1, r_2, \cdots, r_n : & r_1=r_2q_2 + r_3 & \\ & \vdots & \\ & r_{n-2}=r_{n-1}q_{n-1} + r_n & 0 \leq r_n < r_{n-1} \\ & r_{n-1}=r_nq_n & \end{array}\right\} (a,b) = r_n$$

● قضیه۴-۱ (مهم)

هر عدد بزرگتر از واحد را به‌صورت منحصر به فردی می‌توان به اعداد اول تجزیه کرد.

هر α_i صحیح و نامنفی و p_i عدد اول است. $n = p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_k^{\alpha_k}$

دنباله اعداد فیبوناچی به این صورت تعریف می‌شوند:

$$f_1 = f_2 = 1, \qquad \forall n > 2 \quad f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$$

۱۴. قضیه: $(f_m, f_n) = f_{(m,n)}$ $\forall m,n \in \mathbb{N}$

۱۵. $(a > 1)$ $(a^m - 1, a^n - 1) = a^{(m,n)} - 1$

۱۶. $m \neq n \Rightarrow (2^{2^m} + 1, 2^{2^n} + 1) = 1$

۱۷. $p|a^2 + b^2 \Rightarrow p|a,\ p|b$ ،$p = 4k+3$ اول

۱۸. (قضیه فرما) $p = x^2 + y^2$ $p = 4k + 1 \Rightarrow \exists x,y \in \mathbb{N}$ اول

۱۹. $p = x^2 + y^2$ $p = 4k + 3 \Rightarrow \nexists x,y \in \mathbb{N}$ اول

۲۰. p اول نیست $\Leftarrow$ $a,b,c,d \in \mathbb{N},\ \ \{a,b\} \neq \{c,d\},\ \ p = a^2 + b^2 = c^2 + d^2$

۲۱. (قضیه فرما) $q|2^p + 1 \Rightarrow \exists k \in \mathbb{N} : q = 2kp + 1$: $q \neq 3$ و p,q اعداد اول

اگر p و q دو عدد اول بوده $q > 3$ و $q|2^p + 1$، آنگاه $\frac{q-1}{2}$ بر p بخشپذیر است. ●

● قضیه۴-۲ مهم(قضیه دیریکله)

در هر تصاعد حسابی به شکل $ak + b$ $(k \in \mathbb{N})$ که $(a,b) = 1$ باشد بینهایت عدد اول وجود دارد. ● ●

- **تضیه۴-۳ مهم(قضیه چبیشف)**

برای هر عدد طبیعی $n > ۱$ عدد اولی بین n و $۲n$ قرار دارد. تعداد اعداد اول کوچکتر از n را با $\pi(n)$ نشان می‌دهند.

●

- **تضیه۴-۴ مهم (قضیه گوس)**

برای nهای بسیار بزرگ $\pi(n) \simeq n/\ln(n)$. به عبارت دیگر

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\pi(n)\ln(n)}{n} = ۱$$

●

همنهشتی

می‌نویسیم $a \overset{m}{\equiv} b$ یا $a \equiv b (\bmod\ m)$ و می‌خوانیم a همنهشت b است به هنگ m هرگاه $m|a-b$.

روابط همنهشتی:

۲۲. $a \overset{m}{\equiv} b \Rightarrow ac \overset{m}{\equiv} bc$

۲۳. $a \overset{m}{\equiv} b \Rightarrow \forall n \in \mathbf{N} \quad a^n \overset{m}{\equiv} b^n$

۲۴. $a \overset{m}{\equiv} b, c \overset{m}{\equiv} d \Rightarrow a+c \overset{m}{\equiv} b+d,\ ac \overset{m}{\equiv} bd$

۲۵. $P(a) \overset{m}{\equiv} P(b)$·۲۵ $a \overset{m}{\equiv} b \Rightarrow$, چندجمله‌ای با ضرایب صحیح $= P(x)$

$$ac \overset{m}{\equiv} bc,\ (m,c) = d \Rightarrow a \overset{m/d}{\equiv} b$$

۲۶. $ac \overset{m}{\equiv} bc,\ (m,c) = ۱ \Rightarrow a \overset{m}{\equiv} b$ (حالت‌خاص)

۲۷. $k > ۲$ $a^{۲^{k-۲}} \equiv ۱ (\bmod\ ۲^k)$, $k \in \mathbf{N}$, (aفرد)

۲۸. $a \equiv b (\bmod\ ۴) \Rightarrow x^a \equiv x^b (\bmod\ ۱۰)$

دستگاه کامل مانده‌ها

مجموعه باقیمانده اعداد بر عدد m دستگاه کامل‌مانده‌هاست و به Z_m نمایش داده می‌شود و $Z_m = \{۰, ۱, ۲, \cdots, m-۱\}$.

۲۹. اگر باقیماندهٔ x بر m را با نماد $r_m(x)$ نشان دهیم، خواهیم داشت

$$\forall a,b \in \mathbf{Z} \quad (a,m) = ۱ \Rightarrow$$
$$Z_m = \{r_m(۰ \times a + b), r_m(۱ \times a + b), \cdots, r_m((m-۱)a + b)\}$$

مجموعه مخفف‌مانده‌ها

مجموعه اعداد صحیح مثبت کوچکتر از m را که نسبت به m اول باشند، دستگاه مخفف‌مانده‌ها نامند.

تابع φ اویلر

تعداد اعضای مجموعهٔ مخفف‌مانده‌های m را به $\varphi(m)$ نشان می‌دهند و خوانده می‌شود «فی m». در حالت خاص $\varphi(p) = p - 1$، (p اول است).

۳۰. $1(m) \equiv a^{\varphi(m)} \Leftarrow 1 = (a,m)$ (بسیار مهم)

۳۱. $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k} \Rightarrow \varphi(n) = n(1 - \frac{1}{p_1})(1 - \frac{1}{p_2}) \cdots (1 - \frac{1}{p_k})$

۳۲. (قضیه فرما) $(a,p) = 1 \Rightarrow a^{p-1} \equiv 1 (\text{mod } p)$ (بسیار مهم)

۳۳. $m \neq 1, 2, 4,$ (اول و فرد)$p^\alpha, 2p^\alpha, (a,m) = 1 \Rightarrow a^{\varphi(m)/2} \equiv 1 (\text{mod } m)$

۳۴. معادله $(a,q) = 1, x^n \equiv a (\text{mod } q)$ دارای جواب است اگر و فقط اگر

۳۵. $$a^{\frac{\varphi(q)}{(\varphi(q),n)}} \equiv 1 (\text{mod } q)$$

● **قضیه۴-۵**

معادلهٔ $x^2 \overset{p}{\equiv} -1$ برای اعداد اول p به‌صورت $4k + 1$ جواب دارد و برای اعداد اول p به‌صورت $4k + 3$ جواب ندارد. ●

۳۶. **معیار اویلر**

معادله $x^2 \equiv a (\text{mod } p)$ که p اول است دارای جواب است اگر و فقط اگر

$$a^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1 (\text{mod } p)$$

ریشه‌های اولیه

کوچکترین عدد مانند f $(f > 0)$ که $a^f \equiv 1 (\text{mod } m)$ مرتبه a به هنگ m گویند [با شرط $1 = (a,m)$] و با $\text{ord}_m a$ نشان می‌دهند.

۳۷. $k \equiv n (\text{mod } f) \Leftrightarrow a^k \equiv a^n (\text{mod } m)$[با شرط $1 = (a,m)$]، $(f = \text{ord}_m a)$

▲ **تعریف۴-۱**

a را ریشه اولیه به هنگ m گویند هرگاه $\text{ord}_m a = \varphi(m)$، [با شرط $1 = (a,m)$]

▲

۳۸. $a^n \equiv 1 (\text{mod } m) \Rightarrow \text{ord}_m a | n$

۳۹. دستگاه مخفف‌مانده‌هاست $\{a, a^2, \cdots, a^{\varphi(m)}\} \Leftrightarrow a$ ریشه اولیه است و $1 = (a,m)$

۴۰. $\alpha \geq 1$ $\quad (\text{ord}_p g = p - 1, g^{p-1} \not\equiv 1 (\text{mod } p^2)) \Leftrightarrow \text{ord}_{p^\alpha} g = \varphi(p^\alpha)$

۴۱. (مهم) اعداد به‌صورت ۱، ۲، ۴، p^α، $2p^\alpha$ (p اول و فرد $\alpha \geq 1$) ریشه اولیه دارند و بقیه با توجه به رابطه (۳۳) ریشه اولیه ندارند.

۴۲. اگر g ریشه اولیه به هنگ p^α باشد و به هنگ $2p^\alpha$ نباشد آنگاه $g + p^\alpha$ ریشه اولیه به هنگ $2p^\alpha$ است.

(به مسائل مربوطه رجوع شود تا مطلب فهمیده شود.)

● **تضیه۴-۶ (باقیماندهٔ چینی)**
فرض کنید که $m_1, \cdots, m_r$ أعداد طبیعی دو به دو نسبت به هم اول باشند. در این صورت یک عدد و فقط یک عدد x متعلق به دستگاه کامل‌مانده‌ها به هنگ $m_1 m_2 \cdots m_r$ وجود دارد که جواب دستگاه معادلات همنهشتی زیر باشد

$$x \equiv a_1 (\mathrm{mod}\ m_1), \quad x \equiv a_2 (\mathrm{mod}\ m_2), \cdots, x \equiv a_r (\mathrm{mod}\ m_r)$$

عکس حسابی
(مهم)

$$(x, y) = 1 \quad \exists z \in \mathbf{N} \quad xz \equiv 1 (\mathrm{mod}\ y)$$

●

۴۳. ● (تضیه لاگرانژ)
هر عدد طبیعی را می‌توان به‌صورت مجموع مربعات چهار عدد صحیح نشان داد

● $$\forall n \in \mathbf{N} \quad \exists x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbf{Z} \quad n = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2$$

۴۴. هر عدد طبیعی غیر از اعداد به‌صورت $4^h(8k+7)$ را می‌توان به‌صورت مجموع مربعات سه عدد صحیح نشان داد: $(h, k \in \mathbf{Z}^+)$.

۴۵. هر عدد اول به‌صورت $4k+1$ را می‌توان به‌صورت مجموع مربعات دو عدد صحیح نوشت.

۴۶. توان عدد اول p در بسط $n!$ از فرمول زیر محاسبه می‌شود و با $E_n(p)$ نمایش داده می‌شود

$$E_n(p) = \left[\frac{n}{p}\right] + \left[\frac{n}{p^2}\right] + \left[\frac{n}{p^3}\right] + \cdots$$

منظور از $[x]$ بزرگترین عدد صحیح نابیشتر از x است.

۴۷. در تجزیه $n!$ به اعداد اول دست‌کم یک عدد اول با توان واحد وجود دارد.

۴۸. اگر $n > 5$، بین n و $2n$ دو عدد اول متمایز وجود دارد.

۴۹.

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N > 0, \quad \forall n > N \quad \exists p_1, p_2, \cdots, p_k : \quad n < p_i < (1+\varepsilon)n$$

و p_iها اولند.

۵۰. $G_2(n)$ مجموع ارقام n در مبنای دو است. فرمول زیر منسوب به لژاندر است

$$G_2(n) + E_n(2) = n$$

● **تضیه۴-۷ (لوکا)**

۵۱. اگر بسط اعداد a و b در مبنای p به‌صورت

$$a = (a_0 a_1 \cdots a_n)_p, \quad b = (b_0 b_1 \cdots b_n)_p$$

باشد (بعضی از اعداد ابتدایی می‌تواند صفر باشد) آنگاه

$$\binom{a}{b} \equiv \binom{a_0}{b_0}\binom{a_1}{b_1}\cdots\binom{a_n}{b_n} \pmod p$$

که بنابر تعریف

$$\binom{n}{0} = 1, \qquad \binom{0}{0} = 1, \qquad a < b \Rightarrow \binom{a}{b} = 0$$

(منظور از $\binom{a}{b}$ ضریب بسط دوجمله‌ای یا همان $\frac{a!}{b!(a-b)!}$ است). ●

۵۲. $\sum_p \frac{1}{p}$ به‌طوری که مجموع روی اعداد اول حساب می‌شود واگراست یعنی از هر $M > 0$ می‌تواند بزرگتر شود.

۵۳. اگر منظور از p_i، iامین عدد اول باشد قضیه زیرکه منسوب به بونزه است به‌صورت زیر است

$$n > 4 \Rightarrow p_{n+1}^2 < p_1 p_2 \cdots p_n$$

۵۴. قضیهٔ آخر فرما

معادلهٔ $x^n + y^n = z^n$ برای $n > 2$ جواب طبیعی ندارد.

چند حدس اثبات نشده

۱. هر عدد زوج مخالف ۲ را می‌توان به‌صورت مجموع دو عدد اول نوشت.

۲. اعداد اول به‌صورت $2^{2^n} + 1$ نامتناهی است.

۳. اعداد اول به‌صورت $2^n - 1$ نامتناهی است.

۴. تعداد اعداد اول دوقلو (اعداد اولی که اختلاف آنها ۲ است) نامتناهی است.

تمرین

۱. ثابت کنید اگر p عددی اول و $0 < k < p$ عددی طبیعی باشد آنگاه $p|\binom{p}{k}$.

۲. با استقرا روی n ثابت کنید $p|n^p - n$ (از بسط دو جمله‌ای نیوتن و مسأله پیش استفاده کنید).

۳. ثابت کنید اگر $F_n = 2^{2^n} + 1$ باشد آنگاه $F_n | 2^{F_n} - 2$.

۴. ثابت کنید $n^2|(n+1)^n - 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

۵. اگر a، b و n اعداد طبیعی و فرد باشند ثابت کنید

$$2^k|a^n - b^n \Leftrightarrow 2^k|a - b \qquad (k \in \mathbb{N})$$

۶. فرض کنید a_1، a_2، $\cdots$، a_n یک ترتیب دلخواه از اعداد ۱، ۲، ۳، $\cdots$، n باشد. ثابت کنید اگر n عددی فرد باشد $(a_1 - 1)(a_2 - 2)\cdots(a_n - n)$ عددی زوج خواهد بود.

۷. ثابت کنید $8|5^n + 2 \times 3^{n-1} + 1$ $(\forall n \in \mathbb{N})$.

۸. ثابت کنید اگر a عددی فرد باشد $8|a^2 - 1$.

۹. ثابت کنید $\forall n \in \mathbb{N}$ عدد $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$ عددی غیر طبیعی است $(n > 1)$.

۱۰. همه اعداد طبیعی n را طوری پیدا کنید که $(n-1)!$ بر n^2 بخش‌پذیر باشد.

۱۱. اگر $(a,b) = (a,c) = (b,c) = 1$ ثابت کنید $(ab + ac + bc, abc) = 1$.

۱۲. ثابت کنید به ازای هر n طبیعی $(21n + 4, 14n + 3) = 1$.

۱۳. ثابت کنید بینهایت n طبیعی وجود دارد که $(n, 2^n - 1) > 1$.

۱۴. ثابت کنید اگر $[a,b]$ کوچکترین مضرب مشترک a و b باشد آنگاه $[a,b] = \frac{ab}{(a,b)}$.

۱۵. ثابت کنید اگر p عددی اول به شکل $4k + 3$ باشد، معادله $x^2 + y^2 = pz^2$ جواب صحیح ندارد.

۱۶. ثابت کنید اگر $\frac{a^2+b^2}{c^2+d^2}$ عددی صحیح باشد، خارج قسمت به شکل $u^2 + v^2$ است.

۱۷. بدون استفاده از قضیه چبیشف ثابت کنید بین n و $n!$ یک عدد اول وجود دارد $(n > 1)$.

۱۸. ثابت کنید بینهایت عدد طبیعی وجود دارد که نتوان به شکل $3mn + m + n$ نوشت $(m, n \in \mathbb{N})$.

۱۹. ثابت کنید در هر تصاعد حسابی $ak + b$ که $(a,b) = 1$ بینهایت عدد وجود دارد که حاصل‌ضربی از n عدد اول متمایز باشد (به ازای n طبیعی دلخواه).

۲۰. ثابت کنید تصاعد حسابی از اعداد طبیعی و نامتناهی وجود ندارد که همه جمله‌های آن اعداد اول باشد.

۲۱. ثابت کنید برای هر $n \in \mathbb{N}$ کثیرالجمله‌ای با ضرایب صحیح وجود دارد مانند $p(x)$ که

$$p(1) < p(2) < \cdots < p(n)$$

و همه این اعداد، اعدادی اول باشد.

۲۲. ثابت کنید در تجزیه $n!$ به اعداد اول عدد اولی با نمای واحد وجود دارد $(n > 1)$.

۲۳. در مجموعه V_n، $(n \in \mathbb{N}, n > 2)$ که به‌صورت $nk + 1$ $(k = 1, 2, \cdots)$ است، عددی را اول گوییم که به‌صورت حاصلضرب دو عنصر V_n نتوان نوشت. ثابت کنید بینهایت عضو در V_n است که به‌صورت منحصر به فردی به حاصل‌ضرب اعداد اول تجزیه نشود.

۲۴ . ثابت کنید برای هر $a, b \in \mathbf{R}$، $(a \neq b)$ عدد گویایی بین a و b وجود دارد که صورت و مخرج آن اعداد اول باشد.

۲۵ . احتمال اینکه یک عدد از اعداد طبیعی انتخاب کنیم و آن عدد اول باشد چقدر است؟

۲۶ . ثابت کنید به ازای هر عدد اول p، $(۲^p + ۱, p) = ۱$، $(p > ۳)$.

۲۷ . ثابت کنید در هر تصاعد حسابی از اعداد طبیعی، فاصله‌ای دلخواه از اعداد مرکب وجود دارد.

۲۸ . اگر p_n، nامین عدد اول باشد ثابت کنید $p_n < ۲^n$، $(n > ۱)$.

۲۹ . ثابت کنید در هر $n + ۱$ عدد از $۲n$ عدد نخستین $(\{۱, ۲, \cdots, ۲n\})$ دست‌کم دو عدد وجود دارد که یکی بر دیگری بخش‌پذیر باشد.

۳۰ . بزرگترین مقسوم علیه مشترک $\binom{n}{۱}$، $\binom{n}{۲}$، . . . ، $\binom{n}{n-۱}$ را به‌دست آورید.

۳۱ . ثابت کنید هر عدد صحیح مثبت را می‌توان به‌صورت مجموع چند عدد طبیعی متوالی نوشت بجز توانهای ۲.

۳۲ . ثابت کنید برای هر n طبیعی دنباله‌ای از n عدد طبیعی متوالی وجود دارد که هیچ یک توانی از یک عدد اول نباشد.

۳۳ . ثابت کنید p اول است اگر و فقط اگر $(p - ۱)! \equiv -۱ \pmod{p}$ (قضیه ویلسون).

۳۴ . ثابت کنید معادلهٔ $x_۱^۴ + x_۲^۴ + \cdots + x_{۱۴}^۴ = ۱۵۹۹$ جواب صحیح برای $x_۱$، $\cdots$، $x_{۱۴}$ ندارد.

۳۵ . ثابت کنید اگر $f(x)$ چندجمله‌ای با ضرایب صحیح باشد معادله $f(x) \equiv ۰ \pmod{p}$ به ازای بینهایت عدد اول p دارای جواب است.

۳۶ . ثابت کنید تعداد کسرهای تحویل‌ناپذیر $\frac{a}{b}$ که $۰ < \frac{a}{b} \leq ۱$ و $۱ \leq b \leq n$ درست برابر با $\varphi(۱) + \varphi(۲) + \cdots + \varphi(n)$ است.

۳۷ . ثابت کنید عددی بر ۹ بخش‌پذیر است که مجموع ارقام آن بر ۹ بخش‌پذیر باشد.

۳۸ . بدون استفاده از محک اویلر ثابت کنید معادله $x^۲ \equiv -۱ \pmod{p}$ دارای جواب است اگر و فقط اگر p به‌صورت $۴k + ۱$ باشد (p اول است).

۳۹ . اگر p عددی اول به شکل $۴k + ۳$ باشد ثابت کنید نمی‌توان مجموعهٔ

$$\{n, n + ۱, \cdots, n + p - ۲\}$$

را به دو دسته افراز کرد که ضربشان مساوی باشد $(n \in \mathbf{N})$.

۴۰ . ثابت کنید برای هر $n > 1$ داریم $n \nmid 2^n - 1$ ولی برای هر $a > 2$ بینهایت عدد طبیعی n وجود دارد که $n | a^n - 1$.

۴۱ . ثابت کنید در هر تصاعد حسابی از اعداد طبیعی به‌صورت $ak + b$ بینهایت عضو وجود دارد که اعداد اول آنها در تجزیه یکسان است.

۴۲ . این معادله را در اعداد طبیعی حل کنید

$$(y+1)^x - 1 = y!$$

۴۳ . ثابت کنید به ازای هر $m \in \mathbb{N}$ عددی مانند M وجود دارد که اگر $n > M$ بین n و $2n$ دست‌کم یک عدد باشد که حاصل‌ضرب دقیقاً m عدد اول متمایز باشد.

۴۴ . ثابت کنید به ازای هر m، عددی به‌صورت $2^n - 1$ هست که می‌تواند دست‌کم m عامل اول متمایز داشته باشد.

۴۵ . ثابت کنید به ازای هر n فرد $2^{n!} - 1$ بر n بخش‌پذیر است.

۴۶ . ثابت کنید هر عامل اول از $2^{2^n} + 1$ به‌صورت $2^{n+1}k + 1$ است.

۴۷ . همه اعداد فرد n را پیدا کنید که $3^n + 1$ بر n قابل‌قسمت باشد.

۴۸ . فرض کنید $n_1, n_2, \cdots, n_k \in \mathbb{N}$ و داشته باشیم

$$n_1 | 2^{n_2} - 1, \quad n_2 | 2^{n_3} - 1, \quad \cdots, \quad n_k | 2^{n_1} - 1$$

ثابت کنید $n_1 = n_2 = n_3 = \cdots = n_k = 1$.

۴۹ . n عدد x_1، x_2، $\cdots$، x_n که هر یک ۱ یا ۱− است مفروضند به‌طوری که

$$x_1x_2 + x_2x_3 + \cdots + x_{n-1}x_n + x_nx_1 = 0$$

ثابت کنید $4|n$.

۵۰ . همه اعداد طبیعی n را پیدا کنید که بر هر عدد کوچکتر از $\sqrt{n}$ بخش‌پذیر باشند.

۵۱ . $S(n)$ را مجموع ارقام n در مبنای ۱۰ می‌گیریم. ثابت کنید معادله زیر برای $x \in \mathbb{N}$ جواب دارد

$$S(mx) = m$$

(m عددی دلخواه و ثابت و طبیعی است.)

۵۲ . ثابت کنید به ازای هر $x, y \in \mathbb{N}$، $4xy - x - y$ مربع کامل نیست.

۵۳ . ثابت کنید اگر $x, y \in \mathbb{Z}$، $y^2 = x^3 + (x+4)^2$ آنگاه $x = 0$.

۵۴ . ثابت کنید هر عدد صحیح مثبت k را به بینهایت طریق می‌توان به‌صورت

$$k = \pm ۱^۲ \pm ۲^۲ \pm \cdots \pm m^۲$$

نشان داد که در آن m عددی طبیعی و علامت «$\pm$» می‌تواند در وضع مناسبی اختیار شود.

۵۵ . ثابت کنید معادلات زیر به ازای $k \geq ۲$ در $\mathbf{Z}$ جواب ندارد

الف) $n! = x^k$

ب) $n! = x^k - ۱$

۵۶ . همگی مقادیر n را طوری بیابید که $\frac{۲^n+۱}{n^۲} \in \mathbf{Z}$.

۵۷ . ثابت کنید به ازای هر $n \in \mathbf{N}$، $n|\varphi(۲^n - ۱)$.

۵۸ . نشان دهید اگر عدد اول p به‌صورت $۳k + ۱$ نباشد معادله $x^۳ \equiv a (\mathrm{mod}\ p)$ برای هر a جواب دارد ولی اگر p به‌صورت $۳k + ۱$ باشد در این صورت وقتی و تنها وقتی جواب دارد که $a^k \equiv ۱ (\mathrm{mod}\ p)$، $((a,p) = ۱)$.

۵۹ . فرض کنیم p عددی اول باشد؛ نشان دهید که $\varphi(p-۱)$ ریشه اولیه به هنگ p موجود است (ابتدا مسأله بعد را حل کنید).

۶۰ . اگر g یک ریشه اولیه به هنگ عدد اول p باشد g^n یک ریشه اولیه به هنگ p است اگر و فقط اگر $(n, p-۱) = ۱$.

۶۱ . ثابت کنید

$$\mathrm{ord}_n(a^k) = \frac{\mathrm{ord}_n a}{(k, \mathrm{ord}_n a)} \quad (n,a,k \in \mathbf{N} \text{ و } (a,n) = ۱)$$

۶۲ . ثابت کنید معادله $x^۲ = y^۳ + ۲۳$ جواب صحیح ندارد.

۶۳ . نقطه $(a,b) \in R^۲$ را مشبک گوییم اگر $a,b \in \mathbf{Z}$. همچنین این نقطه را قابل رؤیت گوییم اگر $(a,b) = ۱$ ب.م.م. . ثابت کنید برای هر عدد صحیح $k > ۰$ یک نقطه مشبک (a,b) موجود است به‌طوری که هیچ‌یک از نقاط مشبک $(a+r, b+s)$، $(۰ < r \leq k$ و $۰ < s \leq k)$ از مبدأ قابل رویت نیست (راهنمایی: از قضیه چینی استفاده کنید).

۶۴ . ثابت کنید اگر $n_۱ + n_۲ + \cdots + n_k = n$ باشد، عدد $\frac{n!}{n_۱! n_۲! \cdots n_k!}$ عددی صحیح است.

۶۵ . معادله $n!(n-۱)! = m!$ را در مجموعه اعداد طبیعی حل کنید.

۶۶ . تمام مقادیر n را پیدا کنید که $۲^{n-۱}|n!$.

۶۷ . اگر $\binom{n}{k}$ها، $(۱ \leq k \leq n-۱)$ همگی زوج باشند ثابت کنید n توانی از ۲ است.

۶۸. ثابت کنید

$$\binom{px+y}{pa+b} \overset{p}{\equiv} \binom{x}{a}\binom{y}{b}$$

۶۹. قضیه لوکا را با استفاده از مسأله پیش حل کنید.

۷۰. فرض کنید $\{f(n)\}$ دنباله‌ای اکیداً صعودی از اعداد طبیعی باشد به‌طوری که $f(۲) = ۲$ و

$$(m,n) = ۱ \Rightarrow f(mn) = f(m)f(n)$$

ثابت کنید $f(n) = n$.

۷۱. ثابت کنید اگر $f(x) > ۰$ و $\lim_{x\to\infty} f(x) = ۰$ در این صورت معادله زیر حداکثر تعداد متناهی جواب در مجموعه اعداد طبیعی برای $x_۱$، $x_۲$، $\cdots$، x_n دارد

$$f(x_۱) + f(x_۲) + \cdots + f(x_k) = ۱$$

خودآزمایی

۱. ثابت کنید به ازای هر n که $۲^{۲^n} + ۱$ عددی اول باشد و هر عدد اول و فرد p معادله زیر برای اعداد صحیح x و y جواب ندارد

$$۲^{۲^n} + ۱ = x^p - y^p$$

۲. همهٔ اعداد $n > ۲$ را به‌دست آورید که دستگاه مخفف‌مانده‌ها به هنگ n به تصاعد حسابی باشد.

۳. ثابت کنید به ازای هر عدد به‌صورت p که p عدد اول و فرد است، اعداد ۱، ۲، $\cdots$، $p - ۱$ را می‌توان روی یک دایره چنان قرار داد که $b^۲ - ac$ بر p بخش‌پذیر باشد (a، b و c سه عدد پشت سر هم و دلخواه از دایره است).

۴. معادله زیر را در مجموعه اعداد طبیعی x، y و z حل کنید

$$۱! + ۲! + \cdots + x! = y^{z+۱}$$

۵. ثابت کنید عددی مربع کامل است اگر و فقط اگر تعداد مقسوم‌علیه‌های آن فرد باشد.

۶. به ازای هر عدد اول و فرد p ثابت کنید $\binom{۲p}{p} \equiv ۲ (\mathrm{mod}\ p^۲)$.

۷. اگر p_i، iامین عدد اول باشد، ثابت کنید

$$\lim_{n\to\infty}\left(۱-\frac{۱}{p_۱}\right)\left(۱-\frac{۱}{p_۲}\right)\cdots\left(۱-\frac{۱}{p_n}\right)\cdots = ۰$$

۵

مباحث پیشرفته‌تر در نظریهٔ اعداد

۵-۱ توابع حسابی

توابعی که دامنه آنها اعداد طبیعی است، به توابع حسابی موسوم‌اند. بعضی از توابع حسابی مهم عبارت‌اند از

الف) $\varphi(n)$: تعداد اعداد کوچکتر از n و نسبت به n اول.

مهمترین خاصیت φ در قضیهٔ اویلر آشکار می‌شود:

اگر $(a,n)=۱$، آنگاه $a^{\varphi(n)} \equiv ۱ (\mathrm{mod}\ n)$.

اگر $n = p_۱^{\alpha_۱} \cdots p_k^{\alpha_k}$، آنگاه $\varphi(n) = n(۱-\frac{۱}{p_۱})(۱-\frac{۱}{p_۲})\cdots(۱-\frac{۱}{p_k})$.

ب) $\tau(n)$: تعداد مقسوم علیه‌های مثبت n.

به راحتی ثابت می‌شود که اگر $n = p_۱^{\alpha_۱} \cdots p_k^{\alpha_k}$، آنگاه

$$\tau(n) = (۱+\alpha_۱)\cdots(۱+\alpha_k)$$

ج) $\sigma_k(n)$: مجموع توانهای kام مقسوم علیه‌های مثبت n.

د) $\pi(n)$: تعداد اعداد اول کوچکتر از n.

تاکنون فرمولی برای $\pi(n)$ ارائه نشده است ولی می‌دانیم که به ازای nهای بزرگ، $\pi(n) \simeq \frac{n}{\ln n}$، یا به عبارت دقیقتر $\lim_{n\to\infty} \frac{\pi(n)\ln n}{n} = ۱$.

یکی از خواص مهم توابع حسابی، «ضربی» بودن آنهاست؛ تابع حسابی f را ضربی گوییم هرگاه

$$\forall m,n \in \mathbf{N} \qquad (m,n)=۱ \Rightarrow f(mn)=f(m)f(n)$$

بنابراین اگر اثر تابع ضربی f را روی توانهای اعداد اول بدانیم، تابع f به‌طور یکتا مشخص می‌شود

$$f(p_۱^{\alpha_۱}p_۲^{\alpha_۲}\cdots p_n^{\alpha_n}) = f(p_۱^{\alpha_۱})\cdots f(p_n^{\alpha_n})$$

ثابت می‌کنیم توابع φ، τ و σ_k ضربی هستند.

الف) φ تابعی ضربی است

فرض می‌کنیم $(m,n) = ۱$؛ بنابراین

(تعداد اعداد کوچکتر از mn که نسبت به m اول‌اند و نسبت به n اول نیستند) + (تعداد اعداد اول کوچکتر از mn که نسبت به m اول نیستند) = (تعداد اعداد کوچکتر از mn که نسبت به mn اول نیستند)

پس

$$mn - \varphi(mn) = n(m - \varphi(m)) + \varphi(m)(n - \varphi(n))$$

و لذا

$$\varphi(mn) = \varphi(m)\varphi(n)$$

ب) τ ضربی است

از آنجا که اگر $(m,n) = ۱$ آنگاه عاملهای اول m و n در تجزیه به اعداد اول متمایز خواهند بود، ضربی بودن τ با توجه به تعریف آن بدیهی است.

ج) σ_k ضربی است

اگر $(m,n) = ۱$ و اگر مقسوم‌علیه‌های مثبت m و n به ترتیب $\{a_۱, \cdots, a_k\}$ و $\{b_۱, \cdots, b_s\}$ باشند، آنگاه مقسوم‌علیه‌های mn حاصل‌ضربهای دو به دوی a_iها و b_jها هستند. پس

$$\sigma_k(mn) = \sum_{i,j}(a_i^k b_j^k) = \left(\sum_i a_i^k\right)\left(\sum_j b_j^k\right) = \sigma_k(m)\sigma_k(n)$$

حال ثابت می‌کنیم تابع f ضربی است اگر و فقط اگر تابع F با ضابطهٔ $F(n) = \sum\limits_{d|n} f(d)$ ضربی باشد:

فرض می‌کنیم f ضربی باشد و $(m,n) = ۱$. مقسوم‌علیه‌های m و n را به ترتیب $\{a_۱, \cdots, a_k\}$ و $\{b_۱, \cdots, b_s\}$ می‌گیریم. اکنون

$$F(mn) = \sum_{i,j} f(a_i b_j) = \sum_{i,j} f(a_i) f(b_j) = \sum_i f(a_i) \sum_j f(b_j)$$
$$\Rightarrow F(mn) = F(m)F(n)$$

پس اگر f ضربی باشد F نیز چنین است. اثبات عکس این مطلب به عهدهٔ خواننده است.

حال به بیان روشهایی می‌پردازیم که با داشتن F بتوانیم f را محاسبه کنیم. ابتدا تابع ضربی زیر را تعریف می‌کنیم

$$\mu(n) = \begin{cases} ۱, & n = ۱ \\ (-۱)^k, & n = p_۱p_۲\cdots p_k \text{ که } p_i\text{ها اول و متمایزند} \\ ۰, & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

این تابع به تابع موبیوس مشهور است.

● قضیه۵-۱

$\sum_{d|n}\mu(d) = [\frac{1}{n}]$.

اثبات. چون μ ضربی است کافی است حکم در مورد p^α بررسی شود:

$$\sum_{d|p^\alpha}\mu(d) = \mu(p^\alpha) + \mu(p^{\alpha-1}) + \cdots + \mu(p) + \mu(1)$$
$$= \mu(p) + \mu(1) = (-1) + (1) = 0$$

●

▲ تعریف۵-۱ (ضرب دیریکله)

اگر f و g دو تابع حسابی باشند، **ضرب دیریکله** f و g، که با $(f \star g)$، نشان داده می‌شود به‌صورت زیر تعریف می‌شود

$$(f \star g)(n) = \sum_{d|n} f(d)g\left(\frac{n}{d}\right)$$

▲

تمرین

۱ . ثابت کنید ضرب دیریکله جابجایی و شرکت‌پذیر است.

با توجه به تعریف، درمورد تابع ۱ = $1(n)$ به‌دست می‌آید $(f\star 1)(n) = \sum_{d|n} f(d) = F(n)$،
و در مورد تابع $I(n) = [\frac{1}{n}]$، $(f \star I)(n) = \sum_{d|n} f(d)I(\frac{n}{d}) = f(n)$. قضیه ۵-۱ را نیز می‌توان به این صورت بیان کرد:

$$\mu \star 1 = I$$

حال فرض کنیم $F = f \star 1$؛ در این صورت.

$$F = 1 \star f \Rightarrow \mu \star F = \mu \star (1 \star f) = (\mu \star 1) \star f = I \star f = f$$

پس به قضیهٔ زیر می‌رسیم

● قضیه۵-۲ (انعکاس موبیوس)

$$F(n) = \sum_{d|n} f(d) \Rightarrow f(n) = \sum_{d|n} F(d)\mu\left(\frac{n}{d}\right)$$

●

عکس قضیهٔ فوق نیز درست است، یعنی

● **قضیه۵-۳**

$$f = f \star \mu \Rightarrow f \star 1 = F \star (\mu \star 1) = F \star I = F \Rightarrow F(n) = \sum_{d|n} f(d)$$

●

با توجه به این دو قضیه، اگر به ازای هر n، $\sum_{d|n} g(d) = \sum_{d|n} f(d)$، آنگاه به ازای هر n، $f(n) = g(n)$.

● **قضیه۵-۴**

۱. ضرب و ترکیب دو تابع ضربی، تابعی ضربی است.

۲. $\sum_{d|n} f(d) = \sum_{d|n} f(\frac{n}{d})$

۳. $\sum_{i=1}^{n} F(i) = \sum_{i=1}^{n} [\frac{n}{i}] f(i)$

زیرا

$$\sum_{i=1}^{n} F(i) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{d|i} f(d)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} (\text{تعداد اعداد بخش‌پذیر بر } i \text{ و کوچکتر از } n) \times f(i) = \sum_{i=1}^{n} \left[\frac{n}{i}\right] f(i)$$

●

■ **مثال ۵-۱**

۱. ثابت کنید $n = \sum_{d|n} \varphi(d)$.

حل. از آنجا که $\varphi(\frac{n}{d})$ تعداد اعداد کوچکتر از n است که ب.م.م. آنها و n، برابر d است (چرا؟) می‌توان نوشت

$$\sum_{d|n} \varphi(d) = \sum_{d|n} \varphi\left(\frac{n}{d}\right) = n$$

■

■ **مثال ۵-۲**

ثابت کنید $\prod_{d|n} d = n^{\frac{\tau(n)}{2}}$ و $\sum_{d|n} \frac{1}{d} = \frac{\sigma(n)}{n}$.

حل.

$$A = \prod_{d|n} d = \prod_{d|n} \frac{n}{d} \Rightarrow A^2 = \prod_{d|n} d\frac{n}{d} = \prod_{d|n} n = n^{\tau(n)}$$

$$\Rightarrow A = n^{\frac{\tau(n)}{۲}}$$

$$\sum_{d|n} \frac{۱}{d} = \sum_{d|n} \frac{d}{n} = \frac{۱}{n}\sum_{d|n} d = \frac{\sigma(n)}{n}$$

■

■ **مثال ۵-۳**

ثابت کنید ۱ $= \sum_{d|n} \mu(d)\tau(\frac{n}{d})$.

حل. از آنجا که ۱ $\tau(n) = \sum_{d|n}$، بنا به قضیهٔ ۵-۲،

$$۱ = \sum_{d|n} \mu(d)\tau\left(\frac{n}{d}\right)$$

■

■ **مثال ۵-۴**

ثابت کنید ماتریس $[a_{ij}]_{n\times n}$ که به‌صورت زیر تعریف می‌شود وارون‌پذیر است

$$a_{ij} = \begin{cases} ۱, & i|j \\ ۰, & i\nmid j \end{cases}$$

حل. می‌خواهیم ماتریس $[b_{ij}]_{n\times n}$ی به‌دست آوریم که $[b_{ij}][a_{ij}] = I_{n\times n}$، یا

$$\delta_{ij} = \sum b_{ik}a_{kj} = \begin{cases} ۰, & i \neq j \\ ۱ & i = j \end{cases}$$

δ_{ij} را می‌توان به‌صورت زیر نوشت

$$\delta_{ij} = \sum_{k|j} b_{ik}$$

بنابر قضیه ۵-۲،

$$b_{ij} = \sum_{k|j} \delta_{ik}\mu(\frac{j}{k}) = \begin{cases} ۰ & i\nmid j \\ \mu(\frac{j}{i}) & i|j \end{cases}$$

پس $[a_{ij}]$ وارون‌پذیر است. ■

■ **مثال ۵-۵**

$\{a_n\}$ دنباله‌ای است با این خاصیت که به ازای هر n، $\sum_{d|n} a_d = ۲^n$. ثابت کنید $n|a_n$.

حل. فرض می‌کنیم b_n تعداد دنباله‌هایی از اعداد صفر و یک باشد که دورهٔ تناوب آنها (یعنی کوچکترین دورهٔ تناوب آنها) n باشد؛ بنابراین $\sum_{d|n} b_d = ۲^n$.

بنابر قضیه ۵-۳، $a_n \equiv b_n$؛ و $n|b_n$. (حل این مسأله بدون استفاده از قضیه موبیوس مشکل است!) ■

■ **مثال ۵-۶**

ثابت کنید $\frac{n(n+۱)}{۲} = \sum_{i=۱}^{n}[\frac{n}{i}]\varphi(i)$.

حل. چون $\phi(n) = \sum_{d|n}\varphi(d) = n$، پس بنابر قضیه ۵-۴،

$$\sum_{i=۱}^{n}\left[\frac{n}{i}\right]\varphi(i) = \sum_{i=۱}^{n}\phi(i) = \sum_{i=۱}^{n} i = \frac{n(n+۱)}{۲}$$

■

■ **مثال ۵-۷**

فرض کنیم $S_n = \{۱ \leq k \leq ۲n | \{\frac{n}{k}\} \geq \frac{۱}{۲}\}$. ثابت کنید $\sum_{d\in S_n}\varphi(d) = n^۲$.

توضیح. برای محاسبهٔ عباراتی به شکل $\sum f(d)$ (d دارای شرایطی خاص)، سعی می‌کنیم تابعی مانند g بیابیم که

$$g(n) = \begin{cases} ۱, & \text{دارای شرایط باشد } n \\ ۰, & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

در این صورت کافی است مقدار $\sum_{d=۱}^{n} f(d)g(d)$ را پیدا کنیم.

حل. توجه می‌کنیم که مقدار $f(k) = [\frac{۲n}{k}] - ۲[\frac{n}{k}]$ صفر است اگر $\{\frac{n}{k}\} < \frac{۱}{۲}$، و یک است اگر $\{\frac{n}{k}\} \geq \frac{۱}{۲}$. بنابراین

$$\sum_{d\in S_n}\varphi(d) = \sum_{k=۱}^{۲n}\varphi(k)\left[\frac{۲n}{k}\right] - ۲\sum_{k=۱}^{۲n}\varphi(k)\left[\frac{n}{k}\right]$$
$$= \frac{۲n(۲n+۱)}{۲} - ۲\frac{n(n+۱)}{۲} = n^۲$$

■

تمرین

۱ . یک ماتریس نامتناهی از اعداد طبیعی مفروض است که در آن $a_{ij} \leq ij$. نشان دهید

به ازای هر $k \in \mathbb{N}$ عددی در ماتریس وجود دارد که دست‌کم k بار تکرار شده باشد.

۲. تابع $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ مفروض است. توابع h و g را به این صورت تعریف می‌کنیم

$$g(n) = \sum_{\substack{(r,n)=1\\ 1\leq r\leq n}} f\left(\frac{r}{n}\right), \quad h(n) = \sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{i}{n}\right)$$

g و h چه رابطه‌ای با هم دارند؟

۳. ثابت کنید

$$\sum_{\substack{(r,n)=1\\ 1\leq r\leq n}} \cos\frac{2r\pi}{n} = \mu(n)$$

۴. تعدادی کارت روی میز وجود دارد که روی هر یک عددی طبیعی نوشته شده است به نحوی که به ازای هر عدد طبیعی، تعداد کارتهایی که مقسوم‌علیه‌های n روی آنها نوشته شده است دقیقاً n است. ثابت کنید تمام اعداد طبیعی روی کارتها نوشته شده‌اند.

۵. ثابت کنید $\sum_{d|n} \mu(d)f(d) = \prod_{\substack{p|n\\ p\text{ اول}}} (1 - f(p))$.

۶. ثابت کنید $n - 1 = \sum(-1)^{i+1}\left[\frac{n}{p_1p_2\cdots p_i}\right]$، که $\sum$ روی تمام اعداد اول متمایز گرفته شده است.

۷. سری دیریکله، $A_s(f)$، به‌صورت زیر تعریف می‌شود

$$A_s(f) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{f(k)}{k^s}$$

خاصیت مهم این سریها این است که $A_s(f)A_s(g) = A_s(f \star g)$ (این مطلب را بدون اثبات می‌پذیریم). ثابت کنید $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mu(k)}{k^2} = \frac{6}{\pi^2}$.

۸. ثابت کنید

الف) $\sum_{d|n} \frac{\mu^2(d)}{\varphi(d)} = \frac{n}{\varphi(n)}$

ب) $\sum_{\substack{(r,n)=1\\ 1\leq r\leq n}} r = \frac{1}{2}n\varphi(n)$

ج) $\sum_{n=1}^{x} \lambda(n)\left[\frac{x}{n}\right] = [\sqrt{x}]$، که در آن λ به این صورت تعریف می‌شود

$$\lambda(n) = \begin{cases} 1, & n = 1 \\ (-1)^k, & n = p_1p_2\cdots p_k \quad \text{(ها اولند (نه لزوماً متمایز} p_i) \end{cases}$$

۹. ثابت کنید به ازای هر تابع حسابی f که $f(1) \neq 0$، تابع یکتای f^{-1} وجود دارد که $(f \star f^{-1}) = f^{-1} \star f = I$ و نشان دهید مجموعهٔ توابع حسابی f که $f(1) \neq 0$، با عمل $\star$ یک گروه جابه‌جایی تشکیل می‌دهد.

۱۰. با توجه به مسألهٔ قبل نشان دهید $\varphi^{-1}(n) = \prod_{p|n}(1-p)$ (p اول است).

۱۱. ثابت کنید $\sum_{d|n} \tau^3(d) = (\sum_{d|n} \tau(d))^2$.

۱۲. فرض کنید $P(n)$ حاصل‌ضرب اعداد کوچکتر یا مساوی n باشد که نسبت به n اول‌اند؛ ثابت کنید

$$P(n) = n^{\varphi(n)} \prod_{d|n} \left(\frac{d!}{d^d}\right)^{\mu(\frac{n}{d})}$$

۱۳. ثابت کنید $\sum_{n \leq x} \varphi(n) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sum_{n \leq x} \mu(n)[\frac{x}{n}]^2$

۱۴. ثابت کنید چند جمله‌ایهای P و Q وجود ندارد که $\pi(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$.

۲-۵ قانون تقابل مربعی

گاهی در نظریهٔ اعداد محتاج به حل معادلات همنهشتی‌ای مشابه $x^2 \equiv a (\text{mod } p)$ می‌شویم. توجه می‌کنیم که اگر بتوانیم معادلهٔ فوق را حل کنیم، به راحتی می‌توانیم معادلهٔ کلی

$$ax^2 + bx + c \equiv 0\,(p)$$

را که $(a, p) = 1$ حل کنیم: برای این کار با ضرب در $4a$ و ایجاد یک عبارت درجهٔ دوم داریم

$$(2ax + b)^2 \equiv b^2 - 4ac (\text{mod } p)$$

البته معادلهٔ $x^2 \equiv a(p)$ به ازای هر a جواب ندارد. اگر $(a, p) = 1$ و معادله جواب داشته باشد، a را ماندهٔ درجهٔ دوم به هنگ p گوییم؛ و اگر معادله جواب نداشته باشد، a را نامانده درجه دوم گوییم. بررسی حالت $p = 2$ بسیار ساده است، لذا از اینجا به بعد p را یک عدد اول فرد می‌گیریم. برای راحتی کار یک نماد مفید را معرفی می‌کنیم.

▲ **تعریف ۵-۲ (نماد لژاندر)**

$(\frac{a}{p})$، به این صورت تعریف می‌شود

$$\left(\frac{a}{p}\right) = \begin{cases} 1, & \text{ماندهٔ درجهٔ دوم است } a \\ -1, & \text{ناماندهٔ درجهٔ دوم است } a \\ 0, & a \equiv 0\,(p) \end{cases}$$

به راحتی دیده می‌شود که

الف) $\left(\frac{a}{p}\right)=\left(\frac{b}{p}\right) \Leftarrow \ a\equiv b(p)$

ب) $\left(\frac{k^۲}{p}\right)=۱$

ثابت می‌کنیم که دقیقاً $\frac{p-۱}{۲}$ ماندهٔ درجهٔ دوم و $\frac{p-۱}{۲}$ نامانده درجهٔ دوم وجود دارد: از آنجا که اعداد $۱^۲, ۲^۲, \dots, \frac{p-۱}{۲}^۲$ همگی به هنگ p ناهمنهشت بوده، ماندهٔ درجهٔ دوم هستند، پس دست‌کم $\frac{p-۱}{۲}$ ماندهٔ درجهٔ دوم وجود دارد. لم بعد اثبات را تمام می‌کند. ▲

لم. (محک اویلر). به ازای هر a و هر عدد اول و فرد p، $\left(\frac{a}{p}\right)\equiv a^{\frac{p-۱}{۲}}(\bmod p)$.

اثبات. اگر $a\equiv ۰(p)$، بداهتاً دو طرف تساوی صفر می‌شود. اگر a ماندهٔ درجهٔ دوم به هنگ p باشد، xی وجود دارد که $x^۲\equiv a(p)$؛ پس $a^{\frac{p-۱}{۲}}\equiv x^{p-۱}\equiv ۱(\bmod p)$. ولی از آنجا که معادلهٔ $x^{\frac{p-۱}{۲}}-۱\equiv ۰(\bmod p)$ حداکثر $\frac{p-۱}{۲}$ جواب دارد و قبلاً تعداد $\frac{p-۱}{۲}$ ماندهٔ درجهٔ دوم به‌دست آورده‌ایم، پس تعداد مانده‌های درجهٔ دوم دقیقاً $\frac{p-۱}{۲}$ است، پس تعداد نامانده‌های درجهٔ دوم نیز $\frac{p-۱}{۲}$ است. از آنجا که $a^{\frac{p-۱}{۲}}\equiv \pm ۱(\bmod p)$، پس اگر a نامانده باشد، $a^{\frac{p-۱}{۲}}\equiv -۱(p)$ و حکم ثابت می‌شود.

نتیجه. نماد $\left(\frac{a}{p}\right)$ ضربی قوی است، یعنی $\left(\frac{ab}{p}\right)=\left(\frac{a}{p}\right)\left(\frac{b}{p}\right)$ ،$\forall a,b$.

با اینکه محک اویلر برای بررسی مانده‌بودن یا نامانده‌بودن بسیار مفید است ولی هنوز قادر نیستیم به راحتی مثلاً $(۱۷/۵۳)$ را محاسبه کنیم. در اینجا لم بسیار مفیدی را که ریاضیدان بزرگ گاوس در ۱۸ سالگی اثبات کرده، ذکر می‌کنیم.

لم گاوس. اگر $(a,p)=۱$، آنگاه اعداد a، $۲a$، $۳a$،...، $\frac{p-۱}{۲}a$، $\frac{p-۱}{۲}$ عدد ناهمنهشت به هنگ p هستند. اگر فرض کنیم دقیقاً kتای آنها با اعدادی بیشتر از $\frac{p-۱}{۲}$ همنهشت باشند، آنگاه $\left(\frac{a}{p}\right)=(-۱)^k$.

اثبات. فرض می‌کنیم $a_۱$، $a_۲$،...، a_k اعدادی از a، $۲a$، ...، $\frac{p-۱}{۲}a$ باشند که بیشتر از $\frac{p-۱}{۲}$ به هنگ p هستند، و $b_۱$، $b_۲$، ...، b_s را بقیهٔ اعداد می‌گیریم. به راحتی می‌توان بررسی کرد که $p-a_۱$، $p-a_۲$، ...، $p-a_k$ و $b_۱$، $b_۲$،...، b_s، $\frac{p-۱}{۲}$ عدد ناهمنهشت بین ۱ و $\frac{p-۱}{۲}$ هستند؛ پس

$$(p-a_۱)(p-a_۲)\cdots(p-a_k)b_۱b_۲\cdots b_s=\left(\frac{۱}{۲}(p-۱)\right)!$$

$$\Rightarrow (-۱)^k a_۱a_۲\cdots a_k b_۱b_۲\cdots b_s\equiv\left(\frac{۱}{۲}(p-۱)\right)!(\bmod p)$$

حال اگر به‌جای a_iها و b_iها مقادیر a، $۲a$، ...، $\frac{۱}{۲}(p-۱)a$ را قرار دهیم به‌دست

می‌آید

$$(-1)^k a^{\frac{p-1}{2}} \times \left(\frac{1}{2}(p-1)\right)! \equiv \left(\frac{1}{2}(p-1)\right)! (\mathrm{mod}\ p)$$
$$\Rightarrow (-1)^k a^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1 (\mathrm{mod}\ p) \Rightarrow a^{\frac{p-1}{2}} \equiv (-1)^k (\mathrm{mod}\ p)$$

بقیهٔ کار با استفاده از محک اویلر بدیهی است.

حال می‌خواهیم بین $\left(\frac{p}{q}\right)$ و $\left(\frac{q}{p}\right)$ رابطه‌ای بیابیم. در نظر اول ممکن است رابطه‌ای بین این دو نباشد، ولی گاوس با فراست، قانون تقابل مربعی را کشف کرد که یکی از زیباترین قضایای ریاضی است. ما در اینجا اثباتی با استفاده از مثلثات خالص (!) ارائه می‌کنیم که به وسیلهٔ آیزنشتاین به‌دست آمده است.

● **قضیه۵-۵ (قانون تقابل مربعی)**

اگر p و q اول و فرد باشند، آنگاه

$$\left(\frac{p}{q}\right)\left(\frac{q}{p}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2}.\frac{q-1}{2}}$$

لم۱.

اگر m، آنگاه

$$\frac{\sin mx}{\sin x} = \prod_{k=1}^{\frac{m-1}{2}} \left(\sin^2 x - \sin^2 \frac{k\pi}{m}\right) \times (-4)^{\frac{m-1}{2}}$$

اثبات لم. به استقرا به راحتی ثابت می‌شود که $\frac{\sin mx}{\sin x}$ یک چندجمله‌ای بر حسب $\sin^2 x$ است که ضریب بزرگترین توان آن $(-4)^{\frac{m-1}{2}}$ است. بقیهٔ کار، با توجه به اینکه به ازای $k = 1, 2, \cdots, \frac{m-1}{2}$، $\pm\frac{\pi k}{m}$ ریشهٔ $\frac{\sin mx}{\sin x}$ است و با تجزیهٔ چندجمله‌ای مذکور، حکم بدیهی است.

اثبات قضیه. با توجه به لم،

$$\frac{\sin(p.\frac{k\pi}{q})}{\sin(\frac{k\pi}{q})} = (-4)^{\frac{p-1}{2}} \prod_{j=1}^{\frac{p-1}{2}} \left(\sin^2 \frac{k\pi}{q} - \sin^2 \frac{j\pi}{p}\right)$$

حال اگر در اتحاد فوق k را برابر $1, 2, \ldots, \frac{q-1}{2}$ قرار دهیم و عبارات حاصل را در هم ضرب کنیم، نتیجه می‌شود

$$\prod_{k=1}^{\frac{q-1}{2}} \frac{\sin(p.\frac{k\pi}{q})}{\sin\frac{k\pi}{q}} = (-4)^{\frac{p-1}{2}.\frac{q-1}{2}} \prod_{j=1}^{\frac{p-1}{2}} \prod_{k=1}^{\frac{q-1}{2}} \left(\sin^2 \frac{k\pi}{q} - \sin^2 \frac{j\pi}{p}\right)$$
$$= (-4)^{\frac{p-1}{2}.\frac{q-1}{2}} \prod_{j=1}^{\frac{p-1}{2}} \frac{\sin(q.\frac{j\pi}{p})}{(-1)^{\frac{q-1}{2}} \times (-4)^{\frac{q-1}{2}} \times \sin(\frac{j\pi}{p})}$$

$$= (-1)^{\frac{p-1}{2}\cdot\frac{q-1}{2}} \prod_{j=1}^{\frac{p-1}{2}} \frac{\sin(q.\frac{j\pi}{p})}{\sin(\frac{j\pi}{p})}$$

اکنون دستگاه مخفف‌مانده‌ها به هنگ p و q را به ترتیب $\{-\frac{p-1}{2},\cdots,1,\cdots,\frac{p-1}{2}\}$ و $\{-\frac{q-1}{2},\cdots,1,\cdots,\frac{q-1}{2}\}$ می‌گیریم و با استفاده از لم گاوس به‌دست می‌آید

$$\left(\frac{p}{q}\right) \prod_{k=1}^{\frac{q-1}{2}} \frac{\sin(\frac{k\pi}{q})}{\sin(\frac{k\pi}{q})} = (-1)^{\frac{p-1}{2}\cdot\frac{q-1}{2}} \left(\frac{q}{p}\right) \prod_{j=1}^{\frac{p-1}{2}} \frac{\sin(\frac{j\pi}{p})}{\sin(\frac{j\pi}{p})}$$

پس

$$\left(\frac{p}{q}\right)\left(\frac{q}{p}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2}\cdot\frac{q-1}{2}}$$

چند مثال، قدرت این قضیه را نشان می‌دهد. ●

■ **مثال ۵-۸**

آیا معادلهٔ $x^2 \equiv 521 \pmod{997}$ جواب دارد؟ (۵۲۱ و ۹۹۷ اول‌اند.)

حل.

$$\left(\frac{521}{997}\right) = \left(\frac{997}{521}\right) = \left(\frac{476}{521}\right) = \left(\frac{4}{521}\right)\left(\frac{7}{521}\right)\left(\frac{17}{521}\right)$$
$$= \left(\frac{7}{521}\right)\left(\frac{17}{521}\right) = \left(\frac{521}{7}\right)\left(\frac{521}{17}\right) = \left(\frac{3}{7}\right)\left(\frac{11}{17}\right)$$
$$= -\left(\frac{7}{3}\right)\left(\frac{17}{11}\right) = -\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{6}{11}\right) = -\left(\frac{2}{11}\right)\left(\frac{3}{11}\right)$$
$$= \left(\frac{3}{11}\right) = -\left(\frac{11}{3}\right) = -\left(\frac{2}{3}\right) = 1$$

پس معادله جواب دارد. ■

■ **مثال ۵-۹**

آیا معادلهٔ $x^2 + 6x - 154 \equiv 0 \pmod{399}$ جواب دارد؟

حل.

$$(x+3)^2 \equiv 145 \pmod{399}$$

$$\left(\frac{145}{399}\right) = \left(\frac{5}{399}\right)\left(\frac{29}{399}\right) = \left(\frac{399}{5}\right)\left(\frac{399}{29}\right) = \left(\frac{-1}{5}\right)\left(\frac{22}{29}\right)$$
$$= \left(\frac{2}{29}\right)\left(\frac{11}{29}\right) = -\left(\frac{11}{29}\right) = -\left(\frac{29}{11}\right) = -\left(\frac{7}{11}\right)$$
$$= \left(\frac{11}{7}\right) = \left(\frac{4}{7}\right) = 1$$

پس معادله جواب دارد. ■

تمرین

۱. ثابت کنید

$$\left(\frac{۲}{p}\right)=\begin{cases}۱ & p\equiv \pm ۱ (\text{mod } ۸)\\ -۱ & p\equiv \pm ۳ (\text{mod } ۸)\end{cases}$$

۲. فرض کنید P عدد فردی با تجزیهٔ $P=\prod_{i=۱}^{n} p_i^{\alpha_i}$ باشد. نماد ژاکوبی، $(\frac{n}{P})$، به‌صورت

$$\left(\frac{n}{۱}\right)=۱,\quad \left(\frac{n}{P}\right)=\prod_{i=۱}^{n}\left(\frac{n}{p_i}\right)^{\alpha_i}$$

تعریف می‌شود.

ثابت کنید اگر P و Q فرد و نسبت به هم اول باشند، آنگاه $(\frac{P}{Q})(\frac{Q}{P})=(-۱)^{\frac{P-۱}{۲}\cdot\frac{Q-۱}{۲}}$.

۳. ثابت کنید اگر $k=(۴n-۱)^۳-۴m^۲$ که در آن m عددی طبیعی است که عامل اولی به شکل $۴k-۱$ ندارد، آنگاه معادلهٔ $y^۲=x^۳+k$ جواب صحیح ندارد.

۴. اگر $f(x)$ چندجمله‌ایی باشد که به ازای مقادیر صحیح x مقدار صحیح می‌گیرد، ثابت کنید

$$(a,p)=۱\Rightarrow \sum_{x=۱}^{p}\left(\frac{f(ax+b)}{p}\right)=\sum_{x=۱}^{p}\left(\frac{f(x)}{p}\right)$$

۵. اگر n عددی فرد و p عددی اول و فرد باشد، ثابت کنید

$$\left(\frac{n}{p}\right)=(-۱)^{\sum_{i=۱}^{\frac{p-۱}{۲}}[\frac{in}{p}]}$$

و از آنجا اثباتی دیگر برای قانون تقابل مربعی پیدا کنید.

▲ تعریف۵-۳

فرض کنیم f یک چندجمله‌ای با ضرایب صحیح باشد، و به ازای عدد اولی چون p و $\alpha\geq ۲$ای همنهشتی $f(x)\equiv ۰ (\text{mod } p^\alpha)(*)$ جوابی مانند $x=a$ داشته باشد، که در آن a طوری انتخاب شده است که $۰\leq a<p^\alpha$. این جواب در $f(x)\equiv ۰(\text{mod } p^{\alpha-۱})(**)$ نیز صدق می‌کند، a را بر $p^{\alpha-۱}$ تقسیم می‌کنیم

$$a=qp^{\alpha-۱}+r\ (۰\leq r<p^{\alpha-۱})$$

گوییم باقیماندهٔ r به وسیلهٔ a تولید می‌گردد. به عبارت دیگر هر جواب a از همنهشتی $(*)$ در بازهٔ $۰\leq a<p^\alpha$ جوابی از همنهشتی $(**)$ مانند r در بازهٔ $۰\leq r<p^{\alpha-۱}$ تولید می‌کند. حال فرض کنیم با جواب r از $(**)$ در بازهٔ $۰\leq r<p^{\alpha-۱}$ شروع کرده، می‌پرسیم آیا جوابی مانند

a از $(*)$ در بازهٔ $0 \leq a < p^\alpha$ وجود دارد که r را تولید کند. این جوابها را جوابهای مربوط به r می‌نامیم. ▲

▲ تعریف ۵-۴

مشتق چندجمله‌ای $f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$ را به‌صورت $f'(x) = \sum_{i=1}^{n} i a_i x^{i-1}$ تعریف می‌کنیم. ▲

با توجه به قضیهٔ دوجمله‌ای نتیجه می‌شود که

$$(c + p^{k-1}t)^i \equiv c^i + ic^{i-1}p^{k-1}t \pmod{p^k}$$

پس

$$f(c + p^{k-1}t) \equiv f(c) + f'(c)p^{k-1}t \pmod{p^k}$$

و به راحتی می‌توانیم این قضیهٔ مهم را ثابت کنیم:

● قضیه ۵-۶

اگر c یک ریشهٔ $f(x) \equiv 0 \pmod{p^{k-1}}$ باشد، آنگاه تعداد جوابهای مربوط به c برای معادلهٔ $f(x) \equiv 0 \pmod{p^k}$،

الف) صفر است، اگر $f'(c) \equiv 0 \pmod{p}$ و c ریشهٔ $f(x) \equiv 0 \pmod{p^k}$ نباشد؛

ب) یک است، اگر $f'(c) \not\equiv 0 \pmod{p}$؛

ج) p است، اگر $f'(c) \equiv 0 \pmod{p}$ و c ریشهٔ $f(x) \equiv 0 \pmod{p^k}$ باشد.

●

۵-۳ ریشه‌های اولیه

▲ تعریف ۵-۵

اگر $(a, m) = 1$، مرتبهٔ a به هنگ m، $\mathrm{ord}_m a$، کوچکترین عدد مثبت f است که

$$a^f \equiv 1 \pmod{m}$$

بنابر قضیهٔ اویلر $a^{\varphi(m)} \equiv 1 \pmod{m}$؛ بنابراین به ازای هر a و هر m که $(a, m) = 1$، مرتبهٔ a به هنگ m وجود دارد. ▲

تمرین

۱. مرتبهٔ ۲ را به هنگ ۵، ۷ و ۱۳ محاسبه کنید.

● قضیه ۵-۷

اگر $a^n \equiv 1 \pmod{m}$، آنگاه $\mathrm{ord}_m a | n$.

اثبات. فرض کنید $\mathrm{ord}_m a = f$ و $n = fk + r$، که در آن $0 < r < f$. در این

صورت

$$a^f \overset{m}{\equiv} 1 \Rightarrow a^{kf} \overset{m}{\equiv} 1 \Rightarrow a^{kf+r} \overset{m}{\equiv} a^r \Rightarrow a^r \equiv a^n \equiv 1 \pmod m$$

بنابراین، r که عددی مثبت و کوچکتر از f است باید برابر مرتبهٔ a باشد. تناقض حاصل ثابت می‌کند که $r = 0$ یا $\mathrm{ord}_m a | n$. ●

● **تضیه۵-۸**

فرض کنیم مرتبهٔ a به هنگ m برابر f باشد. در این صورت $a^r \overset{m}{\equiv} a^s$ اگر و تنها اگر $s \overset{f}{\equiv} r$.

اثبات. فرض کنید $s < r$. بنابراین

$$a^r \overset{m}{\equiv} a^s \Rightarrow a^{r-s} \overset{m}{\equiv} 1 \overset{\text{بنابرقضیه ۵-۷}}{\Rightarrow} f | r-s \Rightarrow r \overset{m}{\equiv} s$$

$$r \overset{f}{\equiv} s \Rightarrow r - s = kf$$

$$\Rightarrow a^{r-s} = a^{kf} \equiv 1 \pmod m \Rightarrow a^r \equiv a^s \pmod m$$

●

▲ **تعریف۵-۶**

g را یک ریشهٔ اولیه به هنگ m گویند هرگاه $\mathrm{ord}_m g = \varphi(m)$. ▲

● **تضیه۵-۹**

g یک ریشهٔ اولیه به هنگ m است اگر و فقط اگر $\{g, g^2, \cdots, g^{\varphi(m)}\}$ دستگاه مخفف‌مانده‌ها باشد.

اثبات. اگر مجموعهٔ فوق یک دستگاه مخفف‌مانده‌ها باشد آنگاه، از آنجا که $g^{\varphi(m)} \equiv 1$، به ازای هر $i < \varphi(m)$، $g^i \not\equiv 1 \pmod m$. پس g یک ریشهٔ اولیه است، یعنی $\mathrm{ord}_m g = \varphi(m)$.

اگر g یک ریشهٔ اولیه باشد، تعداد $\varphi(m)$ عدد ناهمنهشت که نسبت به m اول‌اند تشکیل یک دستگاه مخفف‌مانده‌ها می‌دهند چون اگر $i \neq j$ و $g^i \equiv g^j (m)$، آنگاه $i \equiv j \pmod{\varphi(m)}$. چون $i, j < \varphi(m)$، پس $i = j$، که تناقض است. از طرفی چون $(g, m) = 1$، پس $\forall k : (g^k, m) = 1$. ●

■ **مثال ۵-۱۰**

اگر $m > 2$، $n > 2$، $(m, n) = 1$، آنگاه mn ریشهٔ اولیه ندارد، یعنی عددی مانند a که $(a, mn) = 1$ وجود ندارد که مرتبهٔ آن $\varphi(mn)$ باشد.

چون $\varphi(m)$ و $\varphi(n)$ هر دو زوج‌اند (چرا؟) پس

$$[\varphi(m), \varphi(n)] = k\varphi(m) = k'\varphi(n) \text{ و } [\varphi(m), \varphi(n)] < \varphi(mn)$$

$$\left.\begin{array}{l} g^{[\varphi(m),\varphi(n)]} = g^{k\varphi(m)} \equiv 1 \pmod m \\ g^{[\varphi(m),\varphi(n)]} = g^{k'\varphi(n)} \equiv 1 \pmod n \end{array}\right\} \Rightarrow g^{[\varphi(m),\varphi(n)]} \equiv 1 \pmod{mn}$$

یعنی عددی کوچکتر از $\varphi(mn)$ وجود دارد که g به توان آن عدد، همنهشت واحد به هنگ mn است. ■

● **قضیه۵-۱۰**

اگر $m \neq ۱, ۲, ۴, p^{\alpha}, ۲p^{\alpha}$ که در آن p عددی اول و فرد است، آنگاه m ریشهٔ اولیه ندارد.

اثبات. از مثال ۵-۴ معلوم می‌شود که اگر m یک ریشهٔ اولیه داشته باشد آنگاه m نمی‌تواند دو عامل اول فرد متمایز داشته باشد. پس m باید به‌صورت $۲^k p^{\alpha}$ باشد. در حالت $k > ۱$ و $\alpha \geq ۱$، باز بنابر مثال، m ریشهٔ اولیه ندارد، پس m باید به‌صورت $۲p^{\alpha}$ یا p^{α} یا ۲ یا ۴ یا $۲^k (k > ۲)$ باشد. پس به‌صورت ۲^k است؛ ولی با استقرا می‌توان ثابت کرد که

$$(a, ۲) = ۱ \Rightarrow a^{۲^{k-۲}} \equiv ۱ (\mathrm{mod}\ ۲^k)$$

و $۲^{k-۲} < \varphi(۲^k)$. پس m ریشهٔ اولیه ندارد. ●

تذکر. به عبارت دقیق‌تر، می‌توان ثابت کرد که اگر $m \neq ۱, ۲, ۴, p^{\alpha}, ۲p^{\alpha}$، آنگاه

$$(a, m) = ۱ \Rightarrow a^{\varphi(m)/۲} \equiv ۱ (\mathrm{mod}\ m)$$

حال ثابت می‌کنیم اعداد ۱، ۲، ۴، p^{α}، $۲p^{\alpha}$ ریشهٔ اولیه دارند. سه مورد نخست را می‌توان با آزمایش تحقیق کرد؛ حالت p^{α} و $۲p^{\alpha}$ را ثابت خواهیم کرد.

ابتدا ثابت می‌کنیم به هنگ p ریشهٔ اولیه‌ای وجود دارد:

فرض می‌کنیم تعداد $f(d)$ عضو از $\mathbf{Z}_p$ مرتبهٔ d دارند که $d | p-۱$. چون هر عضو $\mathbf{Z}_p$ مرتبه‌ای دارد که مقسوم علیه $p-۱$ است، پس $\sum_{d|p-۱} f(d) = p - ۱$. از طرفی می‌دانیم که $\sum_{d|p-۱} \varphi(d) = p - ۱$، و لذا با توجه به ضربی بودن f و قضیه ۵-۳ نتیجه می‌شود $f(d) = \varphi(d)$. پس نتیجهٔ مهم زیر به‌دست می‌آید

نتیجه. تعداد $\varphi(p-۱)$ ریشهٔ اولیه به هنگ p در $\mathbf{Z}_p$ وجود دارد.

حال به‌صورت استقرایی ثابت می‌کنیم که به هنگ p^{α} ریشهٔ اولیه‌ای وجود دارد. g را یک ریشهٔ اولیهٔ p می‌گیریم. به وضوح $g + kp$ نیز یک ریشهٔ اولیه است. بنابر قاعدهٔ بسط دوجمله‌ای

$$(g + kp)^{p-۱} = g^{p-۱} + (p-۱) g^{p-۲}(kp) + \lambda p^۲$$

با فرض $g^{p-۱} = ۱ + \lambda' p$ به‌دست می‌آید

$$(g + kp)^{p-۱} = ۱ + p(\lambda' - g^{p-۲}k + \lambda'' p) = ۱ + pu_۱$$

چون $g^{p-۲} \not\equiv ۱ (\mathrm{mod}\ p)$، پس می‌توان k را طوری اختیار کرد که $p \nmid u_۱$. به‌طور استقرایی فرض می‌کنیم $u_{\alpha-۱}$ای موجود است که

$$(g + kp)^{\varphi(p^{\alpha-۱})} = ۱ + p^{\alpha-۱} u_{\alpha-۱}$$

و $p\nmid u_{\alpha-1}$. حال نشان می‌دهیم $g+kp$ یک ریشهٔ اولیه به هنگ p^α است. مرتبهٔ $g+kp$ به هنگ p^α را f می‌گیریم. چون $(g+kp)^f\equiv 1(p^{\alpha-1})$، پس f باید بر $p^{\alpha-2}(p-1)$ بخش‌پذیر باشد و $p^{\alpha-1}(p-1)$ باید بر f بخش‌پذیر باشد؛ پس $f=p^{\alpha-2}(p-1)$ یا $f=p^{\alpha-1}(p-1)$؛ ولی

$$(g+kp)^{p^{\alpha-2}(p-1)}=1+p^{\alpha-1}u_{\alpha-1}\not\equiv 1 (\mathrm{mod}\ p^\alpha)$$

پس $g+kp$ یک ریشهٔ اولیه به هنگ p^α است و

$$(g+kp)^{p^{\alpha-1}(p-1)}=(1+p^{\alpha-1}u_{\alpha-1})^p=1+p^\alpha u_{\alpha-1}+\lambda p^{\alpha+1}$$
$$=1+p^\alpha(u_{\alpha-1}+\lambda p)=1+p^\alpha u_\alpha$$

و $p\nmid u_\alpha$ چون $p\nmid u_{\alpha-1}$. اکنون به استقرا نتیجه می‌شود که $g+kp$ یک ریشهٔ اولیه به هنگ هر p^α است.

نتیجه. اگر g یک ریشهٔ اولیه به هنگ p باشد و $g^{p-1}\not\equiv 1(\mathrm{mod}\ p^2)$، آنگاه g یک ریشهٔ اولیه به هنگ هر p^α است.

با توجه به اینکه $\varphi(2p^\alpha)=\varphi(p^\alpha)$، اگر g یک ریشهٔ اولیهٔ فرد به هنگ p^α باشد [که لزوماً وجود دارد (چرا؟)] آنگاه g یک ریشهٔ اولیه به هنگ $2p^\alpha$ است.

■ مثال ۵-۱۱

عددهای فرد n ی را به‌دست آورید که 3^n+1 بر n بخش‌پذیر باشد.

حل.

$$3^n+1\equiv 0(\mathrm{mod}\ n)\Rightarrow 3^{2n}\equiv 1(\mathrm{mod}\ n)$$

فرض می‌کنیم p کوچکترین عامل اول n باشد (یک «کَلَکِ» مفید). داریم

$$3^{2n}\equiv 1(\mathrm{mod}\ p)\Rightarrow \mathrm{ord}_p 3|2n$$

چون $\mathrm{ord}_p 3<p$، پس p نسبت به n اول است. چون n عامل کوچکتر از p ندارد، پس

$$\mathrm{ord}_p 3|2\Rightarrow \mathrm{ord}_p 3=2\Rightarrow 3^2\equiv 1(\mathrm{mod}\ p)$$

$p=2$، و لذا n فردِ نمی‌باشد. پس تنها جواب، $n=1$ است که عامل اول ندارد. ■

■ مثال ۵-۱۲

بزرگترین توانِ ۳ را پیدا کنید که عدد $2^{3^n}+1$ بر آن بخش‌پذیر باشد.

حل. چون $2^2\equiv 1(\mathrm{mod}\ 3)$ و $2^2\not\equiv 1(\mathrm{mod}\ 3^2)$، پس ۲ یک ریشهٔ اولیهٔ به هنگ 3^α است. از طرفی اگر

$$2^{3^n}+1\equiv 0(\mathrm{mod}\ 3^f)\Leftrightarrow 2^{2\times 3^n}\equiv 1(\mathrm{mod}\ 3^f)\Leftrightarrow \varphi(3^f)|2\times 3^n$$
$$\Rightarrow 3^{f-1}|3^n\Rightarrow \max f=n+1$$

■

■ **مثال ۵-۱۳**

اگر p عددی اول باشد نشان دهید هر مقسوم‌علیه اولِ $۲^p + ۱$ غیر از ۳، به‌صورت $۲kp + ۱$ است.

حل.

$$۲^p + ۱ \equiv ۰ \pmod{q} \Rightarrow ۲^{۲p} \equiv ۱ \pmod{q} \Rightarrow \operatorname{ord}_q ۲ | ۲p, \operatorname{ord}_q ۲ | q - ۱$$

چون $\operatorname{ord}_q ۲ \nmid ۲$، پس $\operatorname{ord}_q ۲ | p$ و $\operatorname{ord}_q ۲ = p$. پس $p | q - ۱$، یعنی $q = kp + ۱$، و لذا k باید زوج باشد. پس $q = ۲k'p + ۱$. ■

تمرین

۱ . تمام nهایی را به‌دست آورید که $\frac{۲^n + ۱}{n^۲} \in \mathbb{Z}$.

۲ . ثابت کنید اعداد ۱، ...، $p - ۱$ را می‌توان دور یک دایره چنان چید که به ازای هر سه عدد متوالی a، b و c، $p | b^۲ - ac$.

۳ . ثابت کنید مقسوم‌علیه‌های اول $۲^{۲^n} + ۱$ به‌صورت $۲^{n+۱}k + ۱$ می‌باشند $(k \in \mathbb{N})$.

۴ . ثابت کنید اگر $n > ۱$، آنگاه $n \nmid ۲^n - ۱$.

۵ . ثابت کنید $\operatorname{ord}_m a^k = \frac{\operatorname{ord}_m a}{(\operatorname{ord}_m a, k)}$.

۶ . ثابت کنید $(a^m - ۱, a^n - ۱) = a^{(m,n)} - ۱$.

۷ . اگر $n_۱$، $n_۲$، $\cdots, n_k$ عددهایی طبیعی باشند که

$$n_۱ \mid ۲^{n_۱} - ۱, n_۲ \mid ۲^{n_۲} - ۱, \cdots, n_k \mid ۲^{n_k} - ۱$$

ثابت کنید $n_۱ = n_۲ = \cdots = n_k = ۱$.

۸ . اگر $k < p - ۱$، ثابت کنید $p \mid ۱^k + ۲^k + \cdots + (p - ۱)^k$.

۵-۳ اندیس

دیدیم که اگر g یک ریشهٔ اولیه به هنگ m باشد، مجموعهٔ $\{۱, g, g^۲, \cdots, g^{\varphi(m)-۱}\}$ یک دستگاه مخفف‌مانده‌هاست. پس به ازای هر a که $(a, m) = ۱$، iی منحصر به فردی، $۰ \leq i \leq \varphi(m) - ۱$، وجود دارد که $g^i \equiv a \pmod{m}$؛ این i را $\operatorname{ind}_g a$، یا به اختصار $\operatorname{ind} a$، گوییم ("ind"، مخفف "index" به معنای اندیس است). صحت گزاره‌های صفحهٔ بعد

به راحتی تحقیق می‌شود (البته توجه کنید که ind فقط برای اعداد متباین با m تعریف می‌شود).

۱. $\text{ind}(ab) \equiv \text{ind}\ a + \text{ind}\ b (\text{mod}\ \varphi(m))$

۲. $\text{ind}\ a^n \equiv n\ \text{ind}\ a (\text{mod}, \varphi(m))$

۳. $\text{ind}_g a \equiv \text{ind}_{g'} a . \text{ind}_g g' (\text{mod} \varphi(m))$

مشاهده می‌شود که ind تشابه زیادی با log دارد. کسانی که با نظریهٔ گروهها آشنایی دارند، می‌توانند تحقیق کنند که اگر n ریشهٔ اولیه داشته باشد آنگاه گروه $(\mathbf{Z}_n, +)$ تحت تابع ind با گروه دوری $(\mathbf{Z}_n^*, \times)$ یکریخت است ($\mathbf{Z}_n^*$ مجموعهٔ اعدادی است که از n کوچکتر و نسبت به n اول‌اند)، و این مشابه یکریختی $(\mathbf{R}, +)$ با $(\mathbf{R}^+, .)$ تحت تابع log است.

لم.
اگر m ریشهٔ اولیه داشته باشد و $(a, m) = 1$، آنگاه معادلهٔ $x^n \equiv a (\text{mod}\ m)$ جواب دارد اگر و فقط اگر $(n, \varphi(m)) | \text{ind}\ a$؛ در این صورت این معادله تعداد $(n, \varphi(m))$ جواب متمایز به هنگ m دارد.

اثبات. از طرفین اندیس می‌گیریم، به‌دست می‌آید

$$n\ \text{ind}\ x \equiv \text{ind}\ a (\text{mod}\ \varphi(m))$$

این معادله جواب دارد اگر و فقط اگر $(n, \varphi(m)) | \text{ind}\ a$، و در این صورت تعداد $(n, \varphi(m))$ جواب متمایز برای ind x پیدا می‌شود، و در نتیجه تعداد $(n, \varphi(m))$ جواب برای x پیدا می‌شود.

● **قضیه۵-۱۱**
اگر m ریشهٔ اولیه داشته باشد و $(a, m) = 1$، آنگاه معادلهٔ $x^n \equiv a (\text{mod}\ m)$ جواب دارد اگر و فقط اگر $a^{\frac{\varphi(m)}{(n, \varphi(m))}} \equiv 1 (\text{mod}\ m)$؛ در این صورت این معادله تعداد $(n, \varphi(m))$ جواب متمایز به هنگ m دارد.

اثبات. $a^{\frac{\varphi(m)}{(n, \varphi(m))}} \equiv 1 (\text{mod}\ m)$ اگر و فقط اگر

$$\frac{n}{(n, \varphi(m))} \text{ind}\ a \equiv (\text{mod}\ \varphi)(m)$$

و اگر و فقط اگر $(n, \varphi(m)) | \text{ind}\ a$. پس بنابر لم قبل قضیه ثابت می‌شود. ●

نتیجه. معادله $x^2 \equiv -1 (\text{mod}\ p)$ جواب دارد اگر و فقط اگر p به‌صورت $4k + 1$ باشد.

تمرین

۱. ثابت کنید اگر $4k + 3$ عددی اول باشد مجموعهٔ $\{a, a+1, \cdots, a + 4k + 1\}$ را نمی‌توان به دو مجموعه افراز کرد که حاصل‌ضرب اعضای آنها مساوی باشد.

۲. فرض کنید $(a,p)=1$، و n را تعداد اعضایی از مجموعهٔ $\{a, 2a, \cdots, \frac{1}{2}(p-1)a\}$ بگیرید که باقیماندهٔ تقسیم آنها بر p، بین $\frac{1}{2}(p+1)$ و $p-1$ است. ثابت کنید معادلهٔ $x^2 \equiv a \pmod{p}$ دارای جواب است اگر و تنها اگر n زوج باشد.

۳. ثابت کنید معادلهٔ $x^2 \equiv 2 \pmod{p}$ دارای جواب است اگر و فقط اگر

$$p \equiv \pm 1 \pmod{8}$$

(p عددی فرد و اول است).

۴. فرض کنید p عدد اولی است که $p-1$ توانی از ۲ است. ثابت کنید عدد a، $(a,p)=1$، ریشهٔ اولیه به هنگ p است اگر و فقط اگر $a^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1 \pmod{p}$.

۵. ثابت کنید معادلهٔ $x^2 \equiv a \pmod{2^n}$، $n > 2$، جواب دارد اگر و فقط اگر

$$a \equiv 1 \pmod{8}$$

(a فرد است).

۶

نامساویهای هندسی ۱

علامت‌گذاری

A, B, C	رئوس مثلث و زوایای آن
a, b, c	اضلاع مثلث
m_a, m_b, m_c	میانه‌ها
h_a, h_b, h_c	ارتفاعها
d_a, d_b, d_c	نیمسازها
R	شعاع دایرهٔ محیطی
r	شعاع دایرهٔ محاطی داخلی
r_a, r_b, r_c	شعاعهای دایره‌های محاطی خارجی
p	نصف محیط
S	مساحت
O	مرکز دایرهٔ محیطی
I	مرکز دایرهٔ محاطی داخلی
H	مرکز ارتفاعی
G	محل تلاقی میانه‌ها
I_a, I_b, I_c	مراکز دوایر محاطی خارجی

▲ تعریف۶-۱

$$M_r(x_1,\dots,x_n)=\begin{cases}\left(\frac{x_1^r+x_2^r+\cdots+x_n^r}{n}\right)^{1/r} & 0<|r|<\infty\\ \sqrt[n]{x_1x_2\dots x_n} & r=0\\ \min\{x_1,x_2,\dots,x_n\} & r=-\infty\\ \max\{x_1,x_2,\dots,x_n\} & r=+\infty\end{cases}$$

▲

▲ تعریف۶-۲ (تعریف جمع و ضرب دوری)
$\sum f(a,b,c)$ یعنی

$$f(a,b,c)+f(b,c,a)+f(c,a,b)$$

$\Pi f(a,b,c)$ یعنی

$$f(a,b,c)\cdot f(b,c,a)\cdot f(c,a,b)$$

مثلاً برای مجموع اضلاع مثلث می‌نویسیم $\sum a$ یا برای $ab+bc+ca$ می‌نویسیم $\sum ab$. ▲

۶-۱ اتحادهای مهم

۶-۱-۱ مقدمه

در این فصل ما سعی می‌کنیم روابط مهم بین اجزای مثلث را بر حسب سه کمیت R، r و p بیان کنیم؛ و در فصل بعد با بیان نامساویهایی مهم دربارهٔ این سه کمیت، نامساویهای مهمی برای تمام اجزای مثلث می‌توانیم به‌دست آوریم. چون اجزای مهم مثلث مثل اضلاع، میانه‌ها، ارتفاعات و ...سه‌گانه هستند(سه‌ضلع ، سه‌میانه، و ...) روش کلی ما در این بخش، یک معادله درجه سوم با ضرایبی که برحسب R، r و p است می‌باشد که سه کمیت مورد نظر، ریشه‌های آن باشند. یعنی

$$x^3+f_1(R,r,p)x^2+f_2(R,r,p)x+f_3(R,r,p)=0$$

که ریشه‌های آن می‌توانند سه ضلع مثلث، سه‌میانه، سه‌ارتفاع، و ... باشند. از آنجا با استفاده از روابط ویت می‌توان عبارات متقارن اولیه، یعنی

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3=\sigma_1\\ x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1=\sigma_2\\ x_1x_2x_3=\sigma_3\end{cases}\qquad (۶-۱)$$

را برحسب R، r و p پیدا کرد؛ و از آنجا که هر رابطه متقارن نسبت به x_1، x_2، x_3 می‌توان به صورت ترکیبی از سه رابطهٔ (۶-۱) بیان نمود، اتحادهای بسیاری را می‌توان ثابت کرد. برای نمونه $S_k=x_1^k+x_2^k+x_3^k$ را به ازای چند k اولیه در زیر حساب کرده‌ایم

$$S_2=\sigma_1^2-2\sigma_2$$

$$S_3=\sigma_1^3-3\sigma_1\sigma_2+3\sigma_3$$

$$S_4=\sigma_1^4-4\sigma_1^2\sigma_2+2\sigma_2^2+4\sigma_1\sigma_3$$

$$S_5=\sigma_1^5-5\sigma_1^3\sigma_2+5\sigma_1\sigma_2^2+5\sigma_1^2\sigma_3-5\sigma_2\sigma_3$$

$$\vdots$$

همچنین می‌توان رابطه‌های زیر را به‌دست آورد

$$S_{-1} = \frac{\sigma_2}{\sigma_3}$$

$$S_{-2} = \frac{\sigma_2^2 - 2\sigma_1\sigma_3}{\sigma_3^2}$$

$$S_{-3} = \frac{\sigma_2^3 - 3\sigma_1\sigma_2\sigma_3 + 3\sigma_3^2}{\sigma_3^3}$$

همچنین اگر

$$x_1 + x_2 + x_3 = a$$

$$x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 = b$$

$$x_1x_2x_3 = c$$

آنگاه می‌توان نتیجه گرفت x_1، x_2، x_3 ریشه‌های معادله زیر هستند

$$x^3 - ax^2 + bx - c = 0$$

تمرین

۱. رابطهٔ بازگشتی زیر را برای S_k (با تعریف داده شده در متن) ثابت کنید

$$S_k = \sigma_1 S_{k-1} - \sigma_2 S_{k-2} + \sigma_3 S_{k-3}$$

۲. رابطه زیر را ثابت کنید

$$S_k = k \sum_{\lambda_1+2\lambda_2+3\lambda_3=k} \frac{(-1)^{k-\lambda_1-\lambda_2-\lambda_3}(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3-1)!}{\lambda_1!\lambda_2!\lambda_3!}\sigma_1^{\lambda_1}\sigma_2^{\lambda_2}\sigma_3^{\lambda_3}$$

(یعنی مجموع فوق روی تمام λ_1، λ_2، λ_3های نامنفی زده می‌شود که

$$\lambda_1 + 2\lambda_2 + 3\lambda_3 = k$$

شود).

۳. اعداد حقیقی a، b، c در دو رابطه $abc > 0$ و $a+b+c > 0$ صدق می‌کنند. ثابت کنید به ازای هر $n \in \mathbb{N}$،

$$a^n + b^n + c^n > 0$$

۲-۱-۶ معادلهٔ مربوط به اضلاع

واضح است که $a+b+c = 2p$ و چون $S = \frac{abc}{4R}$ و $S = pr$ سپس $abc = 4Rrp$ پس کافی است $ab+ac+bc$ را برحسب R، r و p بیان کنیم: اگر از دو رابطه مثلثی زیر استفاده

کنیم

$$p-a=r\operatorname{cotg}\frac{\alpha}{۲}$$

$$\operatorname{cotg}\frac{\alpha}{۲}=\sqrt{\frac{p(p-a)}{(p-b)(p-c)}}$$

نتیجه می‌شود

$$ab+ac+bc=r^۲+p^۲+۴rR$$

به‌طور خلاصه سه رابطه مهم زیر را که باید به خاطر سپرد به‌دست آوردیم

$$a+b+c=۲p$$

$$ab+ac+bc=r^۲+p^۲+۴rR$$

$$abc=۴rRp$$

پس معادله‌ای که سه ضلع در آن صدق می‌کنند به‌صورت زیر است

$$x^۳-۲px^۲+(r^۲+p^۲+۴rR)x-۴rRp=۰$$

همچنین با استفاده از رابطه سینوسها، $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=۲R$ به‌دست می‌آید

$$\sin A+\sin B+\sin C=p/R$$

$$\sin A\sin B+\sin B\sin C+\sin C\sin A=\frac{r^۲+p^۲+۴rR}{۴R^۲}$$

$$\sin A\sin B\sin C=\frac{rp}{۴R^۲}$$

حال به محاسبه چند عبارت متقارن برحسب R، r و p می‌پردازیم (اثباتها ساده هستند):

۱. $\sum a^۲=۲(p^۲-r^۲-۴rR)$

۲. $\sum a^۳=۲p(p^۲-۳r^۲-۶rR)$

۳. $\Pi(a+b)=۲p(p^۲+r^۲+۲Rr)$

۴. $\sum\frac{۱}{a}=\frac{p^۲+r^۲+۴rR}{۴rRp}$

۵. $\sum\frac{۱}{bc}=\frac{۱}{۲Rr}$

۶. $\sum\frac{a+b}{c}=\frac{p^۲+r^۲-۲Rr}{۲Rr}$

۷. $\sum\frac{a}{p-a}=\frac{۴R-۲r}{r}$

۸. $\sum\frac{a^۲}{p-a}=\frac{۴p(R-r)}{r}$

تذکر. در روابط ۱ تا ۶ به‌جای a، b و c، $۲R\sin A$، $۲R\sin B$ و $۲R\sin C$ قرار دهید و اتحاد مربوط را بنویسید.

۶-۱-۳ معادله‌ای که $\cos A$، $\cos B$ و $\cos C$ ریشه‌های آن باشند.

می‌دانیم

$$۲R\sin A = a$$

همچنین

$$p-a = r\operatorname{cotg}\frac{A}{۲} = r\sqrt{\frac{۱+\cos A}{۱-\cos A}}$$

پس

$$۲R\sqrt{۱-\cos^۲ A} + r\sqrt{\frac{۱+\cos A}{۱-\cos A}} = p$$

با ساده کردن نتیجه می‌شود

$$۴R^۲\cos^۳ A - ۴R(R+r)\cos^۲ A + (p^۲+r^۲-۴R^۲)\cos A$$
$$+(۲R+r)^۲ - p^۲ = ۰$$

با استفاده از رابطه بین ریشه‌ها نتیجه می‌شود

۹. $\sum \cos A = \frac{R+r}{R}$

۱۰. $\sum \cos A\cos B = \frac{r^۲+p^۲-۴R^۲}{۴R^۲}$

۱۱. $\Pi \cos A = \frac{p^۲-(۲R+r)^۲}{۴R^۲}$

۱۲. $\sum \cos^۲ A = \frac{۶R^۲+۴Rr+r^۲-p^۲}{۲R^۲}$

۱۳. $\Pi(\cos A+\cos B) = \frac{۲Rr^۲+r^۳+p^۲r}{۴R^۳}$

۱۴. $\sum \frac{۱}{\cos A} = \frac{p^۲+r^۲-۴Rr}{۲Rr}$

۱۵. $\sum \frac{۱}{\sin A} = \frac{p^۲+r^۲+۴Rr}{۲pr}$

۱۶. $\sum \frac{۱}{\cos A\cos B} = \frac{۲R}{r}$

۶-۱-۴ معادله‌ای که $\sin^۲\frac{A}{۲}$، $\sin^۲\frac{B}{۲}$، $\sin^۲\frac{C}{۲}$ ریشه‌های آن هستند.

از آنجایی که $\cos A = ۱-۲\sin^۲\frac{A}{۲}$، با تبدیل x به $۲x-۱$ در معادله مربوط به cos معادله موردنظر به‌صورت زیر به‌دست می‌آید

$$۱۶R^۲x^۳ - ۸R(۲R-r)x^۲ + (p^۲+r^۲-۸Rr)x - r^۲ = ۰$$

از آنجا با استفاده از روابط بین ریشه‌ها به‌دست می‌آید

۱۷. $\sum \sin^۲\frac{A}{۲} = \frac{۲R-r}{۲R}$

۱۸. $\sum \sin^۲\frac{A}{۲}\sin^۲\frac{B}{۲} = \frac{p^۲+r-۸Rr}{۱۶R^۲}$

۱۹. $\Pi \sin^۲ \frac{A}{۲} = \frac{r^۲}{۱۶R^۲} \Rightarrow \Pi \sin \frac{A}{۲} = \frac{r}{۴R}$

۲۰. $\sum \sin^۴ \frac{A}{۲} = \frac{۸R^۲+r^۲-p^۲}{۸R^۲}$

همچنین با استفاده از برابری بدیهی $\cos^۲ \frac{A}{۲} = ۱ - \sin^۲ \frac{A}{۲}$ به‌دست می‌آید.

۲۱. $\sum \cos^۲ \frac{A}{۲} = \frac{۴R+r}{۲R}$

۲۲. $\sum \cos^۲ \frac{A}{۲} \cos^۲ \frac{B}{۲} = \frac{p^۲+(۴R+r)^۲}{۱۶R^۲}$

۲۳. $\sum \frac{۱}{\cos^۲ \frac{A}{۲}} = \frac{p^۲+(۴R+r)}{p^۲}$

۲۴. $\Pi \cos^۲ \frac{A}{۲} = \frac{p^۲}{۱۶R^۲} \Rightarrow \Pi \cos \frac{A}{۲} = \frac{p}{۴R}$

۶-۱-۵ معادله‌ای که $\tan \frac{A}{۲}$، $\tan \frac{B}{۲}$، $\tan \frac{C}{۲}$ ریشه‌های آن باشد.

$$px^۳ - (۴R + r)x^۲ + px - r = ۰$$

(اثبات به عهدهٔ خواننده).

از معادلهٔ فوق اتحادهای زیر نتیجه می‌شود

۲۵. $\sum \tan \frac{A}{۲} = \frac{۴R+r}{p}$

۲۶. $\Pi \tan \frac{A}{۲} = \frac{r}{p}$

۲۷. $\sum \tan^۲ \frac{A}{۲} = \frac{(۴R+r)^۲-۲p^۲}{p^۲}$

۲۸. $\Pi(\tan \frac{A}{۲} + \tan \frac{B}{۲}) = \frac{۴R}{p}$

۲۹. $\sum \tan \frac{A}{۲} \tan \frac{B}{۲} = ۱$

۳۰. $\sum a \tan \frac{A}{۲} = ۲(۲R - r)$

۶-۱-۶ معادله‌ای که r_a، r_b، r_c ریشه‌های آن هستند.

می‌دانیم

$$\frac{r_a}{r} = \frac{p}{p-a} \Longrightarrow \frac{۱}{r_a} = \frac{p-a}{pr}$$

پس می‌توان با استفاده از روابط بین b, a و c نتیجه گرفت

۳۱. $\frac{۱}{r_a} + \frac{۱}{r_b} + \frac{۱}{r_c} = \frac{۱}{r}$

۳۲. $\frac{۱}{r_a r_b} + \frac{۱}{r_b r_c} + \frac{۱}{r_c r_a} = \frac{۴R+r}{p^۲ r}$

۳۳. $\frac{۱}{r_a r_b r_c} = \frac{۱}{p^۲ r}$

پس معادله مورد نظر به‌صورت زیر است(چرا؟)

$$x^3-(4R+r)x^2+p^2x-p^2r=0$$

بعضی روابط مهم دیگر عبارت‌اند از

۳۴. $\sum r_a=4R+r$

۳۵. $\sum r_a^2=(4R+r)^2-2p^2$

۳۶. $\sum r_a^3=(4R+r)^3-12p^2R$

۳۷. $\Pi(r_a+r_b)=4p^2R$

۳۸. $\sum \frac{r_a+r_b}{r_c}=\frac{2R-2r}{r}$

۶-۱-۷ معادله‌ای که h_a، h_b، h_c ریشه‌های آن هستند.

$$2Rx^3-(p^2+r^2+4Rr)x^2+4p^2rx-4p^2r^2=0$$

که از آنجا نتیجه می‌شود

۳۹. $\sum h_a=\frac{1}{2R}(p^2+r^2+4Rr)$

۴۰. $\Pi h_a=\frac{2p^2r^2}{R}$

۴۱. $\sum \frac{1}{h_a}=\frac{1}{r}$

۴۲. $\sum \frac{h_a+h_b}{h_c}=\frac{p^2+r^2-2Rr}{2Rr}$

بعضی روابط ترکیبی عبارت‌اند از

۴۳. $\sum \frac{1}{r_a}=\sum \frac{1}{h_a}$

۴۴. $r\sum r_ar_b=\Pi h_a$

۴۵. $\sum \frac{a}{p-a}=\sum \frac{r_a+r_b}{r_c}$

۴۶. $\sum \frac{b+c}{a}=\sum \frac{h_b+h_c}{h_a}$

۶-۲ نامساویهای R، r و p

در فصل قبل عبارات زیادی را برحسب R، r و p به‌دست آوردیم. حال در این فصل با بیان نامساویهای بین r، R و p می‌توان نامساویهای بسیاری را ثابت کرد.

۶-۲-۱ نامساوی R و r

بنا به فرمول اویلر $OI^۲ = R^۲ - ۲rR$ (اگر اثبات را ندیده‌اید، سعی کنید اثبات کنید.) از اینجا نتیجه می‌شود $R \geq ۲r$. همچنین $R = ۲r$ اگر و فقط اگر مثلث، متساوی‌الاضلاع باشد. همچنین می‌توان ثابت کرد اگر $R \geq ۲r$ آنگاه مثلثی با شعاع دایرهٔ محیطی R و دایرهٔ محاطی داخلی r موجود خواهد بود. پس نامساوی ذکر شده، قویترین نامساوی است یعنی اگر $R \geq f(r)$ آنگاه حتماً رابطه زیر برقرار است

$$R \geq ۲r \geq f(r)$$

با استفاده از این نامساوی، از روابط ۷، ۸، ۹، ۱۶، ۱۷، ۱۹، ۲۱ و ۳۸ نامساویهای زیر نتیجه می‌شود

۷'. $\sum \frac{a}{p-a} \geq ۶$

۸'. $\sum \frac{a^۲}{p-a} \geq ۲(a+b+c)$

۹'. $\sum \cos A \leq \frac{۳}{۲}$

۱۶'. $\sum \frac{۱}{\cos A \cos B} \geq ۴$

۱۷'. $\sum \sin^۲ \frac{A}{۲} \geq \frac{۳}{۴}$

۱۹'. $\pi \sin \frac{A}{۲} \leq \frac{۱}{۸}$

۲۱'. $\sum \cos^۲ \frac{A}{۲} \leq \frac{۹}{۴}$

۳۸'. $\sum \frac{r_a + r_b}{r_c} \geq ۶$

۶-۲-۲ رابطهٔ مهم بین R، r و p

از آنجایی که $\frac{۱}{۴r^۲}(a-b)^۲(b-c)^۲(c-a)^۲$ عبارتی متقارن برحسب a، b و c است. پس می‌توان آن را به‌صورت ترکیبی از عبارات متقارن اولیه یا برحسب p, r, R نمایش داد که پس از ساده کردن عبارت زیر به‌دست می‌آید

$$-p^۴ + ۲(۲R^۲ + ۱۰Rr - r^۲)p^۲ - r(۴R+r)^۳$$

از آنجایی که عبارت اول همواره مثبت بود پس با استفاده از Δ برای معادله درجهٔ دوم نامساوی زیر نتیجه می‌شود

$$۲R^۲ + ۱۰Rr - r^۲ - ۲(R-۲r)\sqrt{R^۲ - ۲Rr} \leq p^۲ \leq$$
$$۲R^۲ + ۱۰Rr - r^۲ + ۲(R-۲r)\sqrt{R^۲ - ۲Rr}$$

یکی از دو علامت نامساوی، تساوی می‌شود اگر و فقط اگر مثلث، متساوی‌الساقین باشد و هر دو تساوی می‌شود اگر و فقط اگر مثلث، متساوی‌الاضلاع باشد.

اگر طرف چپ را به $f(r,R)$ و طرف راست را به $F(r,R)$ نمایش دهیم به رابطه خلاصه شدهٔ زیر می‌رسیم

$$f(r,R) \leq p^۲ \leq f(r,R) \quad (*)$$

ثابت می‌شود نامساوی فوق قویترین نامساوی برای $p^۲$ است؛ یعنی اگر $G(r,R)$ و $g(r,R)$ توابعی حقیقی و همگن باشند که

$$g(r,R) \leq p^۲ \leq G(r,R)$$

آنگاه می‌توان رابطهٔ زیر را نوشت

$$g(r,R) \leq f(r,R) \leq p^۲ \leq f(r,R) \leq G(r,R)$$

یعنی با اطمینان خوبی می‌توانیم بگوییم نامساوی که با استفاده از نامساوی $(*)$ حل نشود، غلط است! (البته نامساویی که برحسب $p^۲$، R و r باشد).

نامساوی $(*)$ خیلی قوی است. حال بعضی حالتهای ضعیفتر را بررسی می‌کنیم

۴۷. $\sqrt{۳}p \leq ۴R + r$

۴۸. $۱۶Rr - ۵r^۲ \leq p^۲ \leq ۴R^۲ + ۴Rr + ۳r^۲$

۴۹. $p \leq ۲R + (۳\sqrt{۳} - ۴)r$

۵۰. $۲R^۲ + ۸Rr + ۳r^۲ \leq p^۲ \leq ۵R^۲ + ۴Rr - r^۲$

حال سعی می‌کنیم با استفاده از این نامساویها، نامساویهایی از اتحادهای بخش ۶-۱ به‌دست آوریم (برای راحتی از نامساوی نسبتاً قوی زیر استفاده می‌کنیم

$$۲R^۲ + ۸Rr + ۳r^۲ \leq p^۲ \leq ۴R^۲ + ۴Rr + ۳r^۲$$

۱'. $۴(R + ۲Rr + r^۲) \leq \sum a^۲ \leq ۴(۲R^۲ + r^۲)$

۲'. $۴Rp(R + r) \leq \sum a^۳ \leq ۴Rp(۲R - r)$

۶'.
$$\sum \frac{a+b}{c} \leq \frac{R^۲ + rR + ۲r^۲}{Rr}, \sum \frac{a+b}{c} \geq \frac{R^۲ + ۳Rr + ۲r^۲}{Rr}$$

۱۱'. $\frac{۱}{۲}\left(\frac{R+r}{R}\right)^۲ - ۱ \leq \Pi \cos A \leq \frac{r^۲}{۲R^۲} \leq \frac{۱}{۸}$

۱۲'.
$$\frac{۳}{۴} \leq \frac{R^۲ - r^۲}{R^۲} \leq \sum \cos^۲ A \leq \frac{۲R^۲ - ۲Rr - r^۲}{R^۲} \leq ۳ \times \frac{(R-r)^۲}{R^۲} < ۳$$

۱۴'.
$$۱۰\frac{r}{R} \leq \frac{R^۲ + ۲r^۲ + ۲Rr}{Rr} \leq \sum \frac{۱}{\cos A} \leq \frac{۲R^۲ + ۲r^۲ + Rr}{Rr} \leq ۳\frac{R}{r}$$

.۱۸′

$$\frac{۱}{۸} \leq \frac{۱}{۸} + \frac{r^۲}{۴R^۲} \leq \sum \sin^۲ \frac{A}{۲} \sin^۲ \frac{B}{۲} \leq \frac{R^۲ + r^۲ - Rr}{۴R^۲} \leq \frac{۱}{۴}$$

تمرین

۱. نامساویهای زیر را ثابت کنید

$$\frac{۳r(۴R+r)}{(۷R-۵r)^۲} \leq \frac{r}{۲R-r} \leq \frac{۳r}{۴R+r} \leq \frac{r(۴R+r)}{(۲R-r)(۲R+۵r)}$$

$$\leq \frac{r(۱۶R+۳r)}{(۴R-r)(۴R+۷r)} \leq \frac{r}{R+r} \leq \frac{r(۱۶R-۵r)}{(۴R+r)^۲}$$

$$\leq \frac{۴r(۱۲R^۲ - ۱۱Rr + r^۲)}{(۳R-۲r)(۴R+r)^۲} \leq \left(\frac{p}{۴R+r}\right)^۲ \leq \frac{R}{۲(۲R-r)}$$

$$\leq \frac{۴R^۲ + ۴Rr + ۳r^۲}{(۴R+r)^۲} \leq \frac{۱}{۳} \leq \frac{۴R+r}{۲۷r} \leq \frac{R^۲}{۴r(R+r)}!$$

۲. نتیجه زیر را که قویتر از $R \geq ۲r$ است، ثابت کنید.

$$\frac{R}{r} \geq \frac{a}{b} + \frac{b}{a}$$

نقاط مهم در مثلث و روابط طولی آنها

حال به محاسبه فاصله بین نقاط مهم یعنی O، I، H و G می‌پردازیم. چون بعضی اوقات این فاصله‌ها صفر می‌شود، می‌توانیم نامساویهای نسبتاً خوبی به‌دست آوریم

۱. $OI^۲ = R^۲ - ۲Rr$

۲. $OG^۲ = R^۲ - \frac{۱}{۹}\sum a^۲ = \frac{۱}{۹}(۹R^۲ + ۸Rr + ۲r^۲ - ۲p^۲)$

۳. $OH^۲ = ۹R^۲ - \sum a^۲ = ۹R^۲ + ۸Rr + ۲r^۲ - ۲p^۲ = ۹OG^۲$

۴. $GI^۲ = \frac{۱}{۹}(p^۲ + ۵r^۲ - ۱۶Rr)$

۵. $HI^۲ = ۴R^۲ + ۴Rr + ۳r^۲ - p^۲$

۶. $GH^۲ = ۴OG^۲ = \frac{۴}{۹}(۹R^۲ + ۸Rr + ۲r^۲ - ۲p^۲)$

نامساوی اردیش ـ موردل

این نامساوی با اثباتی بسیار جالب که از آن می‌آوریم، هر چند چندان سخت نیست، ولی چند سال حل نشده بود. صورت کامل قضیه به‌صورت صفحهٔ بعد است

● قضیه۶-۱

P نقطه‌ای داخل مثلث ABC است. آنگاه

۱. $PA + PB + PC \geq ۲(PH_۱ + PH_۲ + PH_۳)$

۲. $PA \cdot PB \cdot PC \geq ۸PH_۱ \cdot PH_۲ \cdot PH_۳$

اثبات قضیه. ابتدا لم زیر را ثابت می‌کنیم

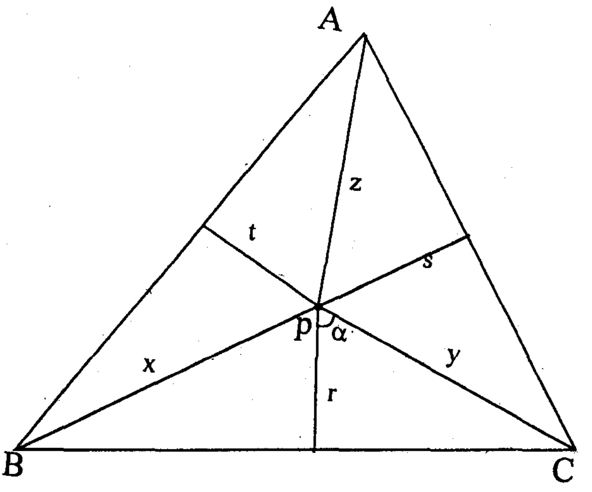
لم.
اگر x، y و z اعداد حقیقی و α، β و γ زوایای مثلث باشند، آنگاه

$$x^۲ + y^۲ + z^۲ \geq ۲xy\cos\alpha + ۲yz\cos\beta + ۲zx\cos\gamma$$

اثبات لم.

$$(x - y\cos\alpha - z\cos\gamma)^۲ + (y\sin\alpha - z\sin\gamma)^۲ \geq ۰$$

اثبات قضیه(قسمت اول). طول نیمسازهای زوایای BPC و CPA و APB را به ترتیب r،



شکل۶-۱

s و t می‌نامیم

$$۲S_{PBC} = xy\sin(۲\alpha) = yr\sin\alpha + xr\sin\alpha$$

$$\Rightarrow ۲xy\cos\alpha = (y+x)r \geq ۲\sqrt{xy}.r$$

$$\Rightarrow ۲\sqrt{xy}\cos\alpha \geq ۲r$$

$$(\sqrt{x})^۲ + (\sqrt{y})^۲ + (\sqrt{z})^۲ \geq ۲\sqrt{xy}\cos\alpha + ۲\sqrt{yz}\cos\beta + ۲\sqrt{zx}\cos\gamma$$
$$\geq ۲r + ۲s + ۲t$$
$$\Rightarrow x + y + z \geq ۲(r + s + t) \geq ۲(PH_۱ + PH_۲ + PH_۳)$$

اثبات قضیه (قسمت دوم). (اینجا r، s و t فاصله p از سه ضلع هستند).

$$h_a \leq z + r \Rightarrow ah_a \leq az + ar$$
$$\Rightarrow ra + sb + tc \leq az + ar \Rightarrow sb + tc \leq az$$
$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} az \geq ۲\sqrt{stbc} \\ bx \geq ۲\sqrt{trac} \\ cy \geq ۲\sqrt{rsba} \end{array}\right\} \Rightarrow abcxyz \geq ۸rstabc \Rightarrow xyz \geq ۸rst$$

●

تمرین

۱. ثابت کنید $t > ۰$ آنگاه
$$\left(\frac{r}{R}\right)^t + \left(\frac{p}{R}\right)^t \leq \frac{۱ + ۳^{۳t/۲}}{۲^t}$$

۲. ثابت کنید $\frac{R}{r} + \frac{r}{R} \geq \frac{۵}{۲}$.

۳. ثابت کنید ماکزیمم A، B، C، D و E که نامساویهای زیر همواره درست باشند
$$۰ \leq \frac{Rr - ۲r^۲}{۱} \leq \frac{p^۲ - ۲۷r^۲}{A} \leq \frac{۲p^۲ - ۲۷Rr}{B}$$
$$\leq \frac{R^۲ - ۲Rr}{C} \leq \frac{R^۲ - ۴r^۲}{D} \leq \frac{۲۷R^۲ - ۴p^۲}{E}$$
به قرار زیر است
$$A = ۱۶, \quad B = ۵, \quad C = D = \frac{۵}{۸}, \quad E = \frac{۲۰ + ۵\sqrt{۱۷}}{۸}$$

تمرینهای تکمیلی

۱. اگر I محل برخورد نیمسازهای مثلث ABC باشد و A'، B' و C' محل برخورد امتداد نیمساز با دایرهٔ محیطی مثلث، ثابت کنید
$$IA' + IB' + IC' \geq IA + IB + IC$$

۲. نقطه P داخل مثلث ABC مفروض است. ثابت کنید دست‌کم یکی از سه زاویهٔ PAB، PBC و PCA از ۳۰° بیشتر نیست.

۳ . اگر h_a، h_b و h_c ارتفاعات مثلث ABC باشند و R و r شعاع دایره محیطی و محاطی باشند، ثابت کنید

$$h_a + h_b + h_c \leq 3(R + r)$$

۴ . اگر P نقطه‌ای داخل مثلث و R_1، R_2 و R_3 فواصل از رئوس و r_1، r_2 و r_3 فواصل از اضلاع باشند، ثابت کنید

الف) $R_1^2 \sin^2\alpha + R_2^2 \sin^2\beta + R_3^2 \sin^2\gamma \leq 3(r_1^2 + r_2^2 + r_3^2)$

ب) $\sum R_1(r_1 + r_3) \geq \sum (r_1 + r_2)(r_1 + r_3)$

ج) $\sum (R_1 + R_2)(R_1 + R_3) \geq 4 \sum (r_1 + r_2)(r_1 + r_3)$

د) $R_1 \geq r_2 \frac{c}{a} + r_3 \frac{b}{a}$

$R_2 \geq r_1 \frac{c}{b} + r_3 \frac{a}{b}$

$R_3 \geq r_1 \frac{b}{c} + r_2 \frac{a}{c}$

ه) $\sum R_1^2 \geq 4 \sum r_1^2$

و) $\sum \frac{r_2 + r_3}{R_1} \geq 3$

۵ . نشان دهید

$$PA \cdot PB \cdot PC \geq (PH_1 + PH_2)(PH_2 + PH_3)(PH_3 + PH_1)$$

۷

نامساویهای هندسی۲

۱-۷ نامساویهای مهم

با مسأله‌ای شروع می‌کنیم:

ثابت کنید در هر مثلث ABC داریم

$$\sin A + \sin B + \sin C \leq \frac{۳\sqrt{۳}}{۲}$$

اثبات. تابع $F(x) = \sin(x)$ روی $[۰, \pi]$ محدب است پس طبق قض به ینسن داریم

$$\sin A + \sin B + \sin C \leq ۳ \sin\left(\frac{A+B+C}{۳}\right) = \frac{۳\sqrt{۳}}{۲}$$

بعضی مواقع مسأله به این راحتی حل نمی‌شود بلکه بحثهایی لازم است. به‌عنوان مثال:

ثابت کنید در هر مثلث داریم

$$\cos A + \cos B + \cos C \leq \frac{۳}{۲}$$

اثبات. تابع $F(x) = \cos(x)$ روی $[۰, \frac{\pi}{۲}]$ محدب است پس طبق قضیه ینسن اگر زوایای مثلث حاده باشند داریم

$$\cos A + \cos B + \cos C \leq ۳ \cos\left(\frac{A+B+C}{۳}\right) = \frac{۳}{۲}$$

حال فرض کنید یکی از زوایای مثلث مثلاً C منفرجه باشد، پس A و B حاده‌اند و لذا

$$\cos A + \cos B \leq ۲ \cos\left(\frac{A+B}{۲}\right)$$

$$\Rightarrow \cos A + \cos B + \cos C \leq ۲\cos\left(\frac{A+B}{۲}\right) - \cos(A+B)$$

$$= ۲\cos\left(\frac{A+B}{۲}\right) - ۲\cos^۲\left(\frac{A+B}{۲}\right) + ۱ \leq \frac{۳}{۲}$$

از چنین نامساویهایی در حل نامساویهای مربوط به مثلث استفاده می‌شود.

۱. $\sin A + \sin B + \sin C \leq \frac{۳\sqrt{۳}}{۲}$

۲. $\cos A + \cos B + \cos C \leq \frac{۳}{۲}$

۳. $\tan A + \tan B + \tan C \geq ۳\sqrt{۳}$

۴. $\cot A + \cot B + \cot C \geq \sqrt{۳}$

۵. $\sin\frac{A}{۲}\sin\frac{B}{۲}\sin\frac{C}{۲} \leq \frac{۱}{۸}$

۶. $\cos\frac{A}{۲}\cos\frac{B}{۲}\cos\frac{C}{۲} \leq \frac{۳\sqrt{۳}}{۸}$

۷. $\sin A\sin B\sin C \leq \frac{۳\sqrt{۳}}{۸}$

۸. $\cos A\cos B\cos C \leq \frac{۱}{۸}$

۹. $\frac{۱}{\sin A} + \frac{۱}{\sin B} + \frac{۱}{\sin C} \geq ۲\sqrt{۳}$

۱۰. $\cot(A/۲) + \cot(B/۲) + \cot(C/۲) \geq ۳\sqrt{۳}$

۱۱. $\sin(A/۲) + \sin(B/۲) + \sin(C/۲) \leq \frac{۳}{۲}$

۱۲. $\cos(A/۲) + \cos(B/۲) + \cos(C/۲) \leq \frac{۳\sqrt{۳}}{۲}$

۱۳. $\tan(A/۲) + \tan(B/۲) + \tan(C/۲) \geq \sqrt{۳}$

۱۴. $\cot(A/۲) + \cot(B/۲) + \cot(C/۲) \geq ۳\sqrt{۳}$

۱۵. $\cos^۲ A + \cos^۲ B + \cos^۲ C \geq \frac{۳}{۴}$

۱۶. $\tan^۲(A/۲) + \tan^۲(B/۲) + \tan^۲(C/۲) \geq ۱$

۱۷. $\tan^۲ ۲A + \tan^۲ ۲B + \tan^۲ ۲C \geq ۶$

۱۸. $\sin^۲ A + \sin^۲ B + \sin^۲ C \leq \frac{۹}{۴}$

۱۹. ثابت کنید اگر $|\alpha|, |\beta|, |\gamma| \leq ۴۵^\circ$ و $\alpha + \beta + \gamma = ۴۵^\circ$ در این صورت

$$\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma \geq \frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

۷-۲ اتحادهای مهم

با مسأله‌ای از مسائل المپیاد بین‌المللی ریاضی (که راه‌حل‌های مختلفی دارد) شروع می‌کنیم:
ثابت کنید اگر a، b و c اضلاع مثلثی و S مساحت آن باشد داریم

$$a^۲ + b^۲ + c^۲ \geq ۴\sqrt{۳}S$$

حل. توجه کنید که اتحاد زیر برقرار است

$$a^2+b^2+c^2=4S(\cot A+\cot B+\cot C)$$

زیرا

$$a^2+b^2-c^2=2ab\cos C=\frac{4S}{\sin C}\cos C=4S\cot C$$

و به همین ترتیب بقیه عبارات مشابه با عبارت اخیر به‌دست می‌آیند و با جمع بستن آنها اتحاد اول نتیجه می‌شود. حال با استفاده از رابطهٔ ۴ در بخش قبل داریم

$$a^2+b^2+c=4S(\cot(A/2)+\cot(B/2)+\cot(C/2)\geq 4S.\sqrt{3}=4\sqrt{3}S$$

اتحادهای مربوط به مثلث که در زیر می‌آیند در اثبات نامساویها کاربرد زیادی دارند.

۱. $a^2+b^2+c^2=4S(\cot A+\cot B+\cot C)$

۲. $\cos A+\cos B+\cos C=\frac{r}{R}+1$

۳. $\sin A+\sin B+\sin C=\frac{p}{R}$

۴. $\tan A+\tan B+\tan C=\frac{S}{2R^2\cos A\cos B\cos C}$

۵. $r=(p-a)\tan A/2$

۶. $r_a=p\tan A/2$

۷. $r_a+r_a+r_c-r=4R$

۸. $\tan(A/2)+\tan(B/2)+\tan(C/2)=\frac{4R+r}{p}$

۹. $\cot(A/2)+\cot(B/2)+\cot(C/2)=p/r$

۱۰. $d_a=\frac{2bc}{b+c}\cos(\frac{A}{2})$ (d_a نیمساز مربوط به زاویه A)

۱۱. $16S^2=2(a^2b^2+b^2c^2+a^2c^2)-a^4-b^4-c^4$

۱۲. $a.IA^2+b.IB^2+c.IC^2=abc$ (I مرکز دایره محاطی مثلث است)

۱۳. $GA^2+GB^2+GC^2=\frac{a^2+b^2+c^2}{3}$

۱۴. $a/\sin^2(A/2)+b/\sin^2(B/2)+c/\sin^2(C/2)=\frac{4pR}{r}$

۱۵. $abc=4prR$

۱۶. $ab+ac+bc=p^2+r^2+4rR$

۱۷. $a^2+b^2+c^2=2p^2-2r^2-8rR$

۱۸. $\frac{a^2}{r_a}+\frac{b^2}{r_b}+\frac{c^2}{r_c}=4r(r+R)$

۱۹. $\cos A\cos B\cos C=\frac{p^2-r^2-4rR-4R^2}{4R^2}=\frac{a^2+b^2+c^2}{8R^2}-1$

۲۰. $\sin^2(A/2)+\sin^2(B/2)+\sin^2(C/2)=1-\frac{r}{2R}$

۲۱. $\tan(A/2)\tan(B/2)+tg(B/2)\tan(C/2)+\tan(A/2)\tan(C/2)=1$

۲۲. $a\tan(A/2)+b\tan(B/2)+c\tan(C/2)=2(2R-r)$

۲۳. $\tan^2(A/2)+\tan^2(B/2)+\tan^2(C/2)=\frac{(4R+r)^2-2p^2}{p^2}$

۷-۳ مرکز نقاط

حال اندکی بحث را عوض می‌کنیم و درباره مرکز نقاط صحبت می‌کنیم؛ بحثی که کاربردهای فراوانی دارد و در زمینهٔ نامساویها نیز یک استفاده خیلی مهم از آن خواهیم کرد. فرض کنید P_1، ...، P_n نقاطی در فضا باشند و $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ اعداد حقیقی که مجموعشان صفر نیست در این صورت نقطه منحصر به‌فردی چون M موجود است که

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{MP_i} = 0$$

(ثابت کنید). M را مرکز نقاط $P_1, \dots, P_n$ به ضرایب $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ می‌نامیم.

■ **مثال ۷-۱**

اگر $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ مساوی باشند M مرکز ثقل نقاط $P_1, \dots, P_n$ خواهد شد. ■

■ **مثال ۷-۲**

اگر $P_1 = A$ و $P_2 = B$ و $P_3 = C$ رئوس مثلثی باشند، در این صورت مرکز نقاط A, B, C وابسته به a, b, c (طول اضلاع متناظر)، مرکز دایره محاطی مثلث ABC خواهد شد. ■

■ **مثال ۷-۳**

اگر A, B, C رئوس مثلثی باشند، مرکز نقاط A, B, C وابسته به $\sin 2A, \sin 2B, \sin 2C$، مرکز دایره محیطی مثلث ABC خواهد شد. ■

■ **مثال ۷-۴**

اگر A, B, C رئوس مثلثی باشند، مرکز نقاط A, B, C وابسته به $\tan A, \tan B, \tan C$، مرکز ارتفاعی مثلث خواهد شد. ■

■ **مثال ۷-۵**

اگر M مرکز نقاط $P_1, \dots, P_n$ وابسته به ضرایب $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ باشد، در این صورت برای هر نقطه O خواهیم داشت

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{OP_i} = \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i\right) \overrightarrow{OM}$$

(ثابت کنید). ■

■ **مثال ۷-۶**

یک رابطه مهم در زمینه فوق وجود دارد که از آن در اثبات چند نامساوی مهم استفاده خواهیم

کرد. فرض کنید M مرکز نقاط $\{P_i\}_{i=1}^n$ وابسته به ضرایب $\{\alpha_i\}_{i=1}^n$ باشد. در این صورت رابطه زیر برقرار است

$$\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\overline{AP}_i^2 = \sum_{i=1}^{n}\alpha_i\overline{MP}_i^2 + (\sum_{i=1}^{n}\alpha_i)\overline{AM}^2$$

(A نقطه دلخواهی است) یا اگر تعریف کنیم

$$F(X) = \sum_{i=1}^{n}\alpha_i\overline{XP}_i^2$$

در این صورت

$$F(A) = F(M) + (\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n)\overline{MA}^2$$

(ثابت کنید). توجه کنید که $F(M)$ مقدار ثابتی است و در نتیجه $F(A)$ تنها به فاصله A از M بستگی دارد. در ضمن توجه کنید که: ■

■ **مثال ۷-۷**

$F(A) \geq F(M)$ یا مجموع $\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\overline{AP}_i^2$ در نقطهٔ M به مینیموم خود می‌رسد. ■

■ **مثال ۷-۸**

نقطهٔ P را در صفحه مثلث ABC پیدا کنید که $\overline{PA}^2 + \overline{PB}^2 + \overline{PC}^2$ در آن مینیموم شود.

(جواب: مرکز ثقل مثلث.)

رابطهٔ بالا در محاسبه فواصل نقاط مشخص کاربرد دارد. ■

■ **مثال ۷-۹**

اگر G مرکز ثقل نقاط $\{P_i\}_{i=1}^n$ باشد، در این صورت فاصله نقطه دلخواه A از G را با داشتن فواصل A از P_iها می‌توان به‌دست آورد به عبارت دیگر

$$\overline{GA}^2 = \sum_{i=1}^{n}\overline{AP}_i^2 - \sum_{i=1}^{n}\overline{P_iG}^2$$

که کاربردهای دیگری نیز در هندسه دارد. ■

■ **مثال ۷-۱۰**

ثابت کنید مکان هندسی نقاطی در صفحه مثل P که مجموع مربعات فواصل آن از رئوس یک مثلث مقداری ثابت است یک نقطه، یک دایره و یا تهی است. جواب خود را تشریح کنید.

■

■ مثال ۷-۱۱

مجموعه همه نقاطی مثل M از صفحه را پیدا کنید که $a.\overline{MA}^۲+b.\overline{MB}^۲+c.\overline{MC}^۲=abc$ با این شرط که a، b و c اضلاع مثلث و A، B و C رئوس متناظر باشند. ■

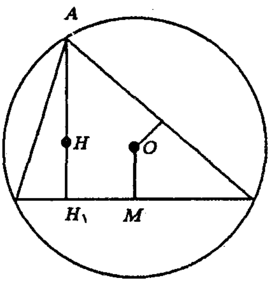
حال از بحثهای قبلی در اثبات چند نامساوی استفاده می‌کنیم. ابتدا مسائل زیر را حل کنید:

۱. (I مرکز دایره محاطی است) $\overline{IA}^۲+\overline{IB}^۲+\overline{IC}^۲=۳r^۲-p^۲$

۲. (G مرکز ثقل مثلث است) $\overline{GA}^۲+\overline{GB}^۲+\overline{GC}^۲=\frac{a^۲+b^۲+c^۲}{۳}=\frac{۲p^۲-۲r^۲-۸rR}{۳}$

۳. اگر H مرکز ارتفاعی و O مرکز دایره محیطی باشد، ثابت کنید:

$$۲OM=AH$$



شکل ۷-۱

۴. ثابت کنید $OM=R\cos A$ و نتیجه بگیرید $AH=۲R\cos A$.

۵. ثابت کنید $aHA^۲+bHB^۲+cHC^۲=۴R^۲(a\cos^۲A+b\cos^۲B+c\cos^۲C)$

حال به ادامه بحث می‌پردازیم. طبق توضیحات قبلی:

$$a\overline{AH}^۲+b\overline{BH}^۲+c\overline{CH}^۲=a\overline{AI}^۲+b\overline{BI}^۲+c\overline{CI}^۲+(a+b+c)\overline{IH}^۲$$

$$\Rightarrow ۴R^۲(a\cos^۲A+b\cos^۲B+c\cos^۲C)=abc+(a+b+c)\overline{HI}^۲$$

$$\Rightarrow ۴R^۲\left[a\left(۱-\frac{a^۲}{۴R^۲}\right)+\cdots\right]=abc+(a+b+c)\overline{HI}^۲$$

$$\Rightarrow ۴R^۲(۲p)-(a^۳+b^۳+c^۳)=۴prR+۲p\overline{HI}^۲$$

$$\Rightarrow ۸pR^۲-[(a+b+c)(a^۲+b^۲+c^۲-ab-ac-bc)+۳abc]=$$
$$۴rpR+۲p\overline{HI}^۲$$

$$\Rightarrow ۸pR^۲-[۲p(۲p^۲-۲r^۲-۸rR)-(p^۲+r^۲+۴rR)+۱۲prR]=$$
$$۴prR+۲p\overline{HI}^۲$$

پس از ساده کردن:

۶. $\boxed{\overline{IH}^{2} = 4R^{2} + 3r^{2} + 4rR - p^{2}}$

به روشی مشابه ثابت کنید

۷. $\boxed{\overline{IG}^{2} = \frac{p^{2}+5r^{2}-16rR}{9}}$

۸.

$$\overline{OH}^{2} = 9R^{2} - (a^{2} + b^{2} + c^{2})$$

$$\overline{OG}^{2} = \frac{\overline{OH}^{2}}{9}$$

$$\overline{GH}^{2} = \frac{4}{9}\overline{OH}^{2}$$

$$\overline{IO}^{2} = R^{2} - 2rR$$

اولین نتیجه‌ای که از مباحث فوق گرفته می‌شود، دو نامساوی مهم در مثلث است:

۹. $p^{2} \leq 3r^{2} + 4rR + 4R^{2}$

۱۰. $p^{2} \geq 16rR - 5r^{2}$ (نامساویهای دیگری که نتیجه می‌شوند از این ضعیفترند).

برای پی بردن به اهمیت روابط (۹) و (۱۰) توجه کنید که در هر مثلث داریم

$$\begin{cases} a + b + c = 2p & (1^*) \\ ab + ac + bc = p^{2} + r^{2} + 4rR & (2^*) \\ abc = 4prR & (3^*) \end{cases}$$

یا به عبارتی a, b, c ریشه‌های معادله درجه سوم زیر هستند:

$$x^{3} - 2px^{2} + (p^{2} + r^{2} + 4rR)x - 4prR = 0$$

به عبارات 1^*، 2^*، 3^* عبارات متقارن اولیه a، b و c گفته می‌شود. طبق قضیه‌ای در جبر هر عبارت متقارن بر حسب c, b, a را می‌توان به‌صورت چند جمله‌ای از عبارات متقارن اولیه c, b, a نوشت و لذا طبق روابط بالا بر حسب چند جمله‌ای از عبارات متقارن اولیه خواهد بود. هرگاه نامساوی‌ای به شکل $\phi(a, b, c) \geq 0$ داده شد، ϕ را به‌صورت چندجمله‌ای از r، p، R بنویسید و از (۹) و (۱۰) استفاده کنید.

۱۱. ثابت کنید در هر مثلث داریم $ab + ac + bc \leq 4(r + R)^{2}$

اثبات.

$$p^{2} + r^{2} + 4rR \leq^{?} 4(r^{2} + R^{2} + 2rR) \Rightarrow p^{2} \leq^{?} 4R^{2} + 3r^{2} + 4Rr$$

که بنابر (۹) درست است. (سعی کنید نامساوی را مستقیماً ثابت کنید)

■ مثال ۷-۱۲

ثابت کنید در هر مثلث داریم $h_a + h_b + h_c \leq ۳(r + R)$

اثبات.

$$h_a + h_b + h_c = \frac{۲S}{a} = \frac{۲S}{b} + \frac{۲S}{c} = \frac{۲S(ab+ac+bc)}{abc}$$
$$= \frac{۲pr(p^۲ + r^۲ + ۴rR)}{۴prR} = \frac{p^۲ + r^۲ + ۴rR}{۲R}$$

نامساوی عبارت است از

$$\frac{p^۲ + r^۲ + ۴rR}{۲R} \overset{?}{\leq} ۳(r + R)$$

در نتیجه

$$p^۲ \overset{?}{\leq} ۲rR + ۶R^۲ - r^۲$$

ولی طبق (۹) کافی است ثابت کنیم

$$۳r^۲ + ۴rR + ۴R^۲ \leq ۲rR + ۶R^۲ - r^۲$$

یا معادلاً

$$۲\left(\frac{r}{R}\right)^۲ - \left(\frac{r}{R}\right) - ۱ \leq ۰$$

ولی چندجمله‌ای $۲x^۲ - x - ۱$ برای $۰ < x \leq ۱/۲$ همواره منفی است و می‌دانیم $۰ < r/R \leq ۱/۲$ در نتیجه حکم ثابت می‌شود [مسأله حل شده زیرا نامساوی داده شده از (۹) ضعیفتر بود]. ■

حال شما نامساویهای زیر را ثابت کنید:

۱. ثابت کنید در هر مثلث $h_a h_b + h_a h_c + h_b h_c \leq r_a r_b + r_a r_c + r_b r_c$

۲. $\cos A \cos B \cos C \leq \frac{r^۲}{۲R^۲}$

۳. $\frac{r_a}{h_a} + \frac{r_b}{h_b} + \frac{r_c}{h_c} \geq ۳$

۴. $(a+b+c)^۳ \leq ۵(a^۲b + b^۲a + a^۲c + c^۲a + b^۲c + c^۲b) - ۳abc$

۵. $\frac{abc}{r} \geq \frac{a^۲}{r_a} + \frac{b^۲}{r_p} + \frac{c^۲}{r_c}$

۶. $\sum \frac{۱}{(p-a)^۲} \geq \frac{۱}{r^۲}$

۷. $a^۲ + b^۲ + c^۲ - ۲ab - ۲ac - ۲bc + ۱۸\frac{abc}{a+b+c} \geq ۴\sqrt{۳}S$

۸. ثابت کنید در هر مثلث، مثلث HIG منفرج‌الزاویه است.

۹. $\sum_{A,B} \sin(A/۲).\sin(B/۲) \leq \frac{۵}{۸} + \frac{r}{۴R}$

۱۰. $۲ab + ۲bc + ۲ac - a^۲ - b^۲ - c^۲ \geq ۴\sqrt{۳}S$

۱۱. $۴R + r \geq p\sqrt{۳}$

۱۲. $۹ \leq (a+b+c)(\frac{۱}{a} + \frac{۱}{b} + \frac{۱}{c}) \leq \frac{۱۸}{۵} + \frac{(a+b+c)^۳}{۵abc}$

۱۳. $h_a + h_b + h_c \leq \sqrt{۳}p$

۱۴. ثابت کنید در مثلث ABC:

$$\begin{cases} A > ۹۰ \Rightarrow r_a > ۲R + r > p \\ A = ۹۰ \Rightarrow r_a = ۲R + r = p \\ A < ۹۰ \Rightarrow r_a < ۲R + r < p \end{cases}$$

(طرف دوم این نامساویها قویتر از نامساوی ذکر شده در متن است ولی عمومی نیست).

۱۵. فرض کنیم دنباله Δ_n از مثلثها داده شده باشد. $(\Delta_n = A_n \overset{\Delta}{B_n} C_n)$ می‌گوییم مثلث متساوی‌الاضلاع $\underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \Delta_n$ اگر

$$(B_n)_{n\to\infty} \longrightarrow \frac{\pi}{۳} \qquad (A_n)_{n\to\infty} \longrightarrow \frac{\pi}{۳}$$

$$(C_n)_{n\to\infty} \longrightarrow \frac{\pi}{۳}$$

ثابت کنید

$$\lim_{n\to\infty} \frac{O_n H_n}{O_n I_n} = \sqrt{۲}$$

(که در آن O_n، H_n و I_n به ترتیب مرکز دایره محیطی، مرکز ارتفاعی و مرکز دایره محاطی مثلث Δ_n می‌باشند).

یادداشت

حال که در حل نامساویهای مثلث تا حدودی ورزیده شده‌اید می‌توانید از این ورزیدگی در حل نامساویهای عادی استفاده کنید. توجه کنید که نامساویهایی که اضلاع یک مثلث را محدود می‌کنند عبارتند از:

$$\begin{matrix} a + b - c \geq ۰ & & p - a \geq ۰ \\ b + c - a \geq ۰ & \xrightarrow{\text{که تبدیل می‌شود به}} & p - b \geq ۰ \\ c + a - b \geq ۰ & & p - c \geq ۰ \end{matrix}$$

یعنی $p - a$ و $p - b$ و $p - c$ می‌توانند هر سه عدد حقیقی مثبتی باشند، پس می‌توان با تغییر

$$x \longrightarrow p - a \qquad y \longrightarrow p - b \qquad t \longrightarrow p - c$$

نامساویهای مربوط به z, y, x حقیقی مثبت را به نامساویی برحسب اضلاع مثلثی تبدیل کرد.

■ **مثال ۷-۱۳**

ثابت کنید به ازای $x, y, z > ۰$ داریم

$$y^۲(x + z - y) + x^۲(y + z - x) + z^۲(x + y - z) \leq ۳xyz$$

حل.

$$(p-b)^۲(p-a+p-c+b-p)+(p-a)^۲(p-b+p-c+a-p)$$

$$+(p-c)^۲(p-a+p-b+c-p)\leq ۳(p-a)(p-b)(p-c)$$

پس از ساده کردن:

$$۲r(۲r-R)\overset{?}{\leq} ۰$$

که درستی آن بدیهی است. ■

■ **مثال ۷-۱۴**

ثابت کنید به ازای $x,y,z>۰$ داریم:

$$x^۲y+y^۲x+x^۲z+x^۲z+z^۲x+y^۲z+z^۲y\geq$$

$$\sqrt{۳}(x+y+z)^{۳/۲}(xyz)^{۱/۲}-۳xyz\geq ۶xyz$$

■

■ **مثال ۷-۱۵**

ثابت کنید برای $x,y,z\geq ۰$ داریم:

$$(x+y+z)^۳+۹xyz\geq ۴(x+y+z)(xy+yz+xz)$$

■

در ضمن می‌توان از عکس این روش نیز استفاده کرد و نامساویهای مثلث را با استفاده از نامساویهای عادی ثابت کرد.

■ **مثال ۷-۱۶**

اگر a، b و c اضلاع مثلث باشند:

$$c^۲a(c-a)+a^۲b(a-b)+b^۲c(b-c)\geq ۰$$

■

۷-۴ نامساوی اردیش-موردل

یکی از نامساویهای معروف مثلث نامساوی اردیش-موردل است که می‌گوید اگر p نقطه‌ای درون مثلث ABC باشد و فاصله p از A، B و C و a، b و c به ترتیب x، y و z و r، s و t باشد در

این صورت

$$x + y + z \geq ۲(r + s + t)$$
$$xyz \geq ۸rst$$

تمرین

۱. ثابت کنید اگر z, y, x اعداد حقیقی و α, β, γ زوایای مثلثی باشند آن‌گاه

$$x^۲ + y^۲ + z^۲ \geq ۲xy\cos\alpha + ۲yz\cos\beta + ۲xz\cos\alpha$$

از این استفاده کرده و اثبات دیگری برای نامساوی اردیش-موردل بدهید.

۲. ثابت کنید $rx + sy + tz \geq ۲(rs + st + tr)$

۳. $xy + yz + xz \geq ۴(rs + st + rt)$

۴. $۲(۱/x + ۱/y + ۱/z) \leq ۱/r + ۱/s + ۱/t$

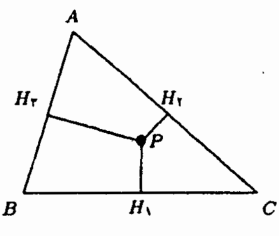
۵. $xyz \geq (r + s)(r + t)(s + t)$

۶. $\sqrt{s} + \sqrt{t} + \sqrt{r} \leq ۳\sqrt{\frac{R}{r_۰}}$ (R و $r_۰$ شعاع دوایر محیطی و محاطی)

۷. $x^۲ + y^۲ + z^۲ \geq ۴(r^۲ + s^۲ + t^۲)$

۸. $\frac{r+s}{z} + \frac{s+t}{x} + \frac{r+t}{y} \geq ۳$

۹. نقطه P داخل مثلث ABC است. ثابت کنید دست‌کم یکی از سه زاویهٔ PCA, PBC, PAB از ۳۰° بیشتر نیست.



شکل ۷-۲

۱۰. با توجه به نامگذاری شکل ۷-۲، نقطهٔ P در مثلث ABC را چنان بیابید که

i) مساحت $H_۱H_۲H_۳$ ماکزیمم شود؛

ii) حاصل‌ضرب $pH_۱ \cdot pH_۲ \cdot pH_۳$ ماکزیمم شود؛

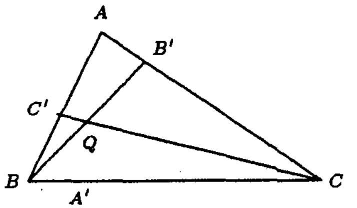
iii) مقدار $AH_۱^۲ + BH_۲^۲ + CH_۳^۲$ مینیموم شود.

۱۱ . فرض کنید نقطهٔ Q داخل مثلث ABC است، ثابت کنید

$$\sum_{A,B,C} (QA).\cos\left(\frac{A}{۲}\right) \geq p \qquad (p \text{ نصف محیط})$$

۱۲ . فرض کنید Q داخل مثلث ABC (شکل ۷-۳) است، ثابت کنید:

$$QA' + QB' + QC' \leq \max\{a, b, c\}$$



شکل ۷-۳

۱۳ . در صفحه نقاط O، $A_۱$، $A_۲$، $A_۳$، $A_۴$ طوری هستند که برای $i \neq j$ مساحت مثلث OA_iA_j دست‌کم ۱ است. ثابت کنید

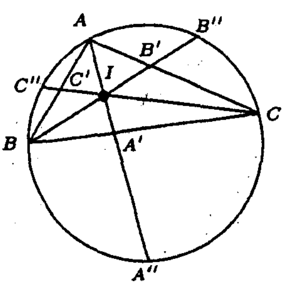
$$\exists i_\circ, j_\circ \in \{۱, ۲, ۳, ۴\} : S(OA_{i_\circ}A_{j_\circ}) \geq \sqrt{۲}$$

۱۴ . اگر I مرکز دایره محاطی مثلث ABC در شکل ۷-۴ باشد ثابت کنید

i) $۱/۴ \leq \frac{AI.BI.CI}{AA'.BB'.CC'} \leq \frac{۸}{۲۷}$

ii) $IA' + IB' + IC' \geq IA + IB + IC$ و $\frac{IA'}{IA} + \frac{IB'}{IB} + \frac{IC'}{IC} \geq ۳$

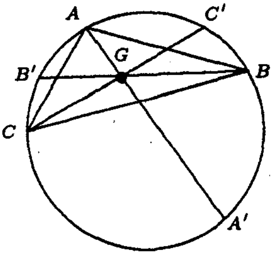
iii) $۱۶S^۳_{A''B''C''} \geq ۲۷r^۴ S_{ABC}$



شکل ۷-۴

۱۵ . اگر G مرکز ثقل مثلث ABC در شکل ۷-۵ باشد، ثابت کنید

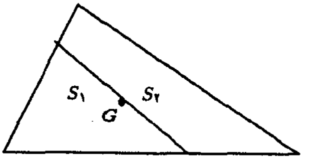
$$GA + GB + GC \le GA' + GB' + GC'$$



شکل ۷-۵

۱۶ . اگر G مرکز ثقل مثلث ABC در شکل ۷-۶ باشد ثابت کنید:

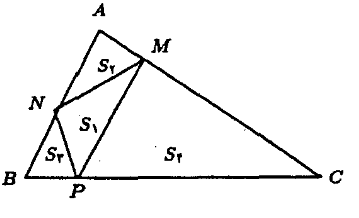
$$\frac{۴}{۵} \le \frac{S_۱}{S_۲} \le \frac{۵}{۴}$$



شکل ۷-۶

۱۷ . ثابت کنید اگر M، N، P نقاطی روی AC، AB، BC باشند (شکل ۷-۷)، در این صورت

$$S_۴ \ge \min\{S_۱, S_۲, S_۳\}$$



شکل ۷-۷

۸

ریاضیات گسسته

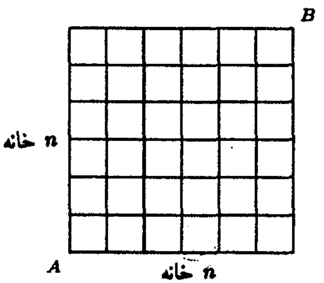
۸-۱ آنالیز ترکیبی و شمارش

روشهای مختلفی برای شمارش وجود دارد. سعی می‌کنیم با ذکر مثالهای متنوع آنها را توضیح دهیم.
توصیه می‌کنیم که قبل از خواندن راه حل، خودتان سعی کنید مسأله را حل کنید.

۸-۱-۱ مسائل و مثالهای نمونه

■ مثال ۸-۱

در مربع شکل ۸-۱ ذره‌ای می‌تواند بالا یا جلو در امتداد پاره‌خطهای شبکه حرکت کند. این ذره به چند طریق می‌تواند از A به B برسد.



شکل ۸-۱

راه حل اول. هر مسیر از A به B دارای $2n$ پاره‌خط است که n تا از آنها نسبت بالا خواهد

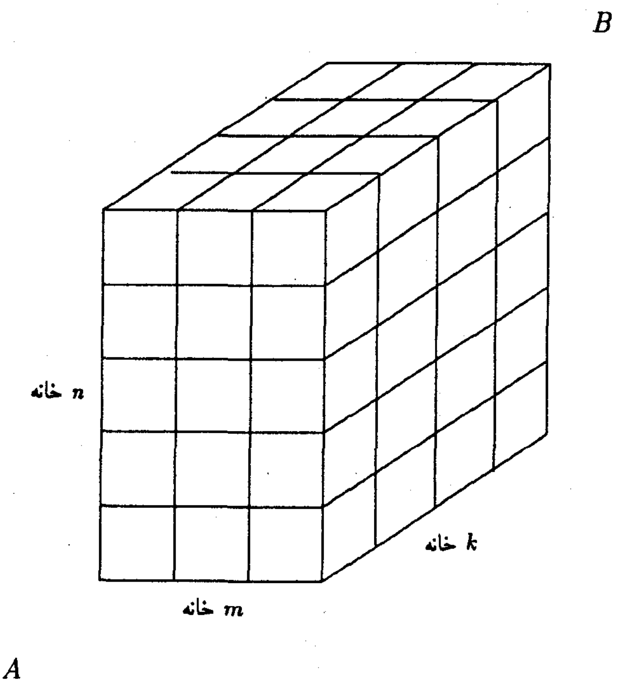
بود که انتخاب با ذره است! که کدامها باشند. یعنی جواب مسأله $\binom{2n}{n}$ است.

راه حل دوم. هر لغت $2n$ حرفی متشکل از n حرف «ج» معرف جلو رفتن و n حرف «ب» معرف بالا رفتن یک مسیر را برای ذره معین می‌کند و هر مسیر یک لغت $2n$ حرفی با شرایط فوق است پس کافی است تعداد چنین لغتهایی را بشماریم که برابر $\frac{(2n)!}{n!n!}$ یا همان $\binom{2n}{n}$ است. ■

توضیح. تعداد جایگشتهای n چیز که دسته‌های n_1تایی، n_2تایی، ... ، n_kتایی آنها شبیه هم باشند برابر $\frac{n!}{n_1!n_2!\ldots n_k!}$ (البته $n_1 + n_2 + \cdots + n_k = n$) است.

تمرین

۱. اگر به‌جای مربع یک مکعب‌مستطیل قرار دهیم که $m \times n \times k$ باشد و ذره بتواند جلو، بالا و داخل یعنی در سه جهت $\nearrow\uparrow\rightarrow$ حرکت کند؛ تعداد راههایی که ذره می‌تواند از یک رأس به رأس مقابل برود را محاسبه کنید (شکل ۸-۲).



شکل ۸-۲

■ مثال ۸-۲

اداره راهنمایی و رانندگی می‌خواهد اتومبیلها را با شماره‌های شش رقمی که ارقام می‌توانند ۰ تا ۹ باشند شماره‌گذاری نماید؛ به‌طوری که هر دو شماره دست‌کم دو تفاوت در ارقام باهم داشته باشند. حداکثر تعداد اتومبیلهایی که بدین طریق می‌توانند شماره‌گذاری شوند چقدر است.

حل. ۵ رقم اول را در نظر می‌گیریم. این ۵ رقم به $۱۰^۵$ طریق می‌تواند شماره‌گذاری شود. (چرا؟) پس اگر $۱۰^۵ + ۱$ اتومبیل شماره‌گذاری شده داشته باشیم، حداقل دو اتومبیل وجود خواهند داشت که ۵ رقم اول آنها یکی باشد و این دو اتومبیل حداکثر می‌توانند در رقم آخر با هم فرق داشته باشند. پس $۱۰^۵$ یک کران بالا برای تعداد اتومبیلها است. حال باید با ذکر مثالی نشان دهیم شماره‌گذاری $۱۰^۵$ اتومبیل با شرایط مسأله امکان‌پذیر است. برای این‌کار کافی است برای هر عدد پنج‌رقمی $x_۱x_۲x_۳x_۴x_۵$ رقم $x_۶$ را مشخص کنیم می‌توانیم $x_۶$ را باقیمانده $x_۱ + x_۲ + x_۳ + x_۴ + x_۵$ بر ۱۰ بگیریم. حال اگر عدد پنج رقمی دیگر مانند $y_۱y_۲y_۳y_۴y_۵$ داشته باشیم که فقط در یک جا با اولی تفاوت کند نشان می‌دهیم $y_۶ \neq x_۶$. چرا که

$$y_۶ \overset{۱۰}{\equiv} y_۱ + y_۲ + \cdots + y_۵$$

$$x_۶ \overset{۱۰}{\equiv} x_۱ + x_۲ + \cdots + x_۵$$

و چون ۵ رقم اول فقط در یک جا باهم فرق دارند پس

$$y_۶ - x_۶ \overset{۱۰}{\equiv} y_i - x_i \overset{۱۰}{\not\equiv} ۰$$

که i جایی است که با هم فرق می‌کنند، پس $x_۶ \neq y_۶$. یعنی حداکثر اتومبیلها $۱۰^۵$ است.

■

■ مثال ۸-۳

حداکثر تعداد زیرمجموعه‌های یک مجموعهٔ n عضو مانند A را چنان بیابید که اشتراک هر دو زیرمجموعه ناتهی باشد.

حل. می‌دانیم یک زیرمجموعهٔ n عضوی، ۲^n زیرمجموعه دارد. این مجموعه‌ها را به زوجهایی که در هر زوج یک زیرمجموعه و متمم آن قرار دارد تقسیم می‌کنیم؛ پس $۲^{n-۱}$ زوج داریم. حال اگر $۲^{n-۱} + ۱$ زیرمجموعه از مجموعهٔ A انتخاب کنیم، دست‌کم دو مجموعه داخل یک زوج می‌افتند و اشتراک آنها تهی است. پس $۲^{n-۱}$ یک کران بالا برای تعداد زیرمجموعه‌های دارای شرایط مسأله است. $۲^{n-۱}$ زیرمجموعه را می‌توان زیرمجموعه‌هایی از مجموعهٔ A گرفت که همگی یک عضو بخصوص را شامل باشند.

■

■ **مثال ۸-۴**

۱۳۷۱ مجموعهٔ ۳۷ عضوی داریم که اشتراک هر دوتای آنها دقیقاً یک عضو است. نشان دهید اشتراک همه مجموعه‌ها تهی نیست.

حل. مجموعه‌ها را به‌صورت $A_{۱}, A_{۲}, \ldots, A_{۱۳۷۱}$ شماره‌گذاری می‌کنیم. چون $A_{۱}$ با هریک از ۱۳۷۰ مجموعه دیگر تنها در یک عضو اشتراک دارد و یک مجموعه ۳۷ عضوی است پس دست‌کم با ۳۸ مجموعه در یک عضو بخصوص اشتراک دارد (چرا؟) اگر این‌طور نباشد حداکثر با ۳۷ مجموعه در یک عضو بخصوص اشتراک دارد. و چون $۱۳۶۹ = ۳۷ \times ۳۷$، $A_{۱}$ باید دست‌کم ۳۸ عضو مختلف داشته باشد، که این ممکن نیست. این عضو بخصوص را a می‌نامیم. حال نشان می‌دهیم a در اشتراک تمام مجموعه‌ها وجود دارد. فرض کنید B مجموعهٔ دلخواهی از ۱۳۷۱ مجموعهٔ داده شده باشد. اگر B، a را شامل نباشد باید از هر یک از ۳۸ مجموعه‌ای که با $A_{۱}$ در a اشتراک دارند با B در عضوی اشتراک داشته باشند که این عضوها متمایز باشند (چرا؟) یعنی باید دست‌کم ۳۸ عضو در B باشد که این ممکن نیست. پس $a \in A_{۱} \cap A_{۲} \cap \ldots \cap A_{۱۳۷۱}$ یعنی این اشتراک ناتهی است.

■

■ **مثال ۸-۵**

تعدادی از زیرمجموعه‌های r عضوی از یک مجموعهٔ n عضوی $(n \geq r)$ را انتخاب می‌کنیم به‌طوری که اشتراک هر $r + ۱$ مجموعه ناتهی باشد نشان‌دهید اشتراک تمام مجموعه‌های انتخاب شده ناتهی است.

حل. مجموعه‌ها را به‌صورت $A_{۱}, A_{۲}, \ldots, A_{k}$ شماره‌گذاری می‌کنیم و فرض می‌کنیم $A_{۱} = \{x_{۱}, x_{۲}, \ldots, x_{r}\}$ اگر اشتراک همه k مجموعهٔ فوق تهی باشد، پس $x_{۱}$ در یک مجموعه از مجموعه‌های $A_{۲}$، ...، A_{k} نیست، مثلاً $A_{۲}$ به همین ترتیب $x_{۲}$ در یک مجموعه مثلاً $A_{۳}$، ... و x_{r} در یک مجموعه مثلاً $A_{r+۱}$ نیست پس $A_{۱} \cap A_{۲} \cap \ldots \cap A_{r+۱} = \emptyset$ که متناقض فرض مسأله است. ■

تمرین

۱. فرض کنید X مجموعه‌ای ناتهی شامل n عضو و C مجموعه‌ای شامل p رنگ باشد. بزرگترین عدد p را بیابید که در خاصیت زیر صدق کند:

اگر به هر طریق دلخواه تمام زیرمجموعه‌های X را با استفاده از این رنگها رنگ کنیم به‌طوری که هر زیرمجموعه فقط یک رنگ داشته باشد؛ آن‌گاه دو زیرمجموعه A و B از X وجود داشته باشد به قسمی که مجموعه‌های A، B، $A \cup B$ و $A \cap B$ دارای رنگهای یکسان باشند.

۲. فرض کنید $\{A_{۱}, A_{۲}, \ldots, A_{n}\}$ ، $\{B_{۱}, B_{۲}, \ldots, B_{n}\}$ و $\{C_{۱}, C_{۲}, \ldots, C_{n}\}$

سه‌افراز از مجموعهٔ متناهی X باشد به‌طوری که

$$۱ \leq i, j, k \leq n : |A_i \cap B_j| + |A_i \cap C_k| + |B_j \cap C_k| \geq n$$

نشان دهید $|X| \geq \frac{n^۲}{۴}$.

تذکر. $|A|$ یعنی تعداد عناصر مجموعهٔ A. (افراز یعنی مجموعه‌ای که اعضای آن دوبه‌دو جدا از هم باشند و اجتماع همه آنها کل مجموعه باشد و هیچیک تهی نباشد).

■ مثال ۸-۶

n خط که هیچ دوتایی موازی و هیچ سه‌تایی متقارب نباشند در صفحه مفروض است. تعداد نقاط تقاطع را به‌دست آورید.

حل. تعداد نقاط تقاطع را $f(n)$ می‌گیریم. $f(n+۱) = f(n)+n$ چون اگر یک خط به مجموعهٔ n خط اضافه شود، n نقطه تقاطع جدید به‌وجود می‌آید پس چون $f(n+۱) - f(n) = n$ داریم

$$f(۲) - f(۱) = ۱,\ f(۳) - f(۲) = ۲, \cdots , f(n) - f(n-۱) = n - ۱$$

اگر رابطه‌های فوق را جمع کنیم با توجه به این که $f(۱) = ۰$ به‌دست می‌آید:

$$f(n) = n\left(\frac{n-۱}{۲}\right)$$

■

تمرین

۱. n خط مثال ۶-۸ صفحه را به چند قسمت تقسیم می‌کنند.

۲. n صفحه که هر سه‌تایی در یک نقطه مشترکند و هیچ چهار صفحه‌ای نقطه مشترک ندارند در فضا مفروضند. تعداد خطوط اشتراک را به‌دست آورید و نشان‌دهید فضا را به چند قسمت تقسیم می‌کنند.

۳. n کره دو به دو متقاطع فضا را به چند قسمت تقسیم می‌کنند؟

■ مثال ۸-۷

یک تابع f به هر زیرمجموعهٔ ۹ عضوی از $\{۱, ۲, \ldots , ۲۰\}$ یکی از اعداد ۱ تا ۲۰ را نسبت می‌دهد. ثابت کنید یک زیرمجموعهٔ ۱۰ عضوی مانند T، $T \subseteq \{۱, ۲, \ldots , ۲۰\}$ وجود دارد به‌طوری که

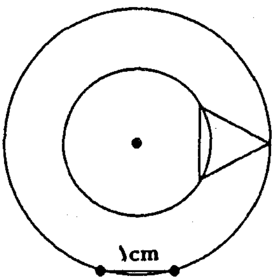
$$\forall k \in T :\ f(T - \{k\}) \neq k$$

حل. اگر برای هر زیرمجموعهٔ ۱۰ عضوی T عنصری مانند k در T باشد که $f(T-\{k\}) = k$ و اگر برای زیرمجموعه ۱۰ عضوی دیگری مانند T' عنصری مانند k' باشد که $f(T'-\{k'\}) = k'$ و $T-\{k\} = T'-\{k'\}$ آنگاه نتیجه می‌شود $k = k', T = T'$ (چرا؟). حال چون $\binom{20}{10}$ زیرمجموعهٔ ۱۰ عضوی وجود دارد پس $T-\{k\}$ها $\binom{20}{10}$ زیرمجموعه ۹ عضوی متمایز از $\{1, 2, \ldots, 20\}$ است در حالی که $\binom{20}{10} > \binom{20}{9}$ که این تناقض است! پس یک زیرمجموعه ۱۰ عضوی با خاصیت مورد نظر وجود دارد. ■

■ **مثال ۸-۸**

نقاط صفحه را با ۳ رنگ، رنگ‌آمیزی کرده‌ایم. ثابت کنید دست‌کم دو نقطه همرنگ وجود دارد که فاصله آنها از هم ۱cm است.

حل. دایره‌ای به شعاع ۱cm حول نقطه به رنگ اول می‌زنیم. اگر نقطه‌ای از آن رنگ روی این دایره باشد که مسأله ثابت شده است وگرنه نقاط این دایره همگی از رنگهای دوم و سوم هستند. حال مثلث متساوی‌الاضلاعی به طول ضلع ۱cm را روی این دایره مطابق شکل زیر می‌چرخانیم اگر دو رأس از این مثلث همرنگ باشند مسأله ثابت شده است وگرنه رأس سوم همواره به رنگ اول خواهد بود و دایره‌ای به رنگ اول و به شعاع بزرگتر از ۱cm خواهیم داشت پس وتری به‌طول ۱cm دارد که مسأله را ثابت می‌کند (شکل ۸-۳). ■



شکل ۸-۳

تمرین

۱. اگر در مثال ۸-۸ بجای ۳ رنگ از ۹ رنگ استفاده می‌کردیم آیا باز هم مسأله همواره درست بود؟

■ **مثال ۸-۹**

فرض کنید X یک مجموعهٔ n عضوی باشد و فرض کنید $A_1, A_2, \ldots, A_k$ زیرمجموعه‌هایی از X باشند به‌طوری که به ازای هر i، j متمایز $A_i \not\subseteq A_j$. حداکثر مقدار k رابیابید.

حل. یک زنجیر از زیرمجموعه‌های X را دنباله مجموعه‌های $B_1 \subset B_2 \subset B_3 \subset \ldots \subset B_n$ می‌گیریم که B_1 یک عضوی است، B_2، دو عضوی است، ... و B_n، n عضوی (یا کل X) است. تعداد زنجیرهای متمایز که یک مجموعه m عضوی به‌خصوص را شامل باشند برابر $m!(n-m)!$ است (چرا؟) و تعداد کل زنجیرهای متمایز $n!$ است. (چرا؟) چون بنابر فرض مسأله زنجیر شامل A_i، $i = 1, \ldots, k$ نباید مجموعه‌های دیگر را شامل باشد پس زنجیرهایی که A_1 را شامل هستند و زنجیرهایی که A_2 را شامل هستند و ... همگی متمایز هستند و تعداد آنها از $n!$ کمتر است. از طرف دیگر تعداد زنجیرهای شامل A_i، $m!(n-m)!$ است که m تعداد عناصر مجموعه است و می‌دانیم $m!(n-m)! \geq ([\frac{n}{2}]!)^2$ پس باید $n! \geq k([\frac{n}{2}]!)^2$ یا $k \leq \frac{n!}{[\frac{n}{2}]!^2}$ حال زیرمجموعه‌های $[\frac{n}{2}]$ عضو که تعداد آنها $\frac{n!}{[\frac{n}{2}]!^2}$ است در شرط مسأله صدق می‌کنند پس ماکزیمم k برابر $\binom{n}{[\frac{n}{2}]}$ است. ■

■ **مثال ۸-۱۰**

نشان دهید دنباله $a_1, a_2, \ldots, a_{mn+1}$ از اعداد حقیقی یا یک زیردنباله صعودی $m+1$ عضوی دارد یا یک زیردنباله نزولی $n+1$ عضوی.

توضیح. زیردنباله یعنی $a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots a_{i_k}$ که $i_1 < i_2 < i_3 < \ldots < i_k$، صعودی گوییم هرگاه $a_{i_1} \leq a_{i_2} \leq \ldots \leq a_{i_k}$ و نزولی گوییم هرگاه $a_{i_1} \geq a_{i_2} \geq \ldots \geq a_{i_k}$

حل. در بالای هر a_i زوج مرتب (α, β) را می‌نویسیم که α طول بزرگترین زیردنباله صعودی است که با a_i شروع می‌شود و β طول بزرگترین زیردنبالهٔ نزولی است که با a_i شروع می‌شود. زوجهای مرتب نوشته شده متمایز هستند چرا که اگر زوج مربوط به a_j, a_i که $i < j$ هر دو (α, β) باشد. و فرض کنیم $a_i \leq a_j$ آنگاه می‌توان دنباله α عضوی که صعودی است و با a_j شروع می‌شود را در نظر گرفت و عضو ابتدای آن را a_i قرار داد و یک زیردنباله صعودی $\alpha + 1$ عضوی که با a_i شروع می‌شود به‌دست آورد که با توجه به اینکه زوج a_i، (α, β) است غیرممکن است. فرض $a_i \geq a_j$ نیز با بررسی زیردنباله نزولی a_j میسر می‌شود. حال اگر مسأله درست نباشد برای هر a_i زوج (α, β) دارای این خاصیت است که $\alpha \leq m, \beta \leq n$ پس حداکثر mn زوج مرتب می‌توانند موجود آیند در حالیکه $mn + 1$ عدد داریم. تناقض حاصل درستی مسأله را ثابت می‌کند. ■

تمرین

۱. فرض کنید $a_1 < a_2 < \ldots < a_{mn+1}$ اعدادی طبیعی باشند. نشان دهید یا $m+1$ عضو وجود دارند مثلاً $a_{i_1} < a_{i_2} < \ldots < a_{i_{m+1}}$ که $a_{i_{m+1}}$ بر a_{i_m} بخش‌پذیر باشد و ... و a_{i_2} بر a_{i_1} بخش‌پذیر باشد یا $n+1$ عضو وجود دارد که هیچ دوتایی بر هم بخش‌پذیر نباشند.

۲ . می‌گوییم دو عضو a, b نسبتی با هم ندارند هرگاه $a \leq b$ و $b \leq a$ هر دو نادرست باشند؛ نشان دهید $\subseteq$ یک رابطه ترتیب جزئی روی زیرمجموعه‌های مجموعه X تعریف می‌کند و دو عضو را که نسبتی با هم ندارند مشخص کنید.

حال می‌توانیم قضیه کلی زیر را بیان کنیم.

تذکر. رابطه $\leq$ را یک رابطه ترتیب جزئی روی مجموعه A گوییم هرگاه

الف) $\forall a \in A; a \leq a$

ب) $\forall a, b \in A; a \leq b, b \leq a \Rightarrow a = b$

ج) $\forall a, b, c \in A; a \leq b \;, b \leq c \;\Rightarrow a \leq c$

۸-۱-۲ اصل شمول و عدم شمول

● **قضیه۸-۱**

فرض کنید $A_1, A_2, \ldots, A_n$ مجموعه‌هایی متناهی باشند آنگاه

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| = \sum_{i=1}^{n} |A_i| - \sum_{1\leq i<j\leq n} |A_i \cap A_j| + \sum_{1\leq i<j<k\leq n} |A_i \cap A_j \cap A_k| - \cdots + (-1)^{n-1}|A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n|$$

تذکر. $|A|$ تعداد اعضای مجموعهٔ A است و $\bigcup_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n$.

اثبات. عضو $a \in \bigcup_{i=1}^{n} A_i$ را در نظر می‌گیریم. فرض می‌کنیم a در k مجموعه از n مجموعهٔ A_1، ...، A_n قرار داشته باشد. اگر نشان دهیم a در طرف دوم نیز یکبار شمرده می‌شود حکم ثابت است.

در جمله اول از قضیهٔ ۸-۱، a، k بار شمرده می‌شود، در جمله دوم $\binom{k}{2}$ بار، در جمله سوم $\binom{k}{3}$ بار و ... پس کلاً $\binom{k}{1} - \binom{k}{2} + \binom{k}{3} - \cdots + (-1)^{k-1}\binom{k}{k}$ بار، a شمرده می‌شود و با توجه به این که $\binom{k}{0} - \binom{k}{1} + \cdots + (-1)^{k}\binom{k}{k} = 0$ (چرا؟) پس عبارت بالا برابر قضیه ۸-۱ است و حکم ثابت می‌شود. ●

تمرین

۱ . حکم قضیهٔ ۸-۱ را با استقرا روی n ثابت کنید.

حال صورت مفیدتری از قضیهٔ ۸-۱ را که در شمارش به‌کار می‌آید، بیان می‌کنیم. ابتدا نمادگذاریها را کمی توضیح می‌دهیم.

فرض کنید A یک مجموعهٔ n عضوی باشد و k شرط داشته باشیم؛ مثلاً شرایط $c_1, c_2, \ldots, c_k$. تعداد عناصری از A که شرط c_i را دارند به $N(c_i)$ و تعداد عناصری از A که هر دو شرط c_i, c_j

را دارند به $N(c_ic_j)$ نمایش می‌دهیم و همین طور برای شرایط بیشتر، $N(c_{i_1}c_{i_2}\ldots c_{i_m})$ تعریف می‌شود. به همین نحو $N(\overline{c_i})$ تعدادِ عناصری از A را که c_i ندارند، $N(\bar{c}_i\bar{c}_j)$ تعداد عناصری از A که شرایط c_i و c_j را ندارند و غیره.

● **قضیه۸-۲**

$$N(\bar{c}_1\bar{c}_2\ldots\bar{c}_k) = n - \sum_{i=1}^{k} N(c_i) + \sum_{i<j} N(c_ic_j) - \cdots + (-)^k N(c_1c_2\ldots c_k)$$

برهان مانند قضیه ۸-۲ می‌باشد و به خواننده واگذار می‌شود. ●

■ **مثال ۸-۱۱**

$\varphi(n)$ تعداد اعداد طبیعی که کوچکتر از n یا مساوی با آن هستند و نسبت به n اول هستند تعریف می‌شود. اگر $n = p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\ldots p_k^{\alpha_k}$ که p_iها اعدادی اول و متمایزند؛ نشان دهید

$$\varphi(n) = n(1-\frac{1}{p_1})\cdots(1-\frac{1}{p_k})$$

و نتیجه بگیرید اگر $(n,m)=1$ آنگاه

$$\varphi(mn) = \varphi(n)\varphi(m)$$

حل. شرط c_i را بخش‌پذیر بودن بر p_i می‌گیریم. مسألهٔ پیدا کردن $\varphi(n)$ بر می‌گردد به حساب کردن مقدار $N(\bar{c}_1\bar{c}_2\ldots\bar{c}_k)$ برای مجموعه n عضوی $\{1,2,\ldots,n\}$. به راحتی می‌توان دید که $N(c_{i_1}c_{i_2}\ldots c_{i_m})$ برابر $\frac{n}{p_{i_1}\cdots p_{i_m}}$ است، پس بنابر قضیه قبل داریم

$$\varphi(n) = n - \sum_{i=1}^{n}\frac{n}{p_i} + \sum_{i<j}\frac{n}{p_ip_j} - \cdots + (-1)^k\frac{n}{p_1p_2\ldots p_n}$$

ولی عبارت فوق بسط $n(1-\frac{1}{p_1})(1-\frac{1}{p_2})\ldots(1-\frac{1}{p_k})$ است و حکم ثابت می‌شود.

■

■ **مثال ۸-۱۲**

به چند طریق n نفر می‌توانند کلاههای خود را عوض کنند به‌طوری که هیچ کدام کلاه خودشان سرشان نباشد.

حل. افراد را از ۱ تا n شماره‌گذاری می‌کنیم و شرط c_i را این می‌گیریم که نفر iام کلاه خودش سرش باشد.

$N(c_{i_1}c_{i_2}\ldots c_{i_m})$ برابر می‌شود با $(n-m)!$ پس کافی است $N(\bar{c}_1\ldots\bar{c}_n)$ را برای مجموعه

تمام جایگشتها که $n!$ عضو دارد حساب کنیم.

$$N(\bar{c_1}\bar{c_2}\dots\bar{c_k}) = n! - n(n-1)! + \binom{n}{2}(n-2)! - \dots + (-1)^n(n-n)!\binom{n}{n}$$
$$= n!\left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \dots + \frac{(-1)^n}{n!}\right)$$

معمولاً عدد فوق را به $D(n)$ نمایش می‌دهند. ■

تمرین

۱. با استفاده از بسط تیلور $e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots$ نشان دهید برای nهای بزرگ

$$D(n) \simeq \frac{n!}{e}$$ ($\simeq$ علامت تقریب است)

■ مثال ۸-۱۳

فرض کنید X یک مجموعهٔ n عضوی و Y یک مجموعهٔ m عضوی باشد، تعداد تابعهای پوشای $f : X \to Y$ را تعیین کنید.

فرض می‌کنیم $Y = \{y_1, y_2, \dots, y_m\}$ و شرط c_i را این می‌گیریم که y_i در برد f نباشد. مسأله منجر می‌شود به محاسبه $N(\bar{c_1}\bar{c_2}\dots\bar{c_m})$ در مجموعه همه توابع $f : X \to Y$ که یک مجموعه m^n عضوی است (چرا؟). $N(c_{i_1}c_{i_2}\dots c_{i_k})$ برابر است با $(m-k)^n$ پس بنا بر قضیه ۲ داریم:

$$\text{تعداد توابع پوشا} = m^n - \binom{m}{1}(m-1)^n + \binom{m}{2}(m-2)^n + \dots + (-1)^{m-1}$$

■

از مسألهٔ فوق می‌توان نتیجه گرفت که اگر $m > n$ آن‌گاه مقدار فوق صفر است (چرا؟). از اتحاد فوق نتیجه بگیرید اگر P چند جمله‌ای با درجهٔ کوچکتر از m باشد:

$$\sum_{i=0}^{m}(-1)^i\binom{m}{i}P(i) = 0$$

تمرین

۱۰. فرض کنیم $A_1, A_2, \dots, A_q \subset X$. ثابت کنید تعداد اعضایی از X که دقیقاً متعلق به

p مجموعه از q مجموعه اول باشند برابر است با

$$\sum_{k=p}^{q}(-1)^{k-p}\binom{k}{p}\sum|\cap A_i|$$

که $\sum|\cap A_i|$ روی اشتراکهای kتایی است.

۸-۲ نظریهٔ گراف

▲ تعریف۸-۱

یک مجموعه متناهی V به‌عنوان رئوس و مجموعه‌ای از زیرمجموعه‌های دوعضوی V به‌عنوان یالها، یک گراف ساده را تشکیل می‌دهند. ▲

به زبان شهودی یک گراف مجموعه‌ای از نقاط است که توسط خطوطی موسوم به یال به هم وصل می‌باشند مانند شکل ۸-۴

شکل ۸-۴

حال به تعریف بعضی مفاهیم نظریه گراف می‌پردازیم.

درجهٔ رأس: تعداد یالهای خارج شده از یک رأس را درجهٔ آن رأس می‌نامیم. (درجهٔ رأس v را به $\deg v$ نمایش می‌دهند)

رأس منزوی: رأسی که درجه آن صفر باشد رأس منزوی نام دارد.

گراف کامل n رأسی که با K_n نمایش می‌دهند یک گراف با n رأس است که بین هر دو رأس آن یالی وجود داشته باشد. پس تعداد یالهای این گراف $\binom{n}{2}$ و درجهٔ هر رأس $n-1$ است.

متمم گراف G که با G^c نمایش می‌دهند گرافی است با همان رئوس G که دو رأس در آن به‌هم وصلند اگر و فقط اگر در G به هم وصل نباشند. مثلاً متمم دو گراف نمایش داده شده در شکل ۸-۴ در شکل ۸-۵ نموده شده است.

▲ تعریف۸-۲

گرافی که درجهٔ رئوس آن برابر باشند گراف منظم نام دارد؛ مثلاً K_n گراف منظم است. ▲

● قضیه۸-۳

مجموع درجات رئوس یک گراف دو برابر تعداد یالهای گراف است.

اثبات. تمرین ۱ ●

شکل ۸-۵

نتیجه. مجموع درجات رئوس یک گراف عددی است زوج.

نتیجه. در هر گراف تعداد رأسهای با درجهٔ فرد، زوج است.

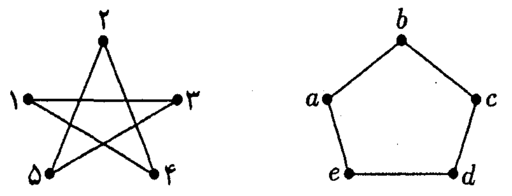
▲ تعریف۸-۳

فرض کنید G یک گراف باشد. G_1 را زیرگراف G گوییم هرگاه مجموعهٔ رئوس آن زیرمجموعه‌ای از مجموعه رئوس گراف G باشد و دو رأس در G_1 به هم وصل باشند اگر در G به هم وصل باشند.
▲

▲ تعریف۸-۴

گراف G_1 با مجموعه رئوس V_1 و مجموعهٔ یالهای E_1 را با گراف G_2 با مجموعه رئوس V_2 و مجموعهٔ یالهای E_2 یکریخت گوییم هرگاه تابع یک به یک و پوشای $f : V_1 \to V_2$ وجود داشته باشد به‌طوری که دو رأس b, a در G_1 به هم وصلند اگر و فقط اگر $f(a), f(b)$ در G_2 به‌هم وصل باشند.
▲

به‌راحتی می‌توان آزمود که یکریختی یک رابطهٔ هم‌ارزی است. به‌عنوان مثال گرافهای شکل ۸-۶ یکریختند.



شکل ۸-۶

در اینجا تابع $f : V_1 \to V_2$ به‌صورت زیر تعریف می‌شود

$$f(1) = a \quad f(3) = b \quad f(5) = c \quad f(2) = d \quad f(4) = e$$

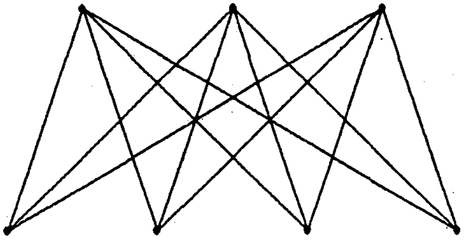
■ مثال ۸-۱۴

نشان دهید در هر گراف دو رأس وجود دارد که درجهٔ آنها برابر است.

حل. اگر رأس منزوی در گراف نباشد چون درجهٔ هر راس عددی است بین ۱ تا ۱ − n (n تعداد رئوس گراف است)، حکم بنا بر اصل لانه‌کبوتری نتیجه می‌شود. اگر دو رأس منزوی وجود داشته باشد درجه آنها با هم برابر خواهد بود. اگر تنها یک رأس منزوی داشته باشیم باقیماندهٔ گراف یک گراف ۱ − n رأسی است که درجه هر رأس بین ۱ تا ۲ − n است و حکم به استقرا ثابت می‌شود. ■

▲ تعریف ۸-۵

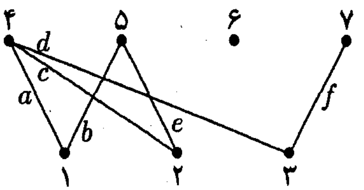
گراف دوبخشی کامل $K_{m,n}$ گرافی است با $m+n$ رأس که آنها را می‌توان به دو مجموعه، یکی m عضوی و دیگری n عضوی افراز کرد به‌طوری که هر دو رأس از یک مجموعه به‌هم وصل نباشند و هر دو راس از دو مجموعه مختلف به هم وصل باشند؛ مانند شکل ۸-۷.



شکل ۸-۷

▲

تذکر. اگر شرط وصل بودن هر دو رأس از مجموعه مختلف را از تعریف حذف کنیم. به تعریف گراف دوبخشی می‌رسیم به‌عنوان مثال شکل ۸-۸ یک گراف دوبخشی غیرکامل است.



شکل ۸-۸

▲ تعریف ۸-۶

مجموعه $v_1e_1v_2e_2v_3e_3\ldots e_nv_{n+1}$ که در آن $v_1, v_2, \ldots, v_{n+1}$ رئوس و e_i یال وصل‌کننده v_i و v_{i+1} است را یک گردش گوییم. اگر $v_1, v_2, \ldots, v_{n-1}$ متمایز باشند، یک مسیر تعریف می‌شود و اگر $v_1, v_2, \ldots, v_{n-1}$ متمایز باشند و $v_n = v_1$ آنگاه یک دور تعریف می‌شود.

به‌عنوان مثال در شکل ۸-۸

۱a۴c۲e۵b۱a۴ یک گردش است

۱a۴c۲ یک مسیر است

۱a۴c۲e۵b۱ یک دور است

▲

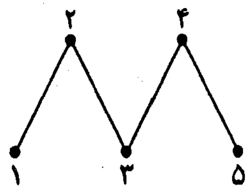
▲ **تعریف۸-۷**

گراف G را همبند گوییم هرگاه بین هر دو رأس آن مسیری وجود داشته باشد؛ مثلاً گراف شکل ۸-۸ همبند نیست چون بین ۶ و ۵ مسیری وجود ندارد ولی گراف شکل ۸-۹ (الف) همبند است.

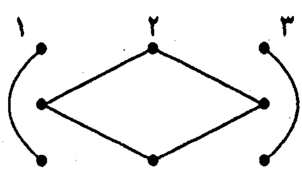
▲

رابطه هم‌ارزی زیر را روی رئوس گراف G تعریف می‌کنیم:

a, b هم‌ارز هستند هرگاه مسیری از a به b موجود باشد. کلاسهای هم‌ارزی که از این رابطه به‌دست می‌آیند را مؤلفه‌های گراف گوییم و تعداد آنها را به $k(G)$ نشان می‌دهیم. به‌عنوان مثال برای گراف شکل ۸-۹(ب) سه مؤلفه همبندی داریم که در شکل ۸-۱۰ شماره‌گذاری شده‌اند.



شکل ۸-۹



شکل ۸-۱۰

● **قضیه۸-۴**

گراف G دوبخشی است اگر و فقط اگر دور فرد نداشته باشد. (دور فرد، دوری است که تعداد یالهای آن فرد باشد)

اثبات. به‌راحتی می‌توان دید برای هر گراف دوبخشی G هردور تعداد زوجی یال دارد. حال فرض کنید G گرافی باشد که دور فرد نداشته باشد. کافی است مسأله را برای گرافهای همبند

ثابت کنیم، چون یک گراف دوبخشی است اگر و فقط اگر مؤلفه‌های همبندی آن دوبخشی باشند. مجموعهٔ رئوس G را به V نمایش می‌دهیم و برای رأس $v \in V$، U_1 را مجموعه رئوسی مانند $W \subset V$ می‌گیریم که کوتاهترین مسیر بین v و اعضای V، تعداد زوجی یال داشته باشد، V_2 را $V - V_1$ تعریف می‌کنیم (به‌راحتی) می‌توان نشان داد که هیچ دو رأس در V_1 به هم وصل نیست و هیچ دو رأسی در V_2 به هم وصل نیست پس G یک گراف دو بخشی است. ●

▲ تعریف۸-۸

اگر v رأسی ازگراف G باشد $G - v$ گرافی است که از حذف رأس v و تمام یالهای متصل به آن به‌دست می‌آید. ▲

▲ تعریف۸-۹

رأس v را رأس یک رأس برشی گراف Gگوییم هرگاه $k(G - v) > k(G)$. ▲

به‌عبارت دیگر تعداد مؤلفه‌های همبندی گراف با برداشتن رأس v زیاد شود. برای گراف همبند، برشی بودن رأس بدین معناست که با برداشتن آن رأس، گراف ناهمبند شود.

● قضیه۸-۵

در گراف همبند G رأس v برشی است اگر و فقط اگر دو رأس u و w از گراف موجود باشند به‌طوری که هر مسیر بین u و w از v بگذرد. ●

اثبات. (کفایت) اگر رأس v دارای خاصیت فوق باشد با برداشتن آن مسیری از u و w وجود نخواهد داشت یا به عبارت دیگر گراف ناهمبند می‌شود، پس v یک رأس برشی خواهد بود.

(لزوم) اگر v یک رأس برشی باشد با برداشتن آن گراف ناهمبند می‌شود پس اگر u و w را در مؤلفه‌های همبندی مختلف گراف $G - v$ بگیریم هر مسیر از u به w از v می‌گذرد زیرا در غیر این صورت u و w نمی‌توانند در مؤلفه‌های همبندی مختلف باشند.

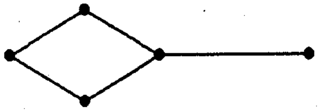
● قضیه۸-۶

در هر گراف همبند، ۲ رأس وجود دارد که برشی نباشد.

اثبات. رئوس u و w در گراف طوری وجود دارند که طول مسیر مینیمم بین u و w در گراف ماکزیمم باشد. اگر u و w غیر برشی باشند قضیه ثابت شده است و در غیر این صورت دست‌کم یکی از آنها مثلاً u برشی است. با حذف آن گراف ناهمبند می‌شود، پس، می‌توان رأس v را در مؤلفهٔ همبندی گرفت که متمایز از مؤلفهٔ همبندی که w را شامل است، باشد. در این صورت مسیر مینیمم از v به w از u می‌گذرد پس طول آن از مسیر مینیمم بین u و w بیشتر است و این یک تناقض می‌باشد. پس u و w هر دو غیر برشی هستند. ●

▲ تعریف۸-۱۰

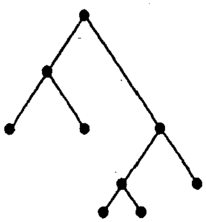
قطر گراف همبند G طول ماکزیمم مسیرهای مینیمم بین رئوس گراف است. مثلاً قطر گراف شکل ۸-۱۱، ۳ است. ▲



شکل ۸-۱۱

قطر گراف G را به $diam(G)$ یا $d(G)$ نمایش می‌دهند.

▲ تعریف ۸-۱۱
گراف همبند G را درخت گوییم هرگاه دور نداشته باشد. مانند شکل ۸-۱۲. ▲



شکل ۸-۱۲

● قضیه ۸-۷
احکام زیر هم‌ارزند (G یک گراف n رأسی است)

الف) G درخت است؛

ب) G دور ندارد و دارای $n - 1$ یال است؛

ج) G همبند و دارای $n - 1$ یال است؛

د) G همبند است و هر یال آن را برداریم غیرهمبند می‌شود؛

ه) هر دو رأس G تنها و تنها توسط یک مسیر به هم وصل است؛

و) G دور ندارد و هر دو رأس نامتصل را به هم وصل کنیم دقیقاً یک دور به‌دست می‌آید.

برهان قضیه فوق چندان مشکل نیست و به‌عنوان یک تمرین خوب برای درک تمام مفاهیم قبل به خواننده واگذار می‌شود. ●

● قضیه ۸-۸
در هر درخت اقلاً دو رأس وجود دارند که درجه آنها ۱ است.

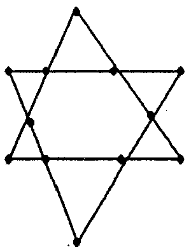
اثبات. اگر حداکثر یک رأس با درجه ۱ وجود داشته باشد، آنگاه مجموع درجات رئوس گراف حداقل $2n - 1$ است در حالی که مجموع درجات رئوس یک درخت دو برابر تعداد یالها که همان $n - 1$ است، می‌باشد یعنی $2n - 2$؛ تناقض حاصل درستی حکم را ثابت می‌کند. ●

▲ تعریف۸-۱۲

برای گراف همبند G زیر درخت گسترنده، زیرگرافی از G است که همهٔ رئوس G را شامل باشد و یک درخت باشد. ▲

▲ تعریف۸-۱۳ (گراف اویلری)

گراف همبند G را اویلری گویند هر گاه شامل گردش بسته‌ای باشد که همه یالهای گراف را دقیقاً یکبار طی کند؛ مثلاً گراف شکل ۸-۱۳ یک گراف اویلری است. گراف اویلری به مفهوم شهودی



شکل ۸-۱۳

شکلی است که از یک نقطه می‌توان آن را با مداد کشید بدون آنکه مداد را از کاغذ برداریم و سرانجام به رأس اول برگردیم. اگر در تعریف گراف اویلری شرط بسته بودن مسیر را حذف کنیم تعریف گراف نیمه اویلری به‌دست می‌آید. ▲

● قضیه۸-۹

گراف همبندG اویلری است اگر و فقط اگر درجهٔ هر رأس آن زوج باشد.

اثبات. (لزوم) اگر G اویلری باشد، گردش بستهٔ آن را در نظر می‌گیریم. در این گردش به هر رأس که می‌رسیم دقیقاً یک بار هم از آن خارج می‌شویم پس درجه هر رأس زوج است.

(کفایت) قضیه برای گرافهایی که تعداد یالهایشان کمتر یا مساوی ۳ است، درست است. فرض کنیم قضیه برای تمام گرافهای درجهٔ زوج و همبندی که تعداد یالهایشان کمتر از e باشد، درست باشد. ثابت می‌کنیم قضیه برای گرافهای e یالی هم درست است.

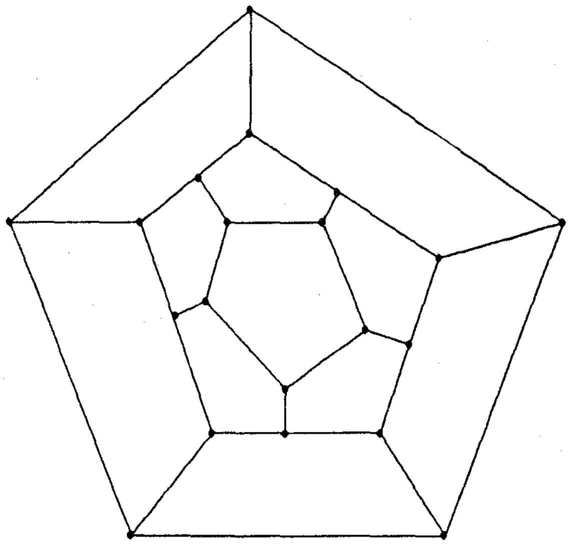
گردش بستهٔ ماکزیمال گراف را درنظر می‌گیریم (گردش بسته‌ای که تعداد یالهای آن ماکزیمم باشد) این گردش را G_1 می‌نامیم. اگر G_1 کل گراف G باشد که هیچ. وگرنه یالی پیدا می‌شود که در G هست ولی در G_1 نیست. حال یالهای گردش G_1 را از G حذف می‌کنیم، چیزی که باقی می‌ماند $(G - E(G_1))$ گرافی است که درجهٔ همه رأسهایش زوج است. یک مؤلفهٔ همبندی مثل G_2 از $G - E(G_1)$ را در نظر می‌گیریم چون کل گراف G همبند بود پس این مؤلفهٔ همبندی حداقل در یک رأس مثل v با G_1 اشتراک داشت. چون تعداد یالهای مؤلفه همبندی G_2 کمتر از e است پس بنا به فرض استقرا یک گردش بسته دارد. حال یک گردش جدید چنان به‌دست

می‌آوریم که در گردش G_1 هر وقت که به رأس v رسیدیم ابتدا گردش G_2 را طی می‌کنیم. این گردش از v شروع می‌شود و به v هم ختم می‌شود و سپس گردش G_1 را ادامه می‌دهیم. یک گردش به‌دست می‌آید که تعداد یالهایش بیشتر از گردش G_1 است و این مخالف فرض است. پس گردش G_1، یالهای کل گراف را در بر می‌گیرد یعنی گراف اویلری است. ●

▲ **تعریف۸-۱۴ (دور هامیلتونی)**

دوری از گراف G که تمام رئوس G را شامل باشد، هامیلتونی گویند. مثلاً گراف شکل ۸-۱۴ هامیلتونی است (یعنی دور هامیلتونی دارد). ▲

مسیری که تمام رئوس را شامل باشد، **مسیر هامیلتونی** نام دارد.



شکل ۸-۱۴

● **قضیه۸-۱۰**

اگر برای هر دو رأس غیرمتصل v, u از G که دارای n رأس است نامساوی

$$\deg u + \deg v \geq n$$

برقرار باشد آنگاه گراف G هامیلتونی است.

اثبات. فرض کنید G هامیلتونی نباشد، به G آنقدر یال اضافه می‌کنیم تا به گرافی تبدیل شود که با اضافه کردن هر یال، هامیلتونی گردد. نام آن را G_1 می‌گذاریم. v، u را دو رأس غیرمتصل در گراف اخیر می‌گیریم (توجه کنید که K_n هامیلتونی است پس دو رأس غیرمتصل وجود دارد)

با اتصال u, v گراف هامیلتونی می‌شود و دارای دور هامیلتونی

$$u \to u_{۱} \to u_{۲}, \ldots \to u_{n-۲} \to v \to u$$

است. اگر u به u_i وصل باشد v به $u_{i-۱}$ وصل نیست چون در این صورت

$$u \to u_i \to u_{i+۱} \to \ldots \to v \to u_{i-۱} \to u_{i-۲} \to \ldots \to u$$

یک دور هامیلتونی است که شامل یال uv نیست و این با طرز ساخت $G_{۱}$ تناقض دارد. پس از اینجا نتیجه می‌شود $\deg u + \deg v \leq n - ۱$ که با فرض مسأله تناقض دارد. پس گراف G هامیلتونی بوده است. ●

▲ تعریف۸-۱۵ (گراف مسطح)

به گرافی که بتوان آن را در صفحه طوری قرار داد که یالهای آن یکدیگر را قطع نکنند گراف مسطح گوییم. ▲

شکل ۸-۱۵

برای گراف مسطح تعداد ناحیه‌هایی که صفحه ایجاد می‌کنند را می‌توان شمرد. مثلاً در گرافهای فوق تعداد ناحیه‌ها ۵ و ۴ است. توجه کنید ناحیه خارجی نیز حساب می‌شود.

● قضیه۸-۱۱

در گراف مسطح G با تعداد رأسهای V تعداد یالهای E و تعداد ناحیه‌های R رابطه زیر برقرار است

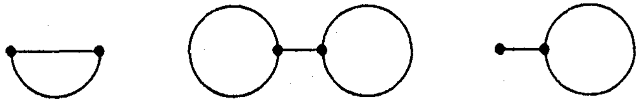
$$V - E + R = ۲$$

اثبات. به استقرا روی تعداد یالها، برای $E = ۱$ و ۲ حکم واضح است. فرض می‌کنیم قضیه برای گرافها با تعداد یالهای نابیشتر از E درست باشد. حکم را برای گراف با $E + ۱$ یال را ثابت می‌کنیم. اگر یک یال از گراف کم کنیم یکی از صورتهای شکل ۸-۱۶ اتفاق خواهد افتاد که درستی فرمول در هر حالت به سادگی به‌دست می‌آید.

چون هر ناحیه حداقل محصور بین ۳ یال است پس $۳R \leq ۲E$ حال چون

$$۳V - ۳E + ۳R = ۶ \Rightarrow ۳V - E \geq ۶ \Rightarrow E \leq ۳V - ۶$$

●



شکل ۸-۱۶

نتیجه. K_5 گراف مسطح نیست.

اثبات. برای K_5، داریم $E = 10$ و $V = 5$. اگر K_5 مسطح باشد آنگاه بنابر نامساوی فوق $9 = 6 - 15 \leq 10$ که تناقض است.

نتیجه. در هرگراف مسطح رأسی وجود دارد که درجه آن حداکثر ۵ است

برهان. تمرین!

● **قضیه۸-۱۲**

$K_{3,3}$ (گراف دو بخشی کامل با ۶ رأس) مسطح نیست.

اثبات. در $K_{3,3}$ هر ناحیه حداقل محصور بین ۴ یال است پس $4R \leq 2E$، از طرفی

$$V - E + R = 2 \Rightarrow 4V - 4E + 4R = 8 \Rightarrow 4V - 2E \leq 8$$
$$\Rightarrow E \leq 2V - 4$$

ولی در $K_{3,3}$ $V = 6$ و $E = 9$ پس اگر $K_{3,3}$ مسطح باشد

$$9 \leq 12 - 4 = 8$$

که تناقض است. ●

▲ **تعریف۸-۱۶**

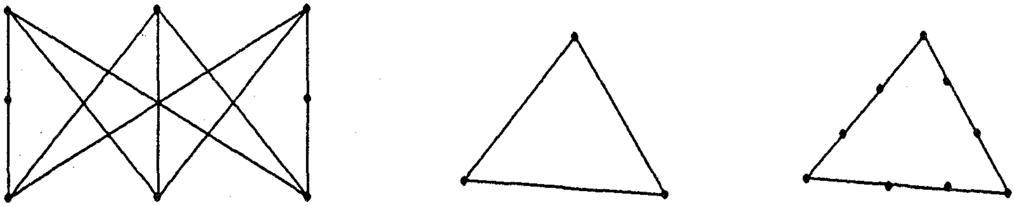
یک زیرتقسیم گراف G عبارت است ازگرافی مانند H که با اضافه کردن رأسهای جدید روی یالهای G به‌دست آید. مثلاً در شکل ۸-۱۶، H یک زیرتقسیم G است. ▲

● **قضیه۸-۱۳ (کوراتوسکی)**

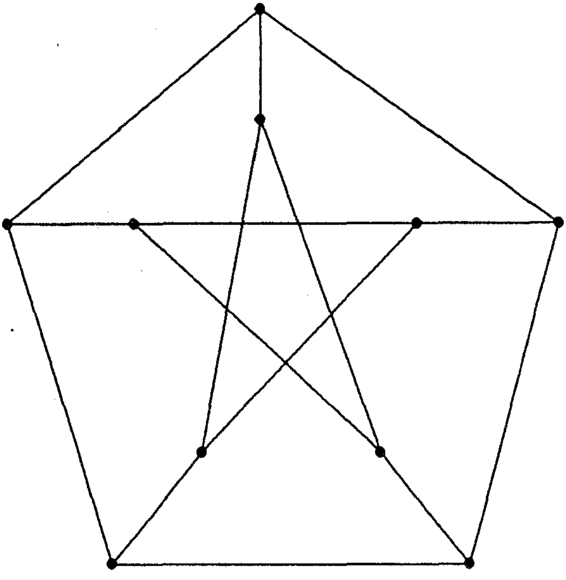
گراف همبند G مسطح است اگر و فقط اگر زیر تقسیم از $K_{3,3}$ یا K_5 نداشته باشد. ●

تمرین

۱. با استفاده از قضیه فوق نشان دهید گراف شکل ۸-۱۸ (گراف پترسون) غیر مسطح



شکل ۸-۱۷



شکل ۸-۱۸

است.

▲ **تعریف۸-۱۷ (عدد رنگی رأسی)**
برای گراف G کمترین عددی که بتوان رأسهای گراف را با آن تعداد رنگ، رنگ‌آمیزی کرد به‌طوری که هیچ دو رأس متصل همرنگ نباشند، عدد رنگی رأسی گراف G گفته می‌شود و به $\chi(G)$ نمایش داده می‌شود. ▲

▲ **تعریف۸-۱۸ (عدد رنگی یالی)**
نظیر تعریف قبلی کمترین عددی است که یالهای گراف را بتوان با آن تعداد رنگ، رنگ‌آمیزی کرد به‌طوری که هیچ دو یالی که در یک رأس مشترک هستند همرنگ نباشند و با $\chi'(G)$ نشان داده

می‌شود. ▲

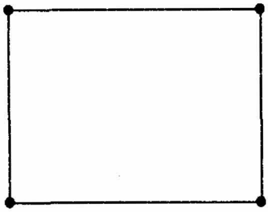
■ **مثال ۸-۱۵**

به راحتی می‌توان دید که:

$$\chi(C_{۲n+۱}) = ۳, \quad \chi(C_{۲n}) = ۲, \quad \chi(K_n) = n$$

که در آن C_n دور n رأسی است. مثلاً $C_۴$ در شکل ۸-۱۹ نمایانده شده است.

■



شکل ۸-۱۹

حال چند قضیه برای χ بدون اثبات بیان می‌کنیم.

● **تضیه۸-۱۴ (قضیه Brooks)**

اگر گراف همبند G، گراف کامل نباشد یا دور فرد نداشته باشد، آنگاه $\chi(G) \leq \Delta(G)$ که $\Delta(G)$ ماکزیمم درجه رئوس است. ●

● **تضیه۸-۱۵ (قضیهٔ Nordhavs and Gaddum)**

اگر G یک گراف با تعداد رئوس n باشد آنگاه:

$$۲\sqrt{n} \leq \chi(G) + \chi(G^c) \leq n + ۱ \qquad \text{(۸\_۱ الف)}$$

$$n \leq \chi(G).\chi(G^c) \leq \left(\frac{n+۱}{۲}\right)^۲ \qquad \text{(۸\_۱ ب)}$$

●

● **تضیه۸-۱۶ (قضیهٔ Vizing)**

برای هر گراف G

$$\chi'(G) \leq ۱ + \Delta(G)$$

●

تمرین

۱ . گرافی داریم n رأسی و m یالی. ثابت کنید حداقل

$$\frac{4m}{3n}\left(m-\frac{n^2}{4}\right)$$

مثلث در آن وجود دارد.

۲ . $d_1 \leq d_2 \leq \ldots \leq d_n$ درجات رئوس یک گراف هستند که برای هر $1 \cdots k \leq n - d_n$ داریم $d_k \geq k$ ثابت کنید گراف مفروض همبند است.

۳ . فرض کنید گراف G، n رأس و m یال دارد. ثابت کنید حداقل $m - n$ یال موجود است که هیچ دوتایی در هیچ رأسی مشترک نیستند.

۴ . در یک گراف ۱۰ رأسی بین هر سه رأس حداقل دو تا به هم متصلند. ثابت کنید این گراف یک زیرگراف کامل ۴ رأسی دارد. آیا این حکم برای یک گراف ۹ رأسی هم درست است؟

۵ . یک گراف ۳بخشی داریم که هر بخش آن n رأس دارد و درجه هر رأس آن $n + 1$ است. ثابت کنید می‌توان از هر بخش یک رأس انتخاب کرد طوری که هر دو رأس از این سه رأس به هم متصل باشند.

۶ . اگر مجموعه یالهای K_m را به n مجموعه $A_1, \ldots, A_n$ افرازکنیم که $m > 2^n$ در این صورت حداقل یکی از مجموعه‌های A_i شامل یک دور فرد است. برای $M = 2^n$ مثال نقضی بیاورید.

۷ . در یک گراف هر دو رأس که متصل باشند رأس متصل مشترکی ندارند ولی هر دو رأس که متصل نیستند درست دو رأس متصل مشترک دارند ثابت کنید درجه تمام رئوس مساوی است.

۸ . در یک گراف دو بخشی یکی از بخشها را A بنامید و فرض کنید رئوس A عبارت باشند از $a_1, \ldots, a_m$. فرض کنید برای هر k رأس از این رئوس مجموعه رئوسی که حداقل به یکی از اینها متصل است حداقل k عضو داشته باشد. $(1 \leq k \leq m)$ ثابت کنید m یال $v_1, v_2, \ldots, v_m$ موجود است که هر a_i رأسی از v_i است و هیچ دوتا از v_iها در هیچ رأسی مشترک نیستند. (این قضیه فیلیپ هال است)

■ **مثال ۸-۱۶**

روی صفحه n نقطه داده شده که هیچ سه‌تایی بر یک خط راست نیستند. $(n \geq 5)$ ثابت کنید حداقل $\binom{n-3}{2}$ چهار ضلعی محدب با رئوس بین این n نقطه وجود دارند.

اثبات. فرض کنید $f(n)$ کران پایینی برای تعداد چهار ضلعی‌های محدب با n **نقطه** در صفحه باشد. (یعنی برای هر n نقطه دلخواه حداقل $f(n)$ چهار ضلعی محدب با رئوس بین آن n نقطه موجود باشد) واضح است که برای $n \geq ۵$ داریم $f(n) \geq ۱$ حال اگر نقاط داده شده $a_۱, \ldots, a_n$ باشند با کنارگذاشتن هر a_i، $f(n-۱)$ چهار ضلعی محدب به‌دست می‌آید که کلاً می‌شود $nf(n-۱)$ ولی هر چهار ضلعی محدب حداکثر $n-۴$ بار شمرده می‌شود پس داریم

$$f(n) \geq \frac{nf(n-۱)}{n-۴} \Rightarrow \frac{f(n)}{f(n-۱)} \geq \frac{n}{n-۴} \qquad n \geq ۵$$

$$\Rightarrow \prod_{n=۶}^{k} \frac{f(n)}{f(n-۱)} \geq \prod_{n=۶}^{k} \frac{n}{n-۴} \Rightarrow \frac{f(k)}{f(۵)} \geq \frac{k!}{۵!(k-۴)!}$$

ولی $f(۵) \geq ۱$ و لذا

$$f(k) \geq \frac{k!}{۵!(k-۴)!} \Rightarrow f(k) \geq \frac{\binom{k}{۵}}{k-۴} \qquad k \geq ۵$$

ولی از آنجا که

$$\frac{\binom{k}{۵}}{k-۴} \geq \binom{k-۳}{۲}$$

حکم ثابت می‌شود. ■

۸-۳ قضیهٔ دیل‌ورث

● **قضیه۸-۱۷ (دیل‌ورث)**

هرگاه A یک مجموعه مرتب جزئی با $mn+۱$ عضو باشد مثلاً $A = \{a_۱, a_۲, \ldots, a_{mn+۱}\}$ آنگاه می‌توان یا یک مجموعهٔ $m+۱$ عضوی مثلاً $\{a_{i_۱}, a_{i_۲}, \ldots, a_{i_{m+۱}}\}$ پیدا کرد که $a_{i_۱} \leq a_{i_۲} \leq \cdots \leq a_{i_{m+۱}}$ یا یک مجموعهٔ $n+۱$ عضوی پیدا کرد که هیچ دو عضوی از آن با هم نسبتی نداشته باشند. ●

کاربرد قضیه دیل‌ورث

الف) با استفاده از قضیه دیل‌ورث مثال ۸-۱۰ را دوباره ثابت کنید.

ب) روی خط راستی $n^۲+۱$ پاره خط قرار گرفته است، ثابت کنید یا بین این پاره‌خط‌ها می‌توان $n+۱$ پاره خط غیر متقاطع پیدا کرد و یا $n+۱$ پاره‌خط وجود دارند که یک نقطه مشترک دارند.

اثبات. پاره خطها را بازه‌هایی روی خط حقیقی در نظر بگیرید. هر پاره خط به‌صورت [a,b] است. حال رابطه‌ای (ترتیب جزئی) بین این $n^۲+۱$ پاره خط تعریف کنید.

$$[a,b] \leq [c,d] \Leftrightarrow b < c \text{ یا } [a,b] = [c,d]$$

واضح است که این یک رابطه ترتیب جزئی است حال با استفاده از قضیه دیل‌ورث یا $n+1$ پاره‌خط موجود است که $[a_1, b_1] \leq [a_2, b_2] \leq \ldots \leq [a_n, b_n]$ (که چون این $n+1$ پاره‌خط متمایزند پس نتیجه می‌شود هیچ دوتایی همدیگر را قطع نخواهد کرد (با توجه به تعریف $\leq$) و یا $n+1$ عضو موجود است که هر دو عضو با هم نسبت ندارد و این معناست که $n+1$ پاره‌خط موجود است که هر دو تا متمایزند ولی اشتراک دارند، ولی طبق مسأله‌ای هر تعداد متناهی پاره‌خط روی یک خط که هر دو تا اشتراک داشته باشند، همگی در یک نقطه مشترک هستند (اثبات این مسأله با استقرا به سادگی به‌دست می‌آید). بنابراین قضیه ثابت شد.

تمرین

۱. M زیرمجموعه‌ای از مجموعه همه زوجهای عددهای طبیعی (a,b) است که $a<b$ و a و b از عدد مفروض طبیعی $n \geq 2$ تجاوز نمی‌کنند در ضمن اگر (a,b) در M باشد، آن وقت هیچ زوج (b,c) در آن نیست. مجموعهٔ M حداکثر چند عضو دارد؟

۲. مجموعه X، n عضوی است. حداکثر چند زیرمجموعه ۳ عضوی از X می‌توان برداشت که هر دو تا از آنها در یک عضو مشترک باشند.

۳. از مجموعه‌ای که $n \geq 5$ عضو دارد، $n+1$ زیرمجموعه ۳ عضوی برداشته‌ایم. ثابت کنید بین این زیرمجموعه‌ها دو تا هستند که دقیقاً یک عضو مشترک دارند.

۴. مجموعه X را به زیرمجموعه‌های جدا از هم A_1، ...، A_n تقسیم کرده‌ایم، سپس همان مجموعه X را به زیرمجموعه‌های جدا از هم B_1، ...، B_n تقسیم کرده‌ایم طوری که $A_i \cup B_j$ برای هر i,j که $1 \leq i,j \leq n$، حداقل n عضو دارد. ثابت کنید $|X| \geq \frac{n^2}{2}$. آیا تساوی می‌تواند برقرار شود؟

۵. به چند طریق می‌توان k عدد از بین عددهای ۱، ۲، ...، n انتخاب کرد که هیچ دوتایی متوالی نباشند؟

۶. ۲۰ عدد طبیعی $a_1 < a_2 < \ldots a_{20} \leq 70$ داده شده است. ثابت کنید بین $(a_j - a_k)$ها که $j>k$ حداقل ۴ عدد برابر موجود است.

۴-۸ توابع مولد

اگر ضریب x^5 را در بسطی مانند زیر محاسبه کنیم:

$$(1+x+x^2+x^3+\cdots)^4$$

آنگاه تعداد حالات تقسیم ۵ شیء را بین ۴ نفر به‌دست آورده‌ایم! در واقع x^5 به‌صورتهای مختلفی از قبیل $x^1x^2x^1x^1$ یا $x^0x^1x^3x^1$ یا $x^1x^2x^2x^0$, ... ساخته می‌شود. که در واقع هر کدام نوعی

تقسیم را مشخص می‌کند. به این گونه توابع تابع مولد گفته می‌شود و در بعضی مسائل بسیار مفیدند.

تعمیم تعریف ضریب دو جمله‌ای برای اعداد حقیقی

$$\binom{r}{k} = \frac{r(r-1)(r-2)\dots(r-k+1)}{k!} \qquad (r \in R,\ k \in N,\ k \le r)$$

$$\binom{r}{0} = 1$$

تعمیم بسط دو جمله‌ای برای اعداد حقیقی

$$(x+y)^r = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{r}{k} x^k y^{r-k}$$

تذکر. برای اعداد غیرطبیعی بسط دوجمله‌ای نامتناهی است. با استفاده از تعریف می‌توان این مطلب را ثابت کرد.

$$n, r \in N \quad \binom{-n}{r} = (-1)^r \binom{n+r-1}{r}$$

درس توابع مولد را تنها با مثالهای متعدد ارائه می‌دهیم.

تذکر. برای اعداد غیر طبیعی بسط دو جمله‌ای نامتناهی است. با استفاده ار تعریف می‌توان این مطلب را ثابت کرد.

■ مثال ۸-۱۷

تعداد حالت‌های تقسیم n شیء را بین k نفر به‌دست آورید.

حل. باید ضریب x^n را در بسط $(1+x+x^2+\cdots)^k$ به‌دست آوریم. از طرفی اگر $x<1$ بگیریم بنابر فرمول حد مجموع تصاعد هندسی باید بسط $(1-x)^{-k}$ را محاسبه کنیم. ضریب x^n بنابر فرمول برابر است با

$$(-1)^k \binom{-k}{n} = \binom{n+k-1}{n}$$

یعنی جواب $\binom{n+k-1}{n}$ است. ■

■ مثال ۸-۱۸

به چند طریق می‌توان اسکناس ۱۰ تومانی را به سکه‌های ۱ و ۲ و ۵ تومانی خرد کرد.

حل. باید ضریب x^{10} را در بسط

$$(1+x+x^2+\cdots)(1+x^2+x^4+\cdots)(1+x^5+x^{10}+\cdots)$$

به‌دست آوریم. که برابر ۷ می‌شود یعنی به ۷ طریق می‌توان این کار را انجام داد. ■

■ **مثال ۸-۱۹**

ثابت کنید تعداد حالتهایی که یک عدد را می‌توان به‌صورت چند عدد فرد نوشت برابر تعداد حالتهایی است که یک عدد را می‌توان به‌صورت مجموع چند عدد مختلف نوشت.

حل. بسط مولد افراز اعداد به مجموع اعداد فرد به‌صورت زیر است:

$$(1+x+x^2+\cdots)(1+x^3+x^6+\cdots)(1+x^5+x^{10}+\cdots)$$
$$=\frac{1}{1-x}\cdot\frac{1}{1-x^3}\cdot\frac{1}{1-x^5}\cdots$$

و بسط بعدی به‌صورت زیر است

$$(1+x)(1+x^2)(1+x^3)\ldots=\frac{1-x^2}{1-x}\cdot\frac{1-x^4}{1-x^2}\cdot\frac{1-x^6}{1-x^3}\cdot\frac{1-x^8}{1-x^4}$$
$$=\frac{1}{1-x}\cdot\frac{1}{1-x^3}\cdot\frac{1}{1-x^5}\cdots$$

از آنجا درستی حکم ثابت می‌شود.

■

■ **مثال ۸-۲۰**

ثابت کنید برای $\forall n\in \mathbf{N}$

$$\binom{n}{0}^2+\binom{n}{1}^2+\cdots+\binom{n}{n}^2=\binom{2n}{n}$$

حل. ضریب x^n در بسط $(1+x)^{2n}$ برابر $\binom{2n}{n}$ است. از طرفی

$$(1+x)^{2n}=(1+x)^n.(1+x)^n$$
$$=\left(1+\binom{n}{1}x+\cdots+\binom{n}{n}x^n\right)\left(1+\binom{n}{1}x+\cdots+\binom{n}{n}x^n\right)$$

و ضریب x^n برابر

$$\binom{n}{0}\binom{n}{n}+\binom{n}{1}\binom{n}{n-1}+\cdots+\binom{n}{n}\binom{n}{0}$$

است و از فرمول $\binom{n}{n-k}=\binom{n}{n}$ نتیجه می‌شود این همان $\binom{n}{n}^2+\cdots+\binom{n}{0}^2$ است و از آنجا

حکم ثابت می‌شود. ■

■ **مثال ۸-۲۱**

ضریب x^n را در بسط $\frac{1}{(x-3)(x-2)^2}$ به‌دست آورید.

حل. باید کسر را تفکیک کرد

$$\frac{1}{(x-3)(x-2)^2} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{(x-2)} + \frac{C}{(x-2)^2}$$

طرفین را در $x - 3$ ضرب و به‌جای x ، ۳ قرار می‌دهیم به‌دست می‌آید $A = 1$؛ طرفین را در $(x-2)^2$ ضرب و به‌جای x، ۲ قرار می‌دهیم به‌دست می‌آید $C = -1$؛ بجای x، ۴ قرار می‌دهیم و A و C را مقدارگذاری می‌کنیم به‌دست می‌آید $B = -1$؛

$$\frac{1}{x-3} = (x-3)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-1}{k} x^k (-3)^{-1-k}$$

$$\frac{-1}{(x-2)} = -(x-2)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-1}{k} x^k (-2)^{-1-k}$$

$$-\frac{1}{(x-2)^2} = -(x-2)^{-2} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-2}{k} x^k (-2)^{-2-k}$$

پس ضریب x^n عبارت است از

$$\binom{-1}{n}(-3)^{-1-n} - \binom{-1}{n}(-2)^{-1-n} - \binom{-2}{n}(-2)^{-2-n}$$

که از فرمول بسط دو جمله‌ای برابر $\binom{-n}{r}$ به‌دست می‌آید. ■

■ **مثال ۸-۲۲**

بسط مولد سری $\{1^2, 2^2, \ldots\}$ را بنویسید(یعنی عبارتی که به‌صورت $1^2 + 2^2 x + \ldots$ باشد

حل. بسط $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots$ را در نظر بگیرید اگر یک‌بار مشتق بگیریم داریم

$$\left(\frac{1}{1-x}\right)' = 1 + 2x + 3x^2 + \cdots$$

$$x\left(\frac{1}{1-x}\right)' = x + 2x^2 + 3x^3 + \cdots$$

اگر از این عبارت هم مشتق بگیریم داریم

$$\left(x\left(\frac{1}{1-x}\right)'\right)' = 1^2 + 2^2x + 3^2x^2 + \cdots$$

یا

$$\left(x\left(\frac{1}{1-x}\right)'\right)' = \frac{x(x+1)}{(1-x)^3}$$

■

■ مثال ۸-۲۳

اگر بسط مولد $\{a_0, a_1, \ldots\}$ را داشته باشیم بسط مولد $\{a_0, a_0 + a_1, a_0 + a_1 + a_2, \ldots\}$ را به‌دست آورید

$$f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$$

$$\Rightarrow g(x) = \frac{f(x)}{1-x} = f(x)(1 + x + x^2 + \cdots) =$$

$$a_0 + (a_0 + a_1)x + (a_0 + a_1 + a_2)x^2 + \cdots$$

■

■ مثال ۸-۲۴

با استفاده از مثال ۸-۲۳، $n + \cdots + 3 + 2 + 1$ را محاسبه کنید.

حل.

$$\left(\frac{1}{1-x}\right)' = 1 + 2x + 3x^2 + \cdots = \frac{-1}{(1-x)^2}$$

پس باید ضریب x^{n-1} را در بسط $\frac{-1}{(1-x)^3}$ محاسبه کنیم اما می‌دانیم که

$$-(1-x)^{-3} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-3}{k} (-x)^k$$

بنابراین ضریب x^n برابر است با

$$\binom{n+1}{n-1} = \frac{n(n+1)}{2}$$

■

■ مثال ۸-۲۵

بسط توانی e^x را که در آن e عدد نپر است $(e = \lim_{x\to\infty}(1 + \frac{1}{x})^x)$ پیدا کنید.

حل.

$$e^x = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots \qquad x = 0 \Rightarrow a_0 = \frac{1}{0!}$$

مشتق می‌گیریم $$e^x = a_1 + 2a_2x + \cdots \qquad x = 0 \Rightarrow a_1 = \frac{1}{1!}$$

مشتق می‌گیریم $$e^x = 2a_2 + 6a_3x + \cdots \qquad x = 0 \Rightarrow a_2 = \frac{1}{2!}$$

مشتق می‌گیریم $$e^x = 6a_3 + 24a_4x + \cdots \qquad x = 0 \Rightarrow a_3 = \frac{1}{3!}$$

به همین ترتیب $a_k = \frac{1}{k!}$ پس:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$$

■

■ **مثال ۸-۲۶**

حد ضریب x^n را در بسط $\frac{e^x}{1-x}$ وقتی n به بینهایت میل کند به‌دست آورید.

طبق مثال ۷ باید مجموع $\cdots + \frac{1}{3!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{1!} + 1$ را حساب کنیم. که اگر در رابطه بالا بجای x، ۱ قرار دهیم حد مجموع برابر e می‌شود. ■

■ **مثال ۸-۲۷**

قایقی ۴۸ پرچم دارد که به تعداد مساوی پرچم قرمز، سفید ، آبی و سیاه دارد. این قایق علایم ۱۲ پرچمی می‌فرستد به‌طوری که تعداد فردی پرچم آبی و تعداد زوجی پرچم سیاه داشته باشد. این قایق چند علامت می‌تواند بفرستد؟

حل. باید ضریب $\frac{x^{12}}{12!}$ را در بسط زیر به‌دست آوریم

$$\left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots\right)^2 \left(1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots\right) \left(1 + \frac{x^3}{3!} + \cdots\right)$$

از بسط e^x نتیجه می‌شود

$$\frac{e^x + e^{-x}}{2} = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots$$

$$\frac{e^x + e^{-x}}{2} = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots$$

پس باید ضریب $\frac{x^{12}}{12!}$ را در بسط زیر حساب می‌کنیم

$$e^{2x}\left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)\left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right) = e^{2x}\left(\frac{e^{2x} - e^{-2x}}{4}\right) = \frac{e^{4x} - 1}{4}$$

که برابر $۴^{۱۱} = \frac{۴^{۱۲}}{۴}$ است. ■

■ **مثال ۸-۲۸**

اگر اعداد طبیعی را به تعداد متناهی تصاعد حسابی افراز کنیم، ثابت کنید دست‌کم قدرِ نسبت دو تصاعد با هم مساوی است.

حل. فرض کنید افرازها به‌صورت زیر باشند

$$\{a_۱, a_۱ + d_۱, a_۱ + ۲d_۱, \ldots\}$$
$$\{a_۲, a_۲ + d_۲, a_۲ + ۲d_۲, \ldots\}$$
$$\vdots$$
$$\{a_n, a_n + d_n, a_n + ۲d_n, \ldots\}$$

داریم

$$x + x^۲ + \cdots = (x^{a_۱} + x^{a_۱+d_۱} + \cdots) + (x^{a_۲} + \cdots) + \cdots + (x^{a_n} + \cdots)$$

یا

$$\frac{x}{۱ - x} = \frac{x^{d_۱}}{۱ - x^{d_۱}} + \frac{x^{d_۲}}{۱ - x^{d_۲}} + \cdots + \frac{x^{d_n}}{۱ - x^{d_n}}$$

اگر هیچ دو قدر نسبتی برابر نباشند بین d_iها ماکزیممی یکتا مانند d_n وجود دارد. $۱ - x^{d_n}$ ریشه‌ای مختلط به‌صورت $e^{\frac{۲\pi i}{d_n}}$ دارد $(i = \sqrt{-۱})$ است. این ریشه مشترک ریشهٔ هیچ کسر دیگری نیست؛ چون اگر کسر دیگری این ریشه را داشته باشد باید d_i عامل d_n داشته باشد که چون $d_n > d_i$ غیر ممکن است. حال اگر طرفین را به $e^{\frac{۲\pi i}{d_n}}$ میل دهیم طرف راست ∞ می‌شود در حالیکه طرف چپ عدد است. از تناقض حاصل نتیجه می‌شود d_n با یک قدر نسبت دیگر برابر است. ■

۹

اعداد مختلط

۹-۱ اعداد مختلط

با دستگاههای مختلف اعداد از قبل آشنا هستیم؛ در اینجا ذکری اجمالی از آنها به میان آورده پس از آن به معرفی اعداد مختلط می‌پردازیم.

۱. اعداد طبیعی. مجموعهٔ اعداد طبیعی از همان ابتدا برای بشر شناخته شده بود. این مجموعه از اعداد را که متشکل از ۱، ۲ و ... می‌باشد، با $\mathbf{N}$ نمایش می‌دهیم. $\mathbf{N}$ نسبت به اعمال جمع و ضرب بسته است، یعنی اگر a و b دو عدد طبیعی باشند $a + b$ و $a \times b$ نیز طبیعی‌اند.

۲. اعداد صحیح. با توجه به اینکه معادلات ساده‌ای نظیر $x + ۳ = ۲$ در مجموعهٔ اعداد طبیعی جوابی ندارند مجموعهٔ اعداد منفی تعریف شدند؛ با اضافه شدن صفر به‌عنوان جوابی برای معادلهٔ $x + a = a$ به دو مجموعهٔ قبل، مجموعهٔ اعداد صحیح ساخته شد. این مجموعهٔ اعداد را با $\mathbf{Z}$ نمایش می‌دهیم. $\mathbf{Z}$ نیز همچون $\mathbf{N}$ نسبت به جمع و ضرب بسته است، ضمن آنکه وارون جمعی هر عضو $\mathbf{Z}$، عضوی از $\mathbf{Z}$ است.

۳. اعداد گویا. و اما با طرح معادلات نظیر $۵x + ۲ = ۶$ ، مجموعهٔ اعداد گویا تعریف شد. مجموعهٔ اعداد گویا که آنرا با $\mathbf{Q}$ نمایش می‌دهیم، عبارت است از مجموعهٔ جوابهای همهٔ معادلات به شکل $ax = b$ که $a \in \mathbf{N}$ و $b \in \mathbf{Z}$. $\mathbf{Q}$ تحت اعمال جمع و ضرب و تفریق، $\mathbf{Q} - \{۰\}$ تحت تقسیم بسته است و هر عدد گویا (غیر از صفر) نسبت به هر یک از این چهار عمل دارای وارون می‌باشد.

۴. اعداد حقیقی. پس از معادلات درجهٔ یک که منجر به تولید اعداد گویا شد، معادلاتی از درجهٔ دو و بیشتر، نظیر معادلهٔ $x^۲ = ۲$، مطرح شدند. همچنین مطرح شدن اعدادی مانند $\pi = ۳/۱۴۱۵۹ \cdots$, $e = ۲/۷۱۸۲ \cdots$ که هیچ کدام به شکل a/b نیستند، باعث تعریف اعداد اصم شد که اجتماع آنها با $\mathbf{Q}$، اعداد حقیقی را به‌وجود می‌آورد. مجموعهٔ اعداد حقیقی را با

$\mathbf{R}$ نمایش می‌دهیم. $\mathbf{R}$ همراه با اعمال جمع و ضرب معمولی تشکیل یک میدان مرتب می‌دهد. مهمترین خاصیت این میدان اصل تمامیت است.

بنابر اصل تمامیت، هر زیرمجموعه از اعداد حقیقی که دارای کران بالا (پایین) باشد، دارای کوچکترین کران بالا (بزرگترین کران پایین) است.

۵. اعداد مختلط. پس از طرح معادلاتی که منجر به تولید $\mathbf{R}$ شد، نوبت به معادلهٔ $x^۲+۱=۰$ می‌رسد. بدیهی است این معادله در $\mathbf{R}$ دارای جواب نیست؛ جوابهای چنین معادلاتی به عنوان اعداد «موهومی» شناخته شدند. هر عدد مختلط ترکیبی است از یک عدد حقیقی و یک عدد موهومی، بدین ترتیب که هر عدد مختلط به‌صورت زوج مرتبی از اعداد حقیقی می‌باشد که مؤلفهٔ اول آن جزء حقیقی و مولفهٔ دوم آن جزء موهومی عدد مزبور می‌باشد. مجموعه اعداد مختلط را با $\mathbf{C}$ نمایش می‌دهیم. مجموعهٔ $\{(x,۰) \mid x\in\mathbf{R}\}$ چون در تناظر یک به یک با $\mathbf{R}$ قرار دارد با $\mathbf{R}$ یکی گرفته می‌شود. اعمال جمع و ضرب بر $\mathbf{C}$ بدین صورت تعریف می‌شوند:

$$(a,b)+(c,d)=(a+c,b+d)$$

$$(a,b)\times(c,d)=(ac-bd,ad+bc)$$

به این ترتیب می‌بینیم که $-۱=(-۱,۰)=(۰,۱)(۰,۱)=(۰,۱)^۲$، و لذا عدد مختلط $(۰,۱)$ که با i نمایش داده می‌شود یک جواب معادله $x^۲+۱=۰$ است. روشن است که هر عدد مختلط (a,b) را می‌توان به‌صورت $a+bi$ نوشت؛ همچنین دو عدد مختلط (a,b) و (c,d) مساویند اگر و فقط اگر $a=c$ و $b=d$.

اعمال تفریق و تقسیم، به‌عنوان معکوس اعمال جمع و ضرب، به شکل زیر تعریف می‌شوند:

$$(a+bi)-(c+di)=(a-c)+(b-d)i$$

$$\frac{a+bi}{c+di}=\frac{a+bi}{c+di}\times\frac{c-di}{c-di}=\frac{ac+bd}{c^۲+d^۲}+\frac{bc-ad}{c^۲+d^۲}i \qquad (c,d)\neq(۰,۰)$$

▲ تعریف۹-۱

قدرمطلق عدد مختلط $z=x+iy$ که با $|z|$ نمایش داده می‌شود عبارت است از عدد حقیقی $\sqrt{x^۲+y^۲}$. ▲

چند خاصیت اعداد مختلط

هرگاه $z_۱,z_۲,z_۳$ اعداد مختلط باشند

۱. $|z_۱z_۲|=|z_۱||z_۲|$ و اگر $z_۲\neq(۰,۰)$ آنگاه $\left|\frac{z_۱}{z_۲}\right|=\frac{|z_۱|}{|z_۲|}$

۲. $|z_۱+z_۲|\leq|z_۱|+|z_۲|$ و $|z_۱+z_۲|\geq|z_۱|-|z_۲|$

۳. $z_۱+z_۲=z_۲+z_۱$ و $z_۱z_۲=z_۲z_۱$

۴. $z_۱+(z_۲+z_۳)=(z_۱+z_۲)+z_۳$ و $z_۱(z_۲z_۳)=(z_۱z_۲)z_۳$

۵. $z_۱(z_۲+z_۳)=z_۱z_۲+z_۱z_۳$

۶. $z+0=0+z=z$ و $1\cdot z=z\cdot 1=z$

با توجه به خواص بالا و وجود وارون جمعی هر عدد مختلط و وجود وارون ضربی هر عدد مختلط ناصفر، مجموعهٔ اعداد مختلط $\mathbb{C}$، به همراه اعمال جمع و ضرب تعریف شده، تشکیل یک میدان می‌دهد. (وارون ضربی (a,b) عدد مختلط $\left(\frac{a}{a^2+b^2},\frac{-b}{a^2+b^2}\right)$ است)

▲ تعریف۹-۲

مزدوج عدد مختلط $z=x+iy$ عبارت است از عدد مختلط $\bar{z}=x-iy$. ▲

● قضیه۹-۱

روابط زیر برقرارند:

۱. $\bar{\bar{z}}=z$

۲. $\bar{z}=z$ اگر و فقط اگر z عددی حقیقی باشد.

۳. $\overline{z+w}=\bar{z}+\bar{w}$

۴. $\overline{-z}=-(\bar{z})$

۵. اگر $z\neq 0$، $\overline{z^{-1}}=(\bar{z})^{-1}$

۶. $|z|^2=z\bar{z}$

۷. $\overline{z.w}=\bar{z}.\bar{w}$

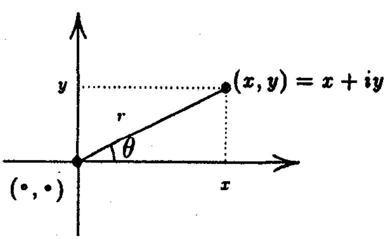
اثبات به عهدهٔ خواننده می‌باشد. ●

۹-۲ نمایش هندسی اعداد مختلط

با توجه به آنکه به هر عدد مختلط $x+iy$ زوج مرتب (x,y) را نسبت داده‌ایم می‌توان مجموعهٔ اعداد مختلط را در تناظر یک به یک با صفحه قرار داد (شکل ۹-۱).

با توجه به تعریفی که از قدرمطلق اعداد مختلط نتیجه می‌شود، قدرمطلق عدد مختلط z در واقع فاصلهٔ متناظر آن در صفحه از مبدأ مختصات است.

از سوی دیگر نقاط صفحه را می‌توان با مختصات قطبی نیز نمایش داد؛ اگر (r,θ) مختصات



شکل ۹-۱

قطبی نقطهٔ (x,y) باشد آنگاه این روابط برقرار است

$$y = r\sin\theta, x = r\cos\theta \qquad (۹-۱)$$

$$\theta = \operatorname{arctg}\frac{y}{x}, r = \sqrt{x^۲ + y^۲} \qquad (۹-۲)$$

بدین ترتیب هر عدد مختلط را نیز می‌توان به‌صورت زیر نمایش داد:

$$x + iy = r(\cos\theta + i\sin\theta)$$

که در آن $r = \sqrt{x^۲ + y^۲}$ و $\theta = \operatorname{arctg}\frac{y}{x}$. این نحوه نمایش عدد مختلط را صورت قطبی اعداد مختلط می‌نامند.

● **قضیه۹-۲**

اگر $z_۱ = r_۱(\cos\theta_۱ + i\sin\theta_۱)$ و $z_۲ = r_۲(\cos\theta_۲ + i\sin\theta_۲)$ آنگاه

الف) $z_۱ z_۲ = r_۱ r_۲(\cos(\theta_۱ + \theta_۲) + i\sin(\theta_۱ + \theta_۲))$

ب) $z_۱/z_۲ = r_۱/r_۲(\cos(\theta_۱ - \theta_۲) + i\sin(\theta_۱ - \theta_۲))$

اثبات. با نوشتن تعاریف ضرب و تقسیم اعداد مختلط و با توجه به روابط مثلثاتی مجموع دو زاویه حکم به‌دست می‌آید. ●

● **قضیه۹-۳ (قضیه مواور)**

به ازای هر عدد مختلط $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$،

$$z^n = r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta)$$

اثبات. با استقرا بر n و با استفاده از قسمت (الف) قضیهٔ ۹-۲. ●

▲ **تعریف۹-۳**

عدد مختلط z را یک ریشهٔ nام عدد مختلط w می‌نامیم هر گاه $z^n = w$. ▲

● **قضیه۹-۴**

هر عدد مختلط غیر صفر دقیقاً n ریشهٔ nام دارد.

اثبات. فرض کنیم $w = s(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ داده شده باشد. عدد مختلط $z = r(\cos\theta + r\sin\varphi)$ یک ریشهٔ nام w است اگر و فقط اگر

$$r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta) = s(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

و این تساوی فقط زمانی برقرار است که $r^n = s$ و $\cos n\theta = \cos\varphi$ از رابطه اول نتیجه می‌شود که $r = \sqrt[n]{s}$ ریشه nام و مثبت عدد حقیقی s می‌باشد. از دومی نتیجه می‌شود که به ازای k طبیعی، $\theta = \theta_k = \frac{\varphi}{n} + \frac{۲k\pi}{n}$ هر z که به این ترتیب به‌دست می‌آید یک ریشهٔ nام w می‌باشد. حال خواننده می‌تواند خود تحقیق کند که تعداد این zها دقیقاً (n) تاست. به‌عنوان مثال ریشه‌های

nام عدد یک عبارت‌اند از اعدادی مثل z به‌طوری که $z^n = ۱$، یا

$$\cos\frac{۲k\pi}{n} + i\sin\frac{۲k\pi}{n} = z, \quad k = ۰, ۱, ۲, \cdots, n-۱$$

به این ترتیب اگر فرض کنیم $w = \cos\frac{۲\pi}{n} + i\sin\frac{۲\pi}{n}$، ریشه‌های nام واحد عبارت خواهند بود از

$$۱, w, w^۲, w^۳, \cdots, w^{n-۱}$$

●

در نمایش هندسی، ریشه‌های nام واحد رئوس یک n ضلعی منتظم محاط در دایره به شعاع واحد هستند که یک رأس آن $(۱, ۰)$ می‌باشد. به ازای هر عدد با طول یک نیز، ریشه‌های nام آن عدد رئوس یک n ضلعی منتظم محاط در دایره می‌باشند که یک رأس آن همان نقطه مزبور است. برای اعداد مختلط با طول غیر از یک نیز می‌توان تعبیرهای مشابهی پیدا کرد.

مطلبی که در قضیه قبل اثبات شد، حالت خاصی از قضیه‌ای است که تحت عنوان «قضیه اساس‌جبر» شناخته می‌شود.

● قضیه۹-۵ (قضیه اساسی جبر)

هر چندجمله‌ای درجهٔ n با ضرایب مختلط دارای n ریشهٔ مختلط است، یعنی معادلهٔ $c_۰z^n + c_۱z^{n-۱} + c_۲z^{n-۲} + \cdots + c_n = ۰$ که در آن $c_۰$، $c_۱$، ...، c_n اعداد مختلط، می‌باشند دارای n ریشهٔ $z_۱$، $z_۲$، ...، z_n می‌باشد.

برای این قضیه اثباتهای متفاوتی وجود دارد؛ ما در اینجا این قضیه را ثابت نمی‌کنیم. ●

۹-۳ فرمول اویلر

یکی از اساسی‌ترین فرمولهایی که با استفاده از اعداد مختلط به‌دست می‌آید فرمول

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$

است. این فرمول نتیجه‌ای از بسط تیلور توابع e^x و $\sin x$ و $\cos x$ است. از قضیهٔ تیلور می‌دانیم که

$$e^x = ۱ + x + x^۲/۲! + x^۳/۳! + x^۴/۴! + \cdots$$

$$\cos x = ۱ - x^۲/۲! + x^۴/۴! - x^۶/۶! + \cdots$$

$$\sin x = x - x^۳/۳! + x^۵/۵! - x^۷/۷! + \cdots$$

با جایگذاری $i\theta$ به‌جای x در فرمول اول و جایگذاری θ به‌جای x در دو فرمول دیگر و همچنین ضرب سومی در i، فرمول اویلر حاصل می‌شود.

از این فرمول نتایج بسیار جالبی به‌دست می‌آید که یکی از ساده‌ترین و در عین حال جالبترین

آنها با جایگذاری π به‌جای θ نتیجه می‌شود:

$$e^{i\pi} + ۱ = ۰$$

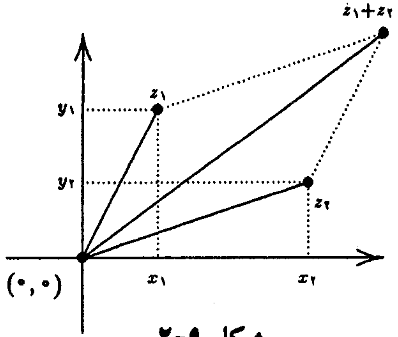
در این فرمول پنج تا از مهمترین اعداد یکجا ظاهر شده‌اند.

۹-۴ تبدیلهای هندسی با استفاده از اعداد مختلط

انتقال. دو عدد مختلط $z_۲ = x_۲ + iy_۲, z_۱ = x_۱ + iy_۱$ را در نظر می‌گیریم؛ می‌دانیم که

$$z_۱ + z_۲ = x_۱ + x_۲ + i(y_۱ + y_۲)$$

تعبیر هندسی این رابطه در شکل ۹-۲ داده شده است.



شکل ۹-۲

در واقع با انتقال نقطهٔ $z_۱$ به اندازهٔ بردار $z_۲$، نقطهٔ $z_۱ + z_۲$ به‌دست آمده است. لذا تعبیر هندسی جمع دو عدد مختلط، همان انتقال در صفحه است.

دوران. اگر $z_۱ = \cos\theta_۱ + i\sin\theta_۱$ و $z_۲ = \cos\theta_۲ + i\sin\theta_۲$ آنگاه

$$z_۱z_۲ = \cos(\theta_۱ + \theta_۲) + i\sin(\theta_۱ + \theta_۲)$$

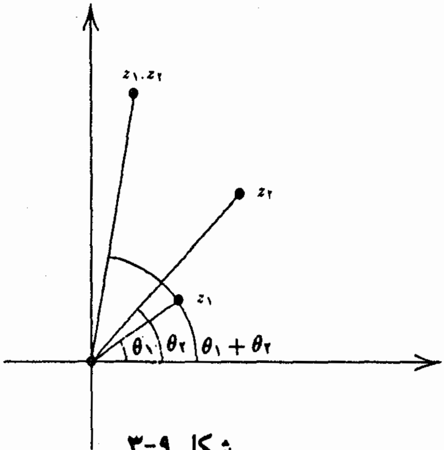
با توجه به شکل ۹-۳ نقطه $z_۱$ در واقع به اندازهٔ $\theta_۲$ دوران یافته است، لذا دوران هندسی را می‌توانیم با ضرب دو عدد مختلط بیان کنیم(به این نکته توجه کنید که در اینجا $|z_۱| = |z_۲| = ۱$).

در حالت کلی نگاشت $f(z) = z_۱(z-a) + a$ یک تبدیل تشابهی به‌دست می‌دهد (دوران، تجانس، و ترکیبات آنها) و به ازای هر تبدیل تشابهی نیز تابعی مختلط متناظر با آن وجود دارد. با استفاده از این توابع قضیه ذیل ثابت می‌شود.

● **قضیه۹-۶**

ترکیب هر دو تبدیل تشابهی یک تبدیل تشابهی است.

اثبات. فرض کنیم $g(z) = z_۲(z-b) + b, f(z) = z_۱(z-a) + a$ توابع متناظر



شکل ۹-۳

دو تبدیل باشند؛ ثابت می‌کنیم که $fog(z) = z_\alpha(z-c)+c$:

$$fog(z) = f(g(z)) = z_1(z_2(z-b)+(b-a))+a$$
$$= z_1 z_2(z-b)+z_1(b-a)+a$$

اگر $z_1 z_2 = 1$ آنگاه $fog(z) = z + c$، که در آن $c = (b-a)(z_1 - 1)$ بنابراین fog بیانگر یک انتقال، و لذا یک تبدیل تشابهی است.

اگر $z_1 z_2 \neq 1$ آنگاه اگر $C = \frac{z_1 z_2 b + z_1(b-a)+a}{1 - z_1 z_2}$، که از آنجا نتیجه می‌شود

$$fog(z) = z_1 z_2 (z-c)+c$$

که یک تبدیل تشابهی است.

حال خواننده می‌تواند درستی مطالب زیر را تحقیق کند:

۱. در تبدیل $f(z) = z_1(z-a)+a$:

الف) اگر $|z_1| = 1$، تبدیل فقط دوران است؛

ب) اگر در نمایش قطبی z، $\theta = 0$ (یعنی $\arg z = 0$) آنگاه تبدیل فقط تجانس است.

۲. ترکیب دو تجانس یک تجانس است.

۳. ترکیب دو دوران یک دوران است.

تمرین

۱. نشان دهید $\cos 5\theta = 16\cos^5\theta - 2\cos^3\theta$.

۲. نشان دهید $\cos\frac{\pi}{7} + \cos\frac{2\pi}{7} + \cos\frac{3\pi}{7} = 1/2$.

(راهنمایی: معادلهٔ $z^7 + 1 = 0$ را در نظر بگیرید.)

۳ . ثابت کنید به ازای هر n روابط زیر برقرارند

$$\cos\frac{۲\pi}{n}+\cos\frac{۴\pi}{n}+\cdots+\frac{۲(n-۱)\pi}{n}=-۱$$

$$\sin\frac{۲\pi}{n}+\sin\frac{۴\pi}{n}+\cdots+\sin\frac{۲(n-۱)\pi}{n}=۰$$

۴ . $\sin\frac{\pi}{m}\sin\frac{۲\pi}{m}\sin\frac{۳\pi}{m}\cdots\sin\frac{(m-۱)\pi}{m}=\frac{m}{۲^{m-۱}}$.

(راهنمایی: در نظر داشته باشید که ریشه‌های معادلهٔ $z^m = ۱$ عبارتند از ۱، $e^{۲\pi i/m}$، ...، $e^{۲(m-۱)\pi i/m}$)

۵ . ثابت کنید

$$\cos\theta+\cos(\theta+\alpha)+\cos(\theta+۲\alpha)+\cdots+\cos(\theta+n\alpha)$$

$$=\frac{\sin\frac{۱}{۲}(n+۱)\alpha}{\sin\frac{۱}{۲}\alpha}\cos(\theta+\frac{۱}{۲}n\alpha)$$

۶ . مجموعهای زیر را محاسبه کنید

$$s_۱=\cos\alpha+r\cos(\alpha+\theta)+r^۲\cos(\alpha+۲\theta)+\cdots+$$

$$r^n\cos(\alpha+n\theta)+\cdots$$

$$s_۲=\sin\alpha+r\sin(\alpha+\theta)+r^۲\sin(\alpha+۲\theta)+$$

$$\cdots+r^n\cos(\alpha+n\theta)+\cdots$$

۷ . ثابت کنید که به ازای هر عدد طبیعی n،

$$\cos n\alpha=\cos^n\alpha-\binom{n}{۲}\cos^{n-۲}\alpha\sin^۲\alpha+\binom{n}{۴}\cos^{n-۴}\alpha\sin^۴\alpha$$

$$-\binom{n}{۶}\cos^{n-۶}\alpha\sin^۶\alpha+\cdots$$

$$\sin n\alpha=\binom{n}{۱}\cos^{n-۱}\alpha\sin\alpha-\binom{n}{۳}\cos^{n-۳}\alpha\sin^۳\alpha$$

$$+\binom{n}{۵}\cos^{n-۵}\alpha\sin^۵\alpha+\cdots$$

۸. حاصل‌ضربهای زیر را به‌دست آورید:

$$P_1 = \prod_{k=1}^{n} \sin \frac{k\pi}{2n+1}, \qquad P_2 = \prod_{k=1}^{n-1} \sin \frac{k\pi}{2n}$$
$$P_3 = \prod_{k=1}^{n} \cos \frac{k\pi}{2n+1}, \qquad P_4 = \prod_{k+1}^{n-1} \cos \frac{k\pi}{2n}$$

۹. حاصل‌جمعهای زیر را بیابید:

$$\cot^2 \frac{\pi}{2n+1} + \cot^2 \frac{2\pi}{2n+1} + \cot^2 \frac{3\pi}{2n+1} + \cdots + \cot^2 \frac{n\pi}{2n+1}$$
$$\operatorname{cosec}^2 \frac{\pi}{2n+1} + \operatorname{cosec}^2 \frac{2\pi}{2n+1} + \operatorname{cosec}^2 \frac{3\pi}{2n+1} + \cdots + \operatorname{cosec}^2 \frac{n\pi}{2n+1}$$

۱۰. با استفاده از مسأله قبل ثابت کنید:

$$\left(1 - \frac{1}{2n+1}\right)\left(1 - \frac{2}{2n+1}\right)\frac{\pi^2}{6} < 1 + 1/2^2 + 1/3^2 + \cdots + 1/n^2$$
$$< \left(1 - \frac{1}{2n+1}\right)\left(1 + \frac{1}{2n+1}\right)\frac{\pi^2}{6}$$

و از آنجا نتیجه بگیرید $1 + 1/2^2 + 1/3^2 + \cdots = \frac{\pi^2}{6}$.

۱۱. الف) فرض کنید M روی دایرهٔ محیطی یک n ضلعی منتظم قرار دارد. ثابت کنید مجموع مجذورهای فواصل M از رئوس n ضلعی برابر $2nR^2$ است.

ب) فرض کنید M روی صفحهٔ یک n ضلعی منتظم باشد و فاصلهٔ آن از مرکز n ضلعی برابر L باشد. ثابت کنید مجموع مجذورهای فواصل M از رئوس n ضلعی منتظم برابر $n(R^2 + L^2)$ است.

پ) ثابت کنید قسمت (ب) حتی برای حالتی که M روی صفحهٔ n ضلعی واقع نباشد هم درست است.

۱۲. الف) ثابت کنید مجموع مجذورات طول همهٔ ضلعها و قطرهای هر n ضلعی منتظم برابر n^2R^2 است.

ب) ثابت کنید مجموع طول همهٔ ضلعها و قطرهای هر n ضلعی منتظم برابر $nR\operatorname{cotg}\frac{\pi}{n}$ است.

پ) ثابت کنید حاصل ضرب طول همهٔ ضلعها و قطرهای n ضلعی منتظم برابر $n^{n/2}R^{n(n-1)/2}$ است.

۱۳. اگر رابطهٔ $x_1^k + x_2^k + \cdots + x_n^k = y_1^k + y_2^k + \cdots + y_n^k$ به ازای $k = 1, 2, 3, \cdots, n$ درست باشد، ثابت کنید $\{x_r\}_{i=1}^{n}, \{y_r\}_{r=1}^{n}$ جایگشتی از یکدیگرند.

۱۴ . اگر z_1, z_2, z_3 رئوس یک مثلث متساوی‌الاضلاع در صفحه مختلط باشند نشان دهید

$$z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = z_1 z_2 + z_1 z_3 + z_2 z_3$$

۱۵ . نشان دهید حاصل‌جمع و حاصل‌ضرب کلیه ریشه‌های معادلهٔ

$$a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_n = 0$$

به ترتیب عبارتند از $\frac{-a_1}{a_0}$ و $(-1)^n \frac{a_n}{a_0}$. این مسأله را تعمیم دهید.

۱۶ . ثابت کنید هر گاه w یک ریشهٔ معادلهٔ $a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_n = 0$ باشد، $\bar{w}$ (مزدوج w) نیز یک ریشهٔ این معادله است.

۱۷ . ثابت کنید هر چندجمله‌ای f با ضرایب حقیقی را می‌توان به حاصل‌ضرب چند جمله‌ایهای درجهٔ یک یا دو با ضرایب حقیقی تجزیه نمود.

۱۸ . سه عدد مختلطی را که ریشه‌های معادلهٔ $z^3 - 3pz^2 + 3qz - r = 0$ هستند به‌عنوان رئوس یک مثلث در صفحهٔ مختلط می‌گیریم؛ ثابت کنید

الف) P مرکز ثقل این مثلث می‌باشد.

ب) ثابت کنید این مثلث تساوی الاضلاع است اگر و فقط اگر $p^2 = q$.

در این قسمت می‌خواهیم به‌طور مختصر یکی از جالبترین کاربردهای اعداد مختلط را توضیح دهیم: استفاده از این اعداد در نظریهٔ اعداد. ابتدا اعداد «مختلط صحیح» را تعریف می‌کنیم (مجموعهٔ این اعداد را با $\mathbf{Z}[i]$ نمایش می‌دهیم). عددی را **عدد مختلط صحیح** می‌نامیم که قسمتهای حقیقی و موهومی آن صحیح باشند؛ به‌عبارت دیگر، $\mathbf{Z}[i] = \{a + bi \mid a, b \in \mathbf{Z}\}$.

قوانین جمع و ضرب در $\mathbf{Z}[i]$ همان قوانین جمع و ضرب در C می‌باشند؛ خواننده باید بسته بودن این دو عمل نسبت به $\mathbf{Z}[i]$ را تحقیق کند. یکاهای $\mathbf{Z}[i]$ عبارت‌اند از ± 1 و $\pm i$.

طبیعی است که همانند اعداد صحیح، در اینجا مسألهٔ بخش‌پذیری و اعداد اول مطرح شود؛ عدد مختلط صحیح $a + bi$ را بر $c + di$ بخش‌پذیر گوییم و می‌نویسیم $c + di \mid a + bi$ هر گاه حاصل تقسیم $a + bi$ بر $c + di$ عدد مختلط صحیح باشد. مثلاً $2 + 3i \mid 4 + 6i$ و $1 + i \mid 2$ و $3 + 2i \mid 2 + 23i$.

در $\mathbf{Z}[i]$ نیز عدد «اول» همانند $\mathbf{N}$ تعریف می‌شود:

▲ تعریف ۹-۴

$w \in \mathbf{Z}[i]$ را اول گوییم هرگاه، فقط بر w و یک‌های $\mathbf{Z}[i]$ و حاصل‌ضربهای این اعداد بخش‌پذیر باشد. ▲

با توجه به اینکه $\mathbf{Z}[i]$، $\mathbf{Z}$ را به‌عنوان مجموعه‌ای از خود دربر دارد در نگاه اول این‌گونه به‌نظر می‌رسد که هر عدد اول در $\mathbf{Z}$ باید در $\mathbf{Z}[i]$ نیز اول باشد، اما مثال قبل و مثال بعد نادرستی این

تصور را نشان می‌دهد.

■ **مثال ۹-۱**

$(۲-i)(۲+i) = ۵$ و $(۳-۲i)(۳+۲i) = ۱۳$ اول نیستند. برای بحث بیشتر در این مورد فقط اعداد اول فرد را در نظر می‌گیریم، چرا که دیدیم که ۲ در $\mathbf{Z}[i]$ اول نیست. اعداد اول فرد در $\mathbf{Z}$ به دو دسته تقسیم می‌شوند: آنهایی که به‌صورت $۴k + ۱$ هستند و آنهایی که به‌صورت $۴k + ۳$ هستند. با دقت در مثال قبل مشاهده می‌شود که هیچ عدد اول به شکل $۴k + ۱$، در $\mathbf{Z}[i]$ اول نیست. از نظریه اعداد می‌دانیم که هر عدد اول به‌صورت $۴k + ۱$ را می‌توان به‌صورت مجموع دو مربع کامل نوشت، لذا

$$۴k + ۱ = a^۲ + b^۲ = (a+bi)(a-bi) \Rightarrow a + bi \mid ۴k + ۱$$

حال که غیر اول بودن اعداد به شکل $۴k + ۱$ مشخص شد به اعداد اول به شکل $۴k + ۳$ می‌پردازیم. ثابت می‌کنیم که این اعداد در $\mathbf{Z}[i]$ اولند. با توجه به اینکه هر عامل $۴k + ۳$ در $\mathbf{Z}[i]$ غیرحقیقی است و نیز از آنجا که به ازای هر z که $z \mid ۴k + ۳$، باید $\bar{z} \mid ۴k + ۳$ به‌دست می‌آید:

$$۴k + ۳ = z_۱\bar{z}_۱ . z_۲\bar{z}_۲ . \cdots . z_n\bar{z}_n = a^۲ + b^۲ \Rightarrow ۴k + ۳ = a^۲ + b^۲$$

اما از نظریه اعداد می‌دانیم که این ممکن نیست، لذا $۴k + ۳$ در $\mathbf{Z}[i]$ نیز اول است.

حال اعداد اول به شکل $a + bi$ را شناسایی می‌کنیم: ■

● **قضیه ۹-۷**

$z = a + bi$ در $\mathbf{Z}[i]$ اول است اگر و فقط اگر $a^۲ + b^۲$ در $\mathbf{Z}$ اول باشد.

اثبات. اولاً ثابت می‌کنیم که اگر $a + bi$ اول باشد $a^۲ + b^۲$ نیز اول است: اگر $a + bi$ اول باشد $a - bi$ نیز اول است از طرف دیگر $a^۲ + b^۲ = (a+bi)(a-bi)$ ، و لذا $a^۲ + b^۲$ در $\mathbf{Z}[i]$ فقط بر $a + bi$ و $a - bi$ و حاصل‌ضربی از آنها با یک‌های $\mathbf{Z}[i]$ بخش‌پذیر می‌باشد. از این اعداد فقط ۱ و $a^۲ + b^۲$ در $\mathbf{N}$ می‌باشند؛ لذا $a^۲ + b^۲$ عددی است اول. ثانیاً اگر $a^۲ + b^۲$ اول باشد $a + bi$ نیز اول است. فرض می‌کنیم چنین نباشد، یعنی $a + bi$ اول نباشد؛ پس می‌توان نوشت $a + bi = (a_۱ + b_۱i)(a_۲ + b_۲i)$ اکنون $a - bi = (a_۱ - b_۱i)(a_۲ - b_۲i)$ لذا

$$\begin{aligned} a^۲ + b^۲ &= (a+bi)(a+bi) \\ &= (a_۱ + b_۱i)(a_۲ + b_۲i)(a_۱ - b_۱i)(a_۲ - b_۲i) \\ &\Rightarrow a^۲ + b^۲ = (a_۱^۲ + b_۱^۲)(a_۲^۲ + b_۲^۲) \end{aligned}$$

که این خلاف اول بودن $a^۲ + b^۲$ می‌باشد. لذا $a + bi$ در $\mathbf{Z}[i]$ اول است. پس به‌طورکلی مجموعهٔ اعداد اول مختلط صحیح، P، را می‌توان به شکل زیر نمایش داد:

$$P = \{۴k + ۳ \in \mathbf{N} \mid \text{اول است } ۴k+۳\} \cup \{a + bi \mid \text{اول است } a^۲ + b^۲\}$$

●

با این قضیه‌ها، $\mathbb{Z}[i]$ نیز دقیقاً همان خواص $\mathbb{Z}$ را داراست که مهمترین آنها قضیهٔ یکتایی تجزیه است که به همان شکل بیان می‌شود؛ تجزیهٔ عدد مختلط z عبارتست از نوشتن آن به‌صورت حاصلضربی از عوامل اول $\mathbb{Z}[i]$ یا توانهای آنها.

● **قضیه۹-۸ (یکتایی تجزیه)**

اگر Πx_i و Πy_i دو تجزیهٔ عدد $m \in \mathbb{Z}[i]$ باشند آنگاه x_iها و y_iها با تقریب یک عامل یک مساویند (یعنی هر x_i برابر است با یکی از y_iها یا ضرب یکی از y_iها در یکی از یک‌های $\mathbb{Z}[i]$ و برعکس). ●

■ **مثال ۹-۲**

ثابت کنید اگر $c^۲ + d^۲ \mid a^۲ + b^۲$ آنگاه $u^۲ + v^۲ = \frac{a^۲+b^۲}{c^۲+d^۲}$.

به عبارت دیگر، حاصل تقسیم مجموع دو مربع کامل به مجموع دو مربع کامل، اگر عدد صحیح باشد، مجموع دو مربع کامل است.

حل. دوباره به این نکته توجه می‌کنیم که اگر $a + bi \mid x + yi$، آنگاه $a - bi \mid x - yi$؛ لذا $a^۲ + b^۲ = \Pi x_i \Pi \bar{x}_i$، $c^۲ + d^۲ = \Pi y_i \Pi \bar{y}_i$، و در نتیجه ($x_i$ها و y_iها همگی اول‌اند) برای آنکه $A = \frac{a^۲+b^۲}{c^۲+d^۲} = \frac{(x_۱,x_۲\cdots x_n)(\bar{x}_۱,\bar{x}_۲,\cdots \bar{x}_n)}{(y_۱,y_۲,\cdots y_m)(\bar{y}_۱,\bar{y}_۲,\cdots \bar{y}_m)}$ در $\mathbb{Z}[i]$ باشد باید به ازای هر y_i، یک x_j یا $\bar{x}_j$ برابر y_i وجود داشته باشد؛ فرض کنیم $x_j = y_i$. در نتیجه خواهیم داشت $\bar{x}_j = \bar{y}_i$، و لذا A به صورت

$$\underbrace{(t_۱ t_۲ \cdots t_l)}_{t}\underbrace{(\bar{t}_۱ \bar{t}_۲ \cdots \bar{t}_l)}_{\bar{t}}$$

خواهد بود که به ازای هر i، jای هست به‌طوری که $l = n - m, t_i = x_j$ بنابراین

$$A = t\bar{t} \Rightarrow A = u^۲ + v^۲$$

و یا (به شرط آنکه $c^۲ + d^۲ \mid a^۲ + b^۲$)، $u^۲ + v^۲ = \frac{a^۲+b^۲}{c^۲+d^۲}$. ■

تمرین

۱. ثابت کنید اگر $۱ + ab \mid a^۲ + b^۲$ آنگاه $k^۲ = \frac{a^۲+b^۲}{۱+ab}$.

۲. فرض کنیم $a < b < c < d$ که a, b, c, d اعدادی طبیعی و فرد هستند و $ad = bc$. ثابت کنید اگر $a + d = ۲^m$ و $b + c = ۲^n$، آنگاه $a = ۱$.

۳. با استفاده از خواص $\mathbb{Z}[i]$ ثابت کنید معادلهٔ $a^۴ + b^۴ = c^۴$ در $\mathbb{N}$ جواب ندارد.

۱۰

هندسه

بعضی مسائل مربوط به خطوط همرس و نقطه‌های واقع بر یک خط راست

با بررسی مسأله‌های هندسی‌ای که در المپیادهای مختلف مطرح شده‌اند می‌توان دریافت که مسأله‌های مربوط به خطوط متقارب و نقطه‌های همخط، قسمت بزرگی از این مسائل را به خود اختصاص داده‌اند.

برای حل این نوع مسائل روشهای متعددی وجود دارد که از جملهٔ آنها می‌توان به روشهای کلاسیک هندسی، روشهای برداری و تبدیلات هندسی اشاره کرد. در این قسمت منظور از روشهای «کلاسیک» هندسی روشهایی هستند که از قضایای مشهور هندسهٔ مسطحه مانند قضایای سیوا، منلائوس و غیره نتیجه می‌شوند. در این فصل به این روش‌ها خواهیم پرداخت. این فصل به سه بخش تقسیم شده است. در بخش ۱ به چند قضیهٔ کلاسیک که معمولاً مورد استفاده قرار می‌گیرند خواهیم پرداخت. بخش ۲ در مورد زیرمیانه‌ها و نقاط بروکار در مثلث و ارتباط آنها با یکدیگر خواهد بود؛ در این بخش از بعضی نتایج به‌دست آمده در بخش قبل استفاده می‌شود. بخش آخر نیز به‌طور طبیعی به مسائل اختصاص داده شده است. تعداد مسائل پیشنهاد شده در این قسمت خیلی زیاد نیست ولی با وجود این، مسائل در درجه‌های متفاوتی از دشواری قرار دارند. بعضی از آنها نتایج مفیدی هستند که اغلب به‌عنوان لم به‌کار می‌روند، و بعضی دیگر خود مسائلی مبارز طلب‌اند. علاوه بر این مسائل، در بخش‌های ۱ و ۲ نیز مسائلی به‌عنوان «مثال» ارائه شده‌اند. حل تمام این مسائل ـ که بعضی با راهنماییهایی نیز همراه هستند ـ به‌عنوان تمرین برای خوانندهٔ هوشمند باقی گذارده شده است. در اینجا توضیحی نیز در مورد بخش ۲ ضروری به‌نظر می‌رسد: همان طورکه قبلاً نیز اشاره شد، این قسمت در مورد زیرمیانه‌ها و نقاط بروکار مثلث خواهد بود؛ در واقع شاید هیچگاه مسأله‌ای در مورد مثلاً زیرمیانه در هیچ المپیادی مطرح نشود، اما در این قسمت برای استخراج نتایج، روشهای قدرتمندی به‌کار گرفته شده است که می‌توانند در بسیاری مسائل

دیگر بدون تغییر به‌کار برده شوند.

۱-۱۰ چند قضیه

۱-۱-۱۰ قضیه سوا

الف) شکل پاره‌خطی

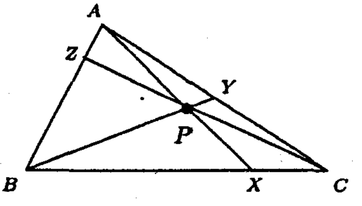
▲ **تعریف۱۰-۱**

پاره‌خط سوایی، پاره خطی است که یک رأس مثلث را به نقطه‌ای داخلی از ضلع مقابل آن متصل می‌کند. ▲

● **قضیه۱۰-۱**

در مثلث ABC، سه خط سوایی AX، BY، CZ متقارب‌اند اگر و تنها اگر

$$\frac{AZ}{ZB}\cdot\frac{BX}{XC}\cdot\frac{CY}{YA}=1$$



شکل ۱۰-۱

اثبات. داریم

$$\frac{S_{ABX}}{S_{ACX}}=\frac{BX}{XC},\qquad \frac{S_{PBX}}{S_{PXC}}=\frac{BX}{XC}$$

$$\frac{S_{APB}}{S_{APC}}=\frac{S_{ABX}-S_{PBX}}{S_{AXC}-S_{PXC}}=\frac{BX}{XC}$$

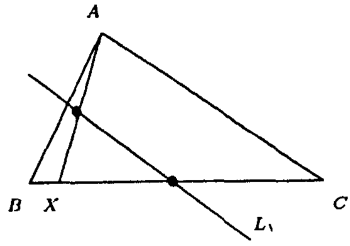
●

حال اگر همین رابطه را برای Y و Z نیز بنویسیم و در هم ضرب کنیم یک طرف قضیه ثابت می‌شود. برای اثبات عکس هم می‌توان به سادگی از برهان خلف کمک گرفت.

■ **مثال ۱۰-۱**

(مرحله اول ۷۰-۶۹). AX، BY و CZ را سه خط سوایی متقارب بگیرید. اگر L_1 خط واصل بین وسط AX و وسط BC باشد، آنگاه L_1 و L_2 و L_3 متقارب‌اند. (L_2 و L_3 هم مانند L_1 تعریف می‌شوند)

(راهنمایی: مثلث میانه‌ای را رسم کنید.)



شکل ۱۰-۲

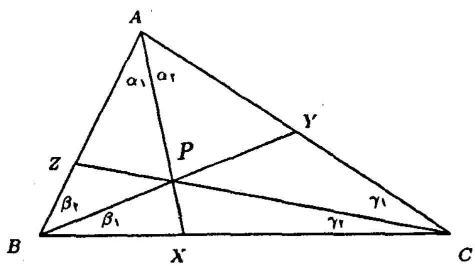
■

ب) شکل زاویه‌ای

● **قضیه ۱۰-۲**

در مثلث ABC، خطوط AX، BY و CZ متقارب‌اند اگر و تنها اگر

$$\frac{\sin \alpha_1}{\sin \alpha_2} \cdot \frac{\sin \beta_1}{\sin \beta_2} \cdot \frac{\sin \gamma_1}{\sin \gamma_2} = 1$$



شکل ۱۰-۳

اثبات. اگر در مثلث‌های APC، APB، و BPC قضیهٔ سینوس‌ها را بنویسیم و در هم ضرب کنیم حکم به سادگی نتیجه می‌شود. ●

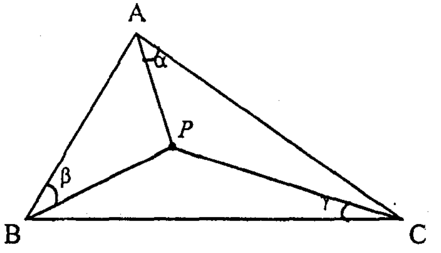
■ **مثال ۱۰-۲**

در شش ضلعی محدب $AB_1CA_1BC_1$ زوایای A_1 و B_1 و C_1 هر کدام $120°$ هستند و $A_1C = BA_1$، $B_1A = CB_1$ و $C_1B = AC_1$. نشان دهید اقطار این شش ضلعی متقارب‌اند. ■

■ **مثال ۱۰-۳**

($IMO, 1991$) در شکل زیر نشان دهید از میان زوایای α، β و γ حتماً یکی کمتر یا مساوی

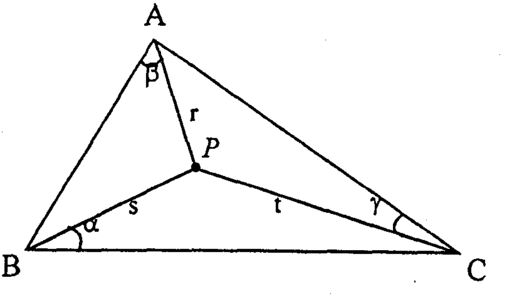
۳۰° است.



شکل ۱۰-۴

(راهنمایی: فرض کنید هر سه از ۳۰° بیشتر باشند؛ از قضیه سوا استفاده کنید و سپس نامساوی $\sin X.\sin Y.\sin Z \le \sin^{۳}\frac{X+Y+Z}{۳}$ را به‌کار ببرید.) ■

یادداشت. این مسأله راه‌حلهای متعددی دارد، مثلاً درستی آن را به سادگی می‌توان از خواص نقطهٔ بروکار نتیجه گرفت. همچنین این حکم یک نتیجه بدیهی نامساوی اردیش-موردل است و در ضمن برای تحقیق درستی آن روش زیر را نیز می‌توان به‌کار برد[۱]: در APC و APB و BPC قضیه کسینوس‌ها را می‌نویسیم و جمع می‌کنیم؛ به‌دست می‌آید



شکل ۱۰-۵

$$a^{۲}+b^{۲}+c^{۲} = ۲as\cos\alpha + ۲tb\cos\gamma + ۲rc\cos\beta$$

$$= ۴(S_{۱}\text{cotg}\alpha + S_{۲}\text{cotg}\beta + S_{۳}\text{cotg}\gamma)$$

اگر α و β و γ هر سه از ۳۰° بیشتر باشند آنگاه

$$a^{۲}+b^{۲}+c^{۲} < ۴\sqrt{۳}(S_{۱}+S_{۲}+S_{۳}) = ۴\sqrt{۳}S$$

که با رابطه مشهور $a^{۲}+b^{۲}+c^{۲} \ge ۴\sqrt{۳}S$ تناقض دارد.

---

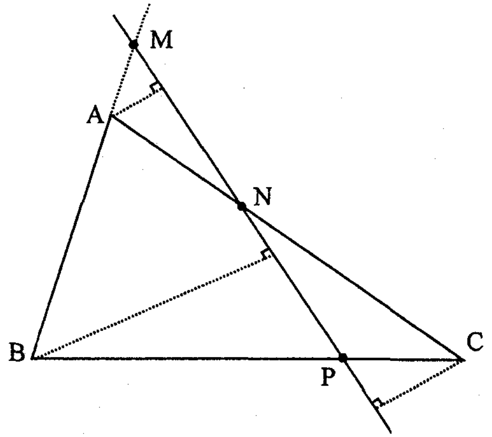
۱. راه حل از دکتر امید علی کرمزاده، دانشگاه شهید چمران، اهواز.

۱۰-۱-۲ قضیه منلائوس

● **قضیه۱۰-۳**

در مثلث ABC فرض کنید MNP یک قاطع دلخواه باشد در این صورت

$$\frac{\overline{AM}}{\overline{MB}} \cdot \frac{\overline{BP}}{\overline{PC}} \cdot \frac{\overline{CN}}{\overline{NA}} = -۱$$

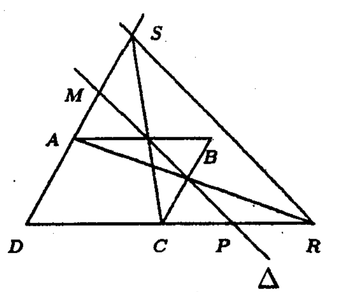


شکل ۱۰-۶

اثبات. از A، B و C عمودهایی بر MNP رسم می‌کنیم. حال اگر از قضیهٔ تالس استفاده کنیم حکم نتیجه می‌شود. ●

■ **مثال ۱۰-۴**

(مرحله دوم ۷۰-۶۹) $ABCD$ یک متوازی‌الاضلاع و Δ یک قاطع آن است نشان دهید $RS \| \Delta$.



شکل ۱۰-۷

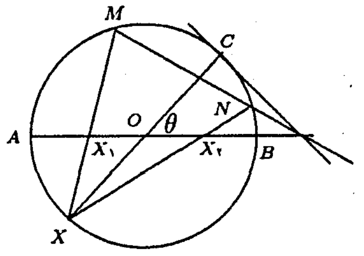
(راهنمایی: در مثلث MPD، برای دو قاطع SC و RA قضیه منلائوس را بنویسید و با هم مقایسه کنید.) ■

■ مثال ۱۰-۵

AB یک قطر دایرهٔ داده شده است و $OX_1 = OX_2$ و X نقطه‌ای دلخواه روی دایره است. نشان دهید MN و AB و مماس بر دایره در نقطه C متقارب‌اند.

(راهنمایی: اگر D محل برخورد MN با AB باشد نشان دهید

$$OD = \frac{R}{\cos\theta} \quad \text{و} \quad R = \frac{AB}{2}$$



شکل ۱۰-۸

■

۱۰-۱-۳ قضیهٔ دزارگ

دو مثلث ABC و $A_1B_1C_1$ را دارای مرکز همسانی گویند وقتی که جایگشتی از $A_1B_1C_1$ مانند $A'B'C'$ وجود داشته باشد که خطوط AA' و BB' و CC' همرس باشند. متناظراً دو مثلث را دارای محور همسانی گویند اگر $AB \cap A'B'$ و $AC \cap A'C'$ و $BC \cap B'C'$ روی یک خط راست باشند.

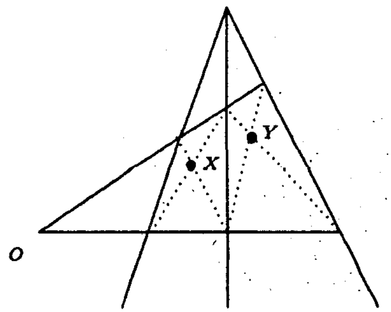
● قضیه ۱۰-۴

دو مثلث ABC و $A'B'C'$ دارای محور همسانی هستند اگر و تنها اگر دارای مرکز همسانی باشند.

اثبات. به عهده خواننده. (راهنمایی: از قضیه منلائوس استفاده کنید.) ●

■ مثال ۱۰-۶

نشان دهید O و X و Y روی یک خط راست قرار دارند.

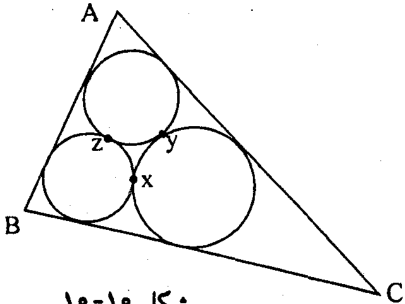


شکل ۱۰-۹

■

■ مثال ۱۰-۷

سه دایره درون مثلث ABC در نظر می‌گیریم به گونه‌ای که دوبه‌دو برهم و بر اضلاع مثلث مماس باشند، نشان دهید AX، BY و CZ متقارب هستند، که در آن X، Y و Z محل‌های تماس دوایر با یکدیگر می‌باشند. (راهنمایی: برای دو مثلث XYZ و ABC از قضیه دزارگ استفاده کنید. در ضمن توجه به این نکته نیز مهم است که اگر سه شکل دو به دو مجانس را در نظر بگیریم، مراکز تجانس آنها روی یک خط راست هستند.)



شکل ۱۰-۱۰

■

۱۰-۱-۴ قضیه پاسکال و قضیه بریانشن

● قضیه ۱۰-۵ (پاسکال)

در هر شش ضلعی محاطی دلخواه، محل تلاقی اضلاع مقابل روی یک خط راست هستند.

اثبات. اگر به قطب مرکز دایره یک تبدیل قطبی بدهیم نتیجه می‌شود که قضیهٔ پاسکال معادل قضیه زیر است که موسوم به قضیه بریانشن می‌باشد. ●

● قضیه ۱۰-۶

در هر شش ضلعی محیطی قطرها همرس‌اند.

لم ۱.

اگر در نقاط P و Q بر دایرهٔ C دو مماس PT_1 و QT_2 را در یک طرف طوری رسم کنیم که $PT_1 = QT_2$ آنگاه می‌توان دایره‌ای رسم کرد که در نقاط T_1 و T_2 بر PT_1 و QT_2 مماس باشد.

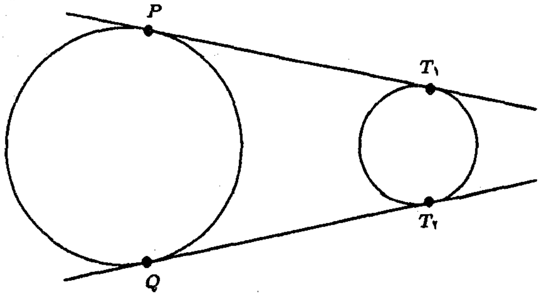
اثبات. تمرین.

حال با استفاده از این لم به اثبات قضیه بریانشن می‌پردازیم:

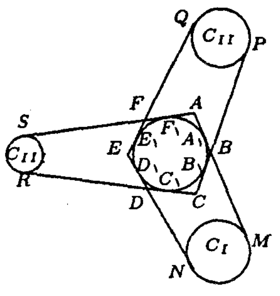
در شش ضلعی محیطی $ABCDEF$ اضلاع را به گونه‌ای امتداد می‌دهیم که

$$A_1M = D_1N = B_1P + E_1Q = C_1R + F_1S$$

در این صورت اگر مطابق لم دوایر C_I، C_{II}، و C_{III} را رسم کنیم به آسانی دیده می‌شود که BE محور اصلی دو دایرهٔ C_I و C_{II}، AD محور اصلی دو دایرهٔ C_I و C_{III}، و FC محور



شکل ۱۰-۱۱



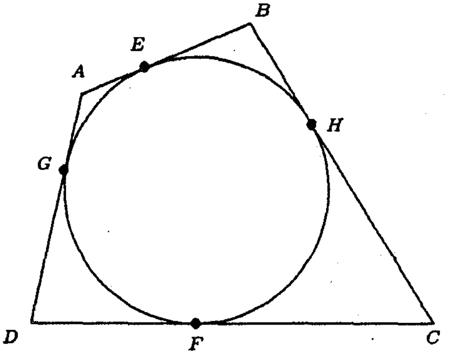
شکل ۱۰-۱۲

اصلی دو دایرهٔ C_{II} و C_{III} است، و بنابراین این خطوط باید در مرکز اصلی سه دایره متقارب باشند. ●

خواننده می‌تواند اثبات‌های دیگری برای قضایای پاسکال و بریانشن در مراجع مذکور درکتابنامه ببیند.

■ مثال ۱۰-۸

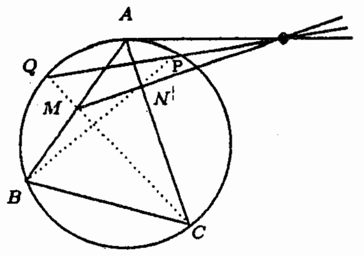
در شکل زیر نشان دهید AC، BD، EF و GH متقارب‌اند.



شکل ۱۰-۱۳ ■

■ مثال ۱۰-۹

در شکل زیر ABC یک مثلث دلخواه محاط در دایرهٔ C، و M و N نقاطی دلخواه بر اضلاع مثلث هستند نشان دهید که PQ و MN و مماس بر دایره در نقطه A متقارب‌اند.



شکل ۱۰-۱۴

(راهنمایی: از قضیه پاسکال استفاده کنید!) ■

۱۰-۲ زیرمیانه‌ها و نقطه‌های بروکار در مثلث

۱۰-۲-۱ زیرمیانه

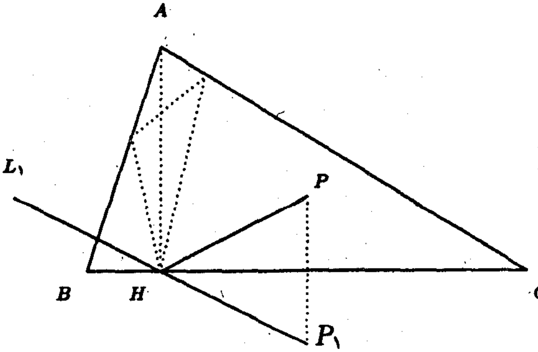
به‌عنوان کاربردی ساده از بعضی مطالب عنوان شده در بخش اول می‌توان به مفهوم مزدوج نیمسازی و میانه‌ای اشاره کرد.

فرض کنیم در مثلث ABC سه خط AX، BY و CZ متقارب باشند. قرینهٔ AX' نسبت به نیمساز زاویه A را AX' می‌گیریم و BY' و CZ' را نیز به همین ترتیب تعریف می‌کنیم. در این صورت از قضیهٔ سوا به سادگی نتیجه می‌شود که AX'، BY' و CZ' نیز متقاربند. (مزدوج نیمسازی) مشابه همین مطلب نیز در مورد پاره‌خطهای سوایی AX، AY و CZ وقتی که قرینه X، Y، Z را نسبت به وسط اضلاع در نظر بگیریم، برقرار است. فرض کنیم P محل تقارب AX، BY و CZ، و P' محل تقارب AX'، BY' و CZ' باشد. یک مسألهٔ جالب می‌تواند این باشد که در حالت مزدوج میانه‌ای AX، BY و CZ به چه وضعی باشند تا P، P' و G (مرکز ثقل مثلث) روی یک خط راست قرار بگیرند؟

مثال بعدی نیز مسأله جالبی است که با استفاده از مفاهیم فوق راه‌حلی نسبتاً ساده پیدا می‌کند ولی بدون توجه به این نکات می‌تواند مسألهٔ مشکلی باشد.

■ مثال ۱۰-۱۰

P را نقطه‌ای درون مثلث ABC، و H را پای ارتفاع نظیر BC بگیرید. قرینهٔ P را نسبت به BC بدست آورده L_1 را امتداد واصل بین آن و H، مرکز ارتفاعی مثلث، فرض می‌کنیم. اگر L_2, L_3 را نیز به همین ترتیب تعریف کنیم نشان دهید که L_1، L_2 و L_3 متقاربند.



شکل ۱۰-۱۵

حل. در واقع L_1 قرینه PH نسبت به AH است؛ حال اگر مثلث ارتفاعی $H_1H_2H_3$ را در نظر بگیریم، سه خط PH_1، PH_2 و PH_3 در نقطهٔ P متقاربِ‌اند. L_i قرینهٔ PH_i نسبت به A_iH_i است. اکنون کافی است توجه کنیم که در مثلث ارتفاعی، نیمسازها ارتفاعهای مثلث اصلی هستند. ■

تمرین

۱. مسأله فوق را تعمیم دهید.

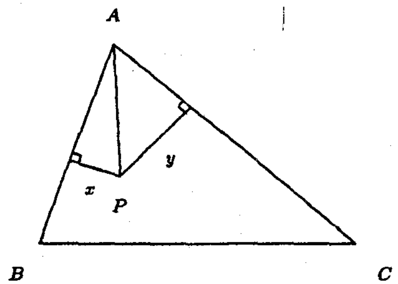
اکنون به یک حالت خاص از مزدوج نیمسازی می‌پردازیم.

زیر میانه: مزدوج نیمسازی میانه را زیر میانه می‌نامیم. محل همرسی زیر میانه‌ها را نقطه زیر میانه‌ای نامیده با K نشان می‌دهیم.

● تضیه۱۰-۷

AP زیرمیانه است اگر و تنها اگر

$$\frac{x}{y} = \frac{c}{b}$$



شکل ۱۰-۱۶

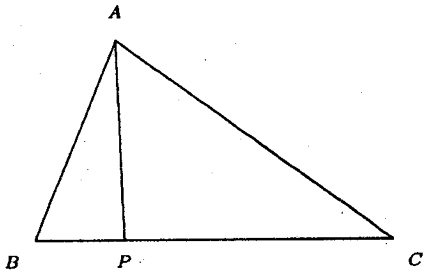
اثبات. اگر AP زیرمیانه باشد، AP و AA' مزدوج نیمسازی هستند. (A' وسط BC است) در نتیجه $\frac{c}{b} = \frac{r}{s} = \frac{x}{y}$. ●

● قضیه۱۰-۸

اگر AP زیرمیانه باشد $(P \in BC)$ آنگاه

$$\frac{BP}{PC} = \frac{c^2}{b^2}$$

و برعکس.



شکل ۱۰-۱۷

اثبات. از قضیه قبل استفاده کنید.

نتیجه. برای فواصل K از سه ضلع، یعنی x، y و z داریم

$$x : y : z = a : b : c$$

و برعکس. ●

چند کاربرد:

۱. می‌دانیم که نقطهٔ فرما در مثلث، نقطه‌ای است که مجموع فواصلش از سه رأس مینیموم است. به همین ترتیب ثابت می‌شود که K نقطه‌ای است که مجموع مربعات فواصل آن از سه ضلع مینیموم است.

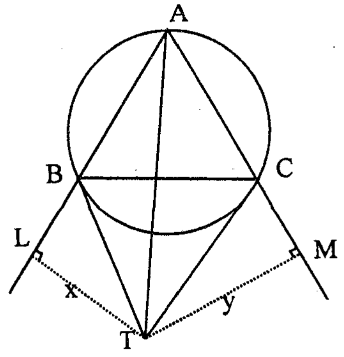
۲. در مثلث قائم‌الزاویه، K نقطه وسط ارتفاع وارد بر وتر است.

۳. ● قضیه۱۰-۹

دایرهٔ محیطی ABC را در نظر می‌گیریم. اگر در B و C بر دایرهٔ محیطی دو مماس رسم کنیم تا همدیگر را در T قطع کنند. AT زیر میانه است.

اثبات. تمرین. (*راهنمایی:* قضیه ۷ را به کار ببرید.)

نقطه ژرگن. اگر دایرهٔ محاطی مثلث ABC به ترتیب در نقاط D، E و F بر اضلاع BC،AC و AB مماس باشد، به سادگی دیده می‌شود که پاره‌خطهای AD، BE و CF در نقطه‌ای در داخل مثلث متقارب‌اند. این نقطه را نقطهٔ ژرگن مثلث ABC می‌نامیم.



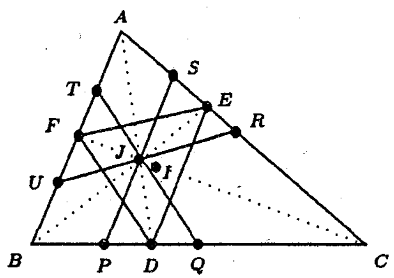
شکل ۱۰-۱۸

۴) با نامگذاریهای تعریف فوق، نقطه ژرگن مثلث ABC همان نقطهٔ زیرمیانه‌ای مثلث DEF است.

اثبات. بنابر (۳) حکم ثابت است.

دایرهٔ آدامز (Adams)

J را نقطه ژرگن، DEF را «مثلث ژرگن» مثلث ABC فرض می‌کنیم. از J سه خط به موازات اضلاع مثلث DEF رسم می‌کنیم تا مثلث را در شش نقطهٔ P، Q، R، S، T و U قطع کنند. در این صورت ●



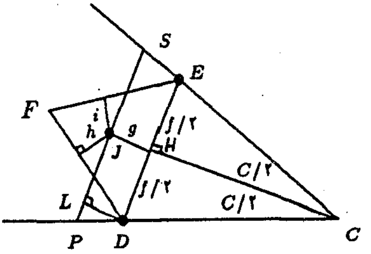
شکل ۱۰-۱۹

● قضیه۱۰-۱۰

شش نقطه حاصل، روی یک دایره به مرکز I (مرکز دایره محاطی مثلث) واقع‌اند. (این دایره را دایرهٔ آدامز مثلث ABC می‌نامیم).

اثبات. داریم $IP^2 = TD^2 + PD^2 = r^2 + PD^2$. PD را محاسبه می‌کنیم. CD و CE مماسهای مساوی بر دایرهٔ محاطی هستند، پس CDE متساوی‌الساقین است. می‌دانیم که $CD = P - c$. (P نصف محیط است)

DL را عمود بر PS می‌گیریم. طول آن، یعنی g، فاصلهٔ بین خطهای موازی DE و PS است و در نتیجه برابر همان فاصلهٔ نقطهٔ J تا DE است. امّا J در واقع نقطه زیرمیانه‌ای مثلث DEF



شکل ۱۰-۲۰

است، پس

$$\frac{i}{EF} = \frac{h}{FD} = \frac{g}{ED} = t, \qquad t \in \mathbb{R}^+$$

CH ارتفاع مثلث متساوی‌الساقین CDE است، و

$$DH = \frac{۱}{۲}f = (p-c)\sin(C/۲) \Rightarrow f = ۲(p-c)\sin(C/۲)$$

$$\Delta DPL : PD = tf/\cos(C/۲) = ۲t(p-c)\mathrm{tg}(C/۲)$$

$$= ۲t(p-c)\frac{r}{P-c}$$

$$= ۲tr$$

درنتیجه $PD = ۲tr$ و نیز

$$IP^۲ = r^۲ + ۴t^۲r^۲ = r^۲(۱+۴t^۲)$$

به‌نظر می‌آید که باقی کار را می‌توان به‌عنوان تمرین برای خواننده باقی گذاشت! ●

لم۲.

در مثلث ABC، AL و AM را مزدوج نیمسازی فرض کرده‌ایم. از نقطه دلخواه X روی AM عمودهایی بر AB و AC رسم می‌کنیم تا Y و Z به‌دست آیند. در این صورت $YZ \perp AL$.

اثبات. تمرین.

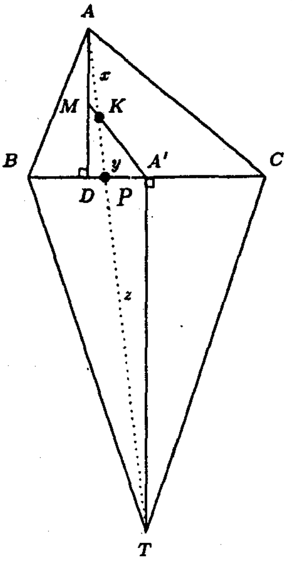
لم۳.

K را مطابق معمول نقطهٔ زیرمیانه‌ای مثلث ABC می‌گیریم. در این صورت AB، AC و AK و مماس بر دایرهٔ محیطی مثلث ABC از نقطهٔ A چهار شعاع یک دستگاه توافقی هستند.

اثبات. تمرین. (*راهنمایی:* قضیهٔ ۱۰-۸ رابه کار ببرید.)

● **قضیه۱۰-۱۱**

از A'، وسط AC، به K (نقطه زیر میانه‌ای) درمثلث ABC وصل می‌کنیم در این صورت امتداد $A'K$ ارتفاع AD را نصف می‌کند.



شکل ۱۰-۲۱

اثبات. مثلثهای $PA'T, ADP$ متشابه هستند در نتیجه

$$\frac{AD}{A'T} = \frac{AP}{PT} \quad \text{و} \quad DAP = PTA' \qquad (۱)$$

مثلثهای AMK و $KA'T$ نیز متشابه‌اند پس

$$\frac{AM}{A'T} = \frac{AK}{KT} \qquad (۲)$$

از (۱) و (۲) نتیجه می‌شود که

$$\frac{AM}{AD} = \frac{AK.PT}{KT.AP}$$

نشان می‌دهیم که نسبت اخیر مساوی $\frac{1}{2}$ است. بنابر لم (۲)

$$\frac{AK}{KP} = \frac{AT}{TP} \qquad \text{(تقسیم توافقی)}$$

اگر قرار دهیم $PT = z$، $KP = y$ و $AK = x$، رابطهٔ فوق تبدیل می‌شود به

$$xz = y(x+y+z)$$

اکنون

$$\frac{AK.PT}{KT.AP} = \frac{xz}{(y+z)(x+y)} = \frac{xz}{xy+y^2+yz+xz}$$
$$= \frac{xz}{y(x+y+z)+xz} = \frac{xz}{xz+xz} = \frac{1}{2}$$

▲ تعریف ۱۰-۲

مثلث عمودی نقطهٔ P در مثلث ABC، مثلث حاصل از پای عمودهایی است که از نقطه P بر اضلاع مثلث وارد می‌شود. مثلاً مثلث ارتفاعی، مثلث عمودی نقطهٔ H (محل همرسی ارتفاع‌ها) است، یا مثلث میانه‌ای مثلث عمودی نقطهٔ O (مرکز دایرهٔ محیطی) است. ▲

▲ تعریف ۱۰-۳

دو نقطه P و Q را در مثلث ABC مزدوج یا هم زاویه گویند هرگاه AP با AQ، BP با BQ، و CP با CQ مزدوج نیمسازی باشند. ▲

● قضیه ۱۰-۱۲

اگر دو نقطه P و Q در مثلث ABC مزدوج باشند آنگاه رئوس مثلثهای عمودی وابسته به این دو نقطه، شش نقطه هستند واقع بر دایره‌ای به مرکز M. (M نقطه وسط PQ است)

اثبات. تمرین. (*راهنمایی:* ابتدا نقاط و خطوط وابسته به رأس A را در نظر بگیرید سپس از لم ۱ استفاده کنید.) ●

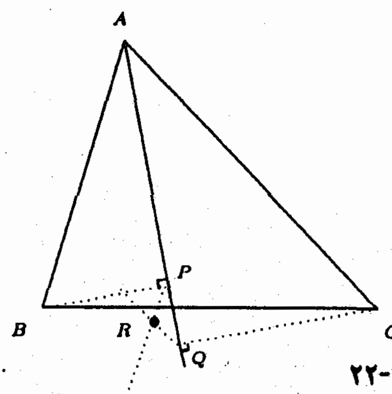
تمرین

۱. نشان دهید اضلاع مثلث عمودی نقطهٔ K (مرکز میانه‌ای)، متناسب‌اند با میانه‌های مثلث.

۲. نشان دهید نقطهٔ K مرکز ثقل مثلث عمودی خودش است. آیا عکس مطلب هم درست است؟

۳. نتایج ۱ و ۲ی قضیهٔ ۱۰-۸ را اثبات کنید.

۴. در مثلث ABC، عمودهایی از B و C بر نیمساز زاویهٔ A رسم کرده‌ایم تا آن را در P و Q قطع کنند. مطابق شکل از P به موازات AB و از Q به موازات AC خطوطی کشیده‌ایم



شکل ۱۰-۲۲

این دو خط همدیگر را در R قطع کرده‌اند. نشان دهید AR زیرمیانه است.

۵. K را نقطهٔ زیرمیانه‌ای مثلث ABC بگیرید. خطوط AK و BK دایرهٔ محیطی مثلث ABC را در D، E و F قطع کرده‌اند. نشان دهید نقطهٔ زیرمیانه‌ای مثلث DEF، همان نقطهٔ K است.

۶. سه دایرهٔ C_1، C_2 و C_3 به مراکز O_1، O_2 و O_3 را متناظر با مثلث $A_1A_2A_3$ به این صورت در نظر گرفته‌ایم که دایرهٔ C_i از G (مرکز ثقل مثلث) و دو رأس A_j و A_k می‌گذرد $(i \neq j, j \neq k, i \neq k)$ نشان دهید

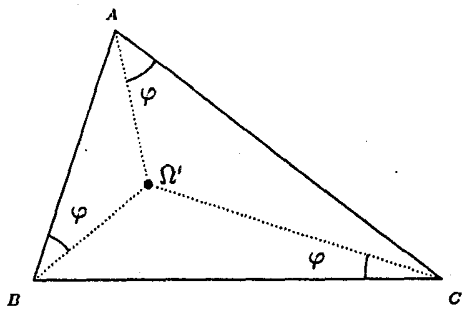
الف) نقطه O (مرکز دایرهٔ محیطی مثلث $A_1A_2A_3$) همان مرکز ثقل $O_1O_2O_3$ است.

ب) نقطه G (مرکز ثقل $A_1A_2A_3$) نقطهٔ زیرمیانه‌ای مثلث $O_1O_2O_3$ است.

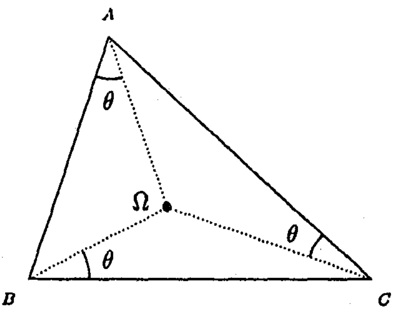
۱۰-۲-۲ نقاط بروکار در مثلث (Brocard points)

▲ تعریف۱۰-۴

در دو شکل زیر که در آنها سه زاویهٔ θی مشخص شده با هم، و سه زاویهٔ φی مشخص شده نیز با هم مساوی هستند، نقاط Ω و Ω' را نقاط بروکار مثلث ABC می‌نامیم.



شکل۱۰-۲۴



شکل ۱۰-۲۳

▲

تمرین

۱. روشی هندسی برای پیدا کردن نقاط بروکار ارائه دهید.

● تضیه۱۰-۱۳

با نمادگذاری‌های تعریف فوق داریم $\varphi = \theta$. یعنی دو نقطه بروکار مثلث، Ω و Ω'، مزدوج هستند.

اثبات. نشان دهید $\text{cotg}\theta = \text{cotg}\varphi = \text{cotg}A + \text{cotg}B + \text{cotg}C$. و این نشان خواهد داد که $\varphi = \theta$. از اینجا به بعد این مقدار مشترک را با ω نشان می‌دهیم. ●

یک کاربرد: زاویهٔ بروکار ماکزیمم اگر در تساوی $\cot g\omega = \cot gA + \cot gB + \cot gC$ برای طرف راست، نامساوی ینسن را به‌کار ببریم نتیجه می‌شود که $\cot g\omega \geq \sqrt{۳}$ و از اینجا $\omega \leq ۳۰^\circ$. تساوی نیز در حالت مثلث متساوی‌الاضلاع اتفاق می‌افتد.

تمرین

۱. (روشی دیگر برای مشخص کردن زاویه بروکار ماکزیموم) نشان دهید

$$\cot g\omega = \frac{a^۲ + b^۲ + c^۲}{۴S}$$

حال از رابطهٔ

$$a^۲ + b^۲ + c^۲ \geq ۴\sqrt{۳}S$$

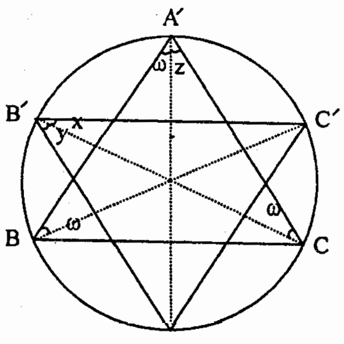
نتیجه می‌شود که $\omega \leq ۳۰^\circ$.

۲. با استفاده از مطالب فوق روش حل دیگری برای مثال ۱۰-۳ ارائه دهید.

لم۴.
فرض کنید Ω نقطهٔ بروکار مثلث ABC باشد. $A\Omega$، $B\Omega$ و $C\Omega$ را امتداد می‌دهیم تا دایرهٔ محیطی مثلث را در A'، B' و C' قطع کنند. در این صورت دو مثلث ABC و $A'B'C'$ قابل انطباق‌اند.

اثبات. داریم

$$A' = x + y = \omega + z = A$$



شکل۱۰-۲۵

و به همین ترتیب $B = B'$ و $C = C'$ و چون شعاع دوایر محیطی دو مثلث ABC و $A'B'C'$ مساویند، دو مثلث قابل انطباق‌اند. به سادگی دیده می‌شود که $A'B'C'$ از دوران ABC به اندازهٔ ۲ω به‌دست آمده است. از طرف دیگر می‌توان دید که هر نقطهٔ بروکار ABC، یک نقطه بروکار $A'B'C'$ است و برعکس. از اینجا نتیجه زیر به‌دست می‌آید

گزاره:

الف) $\Omega O = \Omega' O$؛

ب) $\widehat{\Omega O \Omega'} = ۲\omega$.

تمرین

۱. نشان دهید هر نقطهٔ بروکار، نقطهٔ بروکار مثلث عمودی خودش است.

دو قضیه بعدی به ارتباطهای موجود بین نقاط بروکار و نقطه زیرمیانه‌ای مثلث خواهند پرداخت.

● **قضیه ۱۰-۱۴**

چهار نقطه Ω، Ω'، O و K روی دایره‌ای به قطر KO واقع‌اند.

اثبات. برای فواصل x، y و z نقطهٔ K از سه ضلع داشتیم

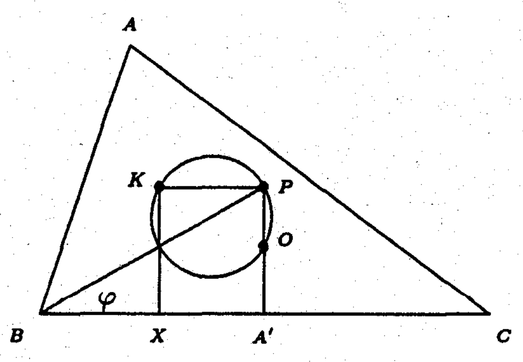
$$x = at, \quad y = bt, \quad z = ct$$

از طرف دیگر

$$ax + by + cz = ۲S$$
$$\Rightarrow t = \frac{۲S}{a^۲ + b^۲ + c^۲} \Rightarrow \frac{a}{۲x} = \operatorname{cotg}\omega$$

عمود منصف BC دایرهٔ به قطر KO را در O و P قطع می‌کند. چون KO قطر است نتیجه می‌شود که $\widehat{KPO} = ۹۰°$ و در نتیجه $KPA'X$ یک مستطیل خواهد بود و از آنجا $x = KX = PA'$. در نتیجه

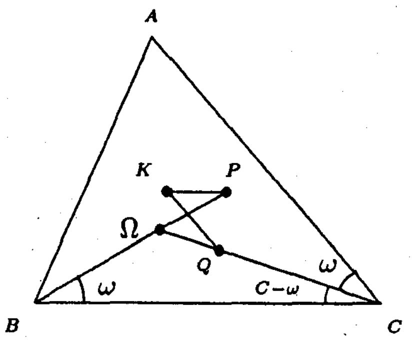
$$\operatorname{cotg}\varphi = \frac{a}{۲PA'} = \frac{a}{۲x} = \operatorname{cotg}\omega$$



شکل ۱۰-۲۶

از اینجا نتیجه می‌شود که نقطه بروکار جایی روی خط BP است. در وضعیت مشابه فرض کنید که عمود منصف AC دایره به قطر KO را بجز O در Q قطع کند. مشابهاً $\widehat{QCA} = \omega$ و $KQ \| AC$. در نتیجه Ω محل تلاقی BP و CQ است.

می‌دانیم که $KQ\|AC, KP\|BC$؛ از اینجا نتیجه می‌شود که $\widehat{PKQ} = C$، و چون $P\widehat{PQ} = c - \omega$ به‌دست می‌آید $P\widehat{\Omega C} = \omega + (c - \omega) = C$ از اینجا نتیجه می‌شود که $PK\Omega Q$ محاطی است (در دایره‌ای مانند Γ) ولی O نیز روی همین دایره قرار دارد. برای Ω' نیز به طریق مشابه حکم ثابت می‌شود. ●



شکل ۱۰-۲۷

● قضیه ۱۰-۱۵

میانهٔ نظیر یک رأس، زیرمیانهٔ نظیر رأس دوم، و خط بروکار نظیر رأس سوم همرس هستند. (خط بروکار نظیر یک رأس را خط واصل بین نقطه بروکار و رأس موردنظر می‌گیریم)؛ وضعیت خطوط، مانند شکل زیر فرض شده‌اند.

اثبات. می‌خواهیم نشان دهیم

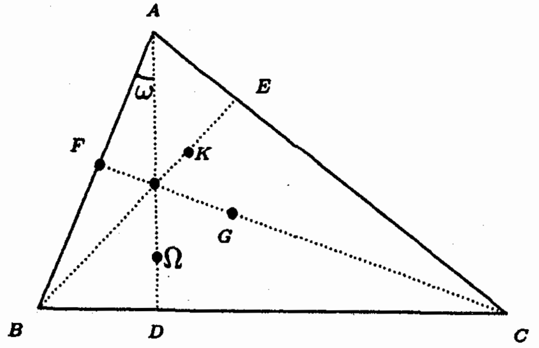
$$\frac{AF}{FB}\cdot\frac{BD}{DC}\cdot\frac{CE}{EA} = ۱$$

داریم $\frac{AF}{FB} = ۱$ و $\frac{CE}{EA} = \frac{a^۲}{c^۲}$، پس کافی است نشان دهیم

$$\frac{BD}{DC} = c^۲/a^۲$$

دو مثلث ΩBD و ABD متشابه‌اند، در نتیجه

$$\frac{y}{r} = \frac{c}{p} \qquad (*)$$



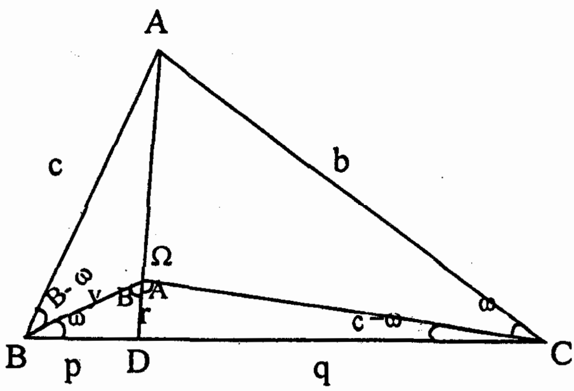
شکل ۱۰-۲۸

و نیز $B\widehat{\Omega D} = \widehat{B}$ و $D\widehat{\Omega C} = \widehat{A}$.
از قانون سینوسها در مثلثهای $B\Omega C$ و $D\Omega C$ به‌دست می‌آید

$$\left\{\begin{array}{c}\frac{y}{\sin(c-\omega)} = \frac{a}{\sin(A+B)} = \frac{a}{\sin C} \\ \frac{r}{\sin(c-\omega)} = \frac{q}{\sin A}\end{array}\right\} \Rightarrow \frac{y}{r} = \frac{a\sin A}{q\sin C} = \frac{a^2}{qc}$$

و از (*) نتیجه می‌شود:

$$\frac{p}{q} = c^2/a^2$$

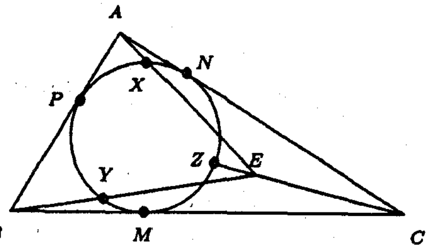


شکل ۱۰-۲۹

تمرین

۱. در مثلث ABC از پای ارتفاع وارد بر یک ضلع چهار عمود بر دو ضلع و ارتفاعهای وارد بر آن دو ضلع رسم کرده‌ایم. ثابت کنید چهار نقطهٔ پای عمودها بر یک استقامت‌اند.

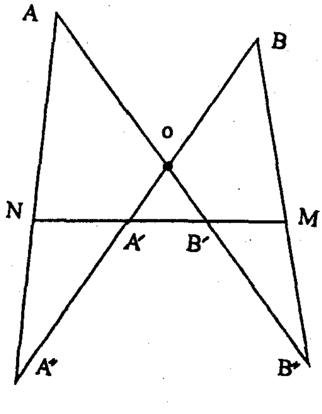
۲. در شکل زیر E نقطه‌ای دلخواه درون مثلث است که از سه رأس به آن وصل کرده‌ایم تا خطوط حاصل دایرهٔ محاطی را در X، Y و Z قطع کنند. نشان دهید MX، NY و PZ متقارب‌اند.



شکل ۱۰-۳۰

۳. در مثلث ABC خط ℓ گذرنده از C بموازات BA رسم شده است و نیمسازهای داخلی AB خط ℓ را در نقاط G و E و اضلاع مقابل را در F و D قطع کرده‌اند به نحوی که $GF = DE$. نشان دهید مثلث متساوی‌الساقین است.

۴. در شکل زیر داریم $AO = B'B''$ و $BO = A'A''$. نشان دهید $A'N = B'M$.



شکل ۱۰-۳۱

۵ . هرگاه سه خط سوایی AA'، BB' و CC' در O همرس باشند، نشان دهید

$$\frac{AO}{OA'} = \frac{AC'}{C'B} + \frac{AB'}{B'C}$$

۶ . در مثلث ABC اگر AA'، BB' و CC' سه خط سوایی همرس در O باشند، نشان دهید $\frac{OA}{AA'} + \frac{OB}{BB'} + \frac{OC}{CC'} = 1$.

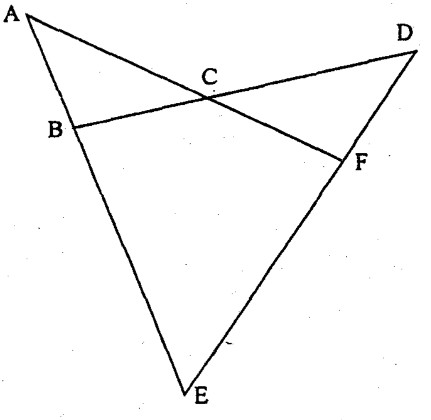
۷ . در شرایط مسئلهٔ ۶ نشان دهید $OA' + OB' + OC' < BC$ که BC بزرگترین ضلع مثلث است.

۸ . در چهار مثلث شکل زیر ثابت کنید

الف) محل تلاقی ارتفاعها روی یک خط راست هستند؛

ب) دوایر محیطی از یک نقطه می‌گذرند؛

ج) مراکز دوایر محیطی روی یک دایره هستند.



شکل ۱۰-۳۲

۹ . در یک چهار ضلعی محیطی (محاطی)، مرکز دایرهٔ محاطی و مرکز دایره محیطی و محل تلاقی اقطار سه نقطهٔ واقع بر یک خط راست هستند.

۱۰ . سه خط سوایی در X همرس‌اند؛ مطلوب است شرط لازم و کافی برای اینکه محل تلاقی مزدوجهای میانه‌ای آنها Y، با X و G همخط باشد. (G محل تلاقی میانه‌ها)

۱۱ . قطرهای AC و CE از شش ضلعی منتظم $ABCEF$ به وسیله نقاط داخلی M و

N به نحوی تقسیم شده‌اند که $\frac{AM}{AC} = \frac{CN}{CE} = r$. اگر B، M و N هم‌خط باشند، r را محاسبه کنید.

۱۲ . دایرهٔ محاطی مثلث ABC بر AB در D مماس است. E' را سر دیگر قطری از دایرهٔ محاطی که شامل D است بگیرید. مماس بر دایرهٔ محاطی در E'، AC را در A' و BC را در B' قطع می‌کند. اگر M وسط AB باشد:

الف) $A'B$، AB' و CM همرس‌اند؛

ب) M، مرکز دایرهٔ محاطی، و وسط CD روی یک خط راست هستند.

۱۳ . دایرهٔ C، خط L مماس بر آن و یک نقطهٔ M واقع بر L را در نظر بگیرید . مکان هندسی تمام نقطه‌های P را پیدا کنید که وقتی از آنها دو مماس بر C رسم می‌کنیم این مماسها خط L را در نقطه A و B طوری قطع کنند که $MA = MB$.

۱۴ . در چهار وجهی $ABCD$ نقاط K و L به ترتیب وسطهای یالهای AB و CD هستند، ثابت کنید هر صفحه شامل KL چهار وجهی را به دو حجم مساوی تقسیم می‌کند.

۱۵ . در مثلث ABC، D وسط BC، E وسط AC و F وسط AB است و نیز نیمساز A با DE در D_1 و با DF در D_2، نیمساز B با EF در E_1 و با ED در E_2، و نیمساز C با FD در F_1 وبا FE در F_2 تلاقی می‌کنند. ثابت کنید

الف) D_1F_1، D_2E_1 و BC همرس‌اند؛

ب) E_1D_1، E_2F_1 و CA همرس‌اند؛

ج) F_1E_1، F_2D_1 و AB همرس‌اند؛

د) نقاط همرسی (الف)، (ب) و (ج) همان نقاط تماس دایره محاطی ABC با اضلاع است.

۱۶ . یک مثلث ABC و نقاط خارجی X، Y و Z به گونه‌ای هستند که

$$\widehat{BAZ} = \widehat{CAY} \quad , \quad \widehat{CBX} = \widehat{ABZ} \quad , \quad \widehat{ACY} = \widehat{BCX}$$

ثابت کنید AX، BY و CZ همرس‌اند.

۱۷ . (یک قضیه مشهور) در مثلث ABC وسطهای اضلاع، پای سه ارتفاع و وسطهای پاره‌خطهای واصل بین محل همرسی ارتفاعها و رئوس مثلث بر یک دایره واقع‌اند.

۱۸ . A'، B' و C' را محل تماس دایرهٔ محاطی با اضلاع مثلث ABC گرفته‌ایم. می‌دانیم که AA'، BB' و CC' همرس‌اند (اگر نمی‌دانید ثابت کنید!)؛ نقطه همرسی این سه خط را نقطه ژرگن مثلث ABC می‌نامند. نشان دهید

$$\frac{JA'}{JA} \cdot \frac{JB'}{JB} \cdot \frac{JC'}{JC} = \frac{r}{4R}$$

J نقطه ژرگن ABC است.

۱۹ . مثلث ABC حاده‌الزاویه است و L خطی در صفحه مثلث و u و v و w طول عمودهایی هستند که به ترتیب از A، B و C بر L وارد شده‌اند. ثابت کنید

$$u^۲ tgA + v^۲ tgB + w^۲ tgC \geq ۲S_{ABC}$$

در چه حالتهایی تساوی برقرار می‌شود؟

۲۰ . هرگاه از سه خط سوایی همرس یکی نیمساز یک زاویه مثلث سوایی حاصل باشد، آن خط سوایی ارتفاع است و برعکس.

۲۱ . خطی اضلاع یا امتداد اضلاع یک شش ضلعی محاطی را قطع کرده است. بین نقاط تقسیم و رئوس شش ضلعی ۱۲ پاره‌خط به‌وجود می‌آید. نشان دهید حاصل ضربهای یکی در میان این ۱۲ پاره‌خط برابر هستند. این نتیجه را تعمیم دهید.

۲۲ . در مثلث ABC اگر $AB > AC$، آنگاه نیمساز C کوچکتر است از نیمساز B.

چند مسألهٔ متفرقه

۲۳ . مساحت مثلث قائم‌الزاویه $ABC(A = ۹۰^\circ)$ برابر S است. از رأس A خطی رسم می‌کنیم تا وتر را در D قطع کند به‌طوری که دایره‌های محاطی داخلی دو مثلث ABD و ACD برابر باشند. ثابت کنید طول AD مساوی $\sqrt{S}$ است.

تعمیم: اگر ABC دلخواه باشد با شرایط فوق $AD^۲ = S\text{cotg}A$.

۲۴ . نقاط A ، B، C، D و E روی یک کره قراردارند به‌طوری که وترهای AB و CD در نقطه F یکدیگر را قطع می‌کنند و A، C و F از E به یک فاصله‌اند. ثابت کنید BD و EF بر یکدیگر عمودند.

۲۵ . ۷ دایره داده شده‌اند به‌طوری که ۶ دایره درون یک دایره ثابت قرار دارند و هر کدام از آنها با دایرهٔ ثابت و همچنین با دو دایره کوچکتر همسایه خود مماس است. اگر نقاط تماس ۶ دایرهٔ کوچک را با دایرهٔ بزرگتر $A_۱$، $A_۲$، $\cdots$، $A_۶$ بنامیم ثابت کنید

$$A_۱A_۲.A_۳A_۴A_۵A_۶ = A_۲A_۳.A_۴A_۵.A_۶A_۱$$

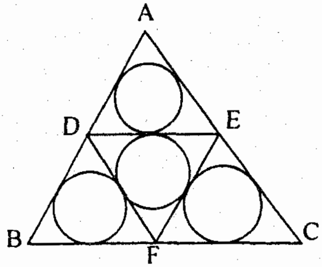
۲۶ . نقاط D، E و F را روی اضلاع مثلث ABC به گونه‌ای انتخاب کرده‌ایم که

$$r_{ABE} = r_{DBF} = r_{EFC} = r.$$

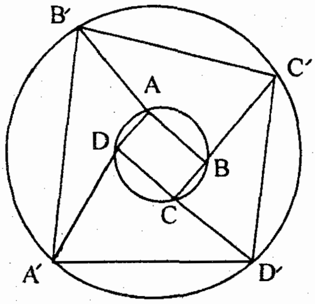
اگر $r_{DEF} = r_۱$ و $r_{ABC} = r$ نشان دهید $r = r. + r_۱$.

۲۷ . در شکل زیر دو دایرهٔ هم مرکز به شعاعهای $R > r$ داریم. نشان دهید

(محیط $ABCD$) $\times (\frac{R}{r}) \geq$ محیط $A'B'C'D'$



شکل ۱۰-۳۳



شکل ۱۰-۳۴