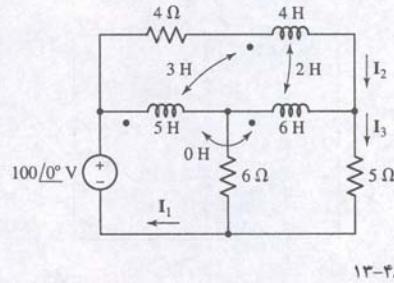
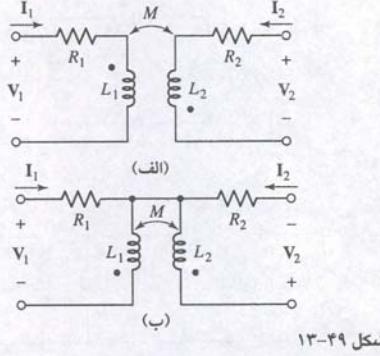


۱۵. توجه کنید که در شکل ۱۳-۴۸ بین القاگرهای $H_1 = 6 \text{ H}$ و $H_2 = 5 \text{ H}$ ۶ الگای متقابلی وجود ندارد. (الف) دستمای از معادلات را بر حسب $I_1(j\omega)$ و $I_2(j\omega)$ بنویسید، (ب) اگر $\omega = 2 \text{ rad/s}$ باشد، $I_3(j\omega)$ را پیدا کنید.



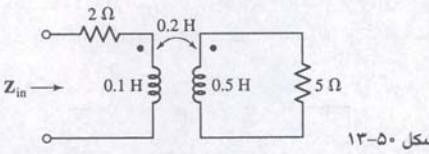
شکل ۱۳-۴۸

۱۶. برای هر مدار در شکل ۱۳-۴۹ مقدار $V_1(j\omega)$ و $V_2(j\omega)$ را بر حسب $I_1(j\omega)$ و $I_2(j\omega)$ به دست آورید.



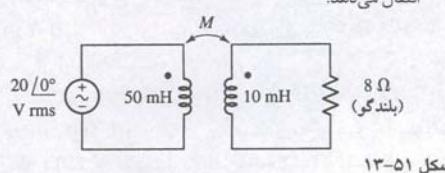
شکل ۱۳-۴۹

۱۷. (الف) برای شبکه شکل ۱۳-۵۰ مقدار $Z_{in}(j\omega)$ را بایابید، (ب) Z_{in} را در فاصله فرکانس $0 \leq \omega \leq 1000 \text{ rad/s}$ رسم کنید، (ج) برای $\omega = 50 \text{ rad/s}$ مقدار Z_{in} چقدر است؟

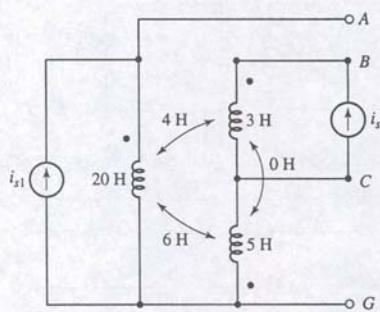


شکل ۱۳-۵۰

۱۸. با توجه به شکل ۱۳-۵۱، بگویید چه مقدار از M دقیقاً W توان متوسط را به مقاومت 8Ω یک بلندگو در فرکانس صوتی 160 Hz انتقال می‌دهد.

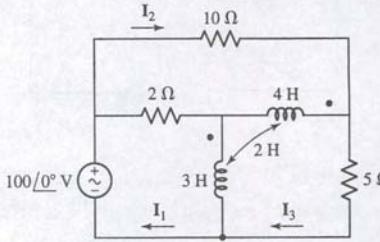


شکل ۱۳-۵۱



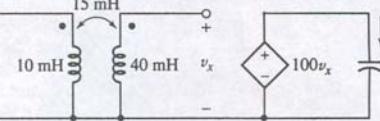
شکل ۱۳-۴۴

۱۲. برای مدار شکل ۱۳-۴۵، جریان‌های $i_1(t)$, $i_2(t)$ و $i_3(t)$ را بایابید به شرطی که $f = 50 \text{ Hz}$ باشد.



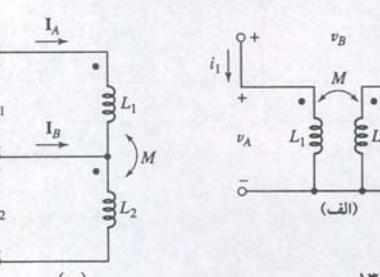
شکل ۱۳-۴۵

۱۳. عبارتی برای $i_C(t)$ در $t > 0$ در مدار شکل ۱۳-۴۶ بنویسید، به شرطی که $v_s(t) = 10t^2 u(t)/(t^2 + 0.01) \text{ V}$ باشد.



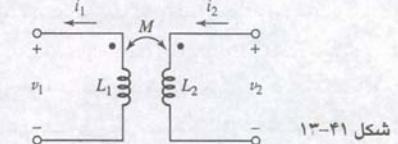
شکل ۱۳-۴۶

۱۴. (الف) برای شبکه ۱۳-۴۷ (الف) دو معادله برای $v_B(t)$ و $v_A(t)$ بر حسب $v_1(j\omega)$ و $v_2(j\omega)$ بنویسید، (ب) دو معادله برای $i_1(t)$ و $i_2(t)$ به صورت تابعی از $I_A(j\omega)$ و $I_B(j\omega)$ برای شبکه ۱۳-۴۷ (ب) بنویسید.

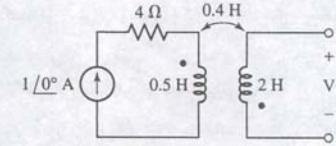


شکل ۱۳-۴۷

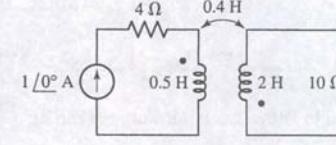
۷. با ارجاع به شکل ۱۳-۴۱، فرض کنید $M = 1.5 \text{ H}$ باشد. اگر $L_1 = L_2 = 2 \text{ mH}$ باشد، مطلوب است (الف) $i_1(t)$ و $i_2(t)$ (ج) di_2/dt (ب) di_1/dt باشد.



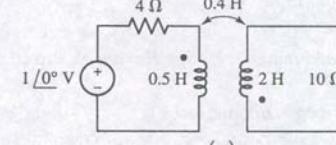
۸. برای هر شبکه در شکل ۱۳-۴۲، $v(t)$ را به دست آورید به شرطی که $f = 50 \text{ Hz}$ باشد.



(الف)

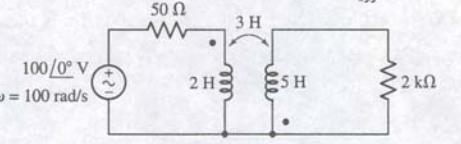


(ب)



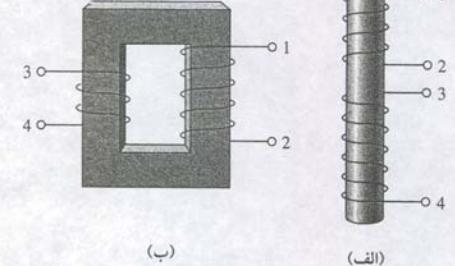
(ج)

۹. در مدار شکل ۱۳-۴۳، توان متوسط جذب شده با (الف) منبع، (ب) هر یک از دو مقاومت، (ج) هر یک از دو القاگر، (د) اندوکتانس متقابل را به دست آورید.

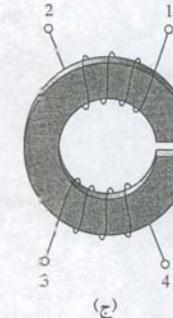


شکل ۱۳-۴۳

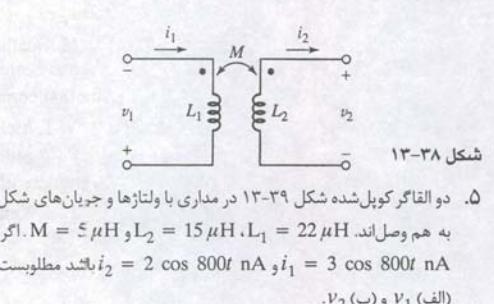
۱۰. در مدار شکل ۱۳-۴۴ فرض کنید $i_1(t) = 4t \text{ A}$ و $i_2(t) = 10t \text{ A}$ باشد، مطلوب است (الف) v_{BG} (ب) v_{AG} (ج) v_{CG} .
۱۱. (الف) مطلوب است شبکه مذکور توان متوسطی که از شبکه توسعه شده با مقاومت $2 \text{ k}\Omega$ در مدار مسئله ۹.۹ (ب) حداقل توان متوسطی که از شبکه توسعه شده با مقاومت Z_L کشیده می‌شود (به جای مقاومت $2 \text{ k}\Omega$) چقدر است؟



(الف)

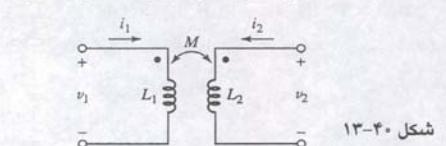


شکل ۱۳-۳۷



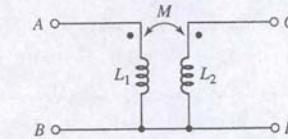
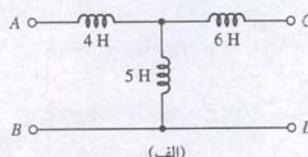
شکل ۱۳-۳۹

۵. دو القاگر کوپل شده شکل ۱۳-۳۹ در مداری با ولتاژها و جریان‌های شکل به هم وصل آند. توان متوسط جذب شده با (الف) منبع، (ب) هر یک از دو مقاومت، (ج) هر یک از دو القاگر، (د) اندوکتانس متقابل را به دست آورید.
۶. با ارجاع به شکل ۱۳-۴۰، فرض کنید $v_2 = 3e^{-2t} \text{ V}$ و $v_1 = 5e^{-t} \text{ V}$ باشد. اگر $M = 0.4 \text{ H}$ و $L_1 = L_2 = 8 \text{ H}$ باشد، مطلوب است (الف) $i_1(t)$ و $i_2(t)$ (ب) di_2/dt (ج) di_1/dt باشد.



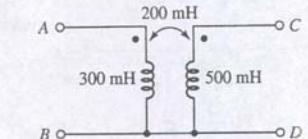
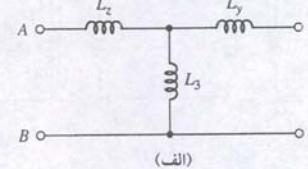
شکل ۱۳-۴۰

۳۳. شکوهای شکل ۱۳-۶۵ برایند. مقادیر L_1 , L_2 , M و C را به دست آورید.



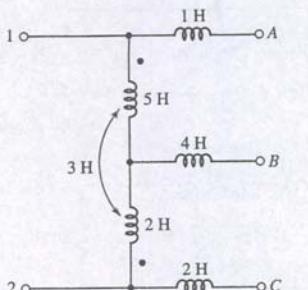
شکل ۱۳-۶۵

۳۴. جه مقادیری برای L_y , L_z و L_3 لازم است اگر دو شبکه شکل ۱۳-۶۴ معادل باشند.



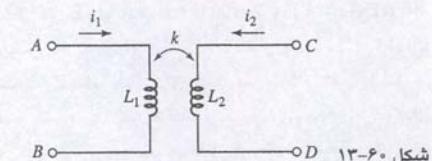
شکل ۱۳-۶۴

۳۵. در شبکه شکل ۱۳-۶۷ اگر پایانهای زیر به هم وصل باشند، انداختانس نظاره شده از پایانهای ۱ و ۲ را پیدا کنید. (الف) هیچ کدام، (ب) C به A ، (c) B به A



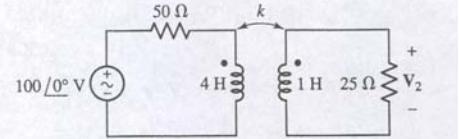
شکل ۱۳-۶۷

۳۶. به شکل ۱۳-۶۸ توجه کنید. (الف) برای یافتن نسبت $Re\{Z_L\} = 2 \Omega$ در فرکانس 60 Hz کار کند و Z_{11} باشد، چه راکتانس Z_L برای امپدانس منعکسه لازم است تا برابر باشد. $M = 1 \text{ mH}$? ($Z_{11} \triangleq R_1 + j\omega L_1$) (ب) $M = 1 \text{ mH}$ را باشد؟ (ج) $R_L = 100 \mu\text{A}$ را به دست آورید. (راهنمایی: $i_L(t) = 100 u(t)$ و $V_s(t) = 100 v(t)$)



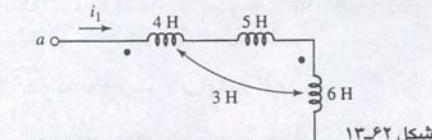
شکل ۱۳-۶۸

۲۹. برای مدار شکل ۱۳-۶۱ f = 60 Hz است. V_2 را به صورت تابعی از k رسم کنید و $|V_2|$ را در برابر k ترسیم نمایید.



شکل ۱۳-۶۱

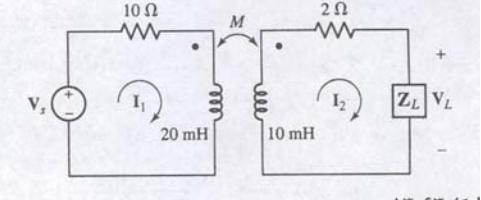
۳۰. اگر در شکل ۱۳-۶۲ $i_1 = 2 \cos 500t \text{ A}$ باشد، حداکثر انرژی ذخیره شده در شبکه چقدر است؟



شکل ۱۳-۶۲

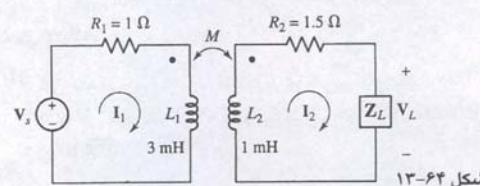
۱۳-۳ ترانسفورماتورهای خطی

۳۱. بر امپدانسی Z_L مدار شکل ۱۳-۶۳ ۷ در فرکانس ۵۰ Hz فرض شده است. القای متقابل سیم‌بیچ‌های اولیه و ثانویه مقدار ۸۰۰ nH دارد. مطلوب است (الف) امپدانس منعکسه و (ب) امپدانس ورودی از دیده شود.

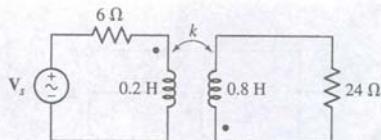


شکل ۱۳-۶۳

۳۶. اگر مدار شکل ۱۳-۶۴ در فرکانس 60 Hz کار کند و Z_{11} باشد، چه راکتانس Z_L برای امپدانس منعکسه لازم است تا برابر باشد. $M = 1 \text{ mH}$? ($Z_{11} \triangleq R_1 + j\omega L_1$) (ب) $M = 1 \text{ mH}$ را باشد؟ (ج) $R_L = 100 \mu\text{A}$ را به دست آورید.

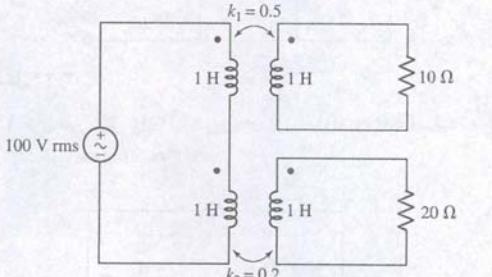


شکل ۱۳-۶۴



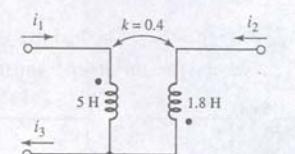
شکل ۱۳-۵۲

۲۵. اگر در شکل ۱۳-۵۷ $\omega = 100 \text{ rad/s}$ باشد، توان متوسط را برای موارد زیر بدست آورید: (الف) توان تحلیلی به بار 10Ω (ب) توان تحولی به مقاومت 20Ω (ج) توان تولیدی به وسیله منبع.



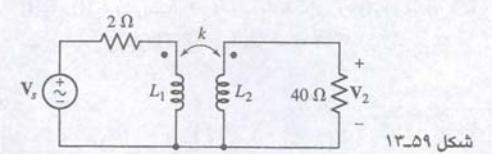
شکل ۱۳-۵۷

۲۶. برای سیم‌بیچ‌های کوپل شده شکل ۱۳-۵۸ فرض می‌شود $i_3(t) = 5e^{-t/5} \text{ A}$ و $i_1(t) = 4e^{-t/10} \text{ A}$. مطلوب است (الف) $i_2(t)$ (ب) $i_1(t)$ (ج) انرژی کل ذخیره شده در سیستم در $t = 0$.



شکل ۱۳-۵۸

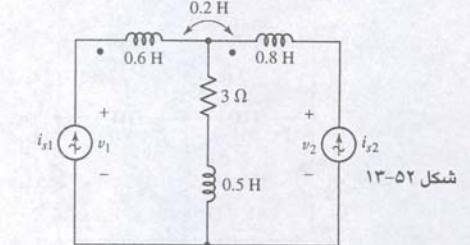
۲۷. در شکل ۱۳-۵۹ فرض کنید $\omega = 1000 \text{ rad/s}$ باشد، مطلوب است (الف) مقدار نسبت V_2 / V_s به شرطی که (الف) $L_1 = 1 \text{ mH}$, $L_2 = 25 \text{ H}$, $L_1 = 1 \text{ H}$ می‌باشد، (ب) $k = 1$ و $L_2 = 25 \text{ mH}$, $k = 1$, $L_2 = 25 \text{ H}$, $L_1 = 1 \text{ H}$ (ج) $k = 0.99$.



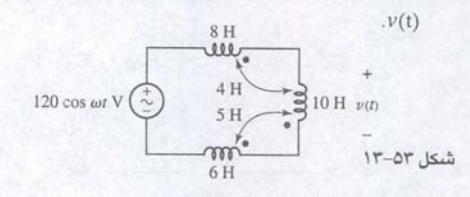
شکل ۱۳-۵۹

۲۸. (الف) یک پل القایی روی سیم‌بیچ‌های کوپل شده در شکل ۱۳-۶۰ ایجاد شده و مقادیر زیر تحت شرایط اتصال کوتاه و یا مدار باز اندازه‌گیری شده است: $L_{AB,CD,oc} = 5 \text{ mH}$, $L_{AB,CD,sc} = 10 \text{ mH}$, $k = 8 \text{ mA}$ و $L_{AB,CD,sc} = 8 \text{ mA}$. (ب) اگر نقطه‌ها در A و D باشند، i_1 چه باید باشد تا $i_2 = 5 \text{ A}$ باشد. (ج) چه باید باشد تا 100 mJ انرژی در سیستم ذخیره گردد.

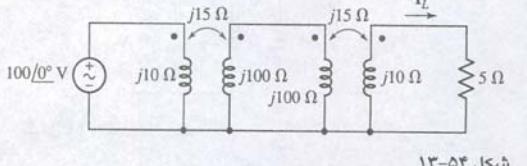
۱۹. در شکل ۱۳-۵۲ فرض کنید $i_{s1}(t) = 2 \cos 10t \text{ A}$ و $i_{s2}(t) = 1.2 \cos 10t \text{ A}$ باشد، (الف) $v_1(t)$ را پیدا کنید. (ب) را باید، (ج) توان متوسط تأمین شده به وسیله هر منبع چقدر است؟



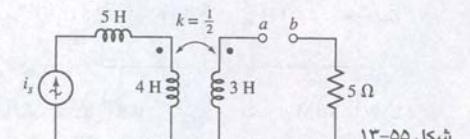
۲۰. می‌توان سه سیم‌بیچ را به لحاظ فیزیکی طوری کنار هم قرار داد تا بین A و B, B و C یک کوپل الایی متقابل وجود داشته ولی بین C و چنین چیزی نباشد. این آرایش در شکل ۱۳-۵۳ دیده شود. مطلوب است



۲۱. در مدار شکل ۱۳-۵۴ مقدار I_{L1} را پیدا کنید.

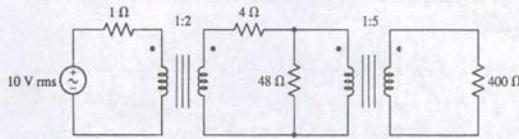


۲۲. در مدار شکل ۱۳-۵۵ جریان $A = 2 \cos 10t \text{ A}$ است. انرژی کل ذخیره شده در $a - b$ اتصال کوتاه است.



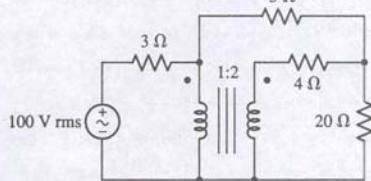
۲۳. فرض کنید در ترانس خطی شکل ۱۳-۵۶ است. $V_s = 12 \angle 0^\circ \text{ V}$, $\omega = 100 \text{ rad/s}$ و $k = 1$. (الف) توان متوسط تولیدی برای مقاومت 24Ω به صورت توافقی از k چقدر است. (ب) دو سیم‌بیچ با کوپل متقابل با $Z_L = 2 + j10 \Omega$ متصل به دو سر a و b باشند. اگر $Z_{AB,CD,oc} = 2 \mu\text{H}$, $L_{AB,CD,sc} = 2 \mu\text{H}$ باشد، i_1 چه باید باشد تا $i_2 = 100 \text{ mJ}$ انرژی در سیستم ذخیره گردد.

.۵۲. توان تلف شده رادر هر مقاومت از مدار شکل ۱۳-۸۰ بپیدا کنید.



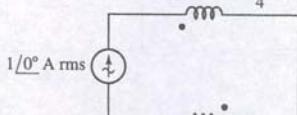
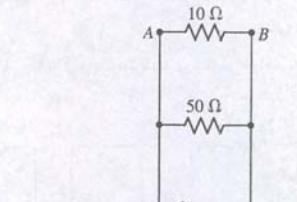
شکل ۱۳-۸۰

.۵۳. رادر شکل ۱۳-۸۱ بباید.



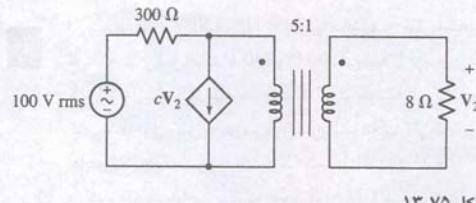
شکل ۱۳-۸۱

.۵۴. (الف) متوسط توان تحویلی به هر مقاومت در مدار شکل ۱۳-۸۲ را به دست آورید، (ب) پس از اتصال A به C و B به D، حل را تکرار کنید.



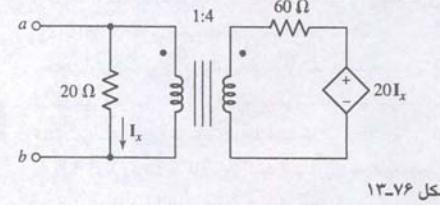
شکل ۱۳-۸۲

.۵۵. بگویید چگونه می‌توان ادو ترانس ایده‌آل برای تطبیق یک زناتور با امپدانس خروجی $\Omega = 4 + j0$ K را بازی مشکل از یک بلندگوی



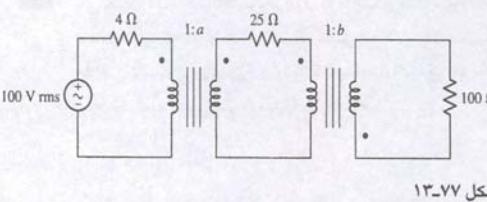
شکل ۱۳-۷۵

.۴۸. معادل تونن را در پایانه‌های a و b برای شبکه شکل ۱۳-۷۶ به دست آورید.



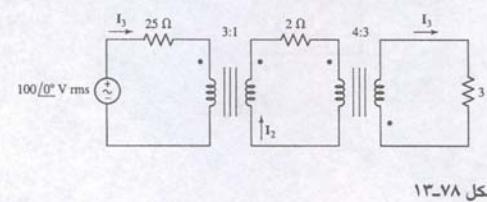
شکل ۱۳-۷۶

.۴۹. مقادیر a و b را در شکل ۱۳-۷۷ طوری برگزینید که منبع ایده‌آل توان 1000 W تولید کند، و نصف آن هم به بار 2 Ω منتقل گردد.



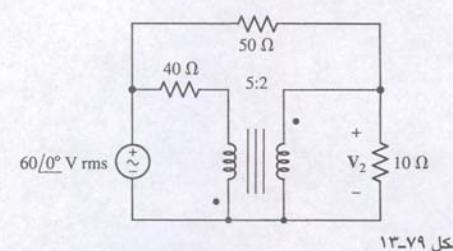
شکل ۱۳-۷۷

.۵۰. برای شکل ۱۳-۷۸، (الف)، (ب)، (ج)، (د)، (ه) و (و) را به دست آورید.



شکل ۱۳-۷۸

.۵۱. رادر شکل ۱۳-۷۹ به دست آورید.

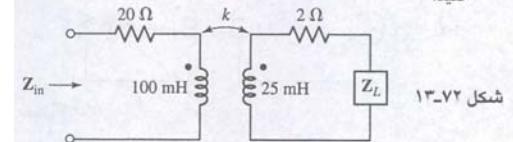


شکل ۱۳-۷۹

به شرطی که Z_L برابر باشد (الف) 100Ω ، (ب) $0.1 H$ ، (ج) $0.01 \mu F$ است. ۴۲. یک ترانس خطی دارای $L_1 = 6 H$ و $L_2 = 12 H$ ، $M = 5 H$ است.

هشت مقدار مختلف L_{in} را برای هشت روش مختلف تعیین شبکه دو پایانه به دست آورید. (تک الگاکنایی، ترکیب سری و موازی ترانس‌های اتصال کوتاه، ترکیبات مختلف نقطه‌ها). برای هر شبکه مقدار L_{in} را معین کنید.

۴۳. در مدار شکل ۱۳-۷۲، فرض کنید بار Z_L ، خازنی با طرفیت $100 \mu F$ و امپدانس $J = 31.83 \Omega$ باشد. Z_{in} را در شرایط زیر به دست آورید. k برابر است ب (الف)، (ب)، (ج)، (د)، (ه) و (و). با PSpice صحت را تحقیق کنید.

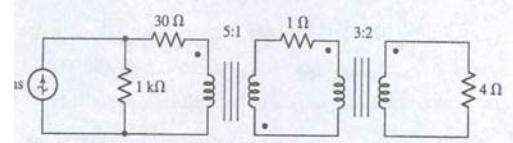


شکل ۱۳-۷۲

.۴۴. مسئله ۴۱ را اگر $L_1 = 125 H$ ، $L_2 = 20 H$ ، $M = 40 H$ باشد، تکرار نمایید. با PSpice کار خود را تست کنید.

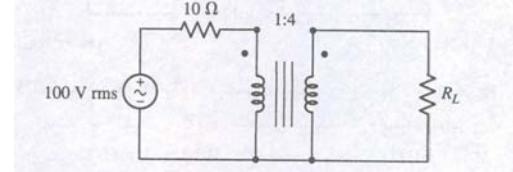
۱۳-۴ ترانسفورماتور ایده‌آل

.۴۵. توان متوسط تحویلی به هر یک از چهار مقاومت در شکل ۱۳-۷۳ را به دست آورید. کار خود را با شبیه‌سازی PSpice سنت کنید.



شکل ۱۳-۷۳

.۴۶. (الف) حداکثر توان متوسطی که در مدار شکل ۱۳-۷۴ به $R_L = 100 \Omega$ بارشده و مقاومت 2Ω می‌شود، چقدر است. (ب) اگر $R_L = 100 \Omega$ باشد و مقاومت 2Ω بین دو پایانه بالایی اولیه و ثانویه وصل کنیم، P_L را معین کنید.

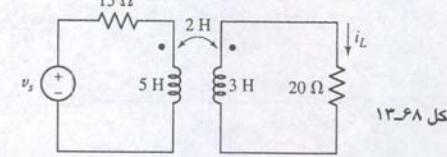


شکل ۱۳-۷۴

.۴۷. توان متوسط حمل شده به مقاومت بار 2Ω را در مدار شکل ۱۳-۷۵ به دست آورید. به شرطی که C برابر باشد با (الف)، (ب)، (ج) و (د) مقدار $C = 0.04 S$ است. (ج) $-0.04 S$

می‌توانید دو معادله دیفرانسیل برای کمک به یافتن dI_L/dt در بنویسید.

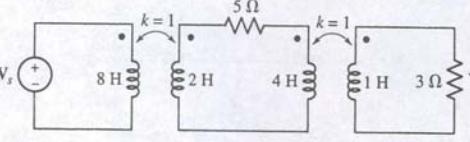
$t = 0^+$ برابر باشد (الف) $0.1 H$ ، (ب) $0.01 H$ ، (ج) $0.001 \mu F$ است.



شکل ۱۳-۶۸

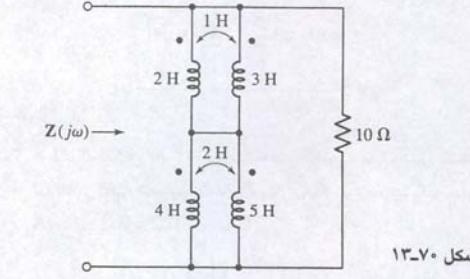
.۳۷. معادل T را برای هر دو محل نقطه در یک ترانس خطی سی تلفات بنویسید که در آن $A = 8 mH$ و $L_1 = 4 mH$ است. از (الف) مدار باز است، (ب) اتصال کوتاه است، (ج) به اولیه به طور موازی وصل است.

.۳۸. برای مدار شکل ۱۳-۶۹، $H(j\omega) = V_0 / V_s$ را به دست آورید.



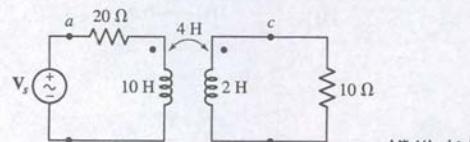
شکل ۱۳-۶۹

.۳۹. معادل T را در کمک به یافتن امپدانس ورودی $Z(j\omega)$ برای شبکه شکل ۱۳-۷۰ به کار ببرید.



شکل ۱۳-۷۰

.۴۰. در شکل ۱۳-۷۱، $V_s = 100 \angle 0^\circ V$ است. معادل توان شبکه (الف) سمت راست پایانه‌های a و b (ب) سمت چپ پایانه‌های c و d را به دست آورید.



شکل ۱۳-۷۱

.۴۱. بهدوسر ثانویه یک ترانس خطی با الگاکنایی $L_2 = 4H$ و $L_1 = 1H$ و ضربی کوپل واحد وصل است. اگر $\omega = 1000 rad/s$ باشد، شبکه (C, L, R) که از پایانه‌های ورودی نظاره شود را پیدا کنید.

فصل چهاردهم

فرکانس مختلط و تبدیل لایپلاس

مقدمه

کنون آماده‌ایم که چهارمین قسمت اصلی تحلیل مدار یعنی مبحث فرکانس مختلط را مطالعه کنیم. خواهیم دید که فرکانس مختلط خاصیت یکپارچه‌سازی را دارد و همه تکنیک‌های تحلیلی راکه قبلآمودخت به هم گره می‌زنند. تحلیل مدارهای مقاومتی، تحلیل سینوسی حالت ماندگار، تحلیل گذرا، پاسخ و داشته، پاسخ کامل و تحلیل مدارهای تحریک شده با توابع نحریک نمایی و سینوسی میرای نمایی، همگی حالات خاصی از تکنیک کلی تحلیل با استفاده از مفهوم فرکانس مختلط هستند.

روش رایج برای این عنوان مراجعه‌ای سریع به انگرال تبدیل لایپلاس است، ولی این کار در واقعی کمکی نمی‌کند. بنابراین ما ابتدا مفهوم پایه فرکانس مختلط و ارتباط با تحلیل مدار را بررسی می‌کنیم. سپس تبدیل لایپلاس را به عنوان راهکاری برای برخورد با مدارهای که متابع معروفی می‌کنیم و چنگونگی بدست آوردن عکس تبدیل لایپلاس برای پاسخ‌های حوزه زمان خواهیم آموخت، تا خصوصیات کلیدی توابع در حوزه فرکانس به دست آید. این تکنیک‌ها در فصل ۱۵ گسترش خواهند یافت تا محدوده وسیعی از موارد تحلیل را پوشش دهد.

۱۴-۱ فرکانس مختلط

ما معرفی "فرکانس مختلط" را با بررسی تابع سینوسی میرای نمایی مانند ولتاژ زیر آغاز می‌کنیم:

$$v(t) = V_m e^{\sigma t} \cos(\omega t + \theta) \quad (1)$$

ه در آن (σ) سیگما) کمیتی حقیقی و معمولاً منفی است. هر چند ما این تابع را میرا می‌خواهیم لی در صورت مثبت بودن σ ، تابع سینوسی افزایش می‌یابد. در عمل غالباً با حالت میرا مرکار داریم. همچنین تجربه بررسی پاسخ طبیعی مدار RLC هم نشان می‌دهد که σ منفی سریب میرایی نمایی است.

می‌توان با صفر کردن σ و ω در معادله (۱) یک ولتاژ ثابت به دست آورد:

$$v(t) = V_m \cos \theta = V_0 \quad (2)$$

گر فقط $\theta = 0$ باشد، آن‌گاه ولتاژ سینوسی خواهیم داشت:

$$v(t) = V_m \cos(\omega t + \theta) \quad (3)$$

اگر $\theta = 0$ باشد، ولتاژ نمایی را داریم:

$$v(t) = V_m \cos \theta e^{\sigma t} = V_0 e^{\sigma t} \quad (4)$$

آن برق در ۶۰ Hz و ۱۲۰ V rms تولید می‌شود به آuman مسافرت کنید که در آن برق ۲۴۰ V rms و ۵۰ Hz می‌باشد تا در بروایی یک کارخانه تولید قطعات نیمه هادی کمک کنید. خوشبختانه کامپیوچر کیعی شما قابل وصل به هر دو پریز می‌باشد، به شرطی که دارای آداپتور باشد. با این وجود رایتر CD شما فقط در ac ۱۲۰ V می‌کند. مداری طراحی کنید که به وسیله آن CD شما در آuman هم کار کنید، به شرطی که فرکانس ۵۰ Hz باشد. ترانس‌هایی که در ۶۰ Hz کار می‌کنند، نسبت به ۵۰ Hz دارای وزن کمتری هستند، در نتیجه احتمال دارد در ۵۰ Hz داغ کنند. با این وجود بسیاری از آن‌ها با ۵۰/۶۰ Hz علامت خورده‌اند.

۰.۵۹ به عنوان اولین مأموریت در شغل جدید، از شما خواسته شده تا یک کمپرسور طراحی شده در آمریکا را در استرالیا به کار اندازید. کمپرسور مشکل از یک موتور سه‌فاز است که در هر فاز از ولتاژ خط ۲۰۸ V جریان ۱۰ A rms را می‌کشد. تنها انرژی سه فاز موجود در استرالیا، ۴۰۰ V rms است. مدار لازم را طراحی کنید.

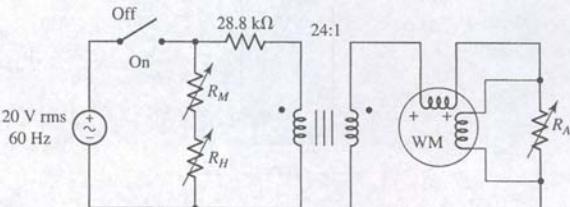
۰.۶۰ شبکه شکل ۱۳-۸۴ دارای خاصیتی است. به این ترتیب که ولتاژ مثبت (t) ۷۰ V اجازه خروج دارند. مقادیر منفی خروجی $v_0(t) = 70(t)$ می‌دهند. (الف) اگر ولتاژ خروجی $v_0(t)$ با پیک ۷ V موردنقاضا باشد، با منبع ۱۱۵ V rms و شبکه شکل ۱۳-۸۴ ۱۳-۸۴ مدار مناسبی طرحی کنید. خروجی طرح خود را بکشید. (ب) اگر یک خروجی صاف بخواهیم (بدون تمحو) مدار خود را اصلاح کنید.

۰.۶۱ ۸ و یک Ω استفاده کرد. به طوری که بلندگوی Ω ۸ دورابر توان متوسط Ω ۱۰ جذب کند. مدار مربوط را بکشید و نسبت دورها را معین کنید.

۰.۶۲ ۵.۶. یک ترانس با ۲۵ kVA و ۲۳۰ / ۲۳۰ V rms در حال کار است و می‌تواند ۲۵ kVA را در ثانویه خود تولید کند. اگر این ترانس با ۲۳۰ V rms تغذیه شود و به باز ثانویه‌ای با مشخصات kW با ۸ kW واحد و PF با ۰.۸ به ضریب توان ۰.۸ PF = ۰.۸ پس‌فاز وصل شود. (الف) جریان اولیه چیست؟ (ب) چند کیلووات دیگر ترانس می‌تواند به باری در ۰.۹۵ پس‌فاز تحويل دهد. (ج) باسخ خود را PSpice تست نمایید.

۰.۶۳ ۵.۷. اواخر شب، یک آگهی روی TV و سیلمای را به \$19.95 تبلیغ می‌کرد تا IQ شما را اندازه بگیرد. در طول هفت‌هفته سفارشی می‌دهید و ۴ الی ۶ هفته بعد آن را دریافت می‌کنید. به شما گفته می‌شود براز اندازه‌گیری قد خود پسیج R_H را بچرخانید (cm) وزن خود را با چرخاندن R_M (kg) و سوینین پیچ (years) (برای سه شماست. با این‌جای از عدد روی صفحه نمایش آن را روی زمین پر می‌کنید در جعبه باز می‌شود و مدار شکل ۱۳-۸۳ را می‌بینید. می‌فهمید که cm، kg و سن همگی با اهم اندازه‌گیری می‌شوند و توان اندازه‌گیری شده به وسیله وات‌متر بر حسب mw به عنوان IQ نمایش داده می‌شود. (الف) برای هم اطاقی شما، IQ چقدر است؟ (ب) چه کسی بیشترین IQ را دارد؟ (ج) چقدر ضرر کردید؟

۰.۶۴ ۵.۸. کمپانی که برای آن کار می‌کنید از شما می‌خواهد تا از کالیفرنیا که در



شکل ۱۳-۸۴

شکل ۱۳-۸۳

می خواهیم عبارتی معادل بر حسب نمای مختلط به دست آوردیم، بنابراین با توجه به تجربه قبلی از اتحاد اولر استفاده کنیم:

$$\cos(\omega t + \theta) = \frac{1}{2}[e^{j(\omega t + \theta)} + e^{-j(\omega t + \theta)}]$$

$$v(t) = \frac{1}{2}V_m[e^{j(\omega t + \theta)} + e^{-j(\omega t + \theta)}]$$

$$= \left(\frac{1}{2}V_m e^{j\theta}\right)e^{j\omega t} + \left(\frac{1}{2}V_m e^{-j\theta}\right)e^{-j\omega t}$$

با

$$v(t) = K_1 e^{s_1 t} + K_2 e^{s_2 t}$$

مزدوج مختلط هر عدد با جایگزینی همه لامبه $-j$ به دست می آید. مفهوم از انتخاب دلخواه $+j\sqrt{-1}$ حاصل می شود. با این وجود ریشه منفی به این ترتیب معتبر است و مارا به تعریف مزدوج مختلط هدایت می کند.

اکنون مجموع دو تابع نمایی مختلط و دو فرکانس داریم که هر کدام به یک جمله متعلق است. فرکانس مختلط اولین جمله $s = s_1 = j\omega$ است و دومین نیز $s = s_2 = -j\omega$ است. فرکانس نپر هم می گویند. این نام براساس می باشد، این دو مقدار را مزدوج یکدیگر گویند و با $s_2 = s^*$ نشان می دهند. دو مقدار K نیز مزدوج آند: یعنی $K_1 = \frac{1}{2}V_m e^{j\theta}$ و $K_2 = K_1^* = \frac{1}{2}V_m e^{-j\theta}$. بنابراین کل جمله اول مزدوج کل جمله دوم است. البته چنین انتظاری را داشتیم زیرا مجموع دو جمله یعنی $v(t)$ می باید حقیقی باشد.

حالت سینوسی میرای نمایی

بالاخره باید فرکانس یا فرکانس های مختلط مربوط به تابع سینوسی میرای نمایی، معادله (۱) را مین کنیم. دوباره از اتحاد اولر استفاده کنیم تا نمایی نمایی و مختلط حاصل شود.

$$v(t) = V_m e^{\sigma t} \cos(\omega t + \theta)$$

$$= \frac{1}{2}V_m e^{\sigma t} [e^{j(\omega t + \theta)} + e^{-j(\omega t + \theta)}]$$

بنابراین

$$v(t) = \frac{1}{2}V_m e^{j\theta} e^{j(\sigma+j\omega)t} + \frac{1}{2}V_m e^{-j\theta} e^{j(\sigma-j\omega)t}$$

می بینیم که برای توصیف یک تابع سینوسی میرای نمایی به دو فرکانس مختلط همچون $s = \sigma + j\omega$ و $s_1 = \sigma - j\omega$ می گردد. بنابراین فرکانس مختلط چیزی جز ضریب t در این تابع نمایی مختلط نیست. تا زمانی که فرکانس مختلط یک تابع را به دست آوریم، لازم است تابع را به فرم معادله (۶) بنویسیم.

رابطه s و حقیقی بودن

یک مقدار مثبت حقیقی از s ، مثل $j0 + 5$ یک تابع نمایی فراشیده چون $Ke^{j0 + 5t}$ مشخص می کند و اگر تابع فیزیکی باشد، باید K هم حقیقی باشد. یک مقدار حقیقی منفی برای s مانند $j0 - 5$ یک تابع نمایی کاهشی را تداعی می نماید.

اگر s کاملاً موهومی باشد، مثل $j10$ ، هرگز با یک کمیت حقیقی سروکار نداریم، فرم تابعی آن Ke^{j10t} است که می توان آن را به شکل $K(\cos 10t + j \sin 10t)$ نیز نوشت، که هر دو بعض حقیقی و موهومی سینوسی را دارد. برای ایجاد یک تابع حقیقی، لازم است مزدوج مقدار s ، یعنی $j10 \pm j10 = s_{1,2} = s$ را ملاحظه کنیم. مربوط به این دو فرکانس هم باید مزدوج باشد. با این وجود تا حدی می توان برای هر یک از فرکانس های مختلط $s_1 = +j10$ یا $s_2 = -j10$ ، یک ولتاژ سینوسی را با فرکانس rad/s ۱۰ در نظر گرفت و در این صورت وجود فرکانس مختلط مزدوج را در کخواهیم کرد. دامنه و زاویه فاز و ولتاژ سینوسی به K مربوط و به هر دو فرکانس بستگی دارد. پس با انتخاب $j10 = s_1$ و $j8 = s_2$ در نظر گرفتن

$$K_1 = K_1^* \quad s_1 = s_1^* \quad v(t) = K_1 e^{s_1 t} + K_2 e^{s_2 t}$$

تابع سینوسی واقعی $(10t - 53.1^\circ) \cos(10t - 53.1^\circ)$ را به دست آوریم.

تجویز کنید که $|s_1| = 10$ و $|s_2| = 8$ ، بنابراین $V_m = 2|K| = 20$ در نتیجه زاویه $(6 - j8)^\circ = -53.13^\circ$.

پس معادله میرای (۱) شامل حالات خاص dc در معادله (۲) است. از مقایسه تابع نمایی (۴) با نمایش مختلط یک تابع سینوسی که زاویه فاز صفر درجه دارد، یعنی:

$$v(t) = V_0 e^{j\omega t} \quad (5)$$

می توانیم دید دقیق تری نسبت به (۵) بپیدا کنیم. واضح است که دو تابع (۴) و (۵) اشتراک های فراوانی دارند. تنها تفاوت این است که نمای در معادله (۴) حقیقی و در معادله (۵) موهومی است. بر شابه بین دو تابع هنگام تأکید بیشتری می شود که را فرکانس بنامیم. این انتخاب به طور مسروق در بخش های بعدی مورد بحث قرار خواهد گرفت، ولی فعلًا فقط می گوییم که (۵) قسمت حقیقی فرکانس مختلط است. البته نیاید آن را فرکانس حقیقی بخوانیم، زیرا این نام برای (۵) مناسب تر است (با برای (۶)، به (۵) فرکانس نپر هم می گویند). این نام براساس بی بعدبودن نمای (۵) انتخاب شده است. بنابراین در $e^{j\omega t}$ ، بعد ۷t، نپر (NP) می باشد و فرکانس نپری واحد آن نیز نپر بر ثانیه می باشد.

فرم عمومی

پاسخ و داشته یک شبکه به یک تابع تحریک کلی به فرم معادله (۱) به سادگی با استفاده از روش شبیه به فیزور به دست می آید. به محض یافتن پاسخ و داشته با این سینوس میرای باید بدانیم که پاسخ به ولتاژ dc ، ولتاژ نمایی و ولتاژ سینوسی را هم یافته ایم. اکنون باید ببینیم چگونه (۵) را بعنوان بخش های حقیقی و موهومی یک فرکانس مختلط می شناسیم. بگذارید با مفهوم ریاضی فرکانس مختلط آغاز کنیم و به تدریج با پیشروی فصل آن را تفسیر فیزیکی نماییم. هر تابعی که بتوان آن را به صورت زیر نوشت:

$$f(t) = Ke^{st} \quad (6)$$

که در آن K و s دو ثابت مختلط اند (مستقل از زمان) و این یکی با فرکانس مختلط s مشخص می گردد. بنابراین فرکانس مختلط چیزی جز ضریب t در این تابع نمایی مختلط نیست. تا زمانی که فرکانس مختلط یک تابع را به دست آوریم، لازم است تابع را به فرم معادله (۶) بنویسیم.

حالت DC

ابندا این تعریف را در مورد تابع تحریک آشنا اعمال می کنیم. مثلاً یک ولتاژ ثابت

$$v(t) = V_0 \quad (7)$$

را می توان به شکل زیر نوشت:

$$v(t) = V_0 e^{(0)t} \quad (8)$$

پس فرکانس مختلط یک ولتاژ یا جریان dc صفر است (یعنی $s = 0$).

حالت نمایی

حالت ساده دیگر تابع نمایی است.

$$v(t) = V_0 e^{\sigma t} \quad (9)$$

که خود شکل موردنظر را دارا است. فرکانس مختلط این ولتاژ σ است (یعنی $s = \sigma + j0$).

حالت سینوسی

اکنون باید یک ولتاژ سینوسی را در نظر بگیریم، تابعی که کمی تعجب آور است. بافرض

$$v(t) = V_m \cos(\omega t + \theta) \quad (10)$$

نام نبراز شخص نبر و سیستم لکاریتم نبری اخذ شده است و معلوم نیست که نام او را Napier نوشته اند یا چیز دیگری می نگاشته اند!

$$v(t) = V_m e^{\sigma t} \cos(\omega t + \theta) \quad (8)$$

که با استفاده از اتحاد اولر می‌توان آن را به شکل زیر در آورد.

$$v(t) = \operatorname{Re}\{V_m e^{\sigma t} e^{j(\omega t + \theta)}\} \quad (9)$$

$$v(t) = \operatorname{Re}\{V_m e^{\sigma t} e^{j(-\omega t - \theta)}\} \quad (10)$$

هر یک از دو نمایش فوق مناسب‌اند و این نکته را به یادمان می‌آورده که هر تابع سینوسی، یا سینوس میرای، دو فرکانس مختلط مزدوج دارد. رابطه معادله (۹) با تابع سینوسی میرای فوکستیقی‌تر است و به این دلایل هم از آن بیشتر استفاده خواهیم کرد. با جایگزینی

$$\sigma + j\omega$$

$$v(t) = \operatorname{Re}\{V_m e^{j\theta} e^{(\sigma + j\omega)t}\} \quad (11)$$

داریم

$$v(t) = \operatorname{Re}\{V_m e^{j\theta} e^{st}\} \quad (11)$$

قبل از اعمال تابع تحریکی به شکل فرق به هر مداری شباهت آن را با نمایش تابع سینوسی زیر میرای فصل ۱۰ بررسی می‌کنیم:

$$\operatorname{Re}\{V_m e^{j\theta} e^{j\omega t}\}$$

نتها تفاوت در این است که در این جا به جای $j\omega$ ، s را درایم. به جای محدود شدن به توابع سینوسی و فرکانس زاویه‌ای، نماد تعیین یافته و توابع سینوسی میرای و فرکانس مختلط لحاظ شده است. در این بخش و بخش‌های بعد جای تعجب نخواهد بود که حوزه فرکانسی از توابع میرای نمایی درست مثل سینوس برپا کنیم و در آن بخش $\operatorname{Re}\{ \cdot \}$ را حذف و e^{st} را دور چندانزاییم.

حال آماده‌ایم تابع سینوسی میرای داده شده در معادله (۸)، (۹)، (۱۰) یا (۱۱) را به یک شبکه الکتریکی اعمال کنیم که در آن پاسخی مثل جریانی در یک شاخه از شبکه، مورده تقاضاست. چون پاسخ و اداشته فرم تابع تحریک، انتگرال و مشتقات آن را دارد، می‌توان آن را به صورت زیر تصور کرد:

$$i(t) = I_m e^{\sigma t} \cos(\omega t + \phi) \quad (12)$$

$$i(t) = \operatorname{Re}\{I_m e^{j\phi} e^{st}\}$$

که در آن فرکانس مختلط منع و پاسخ باید یکسان باشد.

اکنون به خاطر می‌آوریم که قسمت حقیقی تابع تحریک، قسمت حقیقی پاسخ و قسمت بوهومی آن، قسمت موهومی پاسخ را به وجود می‌آورد. پس در این جا هم دوباره به سمت عمال تابع مختلط به مدار سوق داده می‌شویم. در این صورت پاسخ مختلطی خواهیم یافت که نسخه حقیقی آن پاسخ حقیقی مطلوب است. در واقع ما بخش $\operatorname{Re}\{ \cdot \}$ را حذف می‌کنیم ولی بادمان می‌ماند که می‌توانیم زمانی آن را دوباره وارد کنیم و در آخر که می‌خواهیم پاسخ را در حوزه زمان به دست آوریم دوباره $\operatorname{Re}\{ \cdot \}$ را اضافه خواهیم کرد. پس به جای تابع تحریک

$$v(t) = \operatorname{Re}\{V_m e^{j\theta} e^{st}\}$$

تابع مختلط تحریک e^{st} را اعمال می‌کنیم و پاسخ و اداشته e^{st} را که مختلط

با روش مشابه یک مقدار کلی برای s ، مثل $j\omega - 3$ هم به شرطی یک کمیت حقیقی را نشان می‌دهد که به همراه مزدوج خود، یعنی $j\omega + 3$ باشد. دوباره با احتیاط توابع مختلط را هر یک از فرکانس فوق را تابع سینوسی فرازینده در نظر می‌گیریم. در این جا نیز دامنه و فاز به مقدار مزدوج مختلط K بستگی دارد.

تا اینجا باید طبیعت فیزیکی فرکانس مختلط s را تحلیلی درک کرده باشید. در حالت کلی این فرکانس یک موج سینوسی با ضریب نمایی متغیر را نشان می‌دهد. بخش حقیقی s مرتبط با بخش نمایی است. اگر این بخش حقیقی منفی باشد، تابع با افزایش s میرای شود. اگر مثبت باشد، تابع فرازینده است و اگر صفر باشد، دامنه سینوس ثابت می‌باشد. هر چه اندازه بخش حقیقی s بزرگتر باشد، سرعت افزایش یا کاهش بخش نمایی بیشتر است. بخش موهومی تغییرات سینوسی را بیان می‌کند و در واقع همان فرکانس زاویه‌ای است. مقدار بزرگ بخش موهومی s بیانگر تغییرات سریع تابع نمایی است.

پس هرچه قسمت حقیقی یا قسمت موهومی s را برای بخش حقیقی s و ω را برای بخش موهومی استفاده کنند، یعنی

$$s = \sigma + j\omega \quad (7)$$

گاهی فرکانس زاویه‌ای را "فرکانس حقیقی" می‌خوانند، ولی این نام می‌تواند عامل اشتباه شود، زیرا در این صورت باید بگوییم که فرکانس حقیقی، بخش موهومی فرکانس مختلط است! هر وقت بخواهیم دقیق صحبت کنیم، s را فرکانس مختلط، σ را احتمال اشتباه نیست هر چهار فرکانس زاویه، $\omega = 2\pi f$ را فرکانس تناوی می‌خوانیم. هر جا احتمال اشتباه نیست هر چهار کمیت را فرکانس خواهیم خواند. فرکانس نبری بر ثانیه اندازه گیری می‌شود، فرکانس زاویه‌ای بر حسب رادیان بر ثانیه و فرکانس مختلط گاهی نپر مختلط بر ثانیه و گاهی رادیان مختلط بر ثانیه گفته می‌شود.



تمرین

۱۴-۱

تمام فرکانس‌های مختلط موجود در تابع حقیقی زیر را مشخص کنید.

$$(a) t(2e^{-10t} + e^{-200t}) \cos(4t + \phi), (b) (2e^{-100t} + e^{-200t}) \cos(40t + \phi), (c) e^{-10t} \cos(10t) \sin(40t)$$

۱۴-۲

با استفاده از ثابت‌های حقیقی A، B، C، φ وغیره، فرم کلی یک تابع حقیقی زمانی را بنویسید که جریانی با فرکانس‌های زیر را داشته باشد: (الف) $10.0 s^{-1}$ ، (ب) $-5 s^{-1}$ ، (ج) $-5 J8 s^{-1}$ ، (د) $-20 s^{-1}$ ، (ه) $-20 + j20 s^{-1}$ ، (ک) $-20 - j20 s^{-1}$ ، (م) $-100 + j2000 s^{-1}$ ، (ن) $-100 - j2000 s^{-1}$ ، (و) $-100 + j2000 s^{-1}$ ، (ز) $-10 - j50 s^{-1}$ ، (ب) $-10 + j50 s^{-1}$ ، (س) $-10 - j30 s^{-1}$ ، (ر) $-10 + j30 s^{-1}$ ، (پ) $-10 - j4 s^{-1}$ ، (ت) $-10 + j4 s^{-1}$

جواب (۱۴-۲):

$$Ae^{-5t} + B \cos(8t + \phi_1) + Ce^{-5t} \cos(8t + \phi_2), A + Be^{10t} + Ce^{-10t}, Ae^{-20t} + Be^{20t} + Ce^{-20t} \cos(20t + \phi_1) + De^{20t} \cos(20t + \phi_2)$$

۱۴-۲ تابع تحریک سینوسی میرا

به نظر می‌رسد به قدر کافی در تعریف و تفسیر مقدماتی فرکانس مختلط وقت صرف کرده‌ایم. اکنون وقت آن فرارسیده است تا این مفهوم را به کار بگیریم و بینیم چگونه عمل می‌کند و یا به کار برده می‌شود.

شکل کلی یک تابع سینوس نمایی که در حال حاضر آن را لذتاز در نظر می‌گیریم، به صورت کلی زیر است:



در گام بعدی ضریب مشترک e^{st} را حذف می‌کنیم:

$$60 \angle 10^\circ = 2I + 3sI + \frac{10}{s} I$$

و نتایج:

$$I = \frac{60 \angle 10^\circ}{2 + 3s + 10/s}$$

اکنون قرار می‌دیهیم $j4 - 2 - s$ و جریان مختلط I را به دست می‌آوریم:

$$I = \frac{60 \angle 10^\circ}{2 + 3(-2 + j4) + 10/(-2 + j4)}$$

پس از کمی دستکاری با اعداد مختلط داریم:

$$I = 5.37 \angle -106.6^\circ$$

پس I_m برابر با A ۵.۳۷ و ϕ برابر با -106.6° به دست می‌آید و لذا پاسخ واداشته به صورت زیر است:

$$i(t) = 5.37 e^{-2t} \cos(4t - 106.6^\circ) A$$

به این ترتیب مسئله را با کاهش عبارات انتگرالی - دیفرانسیلی به عبارات جبری حل کردیم. این تنها ذکر کوچکی از توان فوق العاده تکنیکی است که در آغاز مطالعه آن هستیم.

۱۴-۳ فیزیو جریان هم‌ازو با جریان‌های حوزه زمان زیر را به دست آورید:

$$(الف) 24e^{-10t} \cos(90t + 60^\circ) A, (ب) 24 \sin(90t + 60^\circ) A$$

$$(ج) 12 \angle 35^\circ V, 24e^{-10t} \cos 60^\circ \times \cos 90t A, (د) 24e^{-10t} \cos 60^\circ \times \cos 90t A, (ه) 0.0 V$$

$$.20 + j5 s^{-1}, .20 - j5 s^{-1}$$

$$(و) 9.83 e^{-20t} V, 9.83 V, 12 \angle 0^\circ A, 24 \angle 60^\circ A, 24 \angle -30^\circ A, (ز) 12 e^{-20t} \cos(5t + 35^\circ) V$$

۱۴-۳ تعریف قیدیل لاپلاس

تاکنون هدف مداوم مایکی از تحلیل‌های زیر بوده است: فرض یک تابع تحریک در یک نقطه از مدار خطي، تعیین پاسخ در نقطه‌ای دیگر. در چند فصل اول، ماتنها تابع تحریک dc و پاسخهایی به شکل $V_0 e^{st}$ بازی کردیم. با این وجود، پس از معرفی الگاری و خازن، تحریک dc ناگهانی در یک مدار RL یا RC ساده، پاسخهای نمایی متغیر با زمان یعنی $V_0 e^{st}$ به وجود آورد. در بررسی مدار RLC، پاسخها فرم نمایی سینوسی $V_0 e^{st} \cos(\omega t + \theta)$ را به خود گرفتند. همه این کارها در حوزه زمان بود و تنها تابع تحریکی بود که ملاحظه شد.

هنگام استفاده از تابع تحریک سینوسی، پیچیدگی حل معادلات انتگرالی - دیفرانسیلی موجب شد تا به دنبال راه حل‌های ساده‌تری بگردیم. حاصل آن تبدیل فیزیو بود و باید به خاطر بیاوریم که وارد بحث تابع تحریک مختلط به فرم $V_0 e^{st}$ شدیم. پس از درک عدم نیاز به ضرایب t آن را کنار گذاشتیم و فیزیو $V_0 e^{st}$ برای مانند و در واقع وارد حوزه فرکانس گشیم.

اکنون کمی کشش فکری مارا به کاربرد یک تابع تحریک به فرم $V_0 e^{j\theta} e^{(\sigma + j\omega)t}$ سوق داده است که منجر به یافتن فرکانس مختلط $s = \sigma + j\omega$ و همه حالات خاص یعنی $(s = 0)$ dc، نمایی $(s = \sigma)$ ، سینوسی $(s = j\omega)$ و سینوسی نمایی $(s = \sigma + j\omega)$ را در بر می‌گرفت. به طور مشابه، از تجربه قبلی مادر فیزورها، می‌بینیم که در این حالات ممکن است فاکتورهای t را ندیده بگیریم و یک بار دیگر حل را در حوزه فرکانس به دست آوریم.

است و قسمت حقیقی آن پاسخ مطلوب می‌باشد را به دست آوریم:

$$i(t) = \operatorname{Re}\{I_m e^{j\theta} e^{st}\}$$

برای حل مسئله باید دامنه پاسخ I_m و زاویه ϕ را به دست آوریم.

قبل از طرح جزئیات تحلیل مسئله و ملاحظه شیوه‌های این روش و روش تحلیل سینوسی بهتر است مراحل اصلی آن را بررسی کنیم.

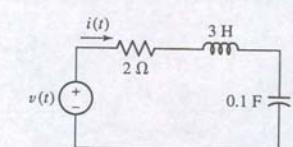
- ابتدا مدار را با مجموعه‌ای از معادلات انتگرالی - دیفرانسیلی حلقه‌ای با گرهی مشخص می‌کنیم.

- توابع تحریک منفردی به شکل مختلط و پاسخهای واداشته باز هم به فرم مختلط را در آن می‌گذاریم و مشتقهای و انتگرال‌ها را می‌گیریم.

- همه جملات در هر معادله حاری ضریب e^{st} اند. بنابراین طرفین هر معادله را بر e^{st} تقسیم می‌نماییم. ضمناً به خاطر می‌سپاریم که اگر توصیف حوزه زمان موردنظر باشد دوباره آن را باز خواهیم گرداند.

با حذف $\{\operatorname{Re}\{e^{st}\}$ و $\operatorname{Im}\{e^{st}\}$ ما همه ولتاژها و جریان‌ها را از حوزه زمان به حوزه فرکانس انتقال داده‌ایم. معادلات انتگرالی - دیفرانسیلی به معادلات جبری تبدیل شده‌اند و حل آن‌ها هم به همان راحتی حل حالت ماندگار سینوسی است. اکنون برای تشریح اساس روش به مثالی عددی می‌پردازیم.

مثال ۱۴-۱



شکل ۱۴-۱ یک مدار RLC سری که در آن تابع تبدیل سینوسی میرا به کار گرفته شده است. حل حوزه فرکانس (t) نمود تقاضا است.

تابع تحریک v $v(t) = 60e^{-2t} \cos(4t + 10^\circ)$ را به مدار RLC سری شکل ۱۴-۱ اعمال کنید و پاسخ واداشته را با تعیین I_m و ϕ عبارت حوزه زمان زیر بیان نماییم:

$$i(t) = I_m e^{-2t} \cos(4t + \phi)$$

ما ابتدا تابع تحریک را به فرم $\{\operatorname{Re}\{v\} e^{st}\}$ بیان می‌کنیم:

$$\begin{aligned} v(t) &= 60e^{-2t} \cos(4t + 10^\circ) = \operatorname{Re}\{60e^{-2t} e^{j(4t + 10^\circ)}\} \\ &= \operatorname{Re}\{60e^{j10^\circ} e^{(-2+j4)t}\} \end{aligned}$$

$$v(t) = \operatorname{Re}\{V_0 e^{st}\}$$

که

$$V = 60 \angle 10^\circ \quad \text{و} \quad s = -2 + j4$$

پس از حذف $\{\operatorname{Re}\{V\} e^{st}\}$ تابع تحریک مختلط زیر باقی می‌ماند.

$$60 \angle 10^\circ e^{st}$$

به همین ترتیب، یک تابع مجھول را با کمیت مختلط Ie^{st} نشان می‌دهیم که در آن $\phi = I_m$ است. گام بعدی نوشتن معادله انتگرالی - دیفرانسیلی برای مدار است. از قانون ولتاژ کیرشهف داریم:

$$v(t) = Ri + L \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \int i dt = 2i + 3 \frac{di}{dt} + 10 \int i dt$$

که در اینجا تابع تحریک مختلط و پاسخ مفروض را در آن جایگزین کرده و به دست می‌آوریم:

$$60 \angle 10^\circ e^{st} = 2ie^{st} + 3se^{st} + \frac{10}{s} Ie^{st}$$

می شوند. بنابراین برای توابع زمانی که در $t < 0$ وجود ندارند و یا آن هایی که رفتارشان در $t < 0$ امور دوجه نیست، توصیف حوزه زمانی را می توان به شکل $f(t)u(t)$ تصور کرد. انتگرال تبدیل با حد پایین $t = 0$ تعريف می شود تا اثر هر گستنگی در $t = 0$ ، مانند ضربه با یکتای مرتبه بالاتر لحاظ شود. پس تبدیل لاپلاس چنین است.

$$F(s) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-st} f(t)u(t) dt = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt$$

این رابطه یک تبدیل لاپلاس یک سو را برای $f(t)$ تعریف می کند. عکس تبدیل بسیار غیربر می ماند ولی هنگام ارزیابی فقط در $t > 0$ معتبر است. پس زوج تبدیل لاپلاسی را که از این پس در نظر می گیریم به قرار زیر است:

$$F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt \quad (14)$$

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{2\pi j} \int_{s_0-j\infty}^{s_0+j\infty} e^{st} F(s) ds \\ f(t) &\Leftrightarrow F(s) \end{aligned} \quad (15)$$

نماد \mathcal{L} را هم می توان برای ذکر تبدیل لاپلاس و عکس آن به کار برد:

$$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\} \quad \text{و} \quad f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$$

مثال ۱۴-۲

تبدیل لاپلاس تابع $3 - 2u(t - 3)$ را پیدا کنید. برای یافتن تبدیل لاپلاس یک سویه $f(t) = 2u(t - 3)$ ، باید انتگرال زیر را محاسبه کنیم:

$$F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} 2u(t - 3) dt = \int_0^{\infty} e^{-st} 2u(t - 3) dt = 2 \int_3^{\infty} e^{-st} dt$$

بس از ساده کردن داریم:

$$F(s) = \frac{-2}{s} e^{-st} \Big|_3^{\infty} = \frac{-2}{s} (0 - e^{-3s}) = \frac{2}{s} e^{-3s}$$

۱۴-۳ فرض کنید $f(t) = -6e^{-2t}[u(t+3) - u(t-2)]$ باشد، (الف) مطلوب است $F(s)$ دوسویه (ب) $F(s)$ یک سویه.

$$\text{جواب: } \frac{6}{2+s} [e^{-4.2s} - 1], \frac{6}{2+s} [e^{-4.2s} - e^{6.3s}]$$

۱۴- تبدیل لاپلاس توابع زمانی ساده

در این بخش لیستی از تبدیل لاپلاس را برای توابع زمانی که مکرراً با آنها در تحلیل مدارها سواجایم، معرفی خواهیم کرد. اکنون فرض می کنیم تابع مورد توجه یک ولتاژ باشد. هر چند که این انتخاب کاملاً اختباری است، این لیست را برای تعریف زیر آغاز می کنیم.

$$V(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} v(t) dt = \mathcal{L}\{v(t)\}$$

بنابراین همراه با عکس تبدیل، یعنی

$$v(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{s_0-j\infty}^{s_0+j\infty} e^{st} V(s) ds = \mathcal{L}^{-1}\{V(s)\}$$

تبدیل لاپلاس دوسویه

می دانیم که تابع تحریک سینوسی، پاسخ های سینوسی و نیز تابع تحریک نمایی هم باسخ نمایی تولید می کنند. با این وجود، ضمن بررسی با امکان پسیاری برمی خوریم که نه سینوسی اند و نه نمایی، از آن جمله می توان امواج مربعی، دندان اره ای و پالس هایی نام برد که در یک لحظه دلخواهی از زمان شروع می شوند. وقتی که چنین توابعی به یک مدار خطی اعمال می شوند، می بینیم که پاسخ ها به فرم مجرک و یا نمایی نیستند. درنتیجه، قادر نیستیم جملات حاوی \mathcal{L} را حذف و فرم پاسخ در حوزه فرکانسی را به دست آوریم، خوب البته این چندان خوشایند نیست زیرا کار در حوزه فرکانس می باید بیش از این ها راهگشا باشد.

با این وجود، راه حلی وجود دارد تا استفاده از تکنیکی، هر تابعی به مجموعه ای امواج نمایی تبدیل شود و هر یک فرکانس مخلوط خاص خود را داشته باشد. چون مدارهای خطی را بررسی می کنیم، می دانیم که پاسخ کل مدار با جمع پاسخ های جزئی به موج نمایی حاصل می گردد و ضمن بررسی هر موج نمایی ممکن است از جملات شامل ۱ چشم بپوشیم و در عوض در فضای فرکانس کار کنیم. متأسفانه برای دستیابی به فرم دقیق تر تابع زمانی کلی، تعداد جملات نمایی بینهایت می شود و لذا انتخاب روشی غیر معقول و اعمال اصل تجمع برای سری های نمایی تا حدی جنون آمیز است. در عوض این جملات را با انتگرال گیری جمع کرده و به تابعی در حوزه فرکانس تبدیل می کنیم.

ما این روش را با استفاده از آن چه که آن را تبدیل لاپلاس برای یک تابع فرم کلی $f(t)$ مطابق تعریف زیر است، فرموله می کنیم:

$$F(s) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-st} f(t) dt \quad (12)$$

حل این عمل انتگرال به طریق ریاضی لازم می دارد تا سری فوریه و تبدیل فوریه را که در فصل های بعد ملاحظه خواهد شد بدانیم. با این وجود مفهوم اصلی تبدیل لاپلاس بر بحث پاسخ فرکانس و تجربه قبلی ما در فیزورها و تبدیل های متواالی بین حوزه زمان و حوزه فرکانس مبتنی است. در واقع این دقیقاً همان چیزی است که تبدیل لاپلاس انجام می دهد. این روش تابع حوزه زمان کلی $f(t)$ را به نمایش حوزه فرکانس خود، یعنی $F(s)$ تبدیل می نماید.

عکس تبدیل لاپلاس دوسویه

معادله (۱۲) یک تبدیل لاپلاس دوسویه یا دووجهه ای را برای $f(t)$ تعریف می کند. جمله دوسویه به منظور تأکید بر این واقعیت به کار رفته است که هر دو مقدار مشت و منتهی ادر محدوده انتگرال گیری قرار گرفته است. عمل عکس را که غالباً عکس تبدیل لاپلاس می گویند، به صورت عبارت انتگرالی زیر تعریف می کنیم:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{s_0-j\infty}^{s_0+j\infty} e^{st} F(s) ds \quad (13)$$

که در آن عدد ثابت حقیقی s_0 در حد بالا و پایین انتگرال لحاظ شده تا این انتگرال همگرا شود. دو معادله (۱۲) و (۱۳) جفت تبدیل لاپلاس دوسویه را تشکیل می دهند. خبر خوش این که در همین تحلیل مدار ما هرگز نیازی به استفاده از معادله (۱۳) نداریم؛ روش سریع در پیش رو است.

تبدیل لاپلاس یک سویه

در بسیاری از مسائلی که تحلیل می کنیم، تابع تحریک و پاسخ از لحاظ زمانی از دیرباز وجود نداشته اند، بلکه از یک لحظه مشخصی از زمان که معمولاً آن را $t = 0$ می نامیم، شروع

ویزگی خاص دیگر تابع ضربه واقع، خاصیت غیرالی آن است. انتگرال تابع ضربه را که در تابع اختیاری $f(t)$ ضبط شده است، در نظر بگیرید:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \delta(t - t_0) dt$$

چون تابع $(t - t_0)$ در هر جایی به جزء t برابر صفر است، مقدار این انتگرال برابر (t_0) خواهد بود. این ویزگی در ساده کردن عبارات انتگرالی شامل تابع ضربه واحد بسیار مفیدی ناشد.

تابع نمایی

با بازگشتن به علاقه قبلی به تابع نمایی، تبدیل آن را بررسی می کنیم.

$$\mathcal{L}\{e^{-at} u(t)\} = \int_{0^-}^{\infty} e^{-at} e^{-st} dt = -\frac{1}{s+a} e^{-(s+a)t} \Big|_{0^-}^{\infty} = \frac{1}{s+a}$$

و بنابراین

$$e^{-at} u(t) \Leftrightarrow \frac{1}{s+a} \quad (19)$$

واضح است که $a > -\text{Re}\{s\}$ است.

تابع شبیه $t u(t)$

به عنوان آخرین مثال، بگذارید تابع شبیه $t u(t)$ را ملاحظه نماییم. داریم:

$$\mathcal{L}\{tu(t)\} = \int_{0^-}^{\infty} te^{-st} dt = \frac{1}{s^2}$$

$$t u(t) \Leftrightarrow \frac{1}{s^2} \quad (20)$$

می توان رابطه فوق را با انتگرال جزء به جزء یا جدول انتگرال به دست آورد. اما تابع $te^{-at} u(t)$ چگونه است؟ ما آن را به عهده خوانندگی گذاریم تراویطه زیر را نشان دهد:

$$te^{-at} u(t) \Leftrightarrow \frac{1}{(s+a)^2} \quad (21)$$

البته چند تابع زمانی وجود دارد که ارزش بررسی را داریم باشند، ولی بهتر است که فعلاً ر آنها بگذاریم تا عکس فرآیند، یعنی عکس تبدیل لاپلاس را ملاحظه نماییم، تا این که به پست کارهای خود بپزاییم.

تمرین

۱۴-۵ اگر $V(t)$ برابر با (الف) $4\delta(t - 2) - 3u(t - 2)$ ، (ب) $4\delta(t - 2) - 3tu(t - 2)$ ، (ج) $4\delta(t - 2) - 3u(t)$ باشد، $\mathcal{V}(s)$ را معین کنید.

جواب: $\mathcal{V}(s) = (4s^2 - 3s - 3)/s^3$.

۱۴-۶ اگر $V(s)$ برابر با (الف) $10/s^2$ ، (ب) $10/s$ ، (ج) $10/s + 10$ باشد، $v(t)$ را به دست آورید.
 $.10\delta(t) - 100e^{-10t} u(t)$ ، $u(t) - e^{-10t} u(t)$ ، $10tu(t)$ ، $10u(t)$ ، $10\delta(t)$ جواب:

۱۴-۵ تکنیک‌های عکس تبدیل لاپلاس

تفصیل خطی بودن

تذکر شدیم که عبارت انتگرالی معادله (۱۳) قابل استفاده در عملاب به حوزه s برای بازگشت ن به حوزه زمان است. همچنین گفتیم که چنین روشی می تواند با توجه به منحصر به فرد بودن

یک ارتباط یک به یک را بین $v(t)$ و $\mathcal{V}(s)$ منحصر به فرد وجود دارد. در اینجا ممکن است رابطه عکس تبدیل کمی شمارا بترساند. نتیجه این است که مطالعه تبدیل لاپلاس در حد مقدماتی نیازی به ارزیابی این انتگرال ندارد. با انتقال از حوزه زمان به حوزه فرکانس و استفاده از خاصیت انحصار فوق، قادر خواهیم بود با ایست جفت تبدیل های مر تبدیل لاپلاس، عکس را آن پیدا کنیم.

قبل از ادامه بحث بهتر است بیننمای آیا احتمال دارد که برای بعضی توابع $v(t)$ مورد علاقه ما، تبدیل لاپلاس وجود نداشته باشد. مجموعه شرایط کافی برای اطمینان از همگرایی مطلق انتگرال لاپلاس برای $\sigma_0 < \text{Re}\{s\} < \sigma_1$ عبارت است از:

۱. تابع $v(t)$ در هر فاصله معین مثل $t_2 < t < t_1$ قابل انتگرالگیری است و در آن $0 \leq t_1 < t_2 < \infty$.
۲. برای هر مقدار از σ_0 عبارت $\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-\sigma_0 t} |v(t)|$ وجود دارد.

تابع زمانی که این دو شرط را راضی نکنند، به ندرت در تحلیل مدار دیده می شوند. مثال هایی از این توابع e^{at^2} و e^{at^3} می باشند و نه e^{at^n} یا $n > 3$. برای بحث بیشتر به دیگر مراجع مراجعه شود.

تابع پله واحد $\delta(t)$

حال، سراغ تبدیل چند تابع می رویم. ابتدا تبدیل لاپلاس تابع پله واحد $\delta(t)$ را ملاحظه می کنیم. با توجه به تعریف داریم:

$$\mathcal{L}\{\delta(t)\} = \int_{0^-}^{\infty} e^{-st} \delta(t) dt = \int_{0^-}^{\infty} e^{-st} dt = -\frac{1}{s} e^{-st} \Big|_{0^-}^{\infty} = \frac{1}{s}$$

به ازای $0 > \text{Re}\{s\}$ برای ارضای شرط ۲. پس داریم:

$$\delta(t) \Leftrightarrow \frac{1}{s} \quad (16)$$

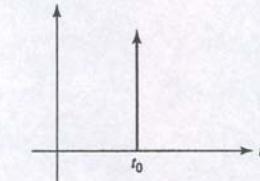
و به این ترتیب اولین جفت تبدیل لاپلاس برای ما به راحتی پیدا شد.

تابع ضربه واحد $\delta(t - t_0)$

تابع دیگری از این نوع که تبدیل شده مورد علاقه ما است، تابع واحد $\delta(t - t_0)$ است. این تابع در شکل ۱۴-۲ ترسیم شده است. در ابتداء عجیب ولی عملاً تابع بسیار مفیدی است. تابع ضربه واحد طوری تعریف می شود که درای سطح واحد است. به طوری که:

$$\delta(t - t_0) = 0 \quad t \neq t_0$$

$$\int_{t_0 - \epsilon}^{t_0 + \epsilon} \delta(t - t_0) dt = 1$$



که در آن δ یک ثابت کوچک است. بنابراین تابع مذکور مقدار غیر صفر را فقط در نقطه t_0 دارد. است. برای $0 > \text{Re}\{s\}$ تبدیل لاپلاس را چنین می باشیم.

$$\mathcal{L}\{\delta(t - t_0)\} = \int_{0^-}^{\infty} e^{-st} \delta(t - t_0) dt = e^{-st_0} \quad (17)$$

$$\delta(t - t_0) \Leftrightarrow e^{-st_0}$$

در حالت خاص $t_0 = 0$ داریم:

$$\delta(t) \Leftrightarrow 1 \quad (18)$$

شکل ۱۴-۲ تابع ضربه واحد $\delta(t - t_0)$. این تابع اغلب برای تقریب یک پالس که زمانش در مقایسه با شتاب زمانی مدار خیلی کوتاه است به کار می رود.

تمرین

$$14-1 \quad \text{بافرض تابع } H(s) = \frac{7}{s^2} + \frac{31}{(s+17)^2}, \text{ مطلوبست } h(t) \\ \text{جواب: } h(t) = [7 + 31e^{-17t}]tu(t)$$

کنیک‌های عکس تبدیل برای تابع گویا

قضیه خطی بودن در تحلیل مدارهایی که چند عنصر ذخیره انرژی دارند، اغلب با عباراتی از توزه s مواجه می‌شویم که از نسبت دو چندجمله‌ای s تشکیل شده‌اند. بنابراین انتظار داریم رتبای عباراتی مثل

$$V(s) = \frac{N(s)}{D(s)}$$

 راجه می‌شویم که در آن $N(s)$ و $D(s)$ چند جمله‌ای‌هایی از s هستند. مقادیری از s که موجب $N(s) = 0$ می‌شوند را صفرهای $V(s)$ می‌خوانیم و مقادیری از s که منجر به $0 = D(s)$ کردد را قطب‌های $V(s)$ می‌نامیم.

در عمل، به ندرت لازم است معادله (۱۲) برای تابع موجود در تحلیل مدار فرآخوانی شود، به شرطی که در استفاده از تکنیک‌های ارائه شده در این فصل، هوشیاری به خروج دهیم. به دست آوریم، اغلب این عبارات را بالا بزنیم و معادله (۱۳) را فرآخوانی کنیم و تبدیل عکس پلاس آن‌ها معلوم است، می‌توان به دست آورد. عبارت برای انجام این کار این است که $V(s)$ بعیو گویا باشد که در آن درجه صورت $N(s)$ باید کمتر از مخرج $D(s)$ باشد. اگر چنین نباشد، باید ابتدا یک گام تقسیم را مطابق مثال زیر انجام دهیم. نتیجه تابعی به فرم تابع ضربه‌ای نواهد بود (فرض کنید درجه صورت و مخرج یکی است) و یا تابعی گویا می‌باشد. تبدیل معکوس وجود ندارد، روش را راست باقیمانده قابل اعمال به تابع گویا می‌باشد.

مثال ۱۴-۴

تبدیل عکس را برای تابع $F(s) = 2 + \frac{2}{s}$ پیدا کنید. $F(s)$ یک تابع گویانیست، لذا روش تقسیم ادامه می‌دهیم:

$$F(s) = s \overline{2s+4} \\ \frac{2s}{4}$$

براین $F(s) = 2 + (4/s)$. با توجه به قضیه خطی بودن

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\{2\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{4}{s}\right\} = 2\delta(t) + 4u(t)$$

اید توجه داشت که این تابع خاص را بدون تقسیم می‌توان ساده کرد. این روش برای تهیه الی از فرآیند استفاده شده است).

$$14-2 \quad \text{بافرض } Q(s) = \frac{3s^2 - 4}{s^2}, \text{ را محاسبه کنید.} \\ \text{جواب: } q(t) = 3\delta(t) - 4tu(t)$$

 در به کارگیری روش باقیمانده، خصوصاً انجام بسط به کسرهای جزیی $V(s)$ ، ما توجه ود را به ریشه‌هایی از مخرج معکوس می‌کنیم. بنابراین ابتدا لازم است چندجمله‌ای‌های s $D(s)$ را به جملات حاصل‌ضربی تبدیل کنیم. ریشه‌های $D(s)$ می‌تواند جدا از هم (ساده) یا براری و ممکن است حقیقی یا مختلط باشد. با این وجود ذکر این نکته ارزش دارد که بگوییم

جفت تبدیل لاپلاس، پرهیز شود. برای اشراف کامل بر این واقعیت، یکی از چند قضیه لاپلاس را معرفی می‌کنیم که همان قضیه خطی بودن است. این قضیه بیان می‌کند که تبدیل لاپلاس مجموع دو یا چند تابع زمانی برایر با مجموع تبدیلات تک‌تک تابع زمانی است. برای دو تابع زمانی داریم:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{f_1(t) + f_2(t)\} &= \int_0^\infty e^{-st} [f_1(t) + f_2(t)] dt \\ &= \int_0^\infty e^{-st} f_1(t) dt + \int_0^\infty e^{-st} f_2(t) dt \\ &= F_1(s) + F_2(s) \end{aligned}$$

به عنوان مثالی از کاربرد این قضیه، فرض کنید که تبدیل لاپلاس $V(s)$ را داریم. می‌خواهیم تابع زمانی متناظر آن، $(t)V$ را بدایم، غالباً می‌توان $(t)V$ را با مجموع دو یا چند تابع مثل $V_1(s)$ و $V_2(s)$ نشان داد که عکس تبدیل آن‌ها $(t)v_1$ و $(t)v_2$ می‌باشد و قبلاً در جدول ذکر شده است. در این صورت اعمال قضیه خطی بودن کار ساده‌ای می‌شود.

$$\begin{aligned} v(t) &= \mathcal{L}^{-1}\{V(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\{V_1(s) + V_2(s)\} \\ &= \mathcal{L}^{-1}\{V_1(s)\} + \mathcal{L}^{-1}\{V_2(s)\} = v_1(t) + v_2(t) \end{aligned}$$

نتیجه مهم دیگر حاصل از قضیه خطی بودن با مطالعه تعریف تبدیل لاپلاس می‌سیز است. چون ما در واقع با انتگرال سروکار داریم، تبدیل لاپلاس یک ثابت ضریب تابع برابر است با ثابت ضریب در تبدیل لاپلاس تابع. به بیان دیگر:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{kv(t)\} &= k\mathcal{L}\{v(t)\} \\ kv(t) &\Leftrightarrow kV(s) \end{aligned}$$

این رابطه به نام خاصیت همگنی خوانده می‌شود.

مثال ۱۴-۳

بافرض تابع $(t)g(t) = 7/t - 31/(s+17)$ ، $G(s) = 7/s - 31/(s+17)$ را بیداکنید. این تابع حوزه s مشکل از مجموع دو جمله $7/s$ و $-31/(s+17)$ است. با توجه به قضیه خطی بودن می‌دانیم که $\mathcal{L}\{g(t)\}$ مشکل از دو جمله است که هر کد معکوس لاپلاس یکی از دو جمله در حوزه s است:

$$g(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{7}{s}\right\} - \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{31}{s+17}\right\}$$

اجازه بدھید با جمله اول شروع کنیم. خاصیت همگنی تبدیل لاپلاس اجازه می‌دهد چنین بنویسیم:

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{7}{s}\right\} = 7\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} = 7u(t)$$

بنابراین ما از زوج تبدیل شناخته شده $1/s \Leftrightarrow u(t)$ و خاصیت همگنی برای یافتن اولین مولنه $(t)g$ استفاده کرده‌ایم. به طریقی مشابه:

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{31}{s+17}\right\} = 31e^{-17t}u(t)$$

با ادغام این دو جمله داریم:

$$g(t) = [7 - 31e^{-17t}]u(t)$$

$$P(s) = \frac{7s+5}{s(s+1)} = \frac{a}{s} + \frac{b}{s+1}$$

گام بعدی تعیین مقادیر a و b است. با اعمال روش باقیمانده داریم:

$$a = \frac{7s+5}{s+1} \Big|_{s=0} = 5, \quad b = \frac{7s+5}{s} \Big|_{s=-1} = 2$$

سپس می‌توان $P(s)$ را چنین نوشت:

$$P(s) = \frac{5}{s} + \frac{2}{s+1}$$

تبدیل معکوس چنین است:

$$p(t) = [5 + 2e^{-t}]u(t)$$

$$Q(s) = \frac{11s+30}{s^2+3s} \quad \text{با فرض تابع } Q(s) \text{، تابع } q(t) \text{ را حساب کنید.}$$

$$q(t) = [10 + e^{-3t}]u(t)$$

قطب‌های تکراری

حالات باقیمانده، قطب‌های تکراری است. تابع زیر را در نظر بگیرید:

$$V(s) = \frac{N(s)}{(s-p)^n}$$

که قابل توسعه به شکل زیر است:

$$V(s) = \frac{a_n}{(s-p)^n} + \frac{a_{n-1}}{(s-p)^{n-1}} + \dots + \frac{a_1}{(s-p)}$$

برای تعیین هر ثابت، ابتدا فرم گسترش یافته $V(s) = (s-p)^n$ ضرب می‌کنیم. ضریب a_n را می‌توان با محاسبه عبارت در $p = s$ به دست آورد. بقیه ثابت‌ها با مشتق‌گیری از عبارت $(s-p)^n V(s)$ به دفعات لازم در $p = s$ معین می‌شوند. روند مشتق‌گیری ثابت‌هایی را که قبلاً به دست آمدند حذف می‌کند و محاسبه در $p = s$ بقیه ثابت‌ها را حذف می‌نماید. مثلاً a_2 با ارزیابی زیر حاصل می‌گردد:

$$\frac{1}{2!} \frac{d^2}{ds^2} [(s-p)^n V(s)]_s = p$$

و جمله k -جنبین محاسبه می‌گردد:

$$\frac{1}{k!} \frac{d^k}{ds^k} [(s-p)^n V(s)]_s = p$$

برای تشریح اساس روش بیاید عکس تبدیل لاپلاس تابعی را که ترکیبی از هر دو حالت، یعنی یک قطب در $s = 0$ و دو قطب در $s = -6$ دارد، بررسی کنیم.

عکس تبدیل لاپلاس تابع زیر را به دست آورید.

$$V(s) = \frac{2}{s^3 + 12s^2 + 36s}$$

توجه دارد که مخرج به سادگی به صورت حاصل ضرب در می‌آید:

$$V(s) = \frac{2}{s(s+6)(s+6)} = \frac{2}{s(s+6)^2}$$

تمرین

ریشه‌های مختلط همیشه به صورت مزدوج مختلط رخ می‌دهند به شرطی که ضرایب (s) حقیقی باشند.

قطب‌های منفک و روش باقیمانده‌ها

به عنوان مثالی خاص اجازه بدهد تا عکس تبدیل لاپلاس زیر را به دست آوریم:

$$V(s) = \frac{1}{(s+\alpha)(s+\beta)}$$

مخرج دو جمله باریشه‌های مجزای α و β به صورت حاصل ضرب در آمده است. هر چند که می‌توان این عبارت را در معادله عکس تبدیل لاپلاس گذاشت، ولی استفاده از قضیه خطی بودن ساده‌ترین راه است. با ساده‌سازی کسرهای جزیی می‌توان تابع مفروض را به مجموع دو جمله ساده‌تر تفکیک کرد:

$$V(s) = \frac{A}{(s+\alpha)} + \frac{B}{(s+\beta)}$$

که در آن A و B می‌توان از چند روش پیدا کرد. شاید سریع‌ترین راه به طریق زیر باشد:

$$\begin{aligned} A &= \lim_{s \rightarrow -\alpha} \left[(s+\alpha)V(s) - \frac{(s+\alpha)}{(s+\beta)} B \right] \\ &= \lim_{s \rightarrow -\alpha} \left[\frac{1}{(s+\beta)} - 0 \right] = \frac{1}{\beta - \alpha} \end{aligned}$$

با توجه به این که جمله دوم همیشه صفر است در عمل می‌توان به راحتی چنین نوشت:

$$A = (s+\alpha)V(s)|_{s=-\alpha}$$

به طور مشابه:

$$B = (s+\beta)V(s)|_{s=-\beta} = \frac{1}{\alpha - \beta}$$

و بنابراین

$$V(s) = \frac{1/(\beta - \alpha)}{(s+\alpha)} + \frac{1/(\alpha - \beta)}{(s-\beta)}$$

ما قبل از عکس تبدیل لاپلاس به شکل فوق را به دست آورده‌ایم. پس:

$$v(t) = \frac{1}{\beta - \alpha} e^{-\alpha t} u(t) + \frac{1}{\alpha - \beta} e^{-\beta t} u(t) = \frac{1}{\beta - \alpha} (e^{-\alpha t} - e^{-\beta t}) u(t)$$

در صورت تعایل می‌توان رابطه فوق را به عنوان واردہای جدید در لیست جفت لاپلاس‌ها لحاظ کرد:

$$\frac{1}{\beta - \alpha} (e^{-\alpha t} - e^{-\beta t}) u(t) \Leftrightarrow \frac{1}{(s+\alpha)(s+\beta)}$$

این روش، به سادگی، به توابعی که مخرج آن‌ها از مرتبه بالاترند، علی‌رغم خسته‌کنندگی، قابل گسترش است. باید توجه کرد که ما در برای حقیقی بودن A و B صحیحتی نکردیم. با این وجود، در مواردی که α و β مختلط‌اند، در می‌یابیم که مزدوج نیز می‌باشد. در این موارد خواهیم دید که $A = B^*$ است، به بیان دیگر ضرایب نیز مزدوج خواهند بود.



مثال ۱۴-۵

تبدیل عکس تابع زیر را به دست آورید:

$$P(s) = \frac{7s+5}{s^2+s}$$

می‌بینیم که $P(s)$ یک تابع گویا است (درجه صورت از مخرج کمتر است، یعنی درجه صورت

۱ و درجه مخرج ۲ است)، لذا با فاکتورگیری از مخرج جلو می‌رویم:

مثال ۱۴-۵

تکنیک تبدیل لاپلاس عبارت دقیقی را برای حل معادلات دیفرانسیل فراهم می‌نماید و بنابراین نسبت به استفاده از ODE مزایای متعددی دارد. مزایای دیگری از تبدیل لاپلاس در فصل بعدی خصوصاً وقتی اهمیت عبارات حوزه‌های رامطالعه می‌کنیم، ارانه خواهد شد.

همان‌طور که قبلاً دیدیم، جدول نظاره هنگام کار با تبدیل‌های لاپلاس علی‌رغم خسته‌کنندگی روش باقیمانده‌ها در چندجمله‌ای‌های مرتبه بالا، به شدت سهل‌الوصول است. در این موارد مطلب نیز می‌تواند کمک مؤثری بنماید. چون حاوی چندین تابع مفید برای دستکاری عبارات چندجمله‌ای است.

در مطلب چندجمله‌ای است.

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

به صورت بردار $[a_n \ a_{n-1} \ \dots \ a_1 \ a_0]$ ذخیره شده است.

بنابراین برای تعریف چندجمله‌ای $D(s) = s^3 + 12s^2 + 36s$ و $N(s) = 2$ فقط می‌نویسیم:

$$\text{EDU} >> N = [2];$$

$$\text{EDU} >> D = [1 \ 12 \ 36 \ 0];$$

ریشه‌های هر چندجمله‌ای را با فرآخوانی تابع roots(p) می‌توان به دست آورد که در آن p بردارهای ضرایب چندجمله‌ای است. مثلاً

$$\text{EDU} >> q = [1 \ 8 \ 16];$$

$$\text{EDU} >> \text{roots}(q)$$

که منجر می‌شود به

$$\text{ans} =$$

$$\begin{matrix} -4 \\ -4 \end{matrix}$$

مطلب همچنین امکان تعیین باقیماندهای تابع گویای $N(s) / D(s)$ را با به کارگیری تابع residue() فراهم می‌کند. مثلاً

$$\text{EDU} >> [r \ p \ y] = \text{residue}(N, D);$$

سه عدد r , p و y را بازمی‌گرداند به نحوی که

$$\frac{N(s)}{D(s)} = \frac{r_1}{x - p_1} + \frac{r_2}{x - p_2} + \dots + \frac{r_n}{x - p_n} + y(s)$$

در حالت نبود حالت چندقطبی و در حالت n قطبی

$$\frac{N(s)}{D(s)} = \frac{r_1}{(x - p)} + \frac{r_2}{(x - p)^2} + \dots + \frac{r_n}{(x - p)^n} + y(s)$$

توجه کنید مادامی که درجه چندجمله‌ای صورت کمتر از چندجمله‌ای مخرج باشد، بردار $y(s)$ همیشه خالی است.

اجرای فرمان بدون نقطه ویرگول، خروجی زیر را می‌دهد.

$$\begin{array}{lll} r = & p = & y = \\ -0.0556 & -6 & [] \\ -0.3333 & -6 & \\ 0.0556 & 0 & \end{array}$$

که با پاسخ مثال ۱۴.۶ وافق دارد.

همان‌طور که قول دادیم، ملاحظه می‌کنید که هنوز هم سه قطب وجود دارد یکی در $s = 0$ و دو قطب در $s = -6$. اکنون تابع را به صورت زیر بسط می‌دهیم:

$$V(s) = \frac{a_1}{(s + 6)^2} + \frac{a_2}{(s + 6)} + \frac{a_3}{s}$$

و سهی روال جدیدی را برای تهیه ثابت‌های a_1 و a_2 و a_3 اعمال می‌کنیم. برای یافتن a_3 از روال قبل استفاده می‌کنیم. پس:

$$a_1 = \left[(s + 6)^2 \frac{2}{s(s + 6)^2} \right]_{s=-6} = \frac{2}{s} \Big|_{s=-6} = \frac{-1}{3}$$

$$a_2 = \frac{d}{ds} \left[(s + 6)^2 \frac{2}{s(s + 6)^2} \right]_{s=-6} = \frac{d}{ds} \left(\frac{2}{s} \right) \Big|_{s=-6} = \frac{-2}{s^2} \Big|_{s=-6} = \frac{-1}{18}$$

ثبت باقیمانده a_3 با استفاده از روال قطب‌های منفک حاصل می‌شود.

$$a_3 = \frac{2}{s(s + 6)^2} \Big|_{s=0} = \frac{2}{6^2} = \frac{1}{18}$$

بنابراین $V(s)$ را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$V(s) = \frac{-\frac{1}{3}}{(s + 6)^2} + \frac{-\frac{1}{18}}{(s + 6)} + \frac{\frac{1}{18}}{s}$$

با به کارگیری قضیه خطی بودن، عکس تبدیل (s) با تعیین عکس هر یک از سه جمله حاصل می‌گردد. اولین جمله در سمت راست چنین است:

$$\frac{1}{(s + \alpha)^2}$$

با معادله (۲۱) عکس تبدیل برابر است با $\frac{1}{3} t e^{-6t} u(t)$. به طریقی مشابه می‌بینیم که عکس تبدیل برای جمله دوم $\frac{1}{18} t e^{-6t} u(t)$ است و جمله سوم هم $\frac{1}{18} u(t)$ می‌باشد. بنابراین:

$$v(t) = -\frac{1}{3} t e^{-6t} u(t) - \frac{1}{18} t e^{-6t} u(t) + \frac{1}{18} u(t)$$

و به صورت جمع و جورتر داریم:

$$v(t) = \frac{1}{18} [1 - (1 + 6t)e^{-6t}] u(t)$$

$$14-10 \quad V(s) = 2 s / (s^2 + 4)^2 \quad \text{باشد، } v(t) = \frac{1}{2} t \sin 2t u(t)$$

تمرین

تحلیل کامپیوتوری

از مطلب (MATLAB) که یک بسته نرم‌افزاری تحلیل ریاضی پرقدرت است، برای حل معادلات حاصل از تحلیل مدارهای که منبع تغیریک متغیر با زمان دارند، به چند طریق می‌توان استفاده کرد. سر راست ترین تکنیک از روال‌های حل معادله دیفرانسیل فراهم شده (ODE) استفاده می‌کند که توابع () و ode23() و ode45() می‌باشند. این دو روال به روش‌های عددی حل معادلات دیفرانسیل مبتنی است. ضمن این‌که ode45() دقت بالاتری دارد، با این وجود، حل فقط در نقاط جدای هم انجام می‌شود و بنابراین در تمام زمان‌ها مقدار آن معلوم نیست. در بسیاری از کاربردها این یک عیب است مگر این‌که تعداد نقاط زیادی به کار رود.

ارائه طرح.

اگر KVL را به این مدار اعمال نماییم، معادله دیفرانسیلی به دست خواهیم آورده که در آن (t) آمجهول است. باگرفتن تبدیل لاپلاس از طرف این معادله آن را به حوزه S می‌برد. با حل معادله چهاری برای (s)، تهی‌کار باقیمانده گرفتن عکس تبدیل لاپلاس برای یافتن (t) ناست.

معادلات مناسب را بنویسید.

با KVL حول نک حلقه در فضای زمان داریم:

$$2 \frac{di}{dt} + 4i = 3u(t)$$

اکنون تبدیل لاپلاس هر جمله را به دست می‌آوریم:

$$2[sI(s) - i(0^+)] + 4I(s) = \frac{3}{s}$$

آیا اطلاعات دیگری لازم است؟

ما معادله‌ای داریم که ممکن است برای نمایش حوزه فرکانس (s) برای هدفمنان، (t) برای هدفمنان،

حل شود.

اقدام به حل.

اکنون (s) را حل می‌نماییم، $5 = 5i(0^+)$ می‌گیریم:

$$(2s + 4) I(s) = \frac{3}{s} + 10$$

$$I(s) = \frac{1.5}{s(s+2)} + \frac{5}{s+2}$$

با استفاده از روش باقیمانده‌ها از جمله اول داریم:

$$\left. \frac{1.5}{s+2} \right|_{s=0} = 0.75$$

$$\left. \frac{1.5}{s} \right|_{s=-2} = -0.75$$

و بنابراین

$$I(s) = \frac{0.75}{s} + \frac{4.25}{s+2}$$

آن‌گاه برای تبدیل از جفت تبدیل معلوم استفاده می‌کنیم:

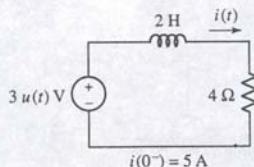
$$i(t) = 0.75 u(t) + 4.25 e^{-2t} u(t)$$

$$= (0.75 + 4.25 e^{-2t}) u(t) \quad A$$

صحت حل را تحقیق کنید. آیا پاسخ منطقی است؟

براساس تحریه قبلی خود با این‌گونه مدارها انتظار یک پاسخ واداشته dc به علاوه یک پاسخ طبیعی میرایی نمایی را داریم. در $t = 0$ داریم $i(0) = 5 A$ که باید هم این طور باشد و $\rightarrow \infty$ به $\frac{3}{4} A$ می‌گذرد که انتظار آن را داریم.

بنابراین حل (t) A کامل است. هر دو پاسخ واداشته $0.75u(t)$ و پاسخ طبیعی $4.25e^{-2t}u(t)$ جود دارند و مقدار اولیه به طور خودکار لحاظ شده است. روشی که ارائه شده است راه حلی است که برای بسیاری از معادلات دیفرانسیل بی‌زحمت به نظر می‌رسد.



شکل ۱۴-۳ مداری که برای تبدیل معادله دیفرانسیل $2 \frac{di}{dt} + 4i = 3u(t)$ به رابطه $.2[sI(s) - i(0^+)] + 4I(s) = 3/s$

۱۴-۶ قضایای اصلی در تبدیل لاپلاس

اکنون می‌توانیم دو قضیه دیگر را بیان کنیم که شاید عملت وجود تبدیل لاپلاس در تحلیل مدار باشد. این دو قضیه عبارتند از قضایای مشتق و انتگرال زمانی. آن‌ها در تبدیل مشتقات و انتگرال‌های موجود در معادلات مدار در حوزه زمان به ما کمک می‌کنند.

قضیه مشتق زمانی

بگذارید ابتدا با بررسی تابع زمانی $v(t)$ که تابع تبدیل لاپلاس آن، (s) ، معلوم است، به مشتق زمانی نگاه کنیم. ما تبدیل مشتق اول $(t)v(t)$ را می‌خواهیم:

$$\mathcal{L} \left\{ \frac{dv}{dt} \right\} = \int_{0^-}^{\infty} e^{-st} \frac{dv}{dt} dt$$

از انتگرال‌گیری جزء به جزء استفاده می‌کنیم:

$$U = e^{-st} \quad dV = \frac{dv}{dt} dt$$

با این نتیجه:

$$\mathcal{L} \left\{ \frac{dv}{dt} \right\} = v(t)e^{-st} \Big|_{0^-}^{\infty} + s \int_{0^-}^{\infty} e^{-st} v(t) dt$$

اولین جمله در سمت راست با افزایش بدون محدودیت زمان، باید به سمت صفر میل کند، در غیر این صورت $V(s)$ وجود نخواهد داشت. از این رو

$$\mathcal{L} \left\{ \frac{dv}{dt} \right\} = 0 - v(0^-) + sV(s)$$

$$\frac{dv}{dt} \Leftrightarrow sV(s) - v(0^-) \quad (23)$$

رابط مشابهی را می‌توان برای مشتقات مرتبه بالاتر به دست آورد:

$$\frac{d^2v}{dt^2} \Leftrightarrow s^2V(s) - sv(0^-) - v'(0^-) \quad (24)$$

$$\frac{d^3v}{dt^3} \Leftrightarrow s^3V(s) - s^2v(0^-) - sv'(0^-) - v''(0^-) \quad (25)$$

که $(0)^{'}V$ مقدار اولین مشتق $v(t)$ در $t = 0^-$ و $(0)^{''}V$ مقدار اولیه مشتق دوم $v(t)$ و الی آخر است. وقتی همه مقادیر اولیه صفر است می‌بینیم که هر بار مشتق‌گیری نسبت به t در حوزه زمان برابر است با ضرب s در حوزه فرکانس، بدوراً مشتق‌گیری در حوزه زمان مربوط به ضرب در s^2 در حوزه فرکانس و به همین ترتیب است. بنابراین مشتق‌گیری در حوزه زمان معادل ضرب در حوزه فرکانس می‌باشد. این ساده‌سازی بسیار اساسی است! همچنین می‌توان دید که اگر مقادیر اولیه صفر نباشد، اثر آن‌ها محسوس است. مثلاً ساده‌زیر این مطلب را نشان می‌دهد.

با فرض مدار RL سری در شکل ۱۴-۳ جریان داخل مقاومت Ω را به دست آورید.

هدف مسئله را شناسایی کنید.

باید عبارتی برای جریان (t) از پیدا کنیم.

اطلاعات معلوم را جمع‌آوری نمایید.

مدار با یک ولتاژ پله راهاندازی شده است و مقدار اولیه جریان را در $t = 0$ برابر $5 A$ داریم.

تمرین

آن‌گاه تبدیل لاپلاس را در دو طرف این معادله به دست می‌آوریم، چون می‌خواهیم تبدیل لاپلاس یکسویه بگیریم. درواقع $\mathcal{L}\{v(0^+)\}u(t) = \mathcal{L}\{v(t)\}u(t)$ است و بنابراین:

$$\frac{1}{s} = 4I(s) + \frac{9}{s} + \frac{16}{s} I(s)$$

و با حل برای $I(s)$ خواهیم داشت:

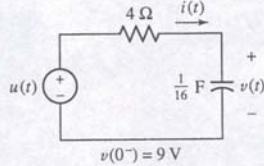
$$I(s) = \frac{-2}{s+4}$$

و به این ترتیب نتیجه مطلوب فوراً حاصل می‌گردد:

$$i(t) = -2e^{-4t} u(t) \text{ A}$$

برای همان مدار شکل قبلی که برای سادگی تکرار شده است، (۱۴-۷) را پیدا کنید.

مثال ۱۴-۹



شکل ۱۴-۶ مدار شکل ۱۴-۵ تکرار شده است و در آن ولتاژ $v(t)$ مورد نظر است.

$$\frac{v(t) - u(t)}{4} + \frac{1}{16} \frac{dv}{dt} = 0$$

$$\frac{V(s)}{4} - \frac{1}{4s} + \frac{1}{16} sV(s) - \frac{v(0^-)}{16} = 0$$

یا

$$V(s) \left(1 + \frac{s}{4}\right) = \frac{1}{s} + \frac{9}{4}$$

پس

$$\begin{aligned} V(s) &= \frac{4}{s(s+4)} + \frac{9}{s+4} \\ &= \frac{1}{s} - \frac{1}{s+4} + \frac{9}{s+4} \\ &= \frac{1}{s} + \frac{8}{s+4} \end{aligned}$$

با عکس تبدیل

$$v(t) = (1 + 8e^{-4t}) u(t)$$

به این ترتیب، به سرعت ولتاژ خازن موردنظر را بدنبال استفاده از حل معمول معادله دیفرانسیل به دست آوریم.

برای آزمایش این جواب می‌توانیم نشان دهیم که $dV/dt = 1/(16)u(t)$ همان جریان خازن $i(t)$ است. برای $t > 0$ دارد:

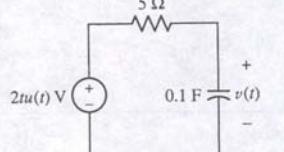
$$\frac{1}{16} \frac{dv}{dt} = \frac{1}{16} (-32)e^{-4t} = -2e^{-4t}$$

که با نتیجه حاصل از مثال ۱۴-۸ وفاده دارد.

شکل ۱۴-۱۲ برای مدار شکل ۱۴-۷ به دست آورید.

جواب: ۸۰۲ mV

تمرین



شکل ۱۴-۷

تبدیل لاپلاس توابع سینوسی
به خاطر استفاده از هر دو قضیه خطی بودن و مشتق‌گیری زمانی و افزودن مهمترین زوج تبدیل لاپلاس به جدول زوج‌ها تبدیل لاپلاس $\sin \omega t u(t)$ را در نظر می‌گیریم. ما می‌توانیم تعریف انتگرالی تبدیل لاپلاس را به کار ببریم و انتگرال جزء به جزء بگیریم ولی این کار مشکل و غیرضروری است. در عوض از رابطه زیر استفاده می‌کنیم.

$$\sin \omega t = \frac{1}{2j} (e^{j\omega t} - e^{-j\omega t})$$

۱۴-۱۱ برای یافتن (۱) از شکل ۱۴-۴ از تبدیل لاپلاس استفاده کنید.
جواب: $A = (0.25 + 4.75 e^{-20t})u(t)$

قضیه انتگرال زمانی

ساده‌سازی مشابهی را به هنگام انتگرال‌گیری نسبت به زمان در معادلات مدار می‌توان انجام داد. بیاید تبدیل لاپلاس تابع زمانی $\int_{0^-}^t v(x) dx$ را تعیین کنیم.

$$\mathcal{L} \left\{ \int_{0^-}^t v(x) dx \right\} = \int_{0^-}^{\infty} e^{-st} \left[\int_{0^-}^x v(x) dx \right] dt$$

با انتگرال‌گیری جزء به جزء

$$u = \int_{0^-}^t v(x) dx \quad dv = e^{-st} dt$$

$$du = v(t) dt \quad v = -\frac{1}{s} e^{-st}$$

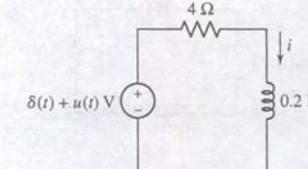
پس

$$\begin{aligned} \left\{ \int_{0^-}^t v(x) dx \right\} &= \left\{ \left[\int_{0^-}^t v(x) dx \right] \left[-\frac{1}{s} e^{-st} \right] \right\}_{t=0^-}^{t=\infty} - \int_{0^-}^{\infty} -\frac{1}{s} e^{-st} v(t) dt \\ &= \left[-\frac{1}{s} e^{-st} \int_{0^-}^t v(x) dx \right]_{0^-}^{\infty} + \frac{1}{s} V(s) \end{aligned}$$

اما چون با $t \rightarrow \infty$ ، داریم $e^{-st} \rightarrow 0$ در حد بالا از بین می‌رود و فقط $V(s)/s$ باقی می‌ماند.

$$\int_{0^-}^t v(x) dx \Leftrightarrow \frac{V(s)}{s} \quad (26)$$

و بنابراین انتگرال‌گیری در حوزه زمانی معادل با تقسیم s در حوزه فرکانس است. باز هم یک عمل نسبتاً مشکل ریاضی در حوزه زمان تبدیل به یک عمل ساده‌تر در حوزه فرکانس شد است.



شکل ۱۴-۴

در شکل ۱۴-۵، برای مدار RC سری جریان $i(t)$ را در $t > 0$ تعیین کنید.

ابتدا معادله حلقه را می‌نویسیم:

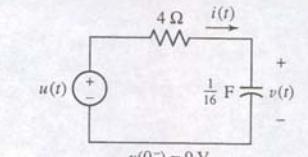
$$u(t) = 4i(t) + 16 \int_{-\infty}^t i(\tau) d\tau$$

به منظور اعمال قضیه انتگرال زمانی باید حد پایین انتگرال را به 0^- تبدیل کنیم. پس

$$\begin{aligned} 16 \int_{-\infty}^t i(\tau) d\tau &= 16 \int_{-\infty}^{0^-} i(\tau) d\tau + 16 \int_{0^-}^t i(\tau) d\tau \\ &= v(0^-) + 16 \int_{0^-}^t i(\tau) d\tau \end{aligned}$$

بنابراین

$$u(t) = 4i(t) + v(0^-) + 16 \int_{0^-}^t i(\tau) d\tau$$



شکل ۱۴-۵ مداری که استفاده از تبدیل لاپلاس را برای جفت $i(t) dt \Leftrightarrow \frac{1}{s} I(s)$ تشریح می‌کند.

تبدیل مجموع این دو جمله برابر با مجموع تبدیل‌هاست. هر یک از جملات تابعی نمایی است و قبل از تبدیل آن‌ها را بدلیم. پس بالا فاصله چنین می‌نویسیم:

$$\mathcal{L}\{\sin \omega t u(t)\} = \frac{1}{2j} \left(\frac{1}{s-j\omega} - \frac{1}{s+j\omega} \right) = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} \quad (27)$$

$$\sin \omega t u(t) \Leftrightarrow \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$$

اکنون از قضیه مشتق‌گیری زمانی برای تبدیل $\cos \omega t u(t)$ که برابر مشتق است، استفاده می‌کنیم. یعنی:

$$\mathcal{L}\{\cos \omega t u(t)\} = \mathcal{L}\left\{\frac{1}{\omega} \frac{d}{dt} [\sin \omega t u(t)]\right\} = \frac{1}{\omega} \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} \quad (28)$$

$$\cos \omega t u(t) \Leftrightarrow \frac{s}{s^2 + \omega^2}$$

قضیه جایه‌جایی زمان

همان‌طور که در چندین مسئله ملاحظه شد، همه توابع تحریک در $t = 0$ شروع نمی‌شوند. برای تابعی که به مقدار معینی از زمان جایه‌جا شود، چه اتفاقی می‌افتد؟ به خصوص اگر تبدیل $f(t-a)u(t-a)$ باشد، آن‌گاه تبدیل $F(s)u(t-a)$ که به معنی تأخیر تابع اصلی به مقدار a ثانیه است، چیست؟ با کار مستقیم روی تعریف تبدیل لابلás برای $t \geq a$ داریم:

$$\mathcal{L}\{f(t-a)u(t-a)\} = \int_0^\infty e^{-st} f(t-a)u(t-a) dt = \int_{a^-}^\infty e^{-st} f(t-a) dt$$

با انتخاب متغیر جدید انتگرال‌گیری $\tau = t - a$ خواهیم داشت:

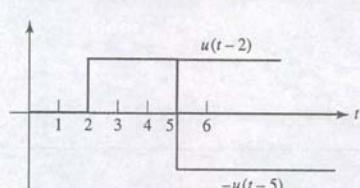
$$\mathcal{L}\{f(t-a)u(t-a)\} = \int_{0^-}^\infty e^{-s(\tau+a)} f(\tau) d\tau = e^{-as} F(s)$$

بنابراین

$$f(t-a)u(t-a) \Leftrightarrow e^{-as} F(s) \quad (a \geq 0) \quad (29)$$

این نتیجه به نام قضیه جایه‌جایی زمان شناخته می‌شود و بیان می‌دارد که اگر یک تابع زمانی در حوزه زمان به اندازه a تأخیر بپذیرد، نتیجه در حوزه فرکانسی در e^{-as} ضرب می‌شود.

مثال ۱۴-۱۰



شکل ۱۴-۸ نمودار $(5-t)u(t-2) - u(t-5)$

کاربرد عملی

پایداری یک سیستم

سال‌ها قبل، یکی از نویسندهای در جاده‌های کشور خود در حال رانندگی بود و سعی داشت از کنترل سرعت الکترونیک (کنترل کروز) اتومبیل استفاده کند. پس از روش کردن سیستم و تنظیم سرعت در دقیقاً بالاتر از حد مجاز، دکمه تنظیم فشرده شد و بدال شتاب آزاد گردید؛ در این لحظه انتظار می‌رفت سیستم سرعت تنظیمی را با سرعت سوخت نگه دارد.

متاسفانه، چیزی دیگری رخ داد. سرعت خودرو به میزان ۱۰% افت کرد و کنترل کروز الکترونیک با افزایش سوخت واکنش نشان داد. دو واقعه کاملاً متنطبق نبودند، لذا چند لحظه بعد سرعت خودرو از حد خود فراجاش نمود - در نتیجه سوخت افت ناگهانی گرد. این منجر به کاهش سرعت اتومبیل شد. سیکل ادامه

در حوزه زمان به نتایجی در حوزه S رسیدیم. این نتایج در جدول ۱۴-۱ و ۱۴-۲ جمع وردی و چند نمونه دیگر هم در پیوست ۷ لاحظ شده‌اند.

جدول ۱۴-۲ خواص تبدیل لابلás.

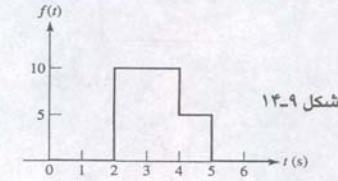
$F(s)$	$f(t)$	عملیات	$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$	$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$
$F_1(s) \pm F_2(s)$	$f_1(t) \pm f_2(t)$	جمع	$\delta(t)$	1
$kF(s)$	$kf(t)$	ضرب اسکالر	$u(t)$	$\frac{1}{s}$
$sF(s) - f(0^-)$	$\frac{df}{dt}$	مشتق گیری در حوزه زمان	$tu(t)$	$\frac{1}{s^2}$
$s^2F(s) - sf(0^-) - f'(0^-)$	$\frac{d^2f}{dt^2}$		$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!} u(t), n = 1, 2, \dots$	$\frac{1}{s^n}$
$s^3F(s) - s^2f(0^-) - sf'(0^-) - f''(0^-)$	$\frac{d^3f}{dt^3}$		$e^{-at} u(t)$	$\frac{1}{s+\alpha}$
$\frac{1}{s}F(s)$	$\int_0^t f(t) dt$	انتگرال زمان	$te^{-at} u(t)$	$\frac{1}{(s+\alpha)^2}$
$\frac{1}{s}F(s) + \frac{1}{s} \int_{-\infty}^{0^-} f(t) dt$	$\int_{-\infty}^t f(t) dt$			
$F_1(s)F_2(s)$	$f_1(t) * f_2(t)$	کانولوشن		$\frac{1}{(s+\alpha)^n}$
$e^{-as}F(s)$	$f(t-a)u(t-a), a \geq 0$	چایه‌جایی زمانی		$\frac{1}{(s+\alpha)^n}$
$F(s+a)$	$f(t)e^{-at}$	چایه‌جایی فرکانسی	$\frac{1}{\beta - \alpha} (e^{\alpha t} - e^{-\beta t}) u(t)$	
$\frac{dF(s)}{ds}$	$-tf(t)$	مشتق گیری در حوزه فرکانس	$\sin \omega t u(t)$	$\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$
$\int_s^\infty F(s) ds$	$\frac{f(t)}{t}$	انتگرال گیری در حوزه فرکانس	$\cos \omega t u(t)$	$\frac{s}{s^2 + \omega^2}$
$\frac{1}{a}F\left(\frac{s}{a}\right)$	$f(at), a \geq 0$	تغییر مقیاس	$\sin(\omega t + \theta) u(t)$	$\frac{s \sin \theta + \omega \cos \theta}{s^2 + \omega^2}$
$\lim_{s \rightarrow \infty} sF(s)$	$f(0^+)$	مقدار اولیه	$\cos(\omega t + \theta) u(t)$	$\frac{s \cos \theta - \omega \sin \theta}{s^2 + \omega^2}$
lim $sF(s)$, all poles of $sF(s)$ in LHP	$f(\infty)$	مقدار نهایی	$e^{-at} \sin \omega t u(t)$	$\frac{\omega}{(s+\alpha)^2 + \omega^2}$
$\frac{1}{1-e^{-Tt}} F_1(s),$ where $F_1(s) = \int_{0^-}^T f(t)e^{-ut} dt$	$f(t) = f(t+nT),$ $n = 1, 2, \dots$	تذوپ زمانی	$e^{-at} \cos \omega t u(t)$	$\frac{s+\alpha}{(s+\alpha)^2 + \omega^2}$

یافت و موجب بہت راننده گردید که در نتیجه به ناچار سیستم را خاموش کرد.



۱۴-۱۳ تبدیل لابلás تابع زمانی در شکل ۱۴-۹ را پیدا کنید.
جواب: $(5-s)e^{-4s} - e^{-2s} - e^{-4s} / (5-s)$.

تا این جا تعدادی واردہ برای لیست جفت‌های تبدیل لابلás که قبلاً در تهیه‌اش توافق کردیم، فراهم شد. از آن جمله تابع ضربه، تابع پله، تابع نمایی، تابع شب و تابع سینوس و کسینوس و مجموع دو تابع نمایی بودند. به علاوه در اعمال جمع، ضرب در یک ثابت، مشتق و انتگرال



شکل ۱۴-۹

$$\begin{aligned} -f(0^-) + \lim_{s \rightarrow \infty} [sF(s)] &= \lim_{s \rightarrow \infty} \int_0^{0^+} df = \lim_{s \rightarrow \infty} [f(0^+) - f(0^-)] \\ &= f(0^+) - f(0^-) \end{aligned}$$

بالآخره

$$f(0^+) = \lim_{s \rightarrow \infty} [sF(s)]$$

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} f(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} [sF(s)] \quad (3)$$

رابطه فوق بیان ریاضی قضیه مقدار اولیه است. این رابطه بیان می‌دارد که مقدار اولیه ابی زمانی ($f(0^-)$) را می‌توان از تبدیل لاپلاس ($F(s)$) با ضرب تبدیل در s و سپس میل به سمت نهایت به دست آورد. توجه کنید که مقدار اولیه به دست آمده حد راست ($f(t)$) است.

به کمک قضیه مقدار اولیه و مقدار نهایی که به زودی آن را بررسی خواهیم کرد، می‌توان نایاب تبدیل و عکس تبدیل را امتحان کرد. مثلاً تبدیل لاپلاس ($u(t) = \cos(\omega_0 t)$) به دست آورده است، می‌توان صحت تبدیل پلاس فرق را با اعمال قضیه مقدار اولیه امتحان کرد:

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \left(s \frac{s}{s^2 + \omega_0^2} \right) = 1$$

به صحیح است.

قضیه مقدار نهایی

قضیه مقدار نهایی به اندازه مقدار اولیه مفید نیست و به این دلیل برای رده خاصی از تبدیل‌ها کار می‌رود. برای این‌که بینیم آیا تبدیلی در این رده قرار می‌گیرد یا نه، مخرج ($F(s)$) را برای همه مقادیری از s که آن را صفر می‌کند، به دست آورید. تنهای آن دسته از توابع $F(s)$ که قطب‌هایشان در سمت چپ صفر s (عنی $s < 0$) قرار دارد، به جز قطب $s = 0$ ای استفاده در قضیه مقدار نهایی مناسب‌اند. دوباره تبدیل لاپلاس ($f(t)$) را بررسی می‌کیم:

$$\int_0^\infty e^{-st} \frac{df}{dt} dt = sF(s) - f(0^-)$$

بنابراین به سمت صفر داریم:

$$\lim_{s \rightarrow 0} \int_0^\infty e^{-st} \frac{df}{dt} dt = \lim_{s \rightarrow 0} [sF(s) - f(0^-)] = \int_0^\infty \frac{df}{dt} dt$$

رضی کنیم که $f(t)$ و مشتق آن قابل تبدیل باشند، جمله آخر عبارت فوق را می‌توان به مورت یک حد نشان داد:

$$\int_0^\infty \frac{df}{dt} dt = \lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t \frac{df}{dt} dt = \lim_{t \rightarrow \infty} [f(t) - f(0^-)]$$

توجه به این که $f(0^-)$ ثابت است، از مقایسه دو عبارت فوق نتیجه می‌شود که:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} [sF(s)] \quad (3)$$

همان قضیه مقدار نهایی است. در استفاده از این قضیه لازم است که $f(0^-)$ یعنی حد ازای ∞ وجود داشته باشد و همه قطب‌های ($F(s)$) به جز قطب ساده در مبدأ در نیمه سمت چپ صفحه s واقع باشند. بنابراین قطب‌های حاصل ضرب ($sF(s)$) در داخل نیمه سمت چپ واقع خواهد شد.

واضح است که پاسخ سیستم بهینه نبوده است. در واقع طراحی سیستم نایابار بوده است. پایداری و ثبات سیستم از موضوعات مهم در مهندسی در گستره وسیعی از مسائل است می‌آوریم: (مثل کنترل کروز، رگولاتورهای دما و سیستم‌های ردیاب، نمونه‌هایی از آن هستند)، و تکنیک ارائه شده در این فصل در بررسی یک سیستم خاص از این نظر گرانبها است که اجازه می‌دهد تا پایداری یک سیستم مورد ارزیابی قرار گیرد.

یکی از جنبه‌های قادر تند کار در فضای ۸ که به وسیله تبدیل لاپلاس امکان‌پذیر شده این است که در عوض توصیف پاسخ یک سیستم خاص از طریق یک معادله دیفرانسیل - انتگرالی، ما می‌توانیم یکتابع تبدیل سیستم به دست آوریم که به وسیله نسبت دو چندجمله‌ای از ۵ نشان داده شده است. سپس موضوع پایداری به راحتی با مطالعه مخرج تابع تبدیل بررسی می‌گردد: نایاب قطبی دارای مولفه حقیقی مثبت باشد.

در واقع فقط چند تکنیک وجود دارد که قابل اعمال به مسئله برای تعیین پایداری خاص می‌باشد و یک روش ساده به نام نسبت راث معروف است. تابع سیستم را در حوزه s در نظر گیرید (موضوع در فصل ۱۵ بیشتر توضیح داده شده است):

$$D(s) = 7s^4 + 4s^3 + s^2 + 13s + 2$$

همه ضرایب این چندجمله‌ای ۸ مرتبه چهارم مثبت و غیرصفرند. بنابراین جدول راث را تشکیل می‌دهیم:

7	1	2
4	13	0
-21.75	2	
13.37		
2		

از این جدول می‌بینیم که تغییر علامت در سمت چپ ترین سوتون صورت $a_0 + a_1 s + a_2 s^2 + a_3 s^3 + a_4 s^4 + a_5 s^5 + a_6 s^6 + a_7 s^7 + a_8 s^8$ نوشت. بدون این که چندجمله‌ای را به صورت ضرب در او ریم نمی‌توان راجع به امکان انجام و اجرای کار است، زیرا در قطب دارای مولفه حقیقی قطب‌ها اظهار نظر کرد. اگر همه ضرایب $a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8$ مثبت و غیرصفر باشد، رویه راث به ما چیزی آن‌ها را مطابق زیر پیشنهاد می‌نماید:

$$H(s) = \frac{N(s)}{D(s)}$$

چندجمله‌ای که به وسیله $D(s)$ نشان داده است را می‌توان به صورت $a_0 + a_1 s + a_2 s^2 + a_3 s^3 + a_4 s^4 + a_5 s^5 + a_6 s^6 + a_7 s^7 + a_8 s^8$ نوشت. بدون این که چندجمله‌ای را به صورت ضرب در او ریم نمی‌توان راجع به امکان انجام و اجرای کار است، زیرا در قطب دارای مولفه حقیقی مثبت است.

۱۴-۷ قضایای مقدار اولیه و مقدار نهایی

دو قضیه اساسی آخر که مورد بحث ما است، به نام قضایای مقدار اولیه و مقدار نهایی خوانده می‌شوند. آن‌ها می‌توانند $(f(0^+))$ را با توجه به مقادیر حد $sF(s)$ به ما بدهند. چنین توانمندی ارزشمند است. اگر فقط مقادیر اولیه و نهایی مورد نیاز باشد، نیازی به صرف وقت و انجام عمل تبدیل معکوس نیست.

قضیه مقدار اولیه

برای به دست آوردن قضیه مقدار اولیه، یک بار دیگر تبدیل لاپلاس را برای مشتق ملاحظه می‌کنیم.

$$\mathcal{L} \left\{ \frac{df}{dt} \right\} = sF(s) - f(0^-) = \int_0^\infty e^{-st} \frac{df}{dt} dt$$

اکنون اجازه می‌دهیم تا s به سمت بینهایت برود. باشکستن انتگرال به دو بخش داریم:

$$\lim_{s \rightarrow \infty} [sF(s) - f(0^-)] = \lim_{s \rightarrow \infty} \left(\int_0^{0^+} e^0 \frac{df}{dt} dt + \int_{0^+}^\infty e^{-st} \frac{df}{dt} dt \right)$$

می‌بینیم که در حد انتگرال دوم به صفر می‌رسد، چون خود مقدار زیر انتگرال صفر می‌شود. همچنین ($f(0^+)$ تابعی از s نیست و می‌تواند از حد سمت چپ خارج گردد:

مثال ۱۴-۱۱

به کمک قضیه مقدار نهایی $f(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} f(t)$ را برای تابع $f(t) = e^{-at}$ به دست آورید که در آن $a > 0$ است.

حتی بدون استفاده از قضیه مدار نهایی می‌توان بلافضله دید که $f(\infty) = 0$ است. تابع تبدیل $f(t)$ برابر است با:

$$F(s) = \frac{1}{s} - \frac{1}{s+a} = \frac{a}{s(s+a)}$$

قطب‌های $F(s)$ عبارتند از: $s = -a$. بنابراین قطب غیرصفر با فرض $a > 0$ در سمت چپ صفحه s واقع است. ملاحظه می‌شود که می‌توان قضیه مقدار نهایی را به این تابع هم اعمال کرد. با ضرب در s و میل s به سمت صفر داریم:

$$\lim_{s \rightarrow 0} [sF(s)] = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{a}{s+a} = 1$$

که با $f(\infty) = 0$ برابر است.

با این وجود اگر $f(t)$ سینوسی باشد و لذا $F(s)$ روی محور ω -زدایی قطب‌های باشد، آن‌گاه کاربرد چشم کورکرانه قضیه مقدار نهایی، مارابه سمت صفر شدن مقدار نهایی سوق می‌دهد. با این وجود می‌دانیم که مقدار نهایی $\sin \omega_0 t$ یا $\cos \omega_0 t$ نامعین است. پس مواظب قطب‌های روی محور ω -زدایید.



تمرین

۱۴-۱۴ بدون این که ابتدا $f(t)$ را باید، مقدار $f(0^+)$ و $f(\infty)$ را برای تبدیل‌های زیر بدست اورید:

$$(a) \frac{(s^2 + 6)}{(s^2 + 7)}, (b) \frac{4e^{-2s}}{s + 50}, (c) \frac{(2.5^2 + 10)}{[2s(s^2 + 32 + 5)]}$$

جواب: ۰, ۰, ۲۰۰, ∞ , نامعین (قطب‌ها روی ω -زداییدند)، ۱, ۲.۵.

۱۴-۸ خلاصه فصل و مرور

مفهوم فرکانس مختلط اجازه می‌دهد تا بررسی مؤلفه‌های نمایی میرا و نوسانی یک تابع به طور همزمان صورت گیرد.

فرکانس مختلط $s = \sigma + j\omega$ حالت کلی است، $(s = 0)$ dc, $(\sigma = 0)$ نمایی ($\omega = 0$) و سینوسی ($\sigma = 0$) حالات خاص‌اند.

تحلیل مدارها در حوزه s از تبدیل معادلات انتگرالی - دیفرانسیلی در حوزه زمان به معادلات جبری در حوزه فرکانس امکان‌پذیر است.

در مسایل تحلیل مدار، ما تابع حوزه زمان را با تبدیل لاپلاس یکسویه به حوزه فرکانس تبدیل می‌نماییم.

$$F(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t) dt$$

عكس تبدیل لاپلاس عبارات حوزه فرکانس را به حوزه زمان تبدیل می‌کند. با این وجود به دلیل در اختیار بودن جدول لیست جفت‌های تبدیل لاپلاس، کمتر از آن استفاده می‌شود.

تابع ضربه واحد تقریب خوبی برای پالس‌های باریک در مقایسه با ثابت‌های زمانی مدار است. این تابع فقط در یک نقطه غیر صفر است و سطح واحدی دارد.

خاصیت جمع‌پذیری $\mathcal{L}\{f_1(t) + f_2(t)\} = \mathcal{L}\{f_1(t)\} + \mathcal{L}\{f_2(t)\}$

خاصیت همگنی $(\mathcal{L}\{kf(t)\}) = k\mathcal{L}\{f(t)\}$ مقدار ثابت

- قضایی مشتق‌گیری و انتگرال‌گیری اجازه می‌دهند تا معادلات انتگرالی - دیفرانسیلی را در حوزه زمان به معادلات جبری در حوزه فرکانس تبدیل نماییم.
- عکس تبدیل‌ها معمولاً با تکنیک بسط به کسرهای جزئی و اعمال مختلف به دست می‌آیند (جدول ۱۴-۲) تا کمیت‌های حوزه s را به عبارتی که در جدول تبدیل یافت می‌شوند، مبدل سازند (مثل جدول ۱۴-۱).
- قضایی مقدار اولیه و مقدار نهایی فقط برای $f(t = 0^+) = \infty$ و $f(t = \infty) = 0$ مفیدند.

۱۴-۹ خواندنی‌های کمکی

An easily readable development of the Laplace transform and some of its key properties can be found in Chap. 4 of

A. Pinkus and S. Zafrany, *Fourier Series and Integral Transforms*, Cambridge, United Kingdom: Cambridge University Press, 1997.

A much more detailed treatment of integral transforms and their application to science and engineering problems can be found in

B. Davies, *Integral Transforms and Their Applications*, 3rd ed. New York: Springer-Verlag, 2002.

Stability and the Routh test are discussed in Chap. 5 of

K. Ogata, *Modern Control Engineering*, 4th ed. Englewood Cliffs, N.J.: Prentice-Hall, 2002.

مسائل

۱۴-۱ فرکانس مختلط

۶. آسیستان جدید شما سیگنالی که از یک دستگاه تست می‌آید، اندازه‌گیری

$$\text{می‌نماید و می‌نویسد: } v(t) = V_x e^{-(2+j60)t}, \text{ که} \\ V_x = 8 - j100 \text{ V}$$

(الف) یک جمله گمشده وجود دارد. آن چیست و چگونه گمشدن آن را می‌توانید بیان کنید؟ (ب) فرکانس مختلط سیگنال چیست؟ (ج) اهمیت $|Re(s)| < |Im(s)|$ چیست؟ (د) اهمیت $|Re(V_x)| < |Im(V_x)|$ چیست؟

۷. فرض کنید بخش حقیقی جریان مختلط متغیر با زمان $i(t)$ برابر باشد. (الف) اگر $i(t) = (4 - j7)e^{-(3+j15)t}$ باشد. (الف) اگر $I_A(t) = (4 - j7)e^{-3t}$ باشد. (ب) اگر $i(t) = (4 + j7)e^{-3t} (\cos 15t - j \sin 15t)$ باشد. (ب) اگر $I_A(t) = K_A e^{8t}$ باشد که در آن $i_A(t) = K_A e^{8t}$ باشد که در آن $i_A(t) = K_A e^{8t}$ باشد. (ج) اگر $I_B(t) = K_B e^{3t}$ باشد که در آن $I_B(t) = K_B e^{3t}$ باشد. (د) اگر $i_B(t) = K_B e^{3t}$ باشد که در آن $I_B(t) = K_B e^{3t}$ باشد. (د) اگر $i(t) = 2.33 \cos(279 \times 10^6 t) f_A$ باشد. (الف) به وسیله یک رادیوتسکوپ از کهکشان نیوبولا دریافت شده است (الف) فرکانس سیگنال چند هرتز است؟ (ب) اگر ولتاژ از عبور جریان به داخل یک مقاومت $T\Omega$ به دست آید، سیگنال ولتاژ را به صورت جمع دو نمای مختلط بنویسید.

۸. یک سیگنال مستتابوی جریان $i(t) = 2.33 \cos(279 \times 10^6 t) f_A$ به وسیله یک رادیوتسکوپ از کهکشان نیوبولا دریافت شده است (الف) فرکانس سیگنال چند هرتز است؟ (ب) اگر ولتاژ از عبور جریان به داخل یک مقاومت $T\Omega$ به دست آید، سیگنال ولتاژ را به صورت جمع دو نمای مختلط بنویسید.

۱. برای هر مورد فرکانس مختلط را مشخص نمایید.

$$(الف) i(t) = 3 \cos 9t \mu A, (ب) v(t) = 5V$$

$$(c) v(t) = 65e^{-1000t} \cos 1000t V, (d) i(t) = 2.5e^{-8t} mA$$

$$(e) v(t) = 8 + 2 \cos t mV$$

$$(f) q(t) = 7e^{-5t} C, (g) i(t) = 3 \cos 77t A, (h) v(t) = 33.3 V$$

$$(i) q(t) = 7e^{-5t} - 19e^{-5t} \sin(8t - 42^\circ) C$$

$$(j) مزدوج مختلط در جمله زیر را به دست آورید و باس خود را به قطبی$$

$$(k) مزدوج مختلط $\sin 4t$ را کنید: (الف) $8e^{-4t}$, (ب) $8e^{-4t}$, (ج) $9 - j7$, (د) $9 + j7$, (ه) e^{4t} , (و) $\cos 4t$, (ز) $\sin 4t$$$

$$(l) مزدوج مختلط مربوطه را به دست آورید: (الف) $j-30$, (ب) 9 , (ج) 9 , (ز) $-90^\circ$$$

$$(m) \frac{5}{4-j7} \angle -45^\circ$$

$$(n) \frac{4-j18}{3.33+j} \angle 24^\circ$$

$$(o) 4 \angle 92.5^\circ$$

۵. بار از یک میدان تشعشع خاصی به صورت $C = \frac{9}{43} \mu F$ در فرکانس

مختلط $s = j20\pi s^{-1}$ نشان داده است. (الف) در $s = 1$ چند

بار تشعشع یافته است؟ (ب) حداکثر مقدار بار منتشره در یک زمان چقدر

است؟ (ج) آیا منبع اثری از نابودی رانشان می‌دهد. بر اساس فرکانس Q

چه نشانه‌ای وجود دارد؟

$$40. \text{اگر } N(s) = 2s^2 \text{ باشد، مطلوب است:} \\ (\text{الف}) \frac{dN(s)}{dt} - 1 = D(s) \quad (\text{برای جزئیات}) \\ (18s+12)(16s^2+125+2) \cdot (s+3)(s^2+19s+90) \\ \text{(ب) جزیان‌های (الف) تا (ج) را متناسب امتحان کنید.} \\ 41. \text{اگر } F(s) = \frac{2s+10}{s-3} \text{ باشد، مطلوب است:} \\ 3e^{-0.8s} \cdot \frac{2s+10}{s-3}, (\text{الف}), (\text{برای جزئیات}) \\ \frac{12}{(s+2)^2(s^2+4)}, (\text{ب}), (\text{برای جزئیات}) \\ 42. \text{پیداکنید: } F(s) \quad (\text{الف}), (\text{برای جزئیات}) \\ F(s) = 2 - s^{-1} + \frac{\pi}{(s^3 + 4s^2 + 5s + 2)} \quad (\text{برای جزئیات}) \\ 43. \text{بسط به کسرهای جزئی را برای هر یک از توابع گویای زیر به دست آورده و سپس تابع زمانی متناظر آن را پیداکنید.} \\ F(s) = [(s+1)(s+2)] / [s(s+3)] \quad (\text{الف}) \\ F(s) = (s+2) / [s^2(s^2+4)] \quad (\text{برای جزئیات}) \\ 44. \text{اگر } G(s) = \frac{12s^3}{(s+1)(s+2)} \text{ باشد:} \\ \frac{12s^3}{(s^2+2s+1)(s+2)} \quad (\text{الف}) \\ \frac{12s^3}{(s+1)(s+2)(s+3)} \quad (\text{ب}) \\ \frac{12s^3}{(s+1)(s+2)(s+3)} \quad (\text{ج}) \quad (\text{برای جزئیات}) \\ 45. \text{اگر } H(s) = \frac{(s+1)^2}{(s+1)(s+2)} \text{ باشد:} \\ \frac{s+3}{(s+1)(s+2)} \quad (\text{الف}) \\ 3s - \frac{s^4}{(s^2+2s+1)(s+3)} + 1 \quad (\text{ج}) \quad (\text{برای جزئیات})$$

۱۴-۶ قضایای اصلی در تبدیل لاپلاس

۴۶. تبدیل لاپلاس معادلات زیر را به دست آورید:

$$5 \frac{di}{dt} - 7 \frac{d^2i}{dt^2} + 9i = 4 \quad (\text{الف})$$

$$\text{میانهای } \frac{dm}{dt^2} + \mu_f \frac{dp}{dt} + kp(t) = 0 \quad (\text{ب})$$

این معادله پاسخ یک سیستم ضربه‌گیر بدون نیرو را توصیف می‌نماید.

$$\frac{d\Delta n_p}{dt} = - \frac{d\Delta n_p}{dt} + G_L \quad (\text{ج})$$

دریافتی (Δn_p) را در سیلیکان نوع P تحت تشعشع نور نشان می‌دهد

$$G_L \quad (\text{ثابت متناسب با شدت نور است}).$$

$$47. \text{اگر } f(t) = 8f(t) + 6f'(t) \text{ و } f(0') = -3 \text{ باشد، با تبدیل لاپلاس از معادله دیفرانسیل برای حل } F(s), \text{ و عکس تبدیل } R, f(t) \text{ را به دست آورید.}$$

$$28. \text{موارد زیر را حساب کنید:} \\ (\text{الف}) \int_{-\infty}^{\infty} 8 \sin 5t \delta(t-1) dt \\ (\text{ب}) \int_{-\infty}^{\infty} (t-5)^2 \delta(t-2) dt \\ (\text{ج}) \int_{-\infty}^{-3000} 5e^{-3.333 \times 10^{-4}} dt \\ (\text{د}) \int_{-\infty}^{\infty} K \delta(t-2) dt \quad \text{که در آن } K \text{ یک ثابت حقیقی است.} \\ 29. \text{با تعریف تبدیل لاپلاس یکسویه } F(s) \text{ را برای (الف) آهای زیر به دست آورید.} \\ (\text{الف}) u(t) \quad (\text{ب}) [u(s-t)] \quad (\text{ج}) \int_{0}^{\infty} 5e^{-5t} \sin(10t + 0.27t) dt \\ (\text{د}) 4u(t-2) \quad (\text{ه}) 4e^{-3t} u(t-2) \\ (\text{ه}) 5\delta(t) \quad (\text{ز}) 4\delta(t-1) \\ 30. \text{موارد زیر را محاسبه کنید:} \\ (\text{الف}) \int_{-\infty}^{\infty} t^5 \delta(t-2) dt \quad (\text{ب}) \int_{-\infty}^{\infty} \cos 500t \delta(t) dt \\ (\text{ج}) \int_{-\infty}^{\infty} -K^2 \delta(t-c) dt \quad (\text{د}) \int_{-\infty}^{\infty} 2.5e^{-0.001t} \delta(t-1000) dt \\ (\text{ه}) \text{که } K \text{ و } c \text{ ثابت‌های حقیقی‌اند.} \\ 31. \text{با تبدیل لاپلاس یکسویه، اگر } f(t) \text{ مطابق زیر باشد، } F(s) \text{ را به دست آورید:} \\ (\text{الف}) u(t) \quad (\text{ب}) [u(t-3)]u(t-3) \\ (\text{ج}) 2u(t-1)[u(t-3)u(t-4)] \quad (\text{د}) 2u(t-1)[\cos \pi t - \sin \pi t] \\ (\text{ه}) 3\delta(t-5) \quad (\text{ز}) 3e^{-2t} u(t-4) \\ 14-۵ تکنیک‌های عکس تبدیل لاپلاس$$

۱۴-۷ تبدیل لاپلاس تابع زمانی ساده

۳۲. برای تابع $f(t) = 4e^{-t} u(t)$ را در یک مقاومت 1Ω فراهم می‌کنند. (الف) نمایش حوزه فرکانس و لاتاز دو سر مقاومت را به دست آورید. (ب) با یادآوری $s = \sigma + j\omega$ ، اندازه حربان در حوزه زمان را به صورت تابعی از ω ترسیم کنید.

۳۳. عکس تبدیل هر یک را بدون اجرای هر انتگرال‌گیری و بدون استفاده از مطلب پیداکنید: (الف) $g(t) = 1 + (s+4.5)s^2$ (ب) $r(t) = 16 + (s+4.4)^{-1}$ (ج) $v(t) = 5u(t-2) - 5u(t-5) + 88s^{-1} + \frac{17}{(s+6)(s+1)}$

۳۴. ولتاژ حوزه فرکانس دو سر مقاومت در ۲ kΩ را بایه زیر $V(s) = 5s^{-1}$ به دست آورید. (الف) مقدار دارد. (ب) درجه زمانی مقاومت در $t = 1 \text{ ms}$ چقدر است؟

۳۵. حربان حوزه فرکانس در مقاومت 100Ω برای 10 pA است. (الف) و لاتاز $v(t) = 7v$ دو سر مقاومت را به عنوان تابعی از زمان پیشکشید. (ب) توان جذب شده به وسیله مقاومت در $t = 100 \text{ ms}$ چقدر است؟ (ج) درجه زمانی ولتاژ دو سر مقاومت ۱% از حد اکثر مقدارش افت می‌کند؟

۳۶. برای تابع $f(t) = e^{-s+1}[(s+1)/s] + [2/(s+1)] + 2e^{-s} + (e^{-s+1})^2$ (الف) را معین کنید. به شرطی که $F(s) = \frac{1}{s-1}$ باشد: (الف) $v(t) = \frac{1}{s-1} \cdot \frac{1}{s-2}$ (ب) $v(t) = 1 + (s-1)u(t-1)$ (ج) $v(t) = 1 + (s-1)^2 u(t-1)$ (د) $v(t) = e^{-(s-1)t} - (s-1)u(t-1)$ (ه) $v(t) = e^{-(s-1)t} - (s-1)^2 u(t-1)$

۳۷. برای هر یک از توابع زیر تبدیل لاپلاس یکسویه را به دست آورید: (الف) $8e^{2t}[u(t+3) - u(t-3)]$ (ب) $8e^{-2t}[u(t+3) - u(t-3)]$ (ج) $e^{-2|t|}[u(t+3) - u(t-3)]$

۳۸. تبدیل لاپلاس یکسویه را برای هر یک از توابع زیر به دست آورید: (الف) $v(t) = \frac{1}{s-1} + (s-1)u(t-1)$ (ب) $v(t) = \frac{1}{s-1} + (s-1)^2 u(t-1)$ (ج) $v(t) = 1 + (s-1)^2 u(t-1)$ (د) $v(t) = e^{-(s-1)t} - (s-1)u(t-1)$ (ه) $v(t) = e^{-(s-1)t} - (s-1)^2 u(t-1)$

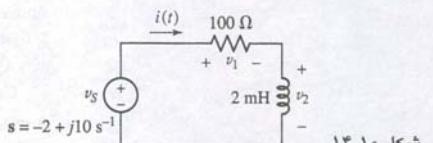
۳۹. پیش (الف) تا (د) را متناسب امتحان کنید.

۴۰. با فرض عبارات زیر برای (الف) $F(s)$ را به دست آورید: (الف) $v(t) = 5/(s+1)$ (ب) $v(t) = 18/[(s+1)(s+4)]$ (ج) $v(t) = 2/(s+4)$ (ه) $v(t) = 18s^2/[(s+1)(s+4)]$ (ز) $v(t) = 18s/[(s+1)(s+4)]$

۹. اگر یک ولتاژ مختلط متغیر بازمان به صورت $v_s = (20-j30)e^{(-2+j50)t}$ مفروض باشد، (الف) $v_s(0)$ را به فرم قطبی درآورید. (ب) $\text{Re}\{v_s(t)\}$ چقدر است؟ (د) s را مشخص کنید. (ه) را معین نمایید.

۱۴-۸ تابع تحریک سینوسی میرا

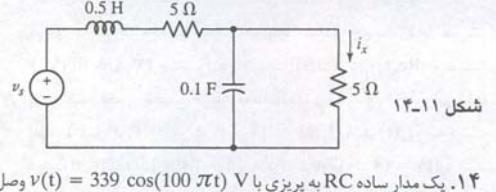
۱۰. مدار شکل ۱۴-۱۰ به وسیله یک منبع V ، زاویه فاز 30° و فرکانس $\omega = 10 \text{ rad/s}$ را اندازی شده است. (الف) $i(t)$ را معین کنید. (ب) $v_1(t)$ و $v_2(t)$ را تعیین نمایید.



۱۱. (الف) مفهوم فیزیور در فصل ۱۰ را برای به دست آوردن عبارات امپدانس القاگرها، خازن‌ها و مقاومت‌ها که با فرکانس s را اندازی می‌شوند، گسترش دهد. (ب) امپدانس مقاومت و القاگر شکل ۱۴-۱۰ چقدر است؟ (ج) ω و σ را معین کنید.

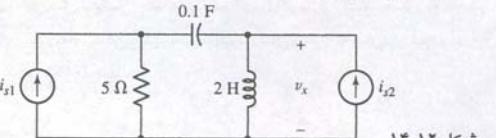
۱۲. یک مدار RL سری به پریزی در امریکای شمالی به ولتاژ $v(t) = 179 \cos(120\pi t) \text{ V}$ و $R = 100 \Omega$ وصل است. اگر $L = 500 \mu\text{H}$ باشد، (الف) فرکانس مختلط متناظر حوزه فرکانس $V(s)$ را معین کنید. (ب) $v(t)$ را در حوزه فرکانس برای مدار به دست آورید. (ج) $i(t)$ را پیداکنید.

۱۳. (الف) اگر در مدار شکل ۱۴-۱۱ ولتاژ $V(s) = 10e^{-2t} \cos(10t + 30^\circ)$ باشد. در حوزه فرکانس X را پیداکنید. (ب) $i(t)$ را معین کنید.



۱۴. یک مدار ساده به پریزی با V وصل است. اگر $C = 100 \mu\text{F}$ و $R = 2 \text{ k}\Omega$ باشد، (الف) فرکانس مختلط ولتاژ $V(s)$ را در حوزه فرکانس به دست آورید. (ب) $i(s)$ را در حوزه فرکانس معین نمایید. (ج) $i(t)$ را پیداکنید.

۱۵. اگر در مدار شکل ۱۴-۱۲ مدار $i_{s1} = 20e^{-3t} \cos 4t$ جریان A باشد، (الف) $i_{s2} = 30e^{-3t} \sin 4t$ باشد. (الف) در حوزه فرکانس X را پیداکنید. (ب) $v_X(t)$ را پیداکنید.



۱۴-۱۲ شکل ۱۴-۱۲

به دست آورید.

$$\begin{aligned} & 5(s^2 + 1)/(s + 1)^3 \quad (\text{الف}) \\ & 5(s^2 + 1)/[s(s + 1)^3] \quad (\text{ب}) \\ & .(1 - e^{-3s}) / s^2 \quad (\text{ج}) \end{aligned}$$

۶۴ فرض کنید $u(t) = (1/t)(e^{-at} - e^{-bt})$ باشد، (الف) را به $f(s) = \lim_{t \rightarrow 0} f(t)$ در سرمه دست آورید. (ب) هر دو سمت معادله $\lim_{s \rightarrow \infty} [sF(s)] = \lim_{t \rightarrow 0} f(t)$ را اعمال کنید.

۶۵ هر دو مقدار اولیه و ثانویه را برای توابع زیر پیدا کنید یا نشان دهید که

$$\begin{aligned} & 2s^3 - s^2 - 3s - 5 \quad (\text{الف}) \\ & s^3 + 6s^2 + 10s \quad (\text{ب}) \\ & 8s^2 - 2 \quad (\text{ج}) \end{aligned}$$

$$\frac{2s^3 - s^2 - 3s - 5}{(s+2)^2(s+1)(s^2+6s+10)} + \frac{8s^2 - 2}{s^2 - 6s + 10}$$

۶۵. با فرض تابع V اعمال کنید. صحت پاسخ خود را با $v(t) = 7u(t) + 8e^{-3t}u(t)$ در $t = \infty$ ارزیابی کنید.

۶۶ برای یک تابع زمانی که تبدیل لاپلاس آن در زیر داده شده $f(0^+) = 0$ و $5(s^2 + 1)/(s^3 + 1)$ دست آورید. (الف) را به دست آورید. (ب) $(s^2 + 1)(s^4 + 16)$ (ج) $5(s^2 + 1)/(s^4 + 16)$

۶۷ بدون یافتن $f(t)$ برای هر یک از موارد زیر $f(0^+)$ و $f(\infty)$ را به دست آورید:

$$\begin{aligned} & (2s^2 + 6)/[s(s^2 + 52 + 2)] \quad (\text{الف}) \\ & 2e^{-s} / (s + 3) \quad (\text{ب}) \\ & (s^2 + 1) / (s^2 + 5) \quad (\text{ج}) \end{aligned}$$

۶۸ برای تابع زمانی که تبدیل لاپلاس آن در زیر داده شده $f(0^+)$ و $f(\infty)$ را پیدا کنید

$$\frac{8s^2 - 2}{(s + 2)^2(s + 1)(s^2 + 6s + 10)} + \frac{8s - 2}{s^2 - 6s + 10}$$

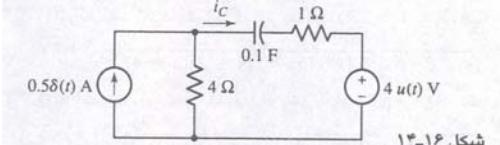
۵۶ را برای (الف) $v(t) = 4 \cos(100t)$ و (ب) $v(t) = 2 \sin(10t)$ مقدار $i_L(t)$ در 10Ω و $5H$ را پیدا کنید. (ج) $\delta(t) + \sin(6t)$ و (د) $\cos(5t) \sin(3t)$

۵۷ یک مقاومت R ، خازن C ، القاگر L و یک منبع جریان ایده‌آل ممنوع با مرتع مثبت در پایه‌های باشد که جریان i را در دو سر آن گاه v با هم موزیند. بگذرید V لذتزا در استفاده نمایید.

(ب) از تکنیک‌های تبدیل لاپلاس برای یافتن $v(t)$ استفاده نمایید. (ب) از معابر را که در $t > 0$ معتبر باشد، برای تبدیل $i_C(t)$ با بیابید.

۵۸ یک معادله انتگرالی - مشتقی بر حسب C برای مدار شکل ۱۴-۱۶ را حل کنید و سپس با عکس تبدیل لاپلاس را بگیرید. برای $i_C(t)$ از رابه دست آورید.

۵۹ با فرض $v(t) = v' + 6v + 9 \int_0^t v(z) dz = 24(t-2)u(t-2)$ است. $v(0^-) = 0$ است. را به دست آورید.



۶۰ تست را برای توابع زیر اعمال کنید و بگویید آیا پایدار است یا ناپایدار؟

$$(a) H(s) = \frac{s - 500}{s^3 + 13s^2 + 47s + 35}$$

$$(b) H(s) = \frac{s - 500}{s^3 + 13s^2 + s + 35}$$

۶۲ تست را برای توابع زیر اعمال کرده بگویید پایدارند یا خیر. سپس هر مخرج را به صورت ضرب در آروده و قطب‌های $H(s)$ را شناسایی کنید. صحت تست را برای آن‌ها تحقیق نمایید.

$$(a) H(s) = \frac{4s}{s^2 + 3s + 8}$$

$$(b) H(s) = \frac{s - 9}{s^2 + 2s + 1}$$

۶۳ تست را برای توابع زیر اعمال کرده و بگویید پایدارند یا خیر:

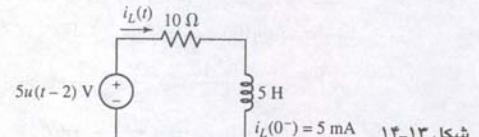
$$(a) H(s) = \frac{s^2}{s^4 + 3s^3 + 3s^2 + 3s + 1}$$

$$(b) H(s) = \frac{2}{s + 3}$$

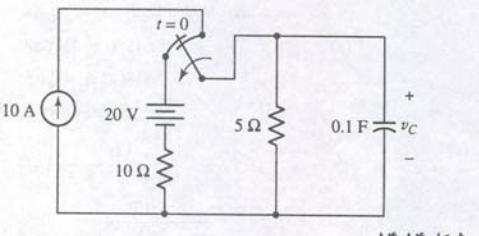
۱۴-۷ قضایای مقدار اولیه و مقدار نهایی

۶۴ با فرض تابع V اعمال کنید. صحت پاسخ خود را با $v(t) = 0$ در $t = 0$ ارزیابی کنید.

۴۸ با مرتعه به مدار RL شکل ۱۴-۱۳ ، (الف) معادله دیفرانسیلی برای جریان القاگر $i_L(t)$ بنویسید. (ب) $i_L(t)$ را پیدا کنید. (ج) با عکس تبدیل لاپلاس $i_L(s)$ را به دست آورید.



۴۹ با فرض مدار شکل ۱۴-۱۴ ، (الف) $v_C(t)$ را پیدا کنید. (ب) معادله‌ای را که در $t > 0$ معتبر باشد، برای تبدیل $i_C(t)$ با بیابید. (ج) با استفاده از تبدیل لاپلاس $V_C(s)$ و سپس $v_C(t)$ را پیدا کنید.



۵۰ در شکل ۱۴-۱۳ ، یک منبع ولتاژ V با مرتعه $5u(t-2)V$ سری کنید و مسئله ۴۸ را تکرار نمایید. (ب) جریان القاگر PSpice مناسبی، آن را مقایسه نمایید.

۵۱ با فرض معادله دیفرانسیل $12u(t) = 20f'_2(t) + 3f_2(t)$ که $f_2(0^+) = 2$ است. تبدیل لاپلاس $F_2(s)$ را به دست آورید و سپس $y(t)$ را پیدا کنید.

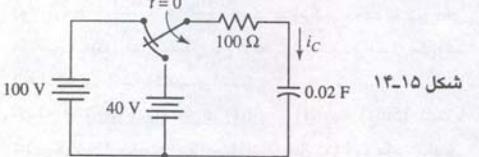
۵۲ عکس تبدیل لاپلاس هر یک از موارد زیر را به دست آورید (الف) $s^2 - 5s - 6$ (ب) $s/(s^2 + 5s + 6)$ (ج) $s/(s^2 + 99)$ (د) $1/(s^2 + 5s + 6)$ (ه) s^2 .

۵۳ با فرض دو معادله دیفرانسیل $y' - 2x + 3y = 8u(t)$ و $x' + y = 2u(t)$ که $y(0^-) = 5$ است. $x(t)$ و $y(t)$ را به دست آورید.

۵۴ اگر $F(s)$ با وابط زیر داده شده باشد، (الف) $.s^2/(s + 2) - s + 8 + 8s^{-1}$ (ب) $f(0^-) = 0$

۵۵ (الف) برای مدار شکل ۱۴-۱۵ ، مقدار $i_C(t)$ را بیابید. (ب) معادله‌ای برای $i_C(t)$ در حوزه زمان بنویسید که در $t > 0$ معتبر باشد.

(ج) از روش‌های تبدیل لاپلاس برای حل $i_C(t)$ استفاده کنید و سپس عکس تبدیل را پیدا کنید.



فصل پانزدهم

تحلیل مدار در حوزه S

مفهوم کلیدی

در فصل ۱۴ مفهوم فرکانس مختلط را به دست آور迪م و در تحلیل مدار، استفاده از تبدیل لاپلاس برای حل معادلات دیفرانسیل را معرفی کردیم. پس از کمی ممارست در رفتن به حوزه زمان و بازگشت به حوزه فرکانس و بالعکس چیره دست شدیم. اکنون آماده ایم تا این تکنیک‌ها را با روشی ساخت‌یافته در تحلیل مدارها به کار گیریم. مجموعه مهارت‌های حاصل مارا قادر می‌سازد تا هر مدار خطی را موثرتر تحلیل کنیم تا مستثنی از طبیعت منبع، پاسخ کامل تری (یعنی پاسخ گذرا به علاوه حالت ماندگار) به دست آید.

Y(s) و Z(s) ۱۵-۱

مز موقفت فیزورها در تحلیل حالت ماندگار مدارهای سینوسی تبدیل مقاومت‌ها، خازن‌ها و لقاگرها به امپدانس است. آن‌گاه تحلیل مدار با استفاده از تکنیک‌های گرهی یا حلقه‌ای، جمعی، تبدیل منبع و نیز معادلهای تونن و نورتن به پیش می‌رود. همان‌طور که قبلاً ممکن است حس کرده باشیم این مفهوم قابل گسترش به حوزه S است چون حالت ماندگار سینوسی فقط یک حالت خاصی از آن است (که $\omega = 0$ می‌باشد).

مقاآمت‌ها در حوزه فرکانس

جازه بدهید با ساده‌ترین حالت آغاز کنیم که در آن یک مقاومت به منبع ولتاژ (t) متصل است. نانون اهم بیان می‌دارد که:

$$v(t) = Ri(t)$$

اگر فتن تبدیل لاپلاس از دو طرف:

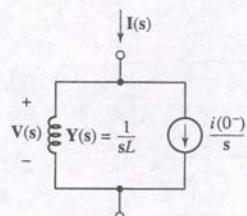
$$V(s) = RI(s)$$

ی بینیم که نسبت ولتاژ در حوزه فرکانس به جریان در حوزه فرکانس همان مقاومت R است.

نابراین:

$$Z(s) = \frac{V(s)}{I(s)} = R \quad (1)$$

مون در حوزه فرکانس کار می‌کنیم، به این کمیت امپدانس می‌گوییم، ولی همچنان واحد اهم (Ω) را برای آن به کارخواهیم برد. درست مثل آنچه که در کار با فیزورها در حالت ماندگار سینوسی دریافتیم، امپدانس مقاومت به فرکانس وابسته نیست. امپدانس (s) یک مقاومت به سرعت نسبت $I(s)$ به $V(s)$ تعریف می‌شود و در واقع همان $\frac{1}{R}$ است. واحد این کمیت یعنی (S) می‌باشد.



بکی از آن‌ها ادمیتانس $\frac{1}{sL}$ است که با منبع جریان $\frac{i(0)}{s}$ یعنی دومی، موازی است. مدل حاصل در شکل ۱۵.۲ ملاحظه می‌گردد. انتخاب بکی از دو مدل در شکل ۱۵.۱ (ب) و یا ۱۵.۲ به این سنتگی دارد که در تحلیل یک مدار کامل حاوی القاگر کدام یک معادلات ساده‌تری را عرضه کنند. ضمناً توجه کنید که هرچند در شکل ۱۵.۲، سمبول القاگر با یک ادمیتانس $Z(s) = sL$ هم $Y(s) = \frac{1}{sL}$ برچسب خورده است ولی می‌توان به آن به چشم یک امپدانس L بود.

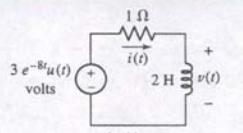
نگاه کرد. مجدداً انتخاب آن‌ها به سلیقه و راحتی تحلیل گرف و بسته است.

اکنون نوبت توضیح واحدها است. وقتی تبدیل لaplas از جریانی مثل (۱) را به دست می‌آوریم، از آن در یک فاصله زمانی انتگرال می‌گیریم. پس واحد $I(s)$ به لحاظ تکنیکی آمپر - ثانیه است. به همین طریق، واحد $V(s)$ ولت - ثانیه می‌باشد. با این وجود قرار یعنی است که کلمه ثانیه را حذف کنیم و به $(s)I$ واحد آمپر، به $(s)V$ ولت تخصیص دهیم. این قرارداد هیچ مشکلی به وجود نمی‌آورد مگر این که بخواهیم معادله‌ای چون معادله (۵) را موشکافی کنیم و جمله‌ای چون $sV(s)$ در آن بایدیم که واحد با واحد $I(s)$ در تضاد باشد. در هر صورت ما به اندازه گیری این کمیت‌های فیزیوری به آمپر و ولت به هنگام بررسی واحدهای یک معادله ادامه می‌دهیم ولی همیشه ثانیه را به خاطر داریم.

شکل ۱۵-۱ مدل حوزه فرکانس دیگری برای القاگر، متشکل از ادمیتانس sL و منبع جریان $i(0+)/s$.



مثال ۱۵-۱



ولتاژ (۱) را در شکل ۱۵-۳ (الف) محاسبه کنید. مقدار اولیه جریان $= 1A$ است. با تبدیل مدار شکل ۱۵-۳ (الف) به معادل حوزه فرکانس شکل ۱۵-۳ (ب)، آغاز می‌کنیم. منبع ولتاژ نمایی به حوزه فرکانس تبدیل شده است، $V(s) = \frac{3}{s+8} + 2$ و القاگر با مدل دو عنصری یعنی یک مپدانس Ω و یک منبع ولتاژ مستقل $V = 2s$ است. $-2V(s) = 2s - 2$. جایگزین شده است. ما به دنبال $V(s)$ هستیم زیرا عکس آن (۱) را به دست می‌دهد. توجه کنید که $V(s)$ در دو سر کل مدار القاگر ظاهر می‌شود و نه فقط در دو سر منبع مستقل.

با انتخاب روشی سرراست داریم:

$$I(s) = \frac{\left[\frac{3}{s+8} + 2 \right]}{1+2s} = \frac{s+9.5}{(s+8)(s+0.5)}$$

$$V(s) = 2sI(s) - 2$$

به نحوی که

$$V(s) = \frac{2s(s+9.5)}{(s+8)(s+0.5)} - 2$$

قبل از هر گونه تلاش در یافتن عکس این عبارت، بهتر است آن را کمی ساده کنیم. پس:

$$V(s) = \frac{2s - 8}{(s+8)(s+0.5)}$$

با به کارگیری تجزیه به کسرهای جزئی یا استفاده از متلب داریم:

$$V(s) = \frac{3.2}{s+8} - \frac{1.2}{s+0.5}$$

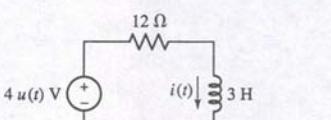
با مراجعه به جدول ۱۴-۱، عکس تبدیل مطابق زیر است:

$$v(t) = [3.2e^{-8t} - 1.2e^{-0.5t}]u(t) \text{ volts}$$

جریان (۱) را در شکل ۱۵-۴ به دست آورید.

$$\text{جواب: } A = \frac{1}{3} [1 - 13e^{-4t}]u(t)$$

شکل ۱۵-۳ (الف) یک مدار ساده مقاومت - القاگر که در آن ولتاژ (۱) امور دندر است. (ب) مدار معادل در حوزه فرکانس، شامل جریان اولیه به در القاگر با استفاده از یک منبع ولتاژ سری (sL).



شکل ۱۵-۴

تمرین

القاگرهای در حوزه فرکانس

حال یک القاگر را که به یک منبع ولتاژ متغیر با زمان (۱) وصل است ملاحظه می‌نماییم (شکل ۱۵-۱ (الف)). می‌دانیم که:

$$v(t) = L \frac{di}{dt}$$

با نوشتن تبدیل لaplas دو طرف داریم:

$$V(s) = L[sI(s) - i(0^+)] \quad (۲)$$

اکنون دو جمله داریم: یکی sL و دیگری (0^+) . در مواردی که انرژی اولیه ذخیره شده در القاگر صفر باشد (یعنی $i(0^+) = 0$) داریم:

$$V(s) = sLI(s)$$

$$Z(s) = \frac{V(s)}{I(s)} = sL \quad (۳)$$

اگر فقط علاقمند به پاسخ ماندگار سینوسی باشیم معادله (۳) ساده‌تر می‌شود. می‌توان از مقادیر اولیه که فقط طبیعت پاسخ گذرا را تحت تأثیر قرار می‌دهند، صرفنظر کرد بنابراین $s = j\omega$ را جایگزین کرده و خواهیم داشت:

$$Z(j\omega) = j\omega L$$

که در فصل ۱۰ هم همان را ملاحظه کردیم.

مدل‌سازی القاگرهای در حوزه s

گرچه به کمیت موجود در معادله (۳) امپدانس القاگر می‌گوییم، ولی باید به بادیاوریم که این کمیت با فرض صفر بودن جریان اولیه به دست آمد. در حالت کلی تر که انرژی در $t = 0^-$ در عنصر ذخیره شده است، این کمیت برای نمایش القاگر در حوزه فرکانس کافی نیست. خوشبختانه می‌توان مقدار اولیه را با مدل‌سازی یک القاگر به صورت ترکیبی از امپدانس و یک منبع ولتاژ یا جریان درآورد. برای انجام آن معادله (۲) را دوباره مرتب می‌کنیم:

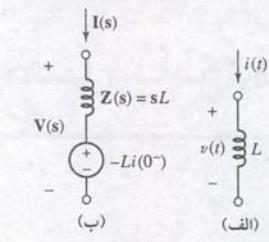
$$V(s) = sLI(s) - Li(0^+) \quad (۴)$$

دومین جمله در سمت راست کمیت ثابت است و از ضرب القاگانی L در مقدار اولیه جریان (0^+) بدست می‌آید. حاصل آن جمله ولتاز ثابتی است که از جمله وابسته به فرکانس $sLI(s)$ کسر شده است. در اینجا کمی تعمق مارایه این سمت سوق می‌دهد که می‌توان یک القاگر را به صورت دو عنصر در حوزه فرکانس همچون شکل ۱۵.۱ (ب) نشان داد.

مدل القاگر در حوزه فرکانس در شکل ۱۵.۱ (ب) از امپدانس sL و یک منبع ولتاژ (0^+) تشکیل شده است. ولتاژ دو سر امپدانس sL طبق قانون اهم به صورت $sLI(s)$ داده می‌شود. چون ترکیب دو عنصری شکل ۱۵.۱ (ب) خطی است، هر تکنیک تحلیل مداری که قابل دیدیم در فضای s هم قابل پیاده‌شدن است. مثلاً ممکن است یک تبدیل منبع روی مدل اجرا کنیم تا امپدانس sL را مجازی با منبع جریان به دست آوریم $sL = \frac{1}{s}Li(0^+) - i(0^+)$. این را می‌توان با انتخاب معادله (۴) و حل برای $I(s)$ به دست آورد:

$$I(s) = \frac{V(s) + Li(0^+)}{sL} = \frac{V(s)}{sL} + \frac{i(0^+)}{s} \quad (۵)$$

دوباره با دو جمله طرف هستیم. اولین جمله در سمت راست علی رغم این که واحد آمپر - ثانیه دارد یک جریان است. بنابراین می‌توان این معادله را با دو مولفه جدا از هم مدل‌سازی کرد:



شکل ۱۵-۱ (الف) القاگر در حوزه زمان. (ب) مدار کاملی از القاگر در حوزه فرکانس متشکل از یک امپدانس sL و یک منبع ولتاژ (0^+) که در ایجاد شرایط اولیه غیرصفر روی عنصر مشارکت داردند.

با جزیه کسرهای جزئی داریم:

$$V_C = \frac{9}{s} - \frac{11}{s + 2/3}$$

را با عکس تبدیل لاپلاس این عبارت بدست می‌آوریم:

$$v_C(t) = 9u(t) - 11e^{-2t/3}u(t) V$$

یا به صورت جمع تر:

$$v_C(t) = [19 - 11e^{-2t/3}]u(t) V$$

صحت حل را تحقیق کنید. آیا با نظر منطقی است؟

امتحان سریعی در قبال $t = 0$ منجر به $-2 V$ $v_C(t)$ می‌گردد که همان مقدار اولیه است. همچنین با $t \rightarrow \infty$ $v_C(t) \rightarrow 9 V$ می‌رود و این چیزی است که در شکل ۱۵.۶ (الف) پس از دوران کارگردانی انتظار آن را داریم.

تمرین

۱۵.۲ مثال ۱۵.۲ را با مدل خازن مبتنی بر منبع ولتاژ تکرار کنید.
جواب: $V = 9 - 11e^{-2t/3}u(t) - 9[1 - e^{-2t/3}]u(t)$

نتایج این بخش در جدول ۱۵.۱ خلاصه شده است. توجه کنید که از قرارداد عالمت عناصر غیرفعال استفاده شده است.

جدول ۱۵.۱ خلاصه‌ای از نمایش‌های حوزه زمان و فرکانس.

حوزه زمان		مقادیر
$V(s) = R I(s)$		$v(t) = R i(t)$
$+ V(s)$	$I(s) = \frac{1}{R} V(s)$	$+ v(t)$
$- V(s)$	$Z(s) = R$	$- i(t)$
$V(s) = sL I(s) - L i(0^-)$		$v(t) = L \frac{di}{dt}$
$+ V(s)$	$I(s) = \frac{V(s)}{sL} + \frac{i(0^-)}{s}$	$+ i(t)$
$- V(s)$	$Z(s) = sL$	$- v(t)$
$V(s) = \frac{I(s)}{sC} + \frac{v(0^-)}{s}$		$i(t) = C \frac{dv}{dt}$
$+ V(s)$	$I(s) = sCV(s) - C v(0^-)$	$+ i(t)$
$- V(s)$	$Z(s) = \frac{1}{sC}$	$- v(t)$

مدل‌سازی خازن‌ها در حوزه S

مفهوم مشابهی را در حوزه S به خازن‌ها می‌توان اعمال کرد. با دنبال کردن قرارداد عناصر غیرفعال طبق شکل ۱۵.۵ (الف) معادله حاکم بر خازن عبارت است از:

$$i = C \frac{dv}{dt}$$

باگرفتن تبدیل لاپلاس از دو طرف داریم:

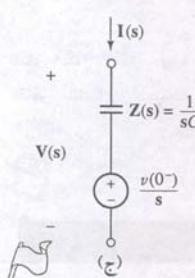
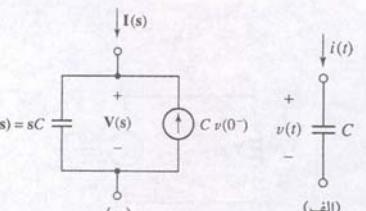
$$I(s) = C[sV(s) - v(0^-)]$$

یا

$$I(s) = sCV(s) - Cv(0^-)$$

که می‌توان آن را با یک امیدان sC موازی با یک منبع جریان (0^-) طبق شکل ۱۵.۵ (ب) مدل‌سازی کرد. با اجرای تبدیل منبع در این مدار، مدل معادلی برای خازن مشتمل از یک امیدان $\frac{1}{sC}$ سری با منبع ولتاژ $\frac{v(0^-)}{s}$ (ج) به دست می‌آید (شکل ۱۵.۱۵).

هنگام کار با مدل‌های حوزه S باید دقت کنیم منبع مستقل به کارگرفته به جای مقادیر اولیه اشتباه نشوند. مقدار اولیه در یک القاگر با (0^-) نداده می‌شود. این جمله ممکن است به صورت منبع ولتاژ یا جریان، بسته به مدل انتخابی ظاهر گردد. مقدار اولیه برای خازن به صورت $v(0^-)$ داده می‌شود. این جمله هم ممکن است به صورت منبع ولتاژ یا منبع جریان درآید. اشتباه رایجی در میان دانشجویانی که برای اولین بار در حوزه S کار می‌کنند این است که همیشه $v(0^-)$ مدل را به عنوان منبع ولتاژ مدل در نظر می‌گیرند، این اشتباه حتی در هنگام کار با القاگر هم دیده می‌شود.



شکل ۱۵.۵ (الف) خازنی در حوزه زمان، با برچسب‌های (t) و (v(t)). (ب) مدل حوزه فرکانس خازن یا ولتاژ اولیه (v(0^-)). (ج) مدل معادل حاصل از تبدیل منبع.

مثال ۱۵.۲

در مدار شکل ۱۵.۶ (الف) با فرض $v_C(0^-) = -2 V$ را به دست آورید.

اهداف مسئله را شناسایی کنید.

به دنبال عبارتی برای ولتاژ خازن، $v_C(t)$ هستیم.

اطلاعات معلوم را جمع آوری نمایید.

مسئله یک ولتاژ اولیه خازن $-2 V$ را مشخص کرده است، $v_C(0^-)$.

ارائه طرح.

دوباره اولین گام رسم مدار حوزه فرکانس معادل است. در انجام آن باید تصمیم بگیریم که کدام مدل برای خازن به کاربرد، زیرا ادارای ولتاژ اولیه غیر صفر هستیم. برای چنین مسئله ساده‌ای، مزیت آشکار برای انتخاب مدل وجود ندارد، لذا مدل مبتنی بر منبع جریان را بر می‌گرینیم (شکل ۱۵.۶ (ب)).

معادلات مناسب را بنویسید.

تحلیل را با نوشتن معادله یک گره به پیش می‌بریم:

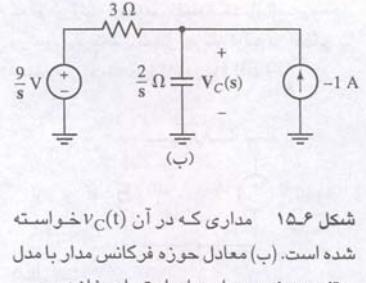
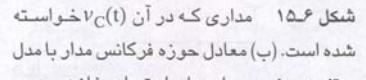
$$-1 = \frac{V_C}{2/s} + \frac{V_C - 9/s}{3}$$

آیا اطلاعات دیگری لازم است؟

ما یک معادله و یک مجهول داریم که در حوزه فرکانس برای ولتاژ خازن نوشته شده است. اقدام به حل.

با حل برای V_C داریم:

$$V_C = \frac{18/s - 6}{3s + 2} = -2 \frac{(s - 3)}{s(s + 2/3)}$$



شکل ۱۵.۶ مداری که در آن $v_C(0^-)$ خواسته شده است. (ب) معادل حوزه فرکانس مدار با مدل بیتی بر منبع جریان برای احتساب خازن.

پاسخ در متغیر solution و گاهی هم به فرم غیرمنتظره‌ای ذخیره می‌گردد. مطلب پاسخ را به فرمی به نام structure که برای برنامه‌نویسان C آشنا است بازمی‌گرداند. با این وجود در این مرحله آنچه مامی خواهیم بدانیم این است که چگونه جواب را استخراج کنیم. اگر این جمله را تایپ کنیم:

EDU» II = solution.II

پاسخ زیر را دریافت می‌کنیم:

$$II = \frac{2*(4*s+9)/(s+1)/(6*s^2+2+47*s+70)}$$

و به این معنی است که عبارت چندجمله‌ای s به متغیر II تخصیص یافته است. عمل مشابهی را می‌توان برای متغیر I1 انجام داد.

اگر کنون می‌توان مستقیماً برای تعیین عکس تبدیل لاپلاس به کمک تابع ilaplace() پیش‌رفت:

EDU» I1 = ilaplace(II)

$$I1 = \frac{10/29*exp(-t)-172/667*exp(-35/6*t)-2/23*exp(-2*t)}{10/29*exp(-t)-172/667*exp(-35/6*t)-2/23*exp(-2*t)}$$

در این روال، می‌توان حل معادلات هم‌مان حاصل از تحلیل گری با حلقه‌ای را به دست آورد. فرمان ezplot(I1) به ماین اجزاء را می‌دهد که ببینیم حل به چه شیوه‌ای دارد. باید متنگر شد که گاهی عبارات پیچیده مطلب را به اشتباه می‌اندازیم. در این موارد() ilaplace() ممکن است پاسخ مفیدی را بازگرداند.

در اینجا ذکر چند تابع مرتبه با موضوع سودمند است به خصوصی که می‌توان از آن‌ها برای تست نتایج دستی سریعاً استفاده کرد. تابع() numden() یک تابع گویا را به دو متغیر مبدل می‌سازد: یکی حاوی صورت و دیگری حاوی مخرج است. مثلاً

EDU» [N, D] = numden(I1)

دو عبارت گیری ذخیره شده در N و D را بازمی‌گرداند:

$$N = 8*s + 18$$

$$D = (s+1)*(6*s^2+2+47*s+70)$$

برای اعمال تجزیبات قبلي خود به تابع residue() لازم است هر عبارت سمبیلیک (روش) را به صورت برداری حاوی ضرایب چند جمله درآوریم. برای دستیابی به آن باید از فرمان sym2poly() استفاده کرد:

EDU>> n = sym2poly(N);

و

EDU» d = sym2poly(D)

$$d = 6 \quad 53 \quad 117 \quad 70$$

سپس مامی توانیم مقاومت را محاسبه کنیم:

EDU» [r p y] = residue(n, d)

r=	p=	y=
-0.2579	-5.8333	[]
-0.0870	-2.0000	
0.3448	-1.0000	

که با آنچه که از ilaplace() به دست آمد برابر است.

با استفاده از این مهارت‌های جدید مطلب، آماده تحلیل چند مدار هستیم.

۱۵-۲ تحلیل گری و تک حلقه‌ای در حوزه S

در فصل ۱۰ آموختیم که چگونه مدارهای تحریک شده با منبع سینوسی در حوزه زمان را به معادله حوزه فرکانس تبدیل کنیم. مزایای این انتقال کاملاً آشکار بوده و دیگر لازم نبود معادلات انگرالی -دیفرانسیلی را حل کنیم. تحلیل گری و تک حلقه‌ای این گونه مدارها به صورت عبارات جبری بر حسب ω آزاده شده که در آن ω فرکانس منعی بود.

اگر کنون مفهوم امپدانس می‌تواند عمومیت بیشتری نسبت به فرکانس مختلط s داشته باشد. با تبدیل مدارها از حوزه زمان به حوزه فرکانس و اجرای تحلیل گری یا حلقه‌ای دوباره روابط جبری خالصی حاصل می‌گردد ولی این بار بر حسب فرکانس مختلط s است. حل معادلات با جایگزینی متغیر، دستور کرامر یا نرما افزاری که بتواند دستکاری جبری انجام دهد (مثل مطلب) صورت می‌گیرد. در این بخش دو مثال با پیچیدگی منطقی ازانه می‌شود تا این موضوع را بیشتر بحث کنیم. با این وجود ابتدا با کمی تأمل، ببینیم چگونه از مطلب می‌توان در این موارد کمک گرفت.

تحلیل کامپیوتري

در فصل ۱۴ دیدیم که می‌توان برای تعیین باقیمانده توابع گویا در فضای S، مطلب را به کاربرد و به این ترتیب فرآیند عکس تبدیل لاپلاس را ساده‌تر کرد. با این وجود، این پسته نرم افزاری خیلی قوی‌تر از این بوده و حاوی زیرروال‌هایی برای دستکاری‌های جبری است. در واقع، همان‌طور که در این مثال خواهیم دید مطلب حتی قادر به اجرای مستقیم عکس تبدیل لاپلاس از توابع گویایی است که مادر حین تحلیل مدار به دست می‌آوریم. بیایید ببینیم مطلب چگونه با عبارات جبری کار می‌کند. این عبارت به صورت رشته‌ای از کاراکترها با سیمبل نقل قول (') برای تعریف عبارت ذخیره شده‌اند. مثلاً ما قبلاً چند جمله 6 - 12s + s³ p(s) را به صورت بردار زیر نشان دادیم:

$$EDU» p = [1 \quad 0 \quad -12 \quad 6];$$

و نیز می‌توان آن را به صورت نمادین هم نشان داد:

$$EDU» p = 's ^ 3 - 12*s + 6';$$

این دو نمایش در مطلب یکی نیستند و دارای دو مفهوم جدا می‌باشند. هرگاه بخواهیم یک عبارت جبری را به صورت نمادین یا سمبیلیک دستکاری کنیم، دو مین نمایش لازم است. این توائیندی خصوصاً هنگام کار با معادلات هم‌مان، که در چند مثال اخیر دیدیم، مفید است. مجموعه معادلات زیر را ملاحظه نمایید:

$$(3s + 10)I_1 - 10I_2 = \frac{4}{s + 2}$$

$$-10I_1 + (4s + 10)I_2 = \frac{-2}{s + 1}$$

با استفاده از نمایش نمادین مطلب دو رشته متغیر را تعریف می‌کنیم:

$$EDU» eqn1 = '(3*s+10)*I1 - 10*I2 = 4/(s+2)';$$

$$EDU» eqn2 = ' -10*I1 + (4*s+10)*I2 = -2/(s+1)';$$

توجه کنید که در هر رشته کل معادله نوشته می‌شود. هدف ما حل این دو معادله برای یافتن متغیرهای I₁ و I₂ می‌باشد. مطلب دارای روش خاصی به نام solve() است که می‌تواند معادلات را برای ما حل کند. این زیرروال با لیست‌کردن معادلات جدا از هم (که به آن‌ها string می‌گوییم) و به دنبال آن لیستی از مجهولات (به آن‌ها هم string گوییم) احصار می‌شود:

$$EDU» solution = solve(eqn1, eqn2, 'I1', 'I2');$$

مثال ۱۵-۳

دو جریان حلقه i_1 و i_2 را در مدار شکل ۱۵-۷ (الف) معین کنید. در آغاز هیچ انرژی در مدار وجود ندارد.

همیشه اولین گام، ترسیم مدار معادل حوزه فرکانس است. چون در $t = 0^-$ $\text{ar}_1 = 0$ است، خازن $\frac{1}{3} \text{F}$ را با امپدانس $\frac{3}{s}$ و القاگر 4H را با امپدانس $4s\Omega$ طبق شکل ۱۵-۷ (ب) جایگزین می‌کنیم.

سپس مثل قبل دو معادله تک حلقه را می‌نویسیم:

$$-\frac{4}{s+2} + \frac{3}{s} I_1 + 10I_1 - 10I_2 = 0$$

$$\left(\frac{3}{s} + 10\right)I_1 - 10I_2 = \frac{4}{s+2} \quad (\text{حلقه ۱})$$

$$-\frac{2}{s+1} + 10I_2 - 10I_1 + 4sI_2 = 0$$

$$-10I_1 + (4s + 10)I_2 = \frac{2}{s+1} \quad (\text{حلقه ۲})$$

با حل معادلات فرق برای I_1 و I_2 داریم:

$$I_1 = \frac{2s(4s^2 + 19s + 20)}{(20s^4 + 66s^3 + 73s^2 + 57s + 30)} \text{ A}$$

$$I_2 = \frac{30s^2 + 43s + 6}{(s+2)(20s^3 + 26s^2 + 21s + 15)} \text{ A}$$

و

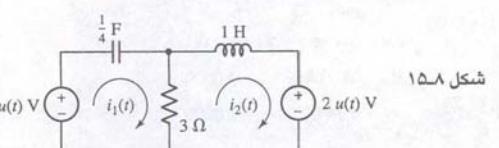
غیرمستقیم گفته شد که باقی می‌ماند گرفتن عکس تبدیل لاپلاس برای هر تابع است که خواهیم داشت:

$$i_1(t) = -96.39e^{-2t} - 344.8e^{-0.15t} \cos 0.8529t + 197.7e^{-0.15t} \sin 0.8529t \text{ mA}$$

$$i_2(t) = -481.9e^{-2t} - 241.4e^{-t} + 723.3e^{-0.15t} \cos 0.8529t + 472.8e^{-0.15t} \sin 0.8529t \text{ mA}$$

تمرين

جریان‌های حلقه i_1 و i_2 را در مدار شکل ۱۵-۸ پیدا کنید. می‌توانید فرض کنید که در $t = 0^-$ هیچ انرژی در مدار ذخیره نشده است.

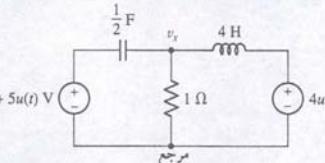


شکل ۱۵-۸

$$i_1 = e^{-2t/3} \cos\left(\frac{4}{3}\sqrt{2}t\right) + (\sqrt{2}/8)e^{-2t/3} \sin\left(\frac{4}{3}\sqrt{2}t\right)$$

$$i_2 = -\frac{2}{3} + \frac{2}{3}e^{-2t/3} \cos\left(\frac{4}{3}\sqrt{2}t\right) + (13\sqrt{2}/24)e^{-2t/3} \sin\left(\frac{4}{3}\sqrt{2}t\right)$$

مثال ۱۵-۴



ولتاژ v_x در مدار شکل ۱۵-۹ را با تکنیک تحلیل گره محاسبه کنید. اولین گام ترسیم مدار در حوزه s است. می‌بینیم که خازن $\frac{1}{2} \text{F}$ دارای ولتاژ اولیه V در $t = 0^-$ است. پس لازم است یکی از مدار شکل ۱۵-۵ را برگزینیم، چون می‌خواهیم تحلیل گرهی انجام دهیم، شکل ۱۵-۵ (ب) مناسب‌تر است. مدار حاصل در شکل ۱۵-۱۰ دیده می‌شود. با مشخص بودن دو ولتاژ گره از سه ولتاژ، تنها یک معادله گره برای نوشتن داریم:

$$-1 = \frac{V_x - \frac{7}{s}}{\frac{2}{s}} + V_x + \frac{V_x - \frac{4}{s}}{4s}$$

به این ترتیب داریم:

$$V_x = \frac{10s^2 + 4}{s(2s^2 + 4s + 1)} = \frac{5s^2 + 2}{s(s+1 + \frac{\sqrt{2}}{2})(s+1 - \frac{\sqrt{2}}{2})}$$

ولتاژ v_x را تبدیل لاپلاس معکوس به دست می‌آید:

$$v_x = [4 + 6.864e^{-1.707t} - 5.864e^{-0.2929t}]u(t)$$

با

$$v_x = \left[4 - e^{-t}\left(9\sqrt{2} \sinh \frac{\sqrt{2}}{2}t - \cosh \frac{\sqrt{2}}{2}t\right)\right]u(t)$$

آیا پاسخ شما صحیح است؟ یک راه آزمایش آن ارزیابی ولتاژ خازن در $t = 0$ است، زیرا می‌دانیم که مقدار آن V است. بنابراین:

$$V_C = \frac{7}{s} - V_x = \frac{4s^2 + 28s + 3}{s(2s^2 + 4s + 1)}$$

با ضرب V_C در s و استفاده از حد $\infty \rightarrow 0$ داریم:

$$v_c(0^+) = \lim_{s \rightarrow \infty} \left[\frac{4s^2 + 28s + 3}{2s^2 + 4s + 1} \right] = 2 \text{ V}$$

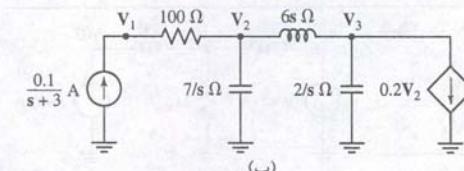
از تحلیل گره برای محاسبه v_x برای مدار شکل ۱۵-۱۱ استفاده کنید.

جواب: $[5 + 5.657(e^{-1.707t} - e^{-0.2929t})]u(t)$

شکل ۱۵-۹ مدار معادل دامنه s مربوط به ۱۵-۱

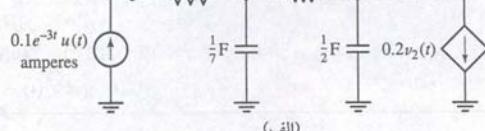
تمرین

مثال ۱۵-۵



ز تحلیل گرهی برای تعیین ولتاژهای v_1 , v_2 و v_3 در مدار شکل ۱۵-۱۲ (الف) استفاده کنید. در این مدار متشکل از سه عنصر ذخیره‌ساز انرژی جداگانه است که هیچ یک از آن‌ها در $t = 0^-$ هیچ انرژی ذخیره نکرده‌اند. پس هر یک را می‌توان با امپدانس متناظر، چون شکل ۱۵-۱۲ (ب) جایگزین کرد. به حضور منبع وابسته‌ای که با ولتاژ گرهی v_2 کنترل می‌شود نیز توجه کنید.

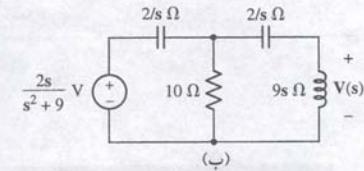
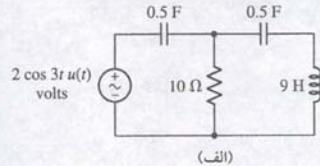
شکل ۱۵-۱۲ (الف) مدار چهارگرهی حاوی دو خازن و یک القاگر، هیچ‌یک از آن‌ها در $t = 0^-$ انرژی ذخیره نکرده‌اند. (ب) مدار معادل در حوزه فرکانس.



مدار متشکل از سه عنصر ذخیره‌ساز انرژی جداگانه است که هیچ یک از آن‌ها در $t = 0^-$ هیچ‌یک را ذخیره نکرده‌اند. پس هر یک را می‌توان با امپدانس متناظر، چون شکل ۱۵-۱۲ (ب) جایگزین کرد. به حضور منبع وابسته‌ای که با ولتاژ گرهی v_2 کنترل می‌شود نیز توجه کنید.

شکل ۱۵-۱۲ (ب) مدار چهارگرهی حاوی دو خازن و یک القاگر، هیچ‌یک از آن‌ها در $t = 0^-$ انرژی ذخیره نکرده‌اند. (ب) مدار معادل در حوزه فرکانس.

مثال ۱۵-۶



شکل ۱۵-۱۴ (الف) مداری که باید با تبدیل منبع ساده شود. (ب) نمایش حوزه فرکانس.

با اجرای یک تبدیل منبع دیگر منبع ولتاژ $V_2(s)$ را چنین داریم:

$$V_2(s) = \left(\frac{s^2}{s^2 + 9} \right) \left(\frac{20}{10s + 2} \right)$$

ین منبع ولتاژ با Z_1 و امپدانس باقیمانده $s/2$ سری است. با ترکیب Z_1 و $s/2$ امپدانس جدید چنین است:

$$Z_2 = \frac{20}{10s + 2} + \frac{2}{s} = \frac{40s + 4}{s(10s + 2)} \Omega$$

مدار حاصل در شکل ۱۵-۱۵ (ب) دیده می شود. در این مقطع، آمده ایم تابعه ایم $V(s)$ به دست آوریم:

$$V(s) = \left(\frac{s^2}{s^2 + 9} \right) \left(\frac{20}{10s + 2} \right) \frac{9s}{9s + \left[\frac{40s + 4}{s(10s + 2)} \right]} = \frac{180s^4}{(s^2 + 9)(90s^3 + 18s^2 + 40s + 4)}$$

ر محیج کسر هر دو جمله ریشه مختلط دارند. به کمک متلب و بسط محیج برای تعیین اقیمانده ها داریم:

```

EDU» d1 = 's^2 + 9';
EDU» d2 = '90*s^3 + 18*s^2 + 40*s + 4';
EDU» d = symmul(d1, d2);
EDU» denominator = expand(d);
EDU» den = sym2poly(denominator);
EDU» num = [180 0 0 0 0];
EDU» [r p y] = residue(num,den);

```

تجهیز کنید که هر جمله با یک قطب مختلط دارد
مختلط مزدوجی نیز هست. در سیستم های فیزیکی
همواره قطب ها به صورت جفت هستند.

$$V(s) = \frac{1.047 + j0.0716}{s - j3} + \frac{1.047 - j0.0716}{s + j3} - \frac{0.0471 - j0.0191}{s + 0.04885 - j0.6573} - \frac{0.0471 + j0.0191}{s + 0.04885 + j0.6573} + \frac{5.590 \times 10^{-5}}{s + 0.1023}$$

با پیشنهاد کنید که

شکل ۱۵-۱۵ (الف) مدار پس از اولین تبدیل. (ب) مدار نهایی برای حل.

وجود بار فشاری که با خازن ها و القاگرهای داشتیم و آن هارا به صورت امپدانس در نظر گرفتیم، آزادیم تا هر یک از روش های تحلیل مدار در فصل های ۴، ۵ و ۶ را به معادلشان در حوزه s بکار گیریم.
بنابراین تجمعی، تبدیل منع، قضیه تونن و نورتن همگی در حوزه s قابل اعمالند.

مدار شکل ۱۵-۱۴ (الف) را با روش تبدیل منبع ساده کنید و برای $v(t)$ عبارت به دست آورید.
با توجه به این که هیچ جریان یا ولتاژ اولیه ای مشخص نشده و $v(t)$ در منبع ولتاژ ضرب شده است، نتیجه می گیریم که هیچ انرژی اولیه ای در مدار ذخیره نشده است بنابراین مدار حوزه فرکانس را مطابق شکل ۱۵-۱۴ (ب) می کشیم.

استراتژی ما این است که چندین تبدیل منبع متواالی انجام دهیم تا در امپدانس Ω و مقاومت Ω را باهم ترکیب کنیم. ما باید امپدانس $9s$ را راه کنیم زیرا ولتاژ مورد نظر $V(s)$ در دو سر آن ظاهر می گردد. اکنون ممکن است منبع ولتاژ و امپدانس سمت چپ $s/2$ را به یک منبع موازی با امپدانس $2/s\Omega$ تبدیل کنیم. یعنی:

$$I(s) = \left(\frac{2s}{s^2 + 9} \right) \left(\frac{s}{2} \right) = \frac{s^2}{s^2 + 9} A$$

مطابق با شکل ۱۵-۱۵ (الف) پس از این تبدیل، امپدانس زیر را در برای منبع جریان خواهیم داشت:

$$Z_1 \equiv (2/s) \parallel 10 = 20/(10s + 2)\Omega$$

با اجرای یک تبدیل منبع دیگر منبع ولتاژ $V_2(s)$ را چنین داریم:

$$V_2(s) = \left(\frac{s^2}{s^2 + 9} \right) \left(\frac{20}{10s + 2} \right)$$

ین منبع ولتاژ با Z_1 و امپدانس باقیمانده $s/2$ سری است. با ترکیب Z_1 و $s/2$ امپدانس جدید چنین است:

$$Z_2 = \frac{20}{10s + 2} + \frac{2}{s} = \frac{40s + 4}{s(10s + 2)} \Omega$$

مدار حاصل در شکل ۱۵-۱۵ (ب) دیده می شود. در این مقطع، آمده ایم تابعه ایم $V(s)$ به دست آوریم:

$$V(s) = \left(\frac{s^2}{s^2 + 9} \right) \left(\frac{20}{10s + 2} \right) \frac{9s}{9s + \left[\frac{40s + 4}{s(10s + 2)} \right]} = \frac{180s^4}{(s^2 + 9)(90s^3 + 18s^2 + 40s + 4)}$$

ر محیج کسر هر دو جمله ریشه مختلط دارند. به کمک متلب و بسط محیج برای تعیین اقیمانده ها داریم:

```

EDU» d1 = 's^2 + 9';
EDU» d2 = '90*s^3 + 18*s^2 + 40*s + 4';
EDU» d = symmul(d1, d2);
EDU» denominator = expand(d);
EDU» den = sym2poly(denominator);
EDU» num = [180 0 0 0 0];
EDU» [r p y] = residue(num,den);

```

شکل ۱۵-۱۵ (الف) مدار پس از اولین تبدیل. (ب) مدار نهایی برای حل.

با شروع از گره ۱ می توان معادلات زیر را نوشت:

$$\frac{0.1}{s + 3} = \frac{V_1 - V_2}{100}$$

با

$$\frac{10}{s + 3} = V_1 - V_2 \quad (گره ۱)$$

و در گره ۲ داریم:

$$0 = \frac{V_2 - V_1}{100} + \frac{V_2}{7/s} + \frac{V_2 - V_3}{6s}$$

با

$$-42sV_1 + (600s^2 + 42s + 700)V_2 - 700V_3 = 0 \quad (در گره ۲)$$

و بالاخره در گره ۳ داریم:

$$-0.2V_2 = \frac{V_3 - V_2}{6s} + \frac{V_3}{2/s}$$

با

$$(1.2s - 1)V_2 + (3s^2 + 1)V_3 = 0$$

با حل این دسته معادلات برای ولتاژ گره ها داریم:

$$V_1 = 3 \frac{100s^3 + 7s^2 + 150s + 49}{(s + 3)(30s^3 + 45s - 14)}$$

$$V_2 = 7 \frac{3s^2 + 1}{(s + 3)(30s^3 + 45s + 14)}$$

$$V_3 = -1.4 \frac{6s - 5}{(s + 3)(30s^3 + 45s + 14)}$$

نهایاً گام باقیمانده گرفتن عکس تبدیل لاپلاس هر ولتاژ است به نحوی که برای $t > 0$:

$$v_1(t) = 9.789e^{-3t} + 0.06173e^{-0.2941t} + 0.1488e^{0.1471t} \cos(1.251t) + 0.05172e^{0.1471t} \sin(1.251t) V$$

$$v_2(t) = -0.2105e^{-3t} + 0.06173e^{-0.2941t} 0.1488e^{0.1471t} \cos(1.251t) + 0.05172e^{0.1471t} \sin(1.251t) V$$

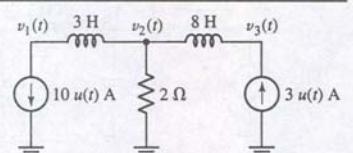
$$v_3(t) = -0.03459e^{-3t} + 0.06631e^{-0.2941t} - 0.03172e^{0.1471t} \cos(1.251t) - 0.06362e^{0.1471t} \sin(1.251t) V$$

توجه دارید که با پاسخ به صورت نمایی افزایش می باید و دلیل آن وجود منبع جریان وابسته است در واقع مدار در حال از کنترل خارج شدن است و بالآخر در زمانی قطعه های خواهد سوت، بد خواهد ترکیب و یا به نوعی از کار خواهد افتاد. هر چند تحلیل چنین مداری مسلمآ کار زیادی می برد مزایای تکنیک های حوزه s به محض اجرای تحلیل در حوزه زمان بسیار واضح خواهد بود.

تمرین

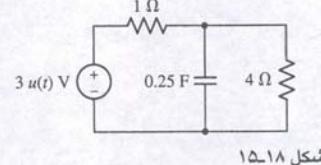
۱۵-۳ تکنیک های دیگر در تحلیل مدار

بسته به هدف مشخص شده در تحلیل یک مدار خاص، اغلب می بینیم که با انتخاب مناسب تکنیک می توان تحلیل را ساده کرد. مثلاً به ندرت مایل به اعمال اصل تجمعی به مداری هستی که در آن ۲۱۵ منبع مستقل وجود داشته باشد زیرا باید ۲۱۵ مدار جداگانه را تحلیل نمود! با این



شکل ۱۵-۱۳

تمرین



۱۵-۷ در حوزه S، معادل نورتن متصل به مقاومت 1Ω در شکل ۱۵-۱۸ را بدست آورید.
جواب: $Z_{th} = 4/(s + 1)\Omega$ و $I_{sc} = 3(s + 1)/4s A$

۱۵-۸ قطب‌ها، صفرها و توابع تبدیل

در این بخش ما ابتدا واژه‌های به کار رفته در فصل ۱۴ را که قطب‌ها، صفرها و توابع تبدیل بودند، بررسی می‌کنیم.

مدار ساده شکل ۱۵-۱۹ (الف) را در نظر بگیرید. معادل حوزه S در شکل ۱۵-۱۹ (ب) ملاحظه می‌شود. تحلیل گرهی منجر به رابطه زیر می‌گردد:

$$0 = \frac{V_{out}}{1/sC} + \frac{V_{out} - V_{in}}{R}$$

با مرتب کردن و حل برای V_{out} داریم:

$$V_{out} = \frac{V_{in}}{1 + sRC}$$

یا

$$H(s) \equiv \frac{V_{out}}{V_{in}} = \frac{1}{1 + sRC} \quad (7)$$

که $H(s)$ تابع تبدیل است و به صورت نسبت خروجی به ورودی تعریف می‌شود. به راحتی می‌توانیم یک جریان را به عنوان ورودی یا خروجی تعریف کنیم و برای این مدار تابع دیگری به دست آوریم. شکل مدارها معمولاً از چپ به راست خوانده می‌شوند و بنابراین طراحان حتی الامکان غلب ورودی را در سمت چپ شکل و پایانه‌های خروجی را در سمت راست قرار می‌دهند. مفهوم تابع تبدیل از هر دو دید تحلیل و دیگر زمینه‌های مهندسی، سیستم‌های مهندسی است. در لیل برای این اهمیت وجود دارد. اول این که به محض دانستن تابع تبدیل یک مدار، بالا صاله می‌توان خروجی مربوط به هر سیگنال ورودی را دانست. تنها کافی است ورودی را در $H(s)$ ضرب کنیم و عکس تبدیل لابلس را بدست آوریم. دو این که ساختار تابع تبدیل اطلاعات بیانی درباره رفتاری که می‌توان از یک مدار خاص انتظار داشت، را دارد.

در فصل ۱۴ دیدیم که برای ارزیابی ثبات یک سیستم لازم است تا قطب‌ها و صفرهای تابع تبدیل (s) را بدانیم. می‌توان معادله (7) را به صورت زیر نوشت:

$$H(s) = \frac{1/RC}{s + 1/RC} \quad (8)$$

شکل ۱۵-۱۹ (الف) یک مدار ساده خازن - مقاومت با ذکر ولتاژ ورودی و خروجی. (ب) مدار معادل حوزه S

هنگام محاسبه مقادیر تابع، معمولاً مقاطع $+ ۰$ و $- ۰$ مقاطع روی هم تصویر می‌شوند. با این وجود لزومی نداری را ویه قاز مقادیر خیلی بزرگ و خیلی کوچک با هم برابر باشند.

$\rightarrow \infty$ اندازه این تابع به سمت صفر می‌کند. پس گوییم $H(s)$ دارای صفر در ∞ است. در $\frac{1}{s} = 0$ به سمت بی‌نهایت می‌رود و بنابراین گوییم تابع $H(s)$ دارای قطبی $s = 0$ می‌باشد. این فرکانس‌ها را فرکانس‌های بحرانی گویند و آشنا بی زودهنگام با نه ساخت منحنی‌های پاسخ مطرح در بخش ۱۵-۷ را ساده می‌کنند.

۱۵-۹ کانولوشن

کنیک‌های حوزه S ارائه شده تاکنون در تعیین پاسخ جریان ولتاژ یک مدار خاص مفید بودند. این وجود، در عمل اغلب با مدارهایی مواجه هستیم که می‌توان منابع اختیاری به آن متصل شود و هر بار لازم است خروجی جدید را محاسبه کنیم. برای نیل به این هدف از تابع تبدیل به م تابع سیستم مدار استفاده می‌کنیم. به زودی خواهیم دید که این تابع سیستم تبدیل لابلس سخ پزیره واحد مدار است.

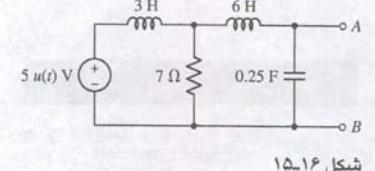
با اگرفتن عکس تبدیل هر جمله و نوشتن $j0.0716 + 1.047j^{3.912^\circ}$ به صورت $1.049e^{j3.912^\circ}$ و $0.05083e^{j157.9^\circ}$ به صورت $0.05083e^{j157.9^\circ}$ داریم:

$$\begin{aligned} v(t) &= 1.049e^{j3.912^\circ} e^{j3t} u(t) + 1.049e^{-j3.912^\circ} e^{-j3t} u(t) \\ &+ 0.05083e^{j157.9^\circ} e^{-0.04885t} e^{-j0.6573t} u(t) \\ &+ 0.05083e^{j157.9^\circ} e^{-0.04885t} e^{j0.6573t} u(t) + 5.590 \times 10^{-5} e^{-0.1023t} u(t) \end{aligned}$$

با تبدیل نمایه‌ای مختلط به سینوس، عبارتی ساده‌تر برای ولتاژ حاصل می‌شود:

$$v(t) = [5.590 \times 10^{-5} e^{-0.1023t} + 2.098 \cos(3t + 3.912^\circ) + 0.1017e^{-0.04885t} \cos(0.6573t + 157.9^\circ)] u(t) V$$

تمرین



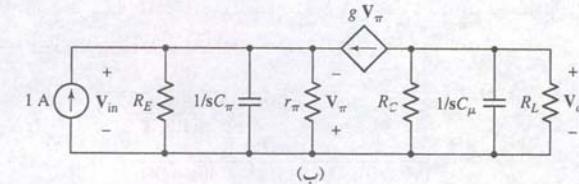
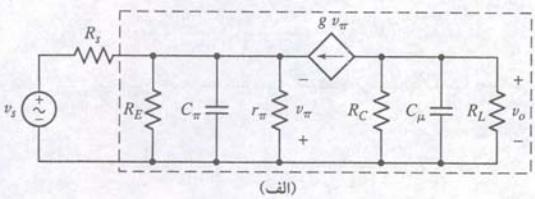
شکل ۱۵-۱۶

۱۵-۱۶ با روش تبدیل منبع، مدار شکل ۱۵-۱۶ را به منبع جریانی در حوزه S و موازی با یک امپدانس تبدیل کنید.

$$\begin{aligned} Z_s &= \frac{72s^2 + 252s}{18s^3 + 21s^2 + 54s + 28} + \Omega \\ I_s &= \frac{35}{s^2(18s + 163)} + A \end{aligned}$$

مثال ۱۵-۷

معادل تونن حوزه فرکانس را برای پخش مشخص شده در شکل ۱۵-۱۷ (الف) بدست آورید.



شکل ۱۵-۱۷ (الف) مدار معادلی برای تقویت‌کننده ترانزیستوری بیس مشترک. (ب) مدار معادل حوزه فرکانس با یک منبع تست ۱A که جایگزین منبع ورودی V_{in} و R_s شده است.

این مدار خاص به مدل "هیبرید π " یک مدار ترانزیستوری به نام تقویت‌کننده بیس مشترک معروف است. دو خازن C_π و C_μ ظرفیت داخلی ترانزیستور را نشان می‌دهند و معمولاً در حدود چند PF هستند. مقاومت R_L ، مقاومت R_s ، مدار تونن و سیله بیرونی تقویت‌کننده می‌خوانند. پس از تبدیل مدار به معادل حوزه فرکانس، سیله ورودی v_o و سیله ورودی V_{in} را با یک لیزرنیمه است که ممکن است یک بلندگو یا حتی یک لیزر نیمه هادی باشد. منبع ولتاژ V_{in} به همراه R_s معادل تونن و سیله ورودی V_{in} می‌باشد که ممکن است یک میکروفن، یک مقاومت حساس به نور و حتی یک آنتن رادیو باشد.

مایلیم معادل تونن مدار متصل به سیله را پیدا کنیم. این کمیت را اغلب امپدانس ورودی مدار تقویت‌کننده می‌خوانند. پس از تبدیل مدار به معادل حوزه فرکانس، سیله ورودی v_o و سیله ورودی V_{in} را با یک لیزرنیمه منبع تست ۱A طبق شکل ۱۵-۱۷ (ب) جایگزین می‌کنیم. پس امپدانس ورودی Z_{in} برابر است با:

$$Z_{in} = \frac{V_{in}}{1}$$

پس از کمیت Z_{in} در واقع همان V_{in} است. برای این ولتاژ باید عبارتی بر حسب منبع ۱A، مقاومت H و خازن‌ها یا پارامترهای منبع وابسته بیاییم. با نوشتن یک معادله گره در ورودی داریم:

$$1 + gV_\pi = \frac{V_{in}}{Z_{eq}}$$

$$Z_{eq} = R_E \parallel \frac{1}{sC_\pi} \parallel r_\pi = \frac{R_ER_\pi}{r_\pi + R_E + sRER_\pi C_\pi}$$

چون $V_\pi = -V_{in}$ است داریم:

$$Z_{in} = V_{in} = \frac{RER_\pi}{r_\pi + R_E + sRER_\pi C_\pi + gRer_\pi} \Omega$$

اکنون سوالی که مایل به پاسخ آن هستیم این است که "اگر فرم $(t)x$ را بدانیم، آن گاه $(t)y$ را چگونه می‌توان دانست" برای پاسخ به این سوال، لازم است اطلاعاتی راجع به N داشته باشیم. بنابراین، تصور کنید اطلاعات ما از N شامل پاسخ مربوط به منبع تحریک ضربه واحد $\delta(t)$ باشد، یعنی پرضass می‌شود $(t)h$. $y(t) = h(t)x(t)$ را معمولاً تابع پاسخ ضربه واحد یا به طور خلاصه پاسخ ضربه می‌خوانند. پاسخ ضربه یک مدار مشخصه بسیار مهمی از آن به شمار می‌آید.

بر اساس دانسته‌های خود از تبدیل لاپلاس می‌توانیم این مطلب را از زاویه متفاوتی بنگریم. با تبدیل $x(t)$ به $X(s)$ و $y(t)$ به $Y(s)$ تابع تبدیل سیستم را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)}$$

اگر $\delta(t) = \delta(t)x(t) = 1$ باشد طبق جدول ۱۴-۱ داریم $X(s) = Y(s)$ بوده و در اینجا $y(t) = x(t)$ است.

به جای اعمال پالس ضربه واحد در $t = 0$ بگذارید تصور کنیم که در $t = \lambda$ به مدار اعمال شده است. خواهیم دید که فقط خروجی با تأخیری ظاهر خواهد شد. بنابراین وقتی ورودی $(t-\lambda)\delta(t)$ است، شکل ۱۵-۲۰ (ج) خروجی $y(t) = h(t-\lambda)x(t)$ خواهد شد. پس از آن فرض کنید که تابع ضربه مقداری به جز واحد داشته باشد. در حالت خاص بگذارید این مقدار در $t = \lambda$ برابر $x(t)$ باشد. مقدار $(\lambda)x$ عددی ثابت است. می‌دانیم که ضرب یک تابع تحریک یک مدار خطی در یک عدد ثابت، تنها سبب می‌شود که پاسخ مدار هم به همان نسبت تغییر کند. پس اگر ورودی به $(\lambda)\delta(t-\lambda)x$ تغییر کند، آن‌گاه پاسخ $(\lambda)h(t-\lambda)x$ خواهد شد (شکل ۱۵-۲۰ (د)).

اکنون ورودی اخیر را روی N اعمال می‌کنیم. خاصیت خطی بودن بین می‌دارد که خروجی هم باید جمع خروجی‌های ناشی از ورودی‌های فرق باشد. با تأمل می‌توان گفت که انتگرال ورودی، انتگرال خروجی را طبق شکل ۱۵-۲۰ (ه) تولید می‌نماید. ولی این ورودی اخیر چیست؟ با توجه به خاصیت غربالی تابع ضربه، می‌توان نشان داد که این ورودی همان $(t)x$ یعنی ورودی اصلی مدار است. شکل ۱۵-۲۰ (ه) را می‌توان به شکل ۱۵-۲۰ (و) نشان داد.

انتگرال کانولوشن

اگر ورودی به سیستم N ، تابع تحریک $(t)x$ باشد، می‌دانیم که خروجی باید تابع $(t)y$ در شکل ۱۵-۲۰ (الف) باشد. بنابراین از رابطه شکل ۱۵-۲۰ (و) نتیجه می‌گیریم:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\lambda)h(t-\lambda) d\lambda \quad (9)$$

که $y(t)$ پاسخ ضربه N است. این رابطه مهم در همه جا به نام انتگرال کانولوشن شناخته می‌شود. بیان معادله مذکور چنین است که خروجی مدار برابر با کانولوشن ورودی و پاسخ ضربه است. این انتگرال اغلب به صورت ساده زیر نوشته می‌شود:

$$y(t) = x(t) * h(t)$$

معادله (۹) گاهی متفاوت ولی به فرم معادل ظاهر می‌شود. اگر $\lambda = t - z$ فرض شود آن‌گاه $d\lambda = -dz$ شده و عبارت $y(t)$ چنین است:

$$y(t) = \int_{\infty}^{-\infty} -x(t-z)h(z) dz = \int_{-\infty}^{\infty} x(t-z)h(z) dz$$

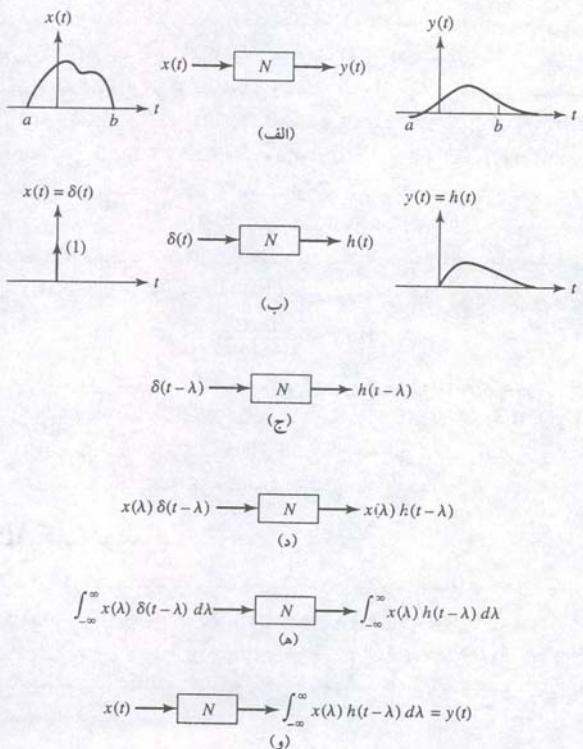
تحلیل می‌تواند در حوزه زمان یا حوزه فرکانس باشد، گرچه کار در حوزه فرکانس بهتر به نظر می‌رسد. در این صورت راه حل چهار مرحله خواهد داشت:

۱. تعیین تابع سیستم مدار (اگر از قبل معین نیست).
۲. تهیه تبدیل لاپلاس تابع تحریک مورد استفاده.
۳. ضرب این تبدیل و تابع سیستم.
۴. اجرای عمل عکس تبدیل روی حاصل ضرب برای یافتن خروجی.

به این ترتیب بعضی از عبارات انگلیسی پیچیده به توابع ساده‌ای از δ بدل می‌شوند و عملیات انتگرالی و مشتقی با اعمال ساده ضرب و تقسیم جایگزین می‌شود. با درنظر گرفتن این نکات، بگذارید به سراغ پاسخ ضربه واحد یک مدار برویم و رابطه آن را با تابع سیستم مشخص کنیم. پس از آن چند مسئله خاص را تحلیل خواهیم کرد.

پاسخ ضربه

شبکه الکتریکی خطی N را در نظر بگیرید که در آن هیچ انحری اولیه‌ای ذخیره نشده و یک تابع تحریک $(t)x$ به آن متصل شده است. در نقطه‌ای از این مدار، پاسخ تابع $(t)y$ وجود دارد. این مجموعه را به صورت نمودار بلوکی همراه با توابع زمانی تولیدی در شکل ۱۵-۲۰ (الف) نشان داده‌ایم. تابع تحریک فقط در فواصل $b < t < a$ وجود دارد. پس $y(t) = 0$ در $t < a$ و $t > b$ خواهد داشت.



شکل ۱۵-۲۰ تکامل تفهیمی انتگرال کانولوشن.

با عنوان (۱۵.۲۰) به قدر کافی ساده است ولی وجود تابع پله‌ای متعدد محاسبه آن را مشکل می‌کند. رای تشخیص قسمت‌هایی از فاصله انتگرال‌گیری که عبارت زیر انتگرال در آن صفر است، وقت زیادی لازم است.

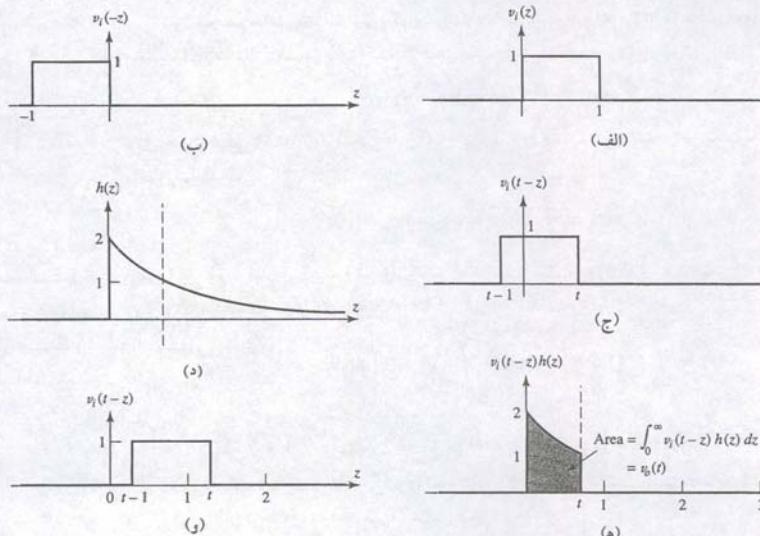
اکنون اجازه بدید تا برای درک انتگرال کانولوشن از امکانات گرافیکی کمک بگیریم. کار اساسی این است که محور z را در کار هم طبق شکل ۱۵.۲۱ شروع می‌کنیم. شکل (۱۵.۲۱) را می‌دانیم، سه شکل (الف)، (ب) و (ج) را نیز می‌دانیم (شکل ۱۵.۲۱ (الف)، (ب) و (ج)). $v_i(z)$ چیزی نیست جز (۱۵.۲۱) که نسبت به محور عمودی معکوس شده است (شکل ۱۵.۲۱ (ب)). اکنون (۱۵.۲۱) را نشان می‌دهیم. بنابراین تابع همان $v_i(-z)$ است که به طرف راست جایه‌جاشده است (شکل ۱۵.۲۱ (ج)). به این ترتیب پاسخ ضربه $h(z) = 2e^{-z}u(z)$ ترسیم می‌شود (شکل ۱۵.۲۱ (د)).

در گام بعد دو تابع $v_i(t-z)$ و $h(z)$ را در هم ضرب می‌کنیم (شکل ۱۵.۲۱ (ه)). مابه دنبال قدرای برای خروجی $v_i(t)$ هستیم، که با سطح زیر منحنی حاصل ضرب داده شده است ناحیه هاشور زده شده در شکل (۱۵.۲۱ (ج)).

اجازه بدید ابتدا $t < 0$ را در نظر بگیریم. در این حالت همپوشی بین $(z - t)v_i(t)$ و $v_i(z)$ وجود ندارد، پس $= 0$. با افزایش t مابالس را در شکل ۱۵.۲۱ (ج) به راست می‌لغزانیم تا با z در $0 > t$ همپوش شود. ناحیه زیر منحنی مربوط به شکل ۱۵.۲۱ (ج) با افزایش t ، شروع z زیادشدن می‌کند تا به $= t$ برسیم. با افزایش t به پیش از این مقدار، یک شکاف بین $0 < z < t$ به جلویی مابالس طبق شکل ۱۵.۲۱ (د) به وجود می‌آید در نتیجه همپوشی با $h(z)$ کاهش می‌یابد. به بیان دیگر برای مقادیری از t که بین 0 و 1 است باید از $z = t$ انتگرال یکبرم. برای قادری از که از واحد تجاوز کند، محدوده انتگرال‌گیری $t < z < t-1$ است. بنابراین می‌توان نوشت:

$$v_o(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ \int_0^t 2e^{-z} dz = 2(1 - e^{-t}) & 0 \leq t \leq 1 \\ \int_{t-1}^t 2e^{-z} dz = 2(e - 1)e^{-t} & t > 1 \end{cases}$$

بنابراین تابع در شکل ۱۵.۲۲ در برابر t ترسیم شده و به این ترتیب حل ماکمل شده است.



شکل ۱۵.۲۱ کامهای ترسیمی محاسبه انتگرال کانولوشن.

و چون سمبول به کار رفته برای انتگرال تفاوتی نمی‌کند می‌توان معادله (۱۵.۲۰) را به صورت اصلاح شده زیر نوشت:

$$\begin{aligned} y(t) &= x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(z)h(t-z) dz \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t-z)h(z) dz \end{aligned} \quad (۱۵.۲۰)$$

کانولوشن و سیستم‌های قابل ساخت

نتیجه‌ای که در معادله (۱۵.۲۰) حاصل شد بسیار کلی است و به هر سیستم خطی قابل اعمال است. با این وجود مابه سیستم‌های فیزیکی قابل ساخت یا تشخیص پذیر علاقمندیم، یعنی آن‌ها را که وجود دارند یا می‌توانند وجود داشته باشند. این سیستم‌ها خاصیت اصلاح مختصراً انتگرال کانولوشن را دارند. یعنی پاسخ سیستم نمی‌تواند قبل از اعمال تابع تحریک، آغاز شود. به عبارت دیگر $h(t)$ که پاسخ سیستم به تابع ضربه در $t = 0$ است نمی‌تواند در $t < 0$ وجود داشته باشد. نتیجه می‌گیریم که عبارت زیر انتگرال در $t < 0$ برابر صفر است. در اولین انتگرال عبارت زیر انتگرال به ازای مقدار منفی $(t - z)$ ، یعنی $t < z$ صفر است. بنابراین برای سیستم‌های قابل ساخت، حدود انتگرال‌های کانولوشن چنین است:

$$\begin{aligned} y(t) &= x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^t x(z)h(t-z) dz \\ &= \int_0^{\infty} x(t-z)h(z) dz \end{aligned} \quad (۱۵.۲۱)$$

معادلات (۱۵.۲۰) و (۱۵.۲۱) هر دو معتبرند ولی دومی حالت خاصی از اولی است و برای سیستم‌های خطی قابل ساخت مناسب‌تر است.

روش گرافیکی کانولوشن

قبل از این‌که صحبت از پاسخ ضربه بکنیم بگذارید مثالی بسواریم و ببینیم چگونه انتگرال کانولوشن محاسبه می‌شود. گرچه عبارت خود به اندازه کافی ساده است ولی محاسبه آن گاهی اوقات با دردرس همراه می‌باشد، خصوصاً تعیین مقادیر حدود انتگرال‌گیری مشمول این مشکل است.

تصور کنید که ورودی یک پالس ولتاژ مربعی با شروع در $t = 0$ باشد که با دامنه V برای دوره ۱ ثانیه‌ای ادامه دارد:

$$x(t) = v_i(t) = u(t) - u(t-1)$$

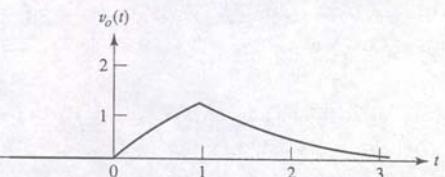
همچنین فرض کنید که این پالس به مداری که پاسخ ضربه‌اش فرم نمایی زیر را دارد اعمال شده باشد:

$$h(t) = 2e^{-t}u(t)$$

می‌خواهیم ولتاژ خروجی $v_o(t)$ را پیدا کنیم. پاسخ را می‌توان بالا فاصله به صورت انتگرالی نوشت:

$$\begin{aligned} y(t) &= v_o(t) = v_i(t) * h(t) = \int_0^{\infty} v_i(t-z)h(z) dz \\ &= \int_0^{\infty} [u(t-z) - u(t-z-1)][2e^{-z}u(z)] dz \end{aligned}$$

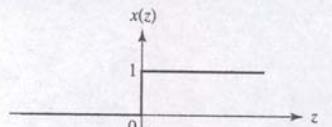
شکل ۱۵-۲۲ تابع خروجی V_0 حاصل از کانولوشن گرافیکی.



مثال ۱۵-۸

تابع پله واحد $x(t) = u(t)$ را به ورودی سیستمی که پاسخ ضربه‌اش $y(t) = x(t) * h(t) = u(t) - 2u(t-1) + u(t-2)$ باشد اعمال کنید و خروجی متناظر را بدست آورد.

شکل ۱۵-۸



شکل ۱۵-۲۳ شکل‌های (الف) سینکنال ورودی $u(t) = x(t)$ و (ب) پاسخ ضربه واحد $h(t) = u(t) - 2u(t-1) + u(t-2)$ برای یک سیستم خطی. اولین قدم رسم $x(t)$ و $h(t)$ است (شکل ۱۵-۲۳). به طور دلخواه ابتدا انتگرال معادله (۱۱) را محاسبه می‌نماییم:

$$y(t) = \int_{-\infty}^t x(z)h(t-z) dz$$

برای انتخاب صحیح حدود انتگرال گیری شکل‌های ۱۵-۲۴ را بررسی می‌کنیم. این شکل‌های عبارتند از ورودی $x(z)$ بر حسب z , پاسخ ضربه $h(z)$, $h(-z)$ ، منحنی $h(z)$ که همان قرینه $h(z)$ نسبت به محور عمودی است و $h(t-z)$ که از جایه‌جایی $h(z)$ به اندازه t به سمت راست نصب شده است. برای این شکل‌ها را در محدوده $1 < t < 0$ اختیار می‌نماییم. حاصل شده است. اکنون تجسم حاصل ضرب اولین گراف، (x, z) و آخرین گراف (h, z) در محدوده‌های مختلف کار ساده‌ای است. وقتی z صفر است، همپوشانی وجود ندارد و

$$y(t) = 0 \quad t < 0$$

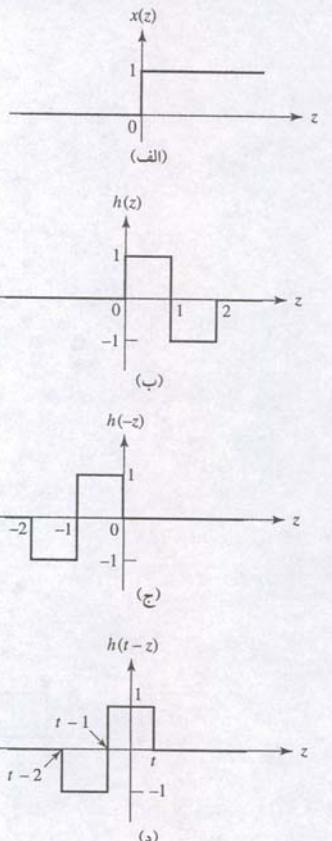
برای حالت شکل ۱۵-۲۴ (د)، منحنی‌ها از $z = 0$ تا $z = t$ همپوشانی داشته و هر یک مقدار واحد را دارند. پس:

$$y(t) = \int_0^t (1 \times 1) dz = t \quad 0 < t < 1$$

شکل ۱۵-۲۴ (الف) سینکنال ورودی و (ب) پاسخ ضربه بر حسب z رسم شده است. (ج) وقتی بین ۱ و ۲ قرار می‌گیرد، $h(t-z)$ آنقدر به سمت راست نصب می‌رود که قسمت منفی آن هم روى $x(z)$ می‌افتد. قسمت منفی از $0 < z < t-1$ را $z = t-1$ به امتداد دارد. پس $y(t) = \int_0^{t-1} [1 \times (-1)] dz + \int_{t-1}^t (1 \times 1) dz = -z \Big|_{z=0}^{z=t-1} + z \Big|_{z=t-1}^{z=t}$ به دست آمده است و (د) از $h(t-z)$ از جایه‌جایی $h(z)$ به اندازه t به راست حاصل شده است. بنابراین:

$$y(t) = -(t-1) + t - (t-1) = 2-t, \quad 1 < t < 2$$

بالاخره وقتی t بزرگ‌تر از ۲ می‌شود، تمام تابع $h(t-z)$ در سمت راست $z = 0$ قرار می‌گیرد. تمام آن در تابع پله واحد ضرب می‌شود و



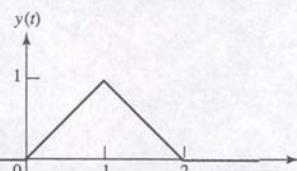
$$y(t) = \int_{t-2}^{t-1} [1 \times (-1)] dz + \int_{t-1}^t (1 \times 1) dz = -z \Big|_{z=t-2}^{z=t-1} + z \Big|_{z=t-1}^{z=t}$$

با

$$y(t) = -(t-1) + (t-2) + t - (t-1) = 0, \quad t > 2$$

چهار بخش فوق برای $y(t)$ به صورت یک منحنی پیوسته در شکل ۱۵-۲۵ جمع‌آوری شده است.

تمرین



شکل ۱۵-۲۵ نتیجه کانولوشن (t) و $h(t)$ در

مثال ۱۵-۸ را با انتگرال دوم معادله (۱۱) تکرار کنید.
۱۵-۹ پاسخ ضربه یک شبکه با $h(t) = 5u(t-1)$ داده شده است. اگر سینکنال ورودی $x(t) = 2[u(t) - u(t-3)]$ به مدار اعمال شده باشد، خروجی $y(t)$ را در زمان‌های t برابر با (الف) -۰.۵، (ب) ۰.۵، (ج) ۲.۵ و (د) ۳.۵ بدست آورد.
جواب ۱۵-۹: ۰.۰، ۱۵.۰، ۰.۵ و ۲.۵.

کانولوشن و تبدیل لاپلاس

کانولوشن کاربردهایی و رای تحلیل مدارهای خطی دارد، که از آن جمله پردازش تصویر، مخابرات و تئوری نیمه‌های دارد. اغلب بهتر است ذهنیت گرافیکی از فرآیند اصلی داشته باشیم، حتی اگر عبارات انتگرالی معادلات (۱۰) و (۱۱) همیشه بهترین مسیر حل نباشند. یک روش قوی دیگر از خواص تبدیل لاپلاس استفاده می‌کند و لذا در مقدمه‌ای بر کانولوشن در این فصل آمده است.

پگذارید $F_1(s)$ و $F_2(s)$ به ترتیب تبدیل‌های لاپلاس $f_1(t)$ و $f_2(t)$ باشند. اینکه می‌خواهیم تبدیل لاپلاس $F(s) = f_1(t) * f_2(t)$ را بایابیم:

$$\mathcal{L}\{f_1(t) * f_2(t)\} = \mathcal{L}\left\{\int_{-\infty}^{\infty} f_1(\lambda)f_2(t-\lambda) d\lambda\right\}$$

یکی از این توابع زمانی قاعده‌تاً تابع تحریک اعمال شده به پایانه‌های ورودی یک مدار خطی و دیگری پاسخ ضربه آن مدار است.

چون اکنون با تابع زمانی که قبل از $t = 0$ وجود ندارند سروکار داریم (تعريف تبدیل لاپلاس مارابه این فرض و امی دارد) حد پایین می‌تواند به 0^- تبدیل شود، آن‌گاه با به کارگیری تبدیل لاپلاس داریم:

$$\mathcal{L}\{f_1(t) * f_2(t)\} = \int_{0^-}^{\infty} e^{-st} \left[\int_{0^-}^{\infty} f_1(\lambda)f_2(t-\lambda) d\lambda \right] dt$$

چون e^{-st} به λ وابسته نیست می‌توانیم این فاکتور را به داخل انتگرال دوم ببریم. اگر این کار را انجام دهیم و انتگرال دیگر را به همان شکل حفظ کنیم داریم:

$$\mathcal{L}\{f_1(t) * f_2(t)\} = \int_{0^-}^{\infty} \left[\int_{0^-}^{\infty} e^{-st} f_1(\lambda)f_2(t-\lambda) dt \right] d\lambda$$

با ادامه شگردهای مشابه، می‌بینیم که $\mathcal{L}\{f_1(t) * f_2(t)\}$ وابسته نیست و لذا می‌توان آن را به خارج انتگرال بردن:

$$\mathcal{L}\{f_1(t) * f_2(t)\} = \int_{0^-}^{\infty} f_1(\lambda) \left[\int_{0^-}^{\infty} e^{-st} f_2(t-\lambda) dt \right] d\lambda$$

آن‌گاه جایگزینی $t = \lambda$ را در انتگرال داخل کروش انجام می‌دهیم (که در آن λ یک ثابت است):



نوصیحاتی در مورد توابع تبدیل

مان طور که قبلاً چندین بار متذکر شدیم، خروجی $v_o(t)$ نقطه‌ای در یک مدار خطی را می‌توان با کانولوشن ورودی $v_i(t)$ و پاسخ ضربه واحد $h(t)$ به دست آورد. با این وجود باید همان‌طور بسپاریم که پاسخ ضربه از کاربرد یک ضربه واحد در $t = 0$ و صفرگرد همه مقادیر t لیه به دست می‌آید. تحت این شرایط تبدیل لاپلاس (t) برابر است با:

$$\mathcal{L}\{v_o(t)\} = V_o(s) = \mathcal{L}\{v_i(t) * h(t)\} = V_i(s) [\mathcal{L}\{h(t)\}]$$

نابراین، $V_o(s)/V_i(s)$ برابر است با تبدیل پاسخ ضربه، که با $H(s)$ نشان داده می‌شود:

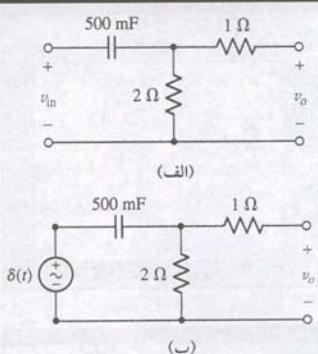
$$\mathcal{L}\{h(t)\} = H(s) = \frac{V_o(s)}{V_i(s)} \quad (13)$$

معادله (13) می‌بینیم که پاسخ ضربه و تابع تبدیل یک جفت تبدیل لاپلاس را «وجود دمی اورند»:

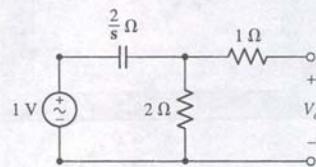
$$h(t) \Leftrightarrow H(s)$$

رابطه فوق واقعیت مهمی را بین می‌کند و مابعداً در تحلیل رفتار سیستم‌هایی که قبلاً مارا چار مشکل می‌کرند از آن استفاده خواهیم کرد.

مثال ۱۵-۱۰



شکل ۱۵-۲۶ (الف) یک مدار ساده که به آن یک ورودی نمایی در $t = 0$ اعمال شده است. (ب) مدار بکاررفته برای تعیین $h(t)$.



شکل ۱۵-۲۷ مدار استفاده شده برای یافتن $H(s)$

اسخ ضربه مدار شکل ۱۵-۲۶ (الف) را معین کرده و آن را برای محاسبه پاسخ ودادشته $v_o(t)$ کار ببرید، اگر $V_i(s) = 1/(s + \alpha)$ باشد (۱۴-۵) را با اعمال قفسیه کانولوشن به دست آورید.

ابتدا یک ولتاژ ضربه $h(t)$ را به مدار، طبق شکل ۱۵-۲۶ (ب) وصل می‌کنیم. گرچه می‌توانیم ره حوزه زمان (t) یا حوزه $H(s)$ کار کنیم، ولی دو می‌را انتخاب می‌کنیم، پس دوباره مایش شکل ۱۵-۲۶ (ب) را در شکل ۱۵-۲۷ می‌کشیم.

$$\text{پاسخ ضربه } H(s) \text{ را با رابطه } H(s) = \frac{V_o}{V_i} \text{ بدست می‌شود:}$$

نابراین هدف فعلی ما V_o است، کاری که به راحتی با تقسیم ولتاژ به دست می‌آید:

$$V_o \Big|_{v_{in}=\delta(t)} = \frac{2}{\frac{s}{2} + 2} = \frac{s}{s+1} = H(s)$$

اکنون ممکن است با کانولوشن و تابع ورودی $v_{in} = 6e^{-t}u(t)$ رابه صورت زیر بنویسیم:

$$v_{in} = \mathcal{L}^{-1}\{V_{in}(s) * H(s)\}$$

ون (1) است: $V_{in}(s) = 6/(s+1)$

$$V_o = \frac{6s}{(s+1)^2} = \frac{6}{s+1} - \frac{6}{(s+1)^2}$$

گرفتن عکس تبدیل لاپلاس داریم:

$$v_o(t) = 6e^{-t}(1-t)u(t) \text{ V}$$

مرین

۱۵-۲۶ با مراجعه به شکل ۱۵-۲۶ (الف) از کانولوشن برای یافتن (t) استفاده کنید، اگر $v_{in} = tu(t)$ باشد.

$$\text{جواب: } v_o(t) = (1 - e^{-t})u(t) \text{ V}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{f_1(t) * f_2(t)\} &= \int_0^\infty f_1(\lambda) \left[\int_{-\lambda}^\infty e^{-s(x+\lambda)} f_2(x) dx \right] d\lambda \\ &= \int_0^\infty f_1(\lambda) e^{-s\lambda} \left[\int_{-\lambda}^\infty e^{-sx} f_2(x) dx \right] d\lambda \\ &= \int_0^\infty f_1(\lambda) e^{-s\lambda} [F_2(s)] d\lambda \\ &= F_2(s) \int_0^\infty f_1(\lambda) e^{-s\lambda} d\lambda \end{aligned}$$

چون بقیه انتگرال در واقع $F_1(s)$ است پس:

$$\mathcal{L}\{f_1(t) * f_2(t)\} = F_1(s) * F_2(s) \quad (12)$$

با کمی تفاوت می‌بینیم که عکس تبدیل حاصل ضرب دو تابع، کانولوشن عکس تبدیل لاپلاس تک تک آنهاست. نتیجه‌ای که گاهی در تهیه عکس تبدیل لاپلاس مفید واقع می‌شود.

مثال ۱۵-۹

اگر β باشد $V(s) = 1/(s + \alpha)$ باشد (۱۴-۵) را با اعمال قفسیه کانولوشن به دست آورید. ماعکس تبدیل این تابع خاص را در بخش ۱۴-۵ با سط به کسرهای جزئی به دست آورید. اکنون $V(s)$ را به صورت حاصل ضرب دو تابع در نظر می‌گیریم.

$$V_1(s) = \frac{1}{(s + \alpha)}$$

و

$$V_2(s) = \frac{1}{(s + \beta)}$$

که

$$v_1(t) = e^{-\alpha t}u(t)$$

و

$$v_2(t) = e^{-\beta t}u(t)$$

و بنابراین (۱۲) مطلوب بالا فاصله حاصل می‌شود:

$$\begin{aligned} v(t) &= \mathcal{L}^{-1}\{V_1(s)V_2(s)\} = v_1(t) * v_2(t) = \int_0^\infty v_1(\lambda)v_2(t - \lambda) d\lambda \\ &= \int_0^\infty e^{-\alpha\lambda}u(\lambda)e^{-\beta(t-\lambda)}u(t - \lambda) d\lambda = \int_0^t e^{-\alpha\lambda}e^{-\beta(t-\lambda)}e^{\beta\lambda} d\lambda \\ &= e^{-\beta t} \int_0^t e^{(\beta-\alpha)\lambda} d\lambda = e^{-\beta t} \frac{e^{(\beta-\alpha)t} - 1}{\beta - \alpha} u(t) \end{aligned}$$

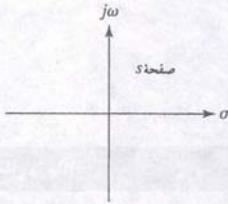
یا به صورت منسجم‌تر

$$v(t) = \frac{1}{\beta - \alpha} (e^{-\alpha t} - e^{-\beta t})u(t)$$

این همان پاسخی است که با روش بسط به کسرهای جزئی به دست آورده‌یم. توجه کنید که لحظه پله (۱۲) در نتیجه الزامی است زیرا همه توابع لاپلاس فقط برای زمان غیر منفی معینند (یکسویه‌اند).

تمرین

۱۵-۱۰ مثال ۱۵-۸ را با روش کانولوشن در حوزه s تکرار کنید.

شکل ۱۵.۳ صفحه فرکانس مختلط با صفحه S .

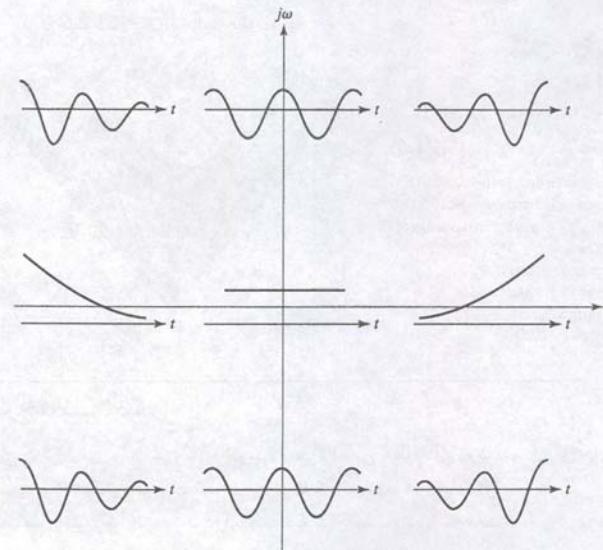
البته معمولاً مقدار $Z(\sigma)$ را رسم می‌کنیم تا مقایسه آن با $Z(j\omega)$ ساده باشد. زاویه فاز $Z(\sigma)$ فقط 0° و 180° ($\pm 90^\circ$) چشم پوشی شده است. نکته مهم این است که تنها یک متغیر مستقل، σ در تابع نمایی و ω در سینوسی، وجود دارد. اکنون بگذارید بینینم اگر بخواهیم پاسخی را بر حسب S رسم کنید چه امکانات دیگری را در اختیار داریم.

ترسیم در صفحه فرکانس مختلط

برای شناخت کامل S به دو پارامتر σ و ω نیاز داریم. پاسخ نیز تابع مختلطی است و بنابراین باید زاویه فاز آن بر حسب S رسم شود. هر یک از این کیمیت‌ها، مثلاً اندازه، تابعی از دو پارامتر σ و ω است و می‌توان آن را در دو بعد و به صورت مجموعه‌ای از منحنی‌ها رسم نمود، مثل اندازه در برابر ω با $\sigma = 0$ به عنوان پارامتر.

روش بهتر در نمایش مقدار بعضی پاسخ‌های مختلط گرافیکی به کارگیری مدل سه بعدی است. هرچند ترسیم این گونه گراف‌ها روی کاغذ دو بعدی مشکل است ولی تجسم مدل، آنقدر مشکل نیست و بسیاری از آن‌ها را می‌توان در ذهن ساخت، اصلاح کرد و به سرعت پاک نمود. باید دو محور σ و ω ، که بر یکدیگر عمودند را در یک سطح افقی نصورو کنیم. اکنون این سطح افقی یک سطح مختلط یا سطح S را تشکیل می‌دهد (شکل ۱۵.۳). به هر نقطه از این صفحه دقیقاً یک مقدار S تعلق می‌گیرد و به هر مقدار S هم یک نقطه در صفحه مختلط تخصیص می‌یابد.

چون مازال قبل با نوع تابع حوزه زمان مرتب با مقدار خاصی از فرکانس مختلط S آشنا شیم، می‌توانیم به تابع تحریک یا پاسخ و اداشته در هر ناحیه از صفحه S تابع خاصی را نسبت دهیم. مثلاً مبدأ یک کیمیت dc را نشان می‌دهد. نقاط واقع بر محور σ تابع نمایی را نمایش می‌دهند که در $\sigma < 0$ نمایی میرا می‌شوند و برای $\sigma > 0$ نمایی افزاینده‌اند. تابع سینوسی خالص مربوط به نقاط مثبت و منفی محور ω می‌باشد. سمت راست صفحه S یا RHP نقاطی هستند که بخش حقیقی مثبت فرکانس را توصیف می‌کنند. پس متعلق به کیمیت‌هایی از حوزه زمانی S علامت می‌زنیم. پس از شناسایی مقدار $Z(\sigma)$ در چند فرکانس غیربرحرانی (مثلاً در 3Ω) ترسیم $|Z(\sigma)|$ در برابر σ طبق شکل ۱۵.۲۸ ساده خواهد بود. این نمودار اطلاعاتی را برای ما هنگام اتصال امپدانس به یک تابع تحریک ساده $e^{\sigma t}$ در اختیار می‌گذارد. توجه کنید که در حالت خالص، حالت امپدانس به $\sigma = 0$ مطالع فوق را به طور خلاصه نشان می‌دهد.



شکل ۱۵.۳۱ یک تابع حوزه زمان در ناحیه‌ای از صفحه فرکانس مختلط که به آن متعلق است کشیده شده است.

۱۵.۶ صفحه فرکانس مختلط

اکنون روش گرافیکی کلی تری را با ترسیم کمیت‌ها بر حسب تابعی از S بر نامه ریزی می‌کنیم. یعنی می‌خواهیم پاسخ را به طور همزمان به صورت تابعی از σ و ω نشان دهیم. چنین نمودار گرافیکی از پاسخ و اداشته به صورت تابعی از فرکانس مختلط S ، تکنیکی مفید و روشنگر در تحلیل و طراحی مدارها است. پس از تفہیم صفحه فرکانس‌های مختلط یا صفحه S ، خواهیم دید که چقدر سریع رفتار یک مدار را از فرکانس‌های خاص در این صفحه به صورت تقریب می‌توان بیان کرد.

روش عکس هم خوبی مفید است: اگر منحنی پاسخ مطلوب را داشته باشیم (مثلاً پاسخ فرکانس یک فیلتر)، امکان دارد که بر حسب قطب‌ها و صفرها در صفحه S تضمیم‌گیری کرده و سپس فیلتر را بازیاری، همچنین صفحه S ابزاری اساسی است که به وسیله آن وجود نوسان‌های نامطلوب ممکن در تقویت‌کننده‌های پسخورده و سیستم‌های کنترل مورد تحقیق و تفحص فرار می‌گیرد.

پاسخ بر حسب S

اجازه بدید برای یافتن تابعی بر حسب S ، ابتدا پاسخی بر حسب σ یا ω را در نظر بگیریم. مثلاً امپدانس ورودی یک شبکه متشکل از یک مقاومت 3Ω را که با یک الگار $4H$ سری است در نظر می‌گیریم. این امپدانس برابر است با:

$$Z(s) = 3 + 4s\Omega$$

اگر تفسیر گرافیکی تغییر امپدانس را بر حسب σ و ω بخواهیم، یعنی $s = \sigma + j\omega$ = آن‌گاه

$$Z(\sigma) = 3 + 4\sigma\Omega$$

که صفری در $\frac{3}{4} - \sigma$ و قطبی در بین‌نهایت است. این فرکانس‌های بحرانی و مهم را روی محور σ علامت می‌زنیم. پس از شناسایی مقدار $Z(\sigma)$ در چند فرکانس غیربرحرانی (مثلاً در 3Ω) ترسیم $|Z(\sigma)|$ در برابر σ طبق شکل ۱۵.۲۸ ساده خواهد بود. این نمودار اطلاعاتی را برای ما هنگام اتصال امپدانس به یک تابع تحریک ساده $e^{\sigma t}$ در اختیار می‌گذارد. توجه کنید که در حالت خالص، حالت امپدانس به $\sigma = 0$ مطالع dc (همان طور که انتظار می‌رود امپدانس 3Ω را خواهیم داشت).

پاسخ بر حسب ω

برای ترسیم پاسخ به صورت تابعی از فرکانس زاویه ω ، بگذارید $s = 0 + j\omega$ باشد:

$$Z(j\omega) = 3 + j4\omega$$

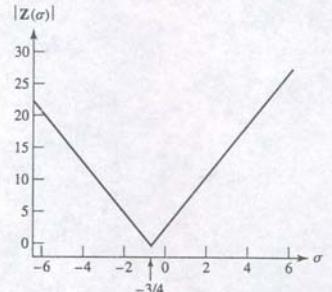
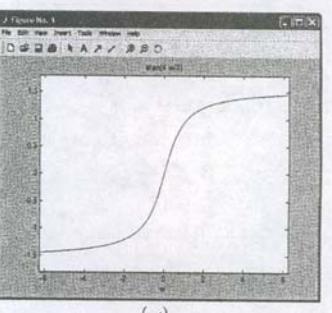
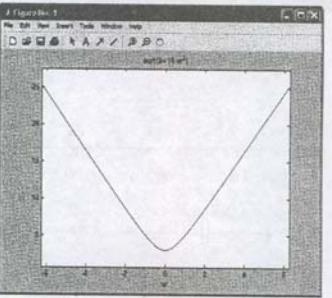
سپس اندازه (مقدار) فاز را به صورت تابعی از ω بدست آورید:

$$|Z(j\omega)| = \sqrt{9 + 16\omega^2} \quad (14)$$

$$\text{ang}Z(j\omega) = \tan^{-1} \frac{4\omega}{3} \quad (15)$$

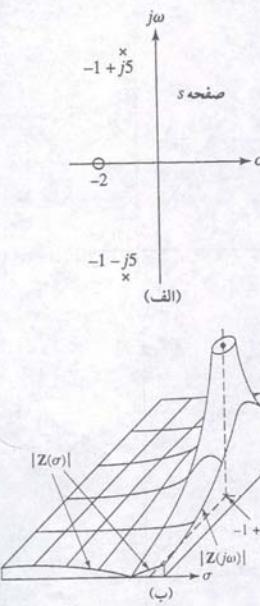
تابع دامنه یک قطب در بین‌نهایت و یک منبینم در $\omega = 0$ دارد. به راحتی می‌توان آن را به صورت منحنی $|Z(j\omega)|$ بر حسب ω رسم کرد. با افزایش فرکانس مقدار امپدانس هم زیاد می‌شود و این دقیقاً رفتاری است که از یک الگار انتظار داریم. زاویه فاز معکوس تابع تائزات است که در $0 = 0$ برابر صفر و در $\omega = \pm\infty$ برابر 90° می‌شود. این رابطه به راحتی به صورت نمودار زاویه $Z(j\omega)$ در برابر ω قابل ترسیم است. معادلات (۱۴) و (۱۵) در شکل ۱۵.۲۹ رسم شده‌اند.

در ترسیم $Z(j\omega)$ بر حسب ω ، دو نمودار دو بعدی لازم است. هر دو کمیت دامنه و زاویه فاز بر حسب ω هستند. برای تحریک نمایی می‌توانیم همه اطلاعات را روی یک گراف دو بعدی رسم کنیم به شرطی که هر دو مقدار مثبت و منفی $Z(\omega)$ بر حسب σ در نظر گرفته شوند.

شکل ۱۵.۲۸ رسم تابع $|Z(\sigma)|$ بر حسب فرکانس σ .شکل ۱۵.۲۹ (الف) نمودار $|Z(j\omega)|$ بر حسب فرکانس. نمودار به کمک فرمان مطلب زیر رسم شده است:

```
EDU» ezplot('sqrt(9 + 16 * w ^ 2)')
```

(ب) رسم زاویه $Z(j\omega)$ بر حسب فرکانس.



شکل ۱۵.۳۴ (الف) برج قطب - صفر امپدانس $Z(s)$. (ب) بخشی از مدل صفحه الاستیک مقدار $Z(s)$

$$Z(s) = k \frac{s + 2}{s^2 + 2s + 26} \quad (16)$$

برای تعیین k , ما باید مقداری برای $Z(s)$ در قبال s , که فرکانس بحرانی نباشد, داشته باشیم. حال اجازه بدهد تا بر اساس واقعیتی مثل $1 = Z(0)$, k را انتخاب کنیم. از جایگزینی مستقیم در معادله (۱۶), k برابر ۱۳ بودست می‌آید. پس:

$$Z(s) = 13 \frac{s + 2}{s^2 + 2s + 26} \quad (17)$$

می‌توان نمودارهای $|Z(\sigma)|$ بر حسب σ و $|Z(j\omega)|$ بر حسب ω را دقیقاً از معادله (۱۷) به دست آورد و لی فرم عمومی و کلی تابع از برج قطب و صفر و صفحه الاستیک کاملاً مشخص است. بخش‌هایی از این دو منحنی در جوانب مدل در شکل ۱۵.۳۴ (ب) ملاحظه می‌شود.

۱۵-۱۳ ترکیب موازی 0.25mH و 5Ω با ترکیب موازی $40\mu\text{F}$ و 5Ω سری است. (الف) $Z_{in}(s)$ بعنی امپدانس ورودی ترکیب سری را مشخص کنید. (ب) تمام صفرهای (s) را معنی نمایید. (ج) تمام قطب‌های $Z_{in}(s)$ را تعیین کنید. آرایش قطب - صفر را رسم نمایید.
جواب: $\Omega = 10^8 / (s^2 + 10000s + 10^8)$, 5krad/s , 5rad/s , 20rad/s

وابستگی فرکانس اندازه و زاویه فاز

تاکنون با استفاده از صفحه S و مدل ورق الاستیک، اطلاعات کافی را درباره تغیرات فرکانسی اندازه (دامنه) پاسخ در حوزه زمان یافته‌یم. با این وجود با کمک برج قطب و صفر می‌توان اطلاعات کافی را برای دامنه و فاز به دست آورد. این روش ابزار قدرتمند دیگری را در اختیار ما گذاشت.

بچسبایم. در ازای هر مقدار S متعلق به هر قطب، ممکن است یک میله عمودی نازک برای آن متصور شویم اگر صفر در بین نهایت باشد باید صفحه لاستیکی را با یک حلقه بزرگ به صفحه S بچسبایم. اگر قطب در بین نهایت باشد باید صفحه را با یک حصار بلند نگه داریم. اگر صفحه لاستیکی به حد کافی بزرگ، بی وزن و کاملاً کشسان باشد، پوزنها بسیار ریز و میله‌ها بسیار نازک خواهند بود و ارتفاع صفحه لاستیکی از صفحه S دقیقاً با دامنه پاسخ، متناسب خواهد بود.

این توضیحات را می‌توان با پیکرهای از صفرها و قطب‌ها که به آن برج یا منظمه قطب - صفر می‌گردند تشریح کرد. این آرایش تمام فرکانس‌های بحرانی در حوزه فرکانس، مثل امپدانس $Z(s)$ را نشان می‌دهد. در شکل ۱۵.۳۴ (الف) برج یک امپدانس را می‌بینید. اگر یک مدل الاستیکی را تجسم کنیم که در $j0$ و $-j5$ و $s = -1 - j5$ به کف چسبیده و در $s = -2$ از برج شده باشد، سطحی با یک دره و دو قله خواهیم داشت. بخش متعلق به LHP در شکل ۱۵.۳۴ (ب) دیده می‌شود.

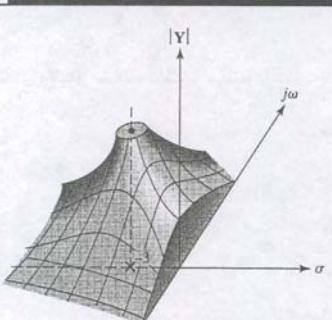
اکنون باید عبارتی را برای $Z(s)$ به وجود آوریم که به این برج قطب و صفر منتهی شود. صفر، عامل $(s + 2)$ را در صورت دو قطب عوامل $(s + 1 - j5)$ و $(s + 1 + j5)$ را در مخرج دارند. به جز k , اکنون فرم $Z(s)$ را می‌دانیم. یعنی:

$$Z(s) = k \frac{s + 2}{(s + 1 - j5)(s + 1 + j5)} \quad (18)$$

تمرین

حال باید به دنبال روش مناسبی برای نمایش گرافیکی پاسخ به عنوان تابعی از فرکانس مختلط S بگردیم. مقدار یا اندازه پاسخ را می‌توان با ساخت مدلی به مانند یک تپه ساخت که ارتفاع هر نقطه آن از کفت متناسب با مقدار پاسخ در ازای آن S است. به بیان دیگر ما محور سومی را به مجموعه اضافه کرده‌ایم که عمود بر هر دو محور σ و $j\omega$ است و از مبدأ می‌گذرد. این محور را با $|Y|$ ، $|Y_1|$ و $|Y_2|$ یا هر نعاد نسبت دیگری نامگذاری می‌کنیم. مقدار پاسخ در ازای هر مقدار S حاصل شده و نمودار متوجه سطحی در بالای صفحه S است.

مثال ۱۵.۱۱



ادمیتانس ترکیب سری یک القاگر H و مقاومت Ω را به فرم تابعی از σ و ω رسم کنید.

ادمیتانس دو عنصر سری با رابطه زیر داده می‌شود:

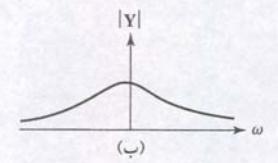
$$Y(s) = \frac{1}{s + 3}$$

با جایگزینی $\sigma + j\omega = s$ مقدار تابع چنین به دست می‌آید:

$$|Y(s)| = \frac{1}{\sqrt{(\sigma+3)^2 + \omega^2}}$$

هنگامی که $\sigma + j0 = s$ باشد مقدار پاسخ بین نهایت است و وقتی s بین نهایت باشد، مقدار $|Y(s)|$ صفر است. بنابراین مدل رول روی نقطه $(j0, -3)$ باید دارای ارتفاع صفر را داشته باشد. بررش از چنین مدلی در شکل ۱۵.۳۲ (الف) ملاحظه می‌شود.

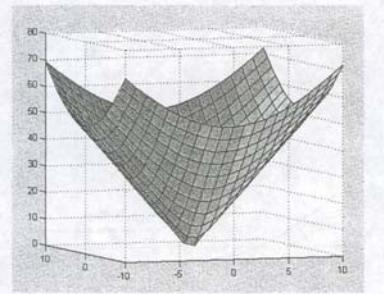
پس از بررسی مدل، مشاهده $|Y|$ به صورت تابعی از ω (با $\sigma = 0$) ساده است به این ترتیب که مدل را با سطحی عمود حاوی محور ω بزیرش دهیم. در شکل ۱۵.۳۲ (الف) این بررس و نیز $|Y|$ بر حسب ω دیده می‌شود. این بررش به صورت منحنی در شکل ۱۵.۳۲ (ب) هم مشاهده می‌شود. به روشن مشابه یک صفحه عمود حاوی محور σ ما را قادر می‌سازد تا $|Y|$ را بر حسب σ (با $\omega = 0$) طبق شکل ۱۵.۳۲ (ج) معین کنیم.



تمرین

۱۵-۱۲ مقدار امپدانس $Z(s) = 2 + 5s$ را به صورت تابعی از σ و $j\omega$ رسم نمایید.

جواب: شکل ۱۵.۳۳ را ملاحظه نمایید.



شکل ۱۵.۱۲ حل مسئله ۱۵.۱۲ با کدهای زیر:

```
DU>> sigma = linspace(-10,10,21);
DU>> omega = linspace(-10,10,21);
DU>> [X, Y] = meshgrid(sigma,omega);
DU>> Z = abs(2 + 5*X + j*5*Y);
DU>> colormap(gray);
DU>> s = [-5 3 8];
DU>> surf(X,Y,Zs);
DU>> view (-20,5)
```

شکل ۱۵.۳۲ (الف) بررسی از مدل تپه‌ای که در آن سطح فوقانی، $|Y(s)|$ را برای ترکیب سری القاگر H و مقاومت Ω نشان می‌دهد. (ب) $|Y(s)|$ به صورت تابعی از ω . (ج) بر حسب σ .

برج قطب - صفر

این روش برای توابع نسبتاً ساده خوب کار می‌کند ولی به طور کلی روش عملی تری مورد نیاز است. باید یک بار دیگر صفحه S را روی کفت متناسب با مقدار پاسخ به عنوان تابعی از فرکانسی آن تصور کنیم. حال توجه خود را به همه صفرها و قطب‌های پاسخ معطوف می‌کنیم. در هر صفری پاسخ صفر است و ارتفاع ورق باشد و بنابراین ورق را باید با پونز به کفت

شکل قطعی یک عدد مختلط را به صورت پیکانی که از مبدأ صفحه s به فرکانس مختلف موردنظری رسم می‌شود در نظر بگیرید. طول پیکان همان اندازه فرکانس مختلف و زاویه‌ای که پیکان با جهت مشت محور ω می‌سازد هم زاویه فرکانس مختلف می‌باشد. فرکانس $s_1 = -3 + j4 = 5 / 126.9^\circ$ در شکل ۱۵.۳۵ (الف) دیده می‌شود.

تفاوت دو مقادار s را هم باید با پیکان یا برداری در صفحه مختلط نشان داد. اجازه بدهد مقداری مثل $s = j7$ که متناظر با موجی سینوسی است برگزینیم و آن را طبق شکل ۱۵.۳۵ (ب) با بردار $s - s_1$ نشان دهیم. تفاضل $s - s_1$ که برداری است از نقطه s_1 به نقطه s نسبت در شکل ۱۵.۳۵ (ج) ترسیم شده است. دقت کنید که $s = (s - s_1) + s_1 = 5 + j3 = 4.24 / 45^\circ$

باید بینیم چگونه تغییر گرافیکی تفاضل $(s - s_1)$ را در تعیین باسخ فرکانس باری می‌نماید. به ادمیتانس زیر توجه کنید:

$$V(s) = s + 2$$

این عبارت دارای صفری در $j0 = -2$ است. عامل ۲ s را هم می‌توان به صورت $s - s_2$ نوشت و با برداری از محل صفر، s_2 ، به فرکانس s نشان داد. اگر پاسخ سینوسی موردنظر باشد، s باید روی محور $j\omega$ قرار گیرد (شکل ۱۵.۳۶ (الف)). اگرتون می‌توانیم اندازه $2 + s$ را بر حسب تغییرات ω از صفر تا پیوستی تصور کنیم. وقتی s صفر است، بردار، اندازه ۲ و زاویه 0° را دارد. بنابراین $= 2$. با افزایش ω ، مقادار آن به آهستگی ابتدا شروع به افزایش می‌کند و زاویه فاز هم در ابتدا به طور خطی افزایش یافته و سپس با میل به پیوستی ω به پیوستی ω می‌رسد. اندازه و زاویه $V(j\omega)$ در شکل ۱۵.۳۶ (ب) ملاحظه می‌شود.

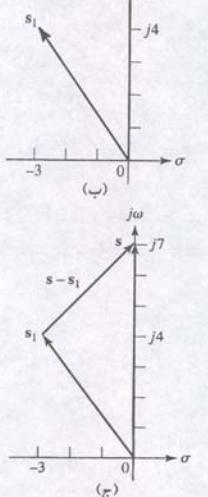
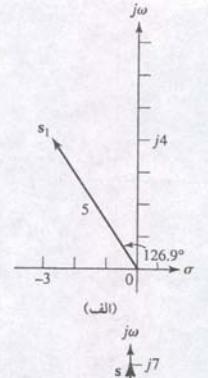
اگرتون باید مثال واقعی تری را با ملاحظه تابع حوزه فرکانس که به صورت نسبت دو جمله بیان شده است دنبال کنیم:

$$V(s) = \frac{s + 2}{s + 3}$$

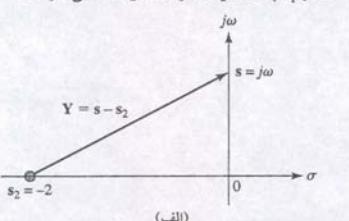
باز هم s را با یک تابع تحریک سینوسی متناظر می‌گیریم و بردارهای $2 + s$ و $3 + s$ را رسم می‌کنیم، یکی را از صفر به فرکانس موردنظر روی محور $j\omega$ و دیگری از قطب به آن نقطه وصل می‌کنیم، دو بردار در شکل ۱۵.۳۷ (الف) رسم شده‌اند. نسبت این دو بردار، اندازه‌ای برابر نسبت اندازه‌های دو بردار و زاویه‌ای برابر با تفاضل زوایای فاز بردار صورت و بردار مخرج دارد. با حرکت دادن s بر روی محور $j\omega$ و لحاظ نسبت فاصله هر صفر و هر قطب از $s = j\omega$ ، می‌توان تغییر مقدار $(s - j\omega)$ را بر حسب ω پیدا کرد. این نسبت در $0 = 0$ برابر $\frac{2}{3}$ بوده و با میل ω به پیوستی به سمت ۱ میل می‌نماید (شکل ۱۵.۳۷ (ب)).

بررسی تفاضل دو زاویه فاز نشان می‌دهد که در $0 = \omega$ زاویه 0° می‌باشد. این زاویه ابتدا با افزایش ω بالا می‌رود، پس از $s = j\omega$ بزرگ‌تر از زاویه 3° است. سپس با افزایش بیشتر ω می‌شود. نهایتاً در فرکانس بیانی $\omega = 90^\circ$ این تابع در شکل ۱۵.۳۷ (ج) کشیده شده است. هر چند هیچ علامت‌گذاری کنی روى این منحنی ها به چشم نمی‌خورد ولی مقادیر کنی را به راحتی می‌توان به دست آورد. مثلاً پاسخ مختلط $j4 = s$ از نسبت زیر به دست می‌آید:

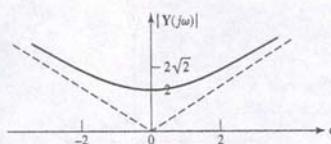
$$\begin{aligned} V(j4) &= \frac{\sqrt{4 + 16 / \tan^{-1}(\frac{4}{2})}}{\sqrt{9 + 16 / \tan^{-1}(\frac{4}{3})}} \\ &= \frac{\sqrt{20}}{\sqrt{25}} / (\tan^{-1} 2 - \tan^{-1}(\frac{4}{3})) \\ &= 0.894 / 10.3^\circ \end{aligned}$$



شکل ۱۵.۳۵ (الف) فرکانس مختلط پیکانی یک پیکان از مبدأ به $s = -3 + j4$ مشخص می‌شود. (ب) فرکانس $j7$ هم با برداری از اختلاف $s - s_1$ نشان داده شده است. (ج) کشیده شود نشان داده می‌شود.



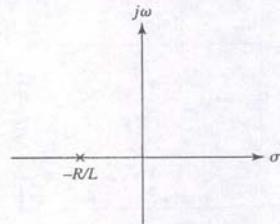
شکل ۱۵.۳۶ (الف) برداری که ادمیتانس $Y(s) = s + 2$ نشان می‌دهد.



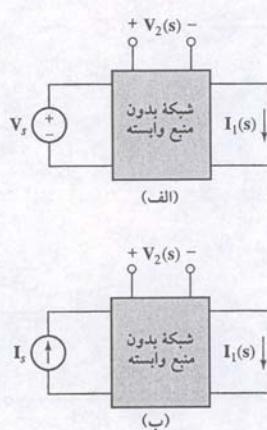
شکل ۱۵.۳۷ (الف) بردارهای ترسیمی از فرکانس پیکانی در پاسخ ولتاژ فرکانس $s = (s + 2)/(s + 3)$ (ب) و (ج) منحنی‌های اندازه و فاز $Y(j\omega)$ که از خارج قسمت دو بردار بخش (الف) به دست آمدند.

در آغاز این فصل، نشان دادیم که چگونه می‌توان در حوزه فرکانس از طریق تبدیل لاپلاس، گستره وسیعی از مدارهای متغیر با زمان را با حذف معادلات مشتق -انتگرالی بررسی نموده و به جای آن معادلات جبری را به کار برد. اطلاعات زیادی در نمودار قطب و صفر یک پاسخ واداشته در صفحه s نهفته است. در این بخش خواهیم دید که چگونه یک پاسخ جریان کامل، پاسخ طبیعی و واداشته که به وسیله یک تابع تحریک دلخواه تولید می‌شود را می‌توان به سرعت از آرایش قطب - صفر پاسخ جریان واداشته و مقادیر اولیه نوشت. روش به طور مشابه در یافتن پاسخ ولتاژ کامول تولید شده با یک منبع دلخواه نیز معتبر است.

بگذارید روش را با ملاحظه ساده‌ترین مثال، یعنی مدار RL سری شکل ۱۵.۳۹ معرفی کنیم. منبع ولتاژ کلی t پس از ستهشدن کلیدی در $t = 0$ ، جریان $i(t)$ را تولید می‌کند. پاسخ کامل $i_n(t) = i_n(t) + i_i(t)$ از ترکیب پاسخ طبیعی و پاسخ واداشته در $t = 0$ به دست می‌آید که $i_i(t) = i_i(t)$ می‌باشد.



شکل ۱۵.۴۱ حذف صفر و قطب تابع تبدیل
 $\text{H}(s) = \frac{R}{L} + \frac{1}{sL}$



شکل ۱۵.۴۱ قطب‌های پاسخ $I_1(s)$ یا $V_2(s)$ ناشی از یک (الف) منبع ولتاژ V_s و (ب) منبع جریان I_s . قطب‌ها تعیین کننده پاسخ طبیعی $i_{1n}(t)$ یا $v_{2n}(t)$ می‌باشند و هنگامی رخ می‌دهد که V_s یا I_s یک اتصال کوتاه، یا A با مدار باز و یا انرژی اولیه موجود جایگزین گردد.

مثال ۱۵-۱۲

سکل‌های ۱۵.۴۱ (الف) و (ب) اتصال یک منبع به شبکه بدون منبع مستقل را نشان می‌دهد. اسخ موردنظر که ممکن است جریانی مثل $I_1(s)$ یا ولتاژی چون $V_2(s)$ باشد، با تابع تبدیلی بان می‌شود که همه فرکانس‌های بحرانی را تغییر دهد. دقیق‌تر بگوییم ما پاسخ s را در سکل ۱۵.۴۱ (الف) بر می‌گزینیم:

$$\frac{V_2(s)}{V_s} = H(s) = k \frac{(s - s_1)(s - s_3) \dots}{(s - s_2)(s - s_4) \dots} \quad (19)$$

طب‌های $H(s)$ در s_4, s_2, s_0 و s_4 هستند و بنابراین ولتاژ معین $V_2(s)$ در هر یک از این رکانس‌ها باید فرم عملیاتی ممکن برای پاسخ طبیعی باشد. بنابراین منبع ولتاژ صفر ولتی را، پایانه‌های ورودی اعمال می‌کنیم (که همان اتصال کوتاه باشد) بنابراین پاسخ طبیعی به هنگام اتصال کوتاه شده پایانه‌های ورودی باید فرم زیر را داشته باشد:

$$v_{2n}(t) = A_2 e^{s_2 t} + A_4 e^{s_4 t} + \dots$$

ه‌ر A باید بر حسب مقادیر اولیه محاسبه شود (شامل هر منبع ولتاژ اعمال شده به پایانه‌های ورودی).

برای یافتن فرم پاسخ طبیعی $i_{1n}(t)$ در شکل ۱۵.۴۱ (الف)، باید قطب‌های تابع تبدیل $H(s) = I_1(s)/V_s$ را به دست آوریم. توابع تبدیل اعمال شده به آن‌چه در شکل ۱۵.۴۱ (ب) یده می‌شود $I_1(s)/V_2(s) = I_1(s)/I_2(s)$ باشد و آن‌گاه قطب‌های آن‌ها پاسخ‌های طبیعی $i_{1n}(t)$ و $v_{2n}(t)$ را به ترتیب معین می‌کنند.

اگر پاسخ طبیعی برای شبکه بی‌منبع مستقل موردنظر باشد، آن‌گاه معین I_1 یا V_2 در هر نقطه ناسی می‌تواند وارد شود، تنها محدودیت این کار این است که باشتن آن منبع، شبکه اصلی بد به دست آید. سپس تابع تبدیل و قطب‌های آن را به دست آوریم و فرکانس‌های طبیعی را شخص می‌کنیم. وقت که منبع در هر جاکه باشد باید فرکانس‌های یکسانی به دست آید. لر شبکه بمنع داشته باشد می‌توان آن را کشت و در جای مناسبتری از مدار منعی قرار داد.

الت خاص

ل از پرداختن به چند مثال، لازم است با حالت خاصی که ممکن است پیش آید آشنا شویم. نحالت زمانی رخ می‌دهد که شبکه شکل ۱۵.۴۱ (الف) یا (ب) حاوی دو یا چند بخش جدا هم باشد. مثلاً ممکن است ترکیب موازی سه شبکه را داشته باشیم: R_1 سری با R_2 سری و یک اتصال کوتاه، واضح است که منبع ولتاژ سری با R_1 و C نمی‌تواند جریانی را در R_2 تولید نماید. یعنی تابع تبدیل صفر است. مثلاً برای یافتن فرم پاسخ طبیعی ولتاژ القاگر، بین ولتاژ باید در شبکه R_2 نسبت شود. این حالت خاص را می‌توان با بررسی شبکه و قبل از اردادن در آن تشخیص داد. اگر این کار را نکنیم تابع تبدیل صفر خواهد شد. اگر $H(s) = 0$ شد، هیچ اطلاعاتی درباره فرکانس‌های پاسخ طبیعی به دست نمی‌آید و باید محل مناسب تری ای منبع بدست آورد.

برای مدار شکل ۱۵.۴۲، عبارتی برای i_1 و i_2 در $s > 0$ معین کنید. مقادیر اولیه $i_1(0) = i_2(0) = 11$.

نحاله بدید تا منبع ولتاژ V_s را بین x و x' قرار دهیم و تابع تبدیل V_s را دست آوریم. این تابع تبدیل ادیمانس دیده شده به وسیله منبع ولتاژ نیز هست. داریم:

$$I_1(s) = \frac{(3s + 2)V_s}{2s + 1 + 6s/(3s + 2)} = \frac{3s + 2}{2s^2 + 13s + 2}$$

پاسخ واداشته را با کار در حوزه زمان پیدا می‌کنیم و البته فرض می‌شود که $(t)_0$ فرمی اساسی داشته و قابل انتقال به حوزه فرکانس باشد. در غیر این صورت مثلاً اگر $(t)_0 = 1/(1 + t^2)$ باشد، بهتر است به سراغ معادلات دیفرانسیل برویم. برای مدار شکل ۱۵.۳۹ داریم:

$$I_1(s) = \frac{V_s}{R + sL} \quad \text{یا} \quad (17)$$

$$I_f(s) = \frac{1}{L} \frac{V_s}{s + R/L} \quad (18)$$

اکنون باید پاسخ طبیعی را در نظر بگیریم. با توجه به تجزیه قبلي می‌دانیم که پاسخ به فرم نمایی میرا با ثابت زمانی L/R است ولی وانمود می‌کنیم اولین باری است که با آن مواجه می‌شویم. بنا به تعریف پاسخ طبیعی مستقل از تابع تحریک است. تابع تحریک فقط در اندازه پاسخ طبیعی نقش دارد. برای این‌که فرم صحیح را باید، همه منابع مستقل را می‌گشیم. در اینجا $(t)_0$ را اتصال کوتاه می‌کنیم. سپس سعی خواهیم کرد پاسخ طبیعی را به عنوان حالت حدی از پاسخ واداشته بگذاریم. به سراغ عبارت حوزه فرکانس معادله (18) می‌رویم و $0 = V_s$ را در آن قرار می‌دهیم. در بدأ امر چنین به نظر می‌رسد که $I(s) = 0$ هم باید صفر شود و اگر در یک فرکانس مختلطی کار می‌کنیم که قطب ساده (S) است، لزوماً چنین نیست. یعنی صورت و مخرج هر دو ممکن است صفر باشد به نحوی که ضرورتاً (S) صفر نباشد.

باید این ایده جدید را از زاویه دیگری بگیریم. ما توجه خود را به نسبت پاسخ واداشته موردنظر به نیروی محركه معطوف می‌کنیم. این نسبت را با $H(s)$ نشان می‌دهیم و آن را تابع تبدیل یا تابع انتقال می‌نامیم. داریم:

$$\frac{I_f(s)}{V_s} = H(s) = \frac{1}{L(s + R/L)}$$

در این مثال تابع تبدیل، امیدانسی است که در مقابل V_s قرار دارد. ما بانتظیم $= 0$ به دنبال پاسخ طبیعی (بی‌منبع) هستیم. با این وجود چون $I_f(s) = V_s H(s) = 0$ است، اگر $0 = V_s$ باشد، مقدار جریان غیر صفر به شرطی حاصل می‌شود که در قطب $H(s)$ کار می‌کنیم. بنابراین تابع تبدیل از اهمیت خاصی برخوردار است.

به مدار RL سری خود باز می‌گردیم. می‌بینیم که قطب تابع تبدیل در $j\omega = -R/L$ واقع است (شکل ۱۵.۴۰). اگر ما کار را در این فرکانس مختلط انجام دهیم، تنها جریان محدودی که می‌تواند حاصل شود باید ثابتی در حوزه $s = 0$ باشد. پس پاسخ طبیعی چنین خواهد بود.

$$I(s) = \frac{R}{L} + j0 = A$$

که ثابت نامشخصی است. اکنون مایلیم این پاسخ را به حوزه زمان بازگردانیم. برای این کار عکس تبدیل لاپلاس را به کار می‌بریم. معهدها قبلًا مقداری را برای s مشخص کردند. و چنین کاری درست نیست. در عوض به بخش حقیقی تابع کلی $i_n(t)$ یعنی $i_n(t) = Re\{Ae^{st}\}$ می‌گذرد. به طوری که

$$i_n(t) = Re\{Ae^{st}\} = Re\{Ae^{-Rt/L}\}$$

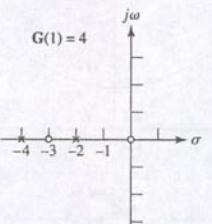
در این حالت داریم:

$$i_n(t) = Ae^{-Rt/L}$$

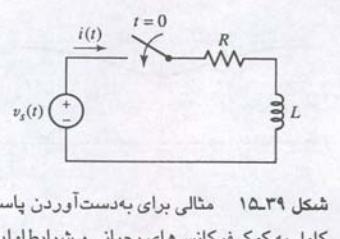
آن‌گاه پاسخ کل برابر است با:

$$i(t) = Ae^{-Rt/L} + i_f(t)$$

به محض مشخص شدن مقادیر اولیه برای این مدار، A معین می‌گردد. پاسخ واداشته $(t)_0$ ایسا باقی تبدیل لاپلاس معکوس (s) به دست می‌آید.



شکل ۱۵.۳۸



شکل ۱۵.۳۹ مثالی برای به دست آوردن پاسخ

کامل به یک فرکانس مختلطی را در

راستی کار در یک فرکانس مختلط چه معنی

می‌دهد؟ چگونه می‌توان فرکانس مختلط را در

آزمایشگاه ایجاد کرد. در اینجا بهتر است ببینیم

چگونه آن را ایجاد کردیم؟ در واقع این تعریف مربوط

است به توصیف یک تابع سینوسی که در یک تابع

نمایی ضرب شده است. این سینکلارها به راحتی با

تجهیزات آزمایشگاهی تولید می‌شوند. بنابراین کافی

است که مقدار σ و ω را تنظیم کنیم تا در

کار نکنیم $s = \sigma + j\omega$.

چون مایل به دانستن کار حالت ماندگار تقویت کننده هستیم، را با
جایگزین می‌کنیم:

$$\frac{V_i}{V_o} = \frac{j\omega RC}{1 + 3j\omega RC + (j\omega)^2 R^2 C^2} = \frac{j\omega RC}{1 - \omega^2 R^2 C^2 + 3j\omega RC} \quad (22)$$

عبارت فوق برای بهره فقط وقتی $1/RC = \omega$ باشد حقیقی است. بسیار انتخاب R و C می‌توان تقویت کننده‌ای با فرکانس خاص $\omega = 1/2\pi RC = 1/2\pi f = \omega/2\pi$ طراحی کرد.

به عنوان مثال باید یک نوسان‌ساز پل و بین برای تولید یک موج سینوسی با فرکانس 20 Hz را با سازیم که در محدوده فرکانس‌های پایین صوتی کار می‌کند. می‌خواهیم فرکانس $\omega = 2\pi f = 6.28(20) = 125.6 \text{ rad/s}$ بود. را داشته باشیم. با تعیین مقدار R، مقدار C مشخص می‌گردد و بر عکس، بافرض داشتن خازن $1\mu\text{F}$ مقاومت لازم $R = 7962\Omega$ خواهد بود. چون مقدار مقاومت فوق استاندارد نیست، باید چند مقاومت را با هم سری کنیم تا آن را به دست آوریم. با این وجود با مراجعت به شکل ۱۵.۴۵ و آماده کردن مدار شبیه‌سازی با PSpice ملاحظه می‌شود که R_1 و R_f هم معلوم نیستند.

هرچند معادله (۲۰) رابطه صحیح بین V_o و V_i را معلوم می‌کند، معادله دیگری برای ارتباط این دو می‌نویسیم:

$$0 = \frac{V_i}{R_1} + \frac{V_i - V_o}{R_f}$$

که می‌توان آن را به صورت زیر نوشت:

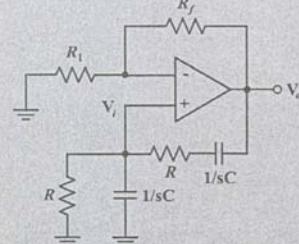
$$\frac{V_o}{V_i} = 1 + \frac{R_f}{R_1} \quad (23)$$

با جایگزینی $1/RC = \omega$ در معادله (۲۲) داریم:

$$\frac{V_i}{V_o} = \frac{1}{3}$$

بستاناین کافی است که R_1 و R_f را طریق انتخاب کنیم که $R_f/R_1 = 2$ باشد. متأسفانه اگر پاسخ گذرا را از تحلیل PSpice ملاحظه کنیم، انتخاب $R_f = 2k\Omega$ و $R_1 = 1k\Omega$ خروجی مناسب نمی‌دهد. برای این که مطمئن شویم سیستم نایابار است (شرط لازم برای آغاز به نوسان) لازم است نسبت R_f/R_1 را کمی بیش از 2 انتخاب نماییم. خروجی شبیه‌سازی شده طرح نهایی شکل ۱۵.۴۶ ملاحظه می‌گردد. توجه کنید که دامنه موج سینوسی روی نمودار را به افزایش است: در عمل عناصر غیرخطی برای ثبت اندازه ولتاژ مدار لازمند.

یک مدار سرراست ولی مفید اسیلاتور پل-وین در شکل ۱۵.۴۵ است.



شکل ۱۵.۴۵ مدار نوسان‌ساز پل وین.

مدار همان تقویت کننده غیرمعکوس گر است که در آن R_1 بین ورودی و اردوگر و زمین وصل شده است. همچنین مقاومت R_f بین خروجی، پایه و اردوگر قرار گرفته است. بستاناین آنچه را که مسیر پسخورد منفی نامیده می‌شود ایجاد می‌نماید، زیرا خروجی تقویت کننده را به ورودی وارونگر متصل می‌سازد. پس هر افزایش V_o در خروجی منجر به کاهش ورودی خواهد شد و این به نوبه خود خروجی کوچکتری را سبب می‌شود. این فرآیند پایداری ولتاژ خروجی V_o را افزایش می‌دهد. بهره تقویت کننده که به صورت نسبت V_o به V_i تعریف می‌شود با نسبت اندازه‌های R_1 و R_f تعیین می‌گردد.

حلقه پسخورد مثبت که مشکل از ترکیب دو عنصر مقاومت-خازن است، به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$Z_p = R \parallel (1/sC) = R + \frac{1}{sC}$$

انتخاب R و C به ماجازه طراحی نوسان‌سازی با فرکانس خاصی را می‌دهد (خازن‌های درونی تقویت کننده خود حداقل فرکانس را محدود می‌کنند). برای این که رابطه‌ای بین R و C و فرکانس نوسان بیایم، به جستجوی عبارتی برای بهره تقویت کننده، یعنی V_o/V_i می‌گردد.

دو قاعده تقویت کننده در فصل ۱۵.۴۵ ملاحظه می‌آورید. با بررسی مدار شکل ۱۵.۴۵ ملاحظه می‌کنید که Z_p و Z_s تقسیم‌کننده ولتاژی را به صورت زیر تعریف می‌کنند:

$$V_i = V_o \frac{Z_p}{Z_p + Z_s} \quad (24)$$

با ساده‌سازی و جایگزینی (۲۴) داریم:

$$\frac{V_i}{V_o} = \frac{\frac{R}{1+sRC}}{\frac{1+sRC}{sC} + \frac{R}{1+sRC}} = \frac{sRC}{1+3sRC+s^2R^2C^2} \quad (25)$$

$$H(s) = \frac{I_1(s)}{V_s} = \frac{\frac{1}{2}(s + \frac{2}{3})}{(s + 2)(s + \frac{1}{6})}$$

با تجربه اخیر می‌توان پیش‌بینی کرد که آباید فرم زیر را داشته باشد:

$$i_1(t) = Ae^{-2t} + Be^{-t/6}$$

حل با استفاده از مقادیر اولیه برای محاسبه A و B کامل می‌گردد. چون به $i_1(0) = 11$ آمپر داده شده پس

$$11 = A + B$$

شکل ۱۵.۴۲ مداری که در آن پاسخ طبیعی i_1 و معادله اضافی لازم با نوشتن معادله KVL حول مدار حاصل می‌گردد:

$$1i_1 + 2 \frac{di_1}{dt} + 2i_2 = 0$$

و با حل مشتق داریم:

$$\frac{di_1}{dt} \Big|_{t=0} = -\frac{1}{2}[2i_2(0) + 1i_1(0)] = -\frac{22}{2} + \frac{1}{6}B$$

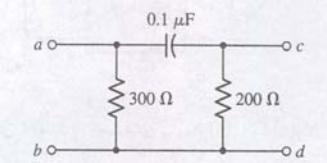
بنابراین $8A = 3B$ و بوده و پاسخ طبیعی موردنظر چنین است:

$$i_1(t) = 8e^{-2t} + 3e^{-t/6} \text{ A}$$

فرکانس‌های طبیعی که در تشكیل می‌دهند متعلق به آن هم هستند. برای محاسبه ثابت‌های اختیاری روش مشابهی به کار می‌رود و داریم:

$$i_2(t) = 12e^{-2t} - e^{-t/6} \text{ A}$$

تمرین



شکل ۱۵.۴۳

اگر متبع جریان $A = u(t)$ در شکل ۱۵.۴۳ از a و b در مدار $i_1(t) = u(t)$ وصل کنیم و جهت جریان

به سمت a باشد، $H(s) = V_{cd}/I_1$ را پیدا کنید و پاسخ طبیعی موجود در $v_{cd}(t)$ به دست آورید.

$$\text{جواب: } 0.20,000 \Omega \text{ و } 120s/(s + 20,000) \text{ s}^{-1}.$$

روشی را که برای محاسبه ضرایب دامنه پاسخ طبیعی دنبال می‌کنیم مفصل است، مگر این که مقادیر اولیه پاسخ موردنظر به وضوح معلوم باشند. با این وجود، ماناید سرعت و سادگی در تهیه پاسخ طبیعی فراموش کنیم.



شکل ۱۵.۴۴

در چند نقطه از این کتاب مارفتاب انواع مدارها را در واکنش به محرك‌های سینوسی بررسی کردیم. با این وجود تولید موج سینوسی خود عنوانی جالب است. مثلاً ایجاد امواج سینوسی بزرگ به کمک آهنربای و سیم‌پیچ یا کاری سرراست است ولی چنین روشی برای ایجاد امواج کوچکتر چندان ساده نیست. برای کاربردهای جریان پایین در چند آمپر باکتر، روشی بهتر استفاده از اسیلاتور است که به آن پسخورد مثبت مدار تقویت کننده هم می‌گویند. مدارهای اسیلاتور یکشنبه‌های از تولیدات مصرفی مانند گیرنده ماهواره‌ای استقرار در فضا (GPS) شکل ۱۵.۴۴ است.

کاربرد عملی مدارهای نوسان‌ساز

$$Z_f = \frac{R_f/sC_f}{R_f + (1/sC_f)} = \frac{R_f}{1 + sC_f R_f} = \frac{1/C_f}{s + (1/R_f C_f)}$$

$$H(s) = \frac{V_{out}}{V_{in}} = -\frac{Z_f}{Z_1} = -\frac{1/R_1 C_f}{s + (1/R_1 C_f)}$$

تابع تبدیل فوق یک فرکانس معین بحرانی، یعنی قطبی در $s = -1/R_1 C_f$ دارد. به شکل ۱۵.۴۹ (ب) می‌روم. در اینجا اجازه بدید Z_f یک مقاومت و Z_1 ترکیب موازی RC باشد:

$$Z_1 = \frac{1/C_1}{s + (1/R_1 C_1)}$$

$$H(s) = \frac{V_{out}}{V_{in}} = -\frac{Z_f}{Z_1} = -R_f C_1 (s + \frac{1}{R_1 C_1})$$

تنها فرکانس بحرانی، صفری واقع در $s = -1/R_1 C_1$ است.

برای تقویت کننده ایده‌آل، خروجی یا امپدنس تونن برای صفر است و بنابراین V_{out} و V_{in} توابعی از هیچ باری جون Z_L در دو سپاراینهای خروجی نیستند. این مطلب در مورد ورودی تقویت کننده دیگری هم که آن وصل شود صحبت دارد و بنابراین ممکن است مدارهایی را که قطبها و صفرهایی مشخص دارند به طور متواല به هم وصل کنیم و در آن خروجی هر op amp به ورودی دیگر مستقیماً متصل گردد و به این ترتیب تابع تبدیل دلخواهی را تولید نماییم.

مثال ۱۵-۱۳

مداری طراحی کنید که تابع تبدیل آن $H(s) = V_{out}/V_{in} = 10(s+2)/(s+5)$ باشد.

قطب واقع در $s = -5$ را می‌توان از شبکه‌ای به صورت شکل ۱۵.۴۹ (الف) بدست آورد.

اگر این شبکه را A نامیم، $1/R_{fA} C_{fA} = 5$. به طور دلخواه $R_{fA} = 100k\Omega$ را بر می‌گذیریم. بنابراین $C_{fA} = 2\mu F$ می‌شود. برای این بخش از مدار:

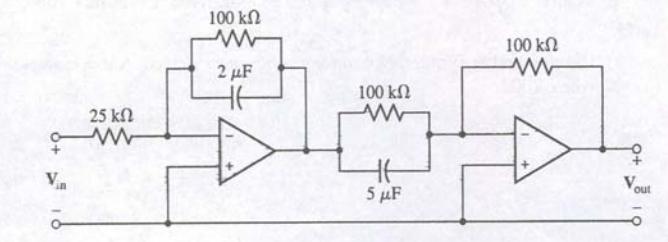
$$H_A(s) = -\frac{1/R_1 A C_{fA}}{s + (1/R_{fA} C_{fA})} = -\frac{5 \times 10^5 / R_{fA}}{s + 5}$$

سپس صفری را در $s = -2$ داریم. از شکل ۱۵.۴۹ (ب)، پس $C_{IB} = 5\mu F$ ، $R_{IB} = 100k\Omega$

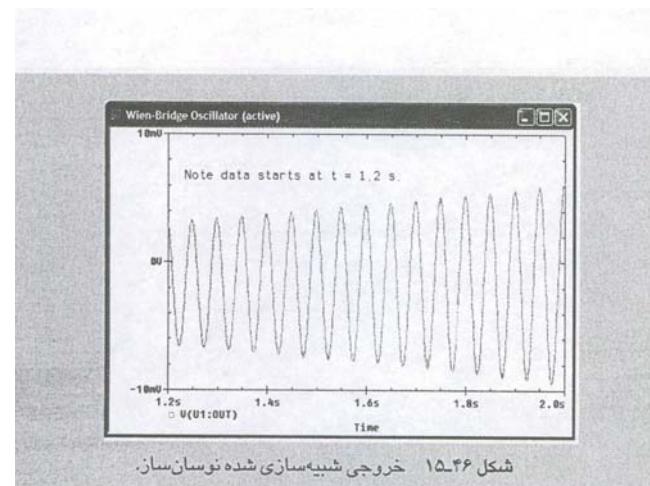
$$H_B(s) = -R_{fB} C_{IB} (s + \frac{1}{R_{IB} C_{IB}}) = -5 \times 10^{-6} R_{fB} (s + 2)$$

$$H(s) = H_A(s) H_B(s) = 2.5 \frac{R_{fB}}{R_{fA}} \frac{s + 2}{s + 5}$$

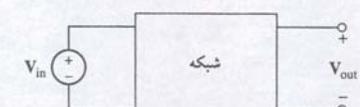
ما طراحی را با انتخاب $R_{fA} = 25k\Omega$ و $R_{fB} = 100k\Omega$ کامل می‌کنیم. نتیجه در شکل ۱۵.۵۰ نشان دیده می‌شود. خازن‌ها در این شبکه نسبتاً بزرگ‌تر ولی دلیل آن فرکانس‌های پایین انتخابی برای قطب و صفر $H(s)$ است. اگر $H(s)$ به $\frac{10(s+2000)}{(s+5000)}$ کاهش یابد، می‌توانیم مقادیر ۲ و $5nF$ را به کار ببریم.



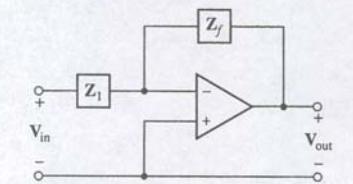
شکل ۱۵.۵۰ این شبکه حاوی دو op amp است و تابع تبدیل ولتاز
 $H(s) = V_{out}/V_{in} = 10(s+2)/(s+5)$



شکل ۱۵.۴۶ خروجی شبیه‌سازی شده نوسان‌سان.



شکل ۱۵.۴۷ با فرض $H(s) = V_{out}/V_{in}$ به $H(s)$ مشخص شده هستیم.
دبال شبکه‌ای با (s) دنبال شنیده شد.



شکل ۱۵.۴۸ برای یک op amp ایده‌آل
 $H(s) = V_{out}/V_{in} = -Z_f/Z_1$

۱۵-۸ تکنیک سنتز نسبت ولتاژها

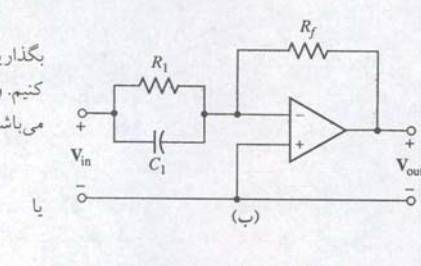
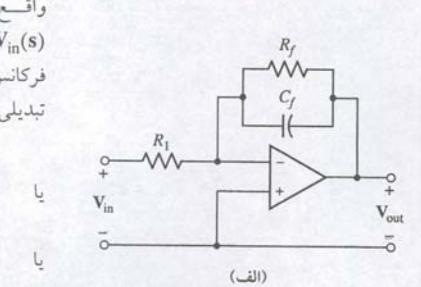
بسیاری از مباحث این فصل به قطب‌ها و صفرهای تابع تبدیل مربوط می‌شوند. ما آن‌ها را در صفحه فرکانس مختلط مستقر کردیم، آن‌ها را برای بیان تابع تبدیل به صورت مضاری از چند جمله‌ای‌های S بیان کردیم، پاسخ‌های واداشته را از آن‌ها محاسبه نمودیم، و در بخش قبل هم قطب‌هارا برای تشکیل پاسخ طبیعی به کار بردیم.

اکنون باید بینم چگونه می‌توان شبکه‌ای ساخت که تابع تبدیل دلخواهی داشته باشد. در واقع مابخش کوچکی از یک مسئله بزرگ را بررسی کرده و با تابع تبدیل طبق شکل ۱۵.۴۷ $H(s) = V_{out}(s)/V_{in}(s)$ را برای سادگی $H(s)$ را بفرکانس‌های بحرانی روی محور منتهی σ محدود خواهیم کرد (از جمله مبدأ). بنابراین تابع تبدیلی مانند موارد زیر را ملاحظه می‌کنیم:

$$H_1(s) = \frac{10(s+2)}{s+5}$$

$$H_2(s) = \frac{-5s}{(s+8)^2}$$

$$H_3(s) = 0.1s(s+2)$$



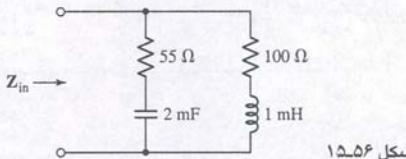
بگذارید با تعریف بهره ولتاز شبکه شکل ۱۵.۴۸ که حاوی یک op amp ایده‌آل است آغاز کنیم، ولتاژ بین دو پایانه ورودی ورودی صفر است و امپدنس ورودی آن بی‌نهایت می‌باشد. بنابراین می‌توان مجموع جریان‌های وارد به ورودی وارونگر را صفر تصور کرد:

$$\frac{V_{in}}{Z_1} + \frac{V_{out}}{Z_f} = 0$$

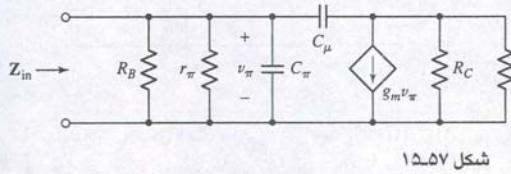
$$\frac{V_{out}}{V_{in}} = -\frac{Z_f}{Z_1}$$

اگر Z_f و Z_1 هر دو مقاومت باشند، مدار به صورت یک تقویت کننده معکوس گرای احتمالاً تضعیف‌کننده عمل می‌کند (اگر نسبت کمتر از واحد باشد). معهداً توجه مابه حالاتی است که در آن یکی از امپدانس‌ها مقاومت و دیگری یک شبکه RC باشد. در شکل ۱۵.۴۹ (الف)، اجازه بدید $R_1 = R_f$ و $Z_1 = R_1 + R_f$ باشد بنابراین:

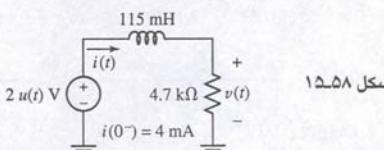
۶. (الف) امپدانس معادل تونن از دید پایانه‌های مدار شکل ۱۵۵۶ را به دست آورید. (ب) مقدار امپدانس را به عنوان تابعی از فرکانس ω برای $\sigma = 0$ رسم نمایید.



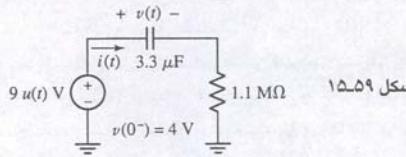
۷. امپدانس ورودی Z_{in} مدار شکل ۱۵۵۷ را معین کنید. این مدار مدل خطی از یک تقویت‌کننده ترانزیستوری پسوندی دوقطبی است و برای فرکانس‌های تا چند MHz معتبر است. جواب را به صورت دو جمله‌ای بیان کنید.



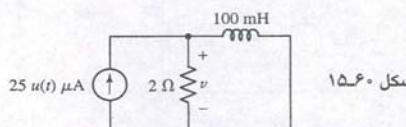
۸. در مدار شکل ۱۵۵۸ با شروع کار از حوزه s , $v(t)$ را پیدا کنید.



۹. از تکنیک‌ها تحلیل حوزه s برای تعیین جریان خازن، $i(t)$, در شکل ۱۵.۵۹ استفاده نمایید.



۱۰. (الف) مدار شکل ۱۵۶۰ را به حوزه s ببرید. (ب) عبارتی برای توان جذب شده پیدا کنید.

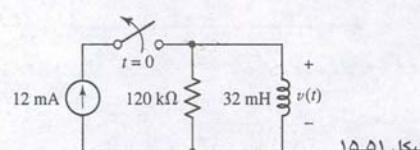


۱۱. مدار شکل ۱۵۶۱ را ملاحظه کنید. با تکنیک حوزه s , ولتاژ گره‌های $V_1(0^+)$ و $V_2(t)$ باشد، پیدا کنید.

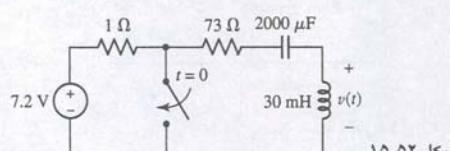
مسائل

Y(s) و Z(s) ۱۵-۱

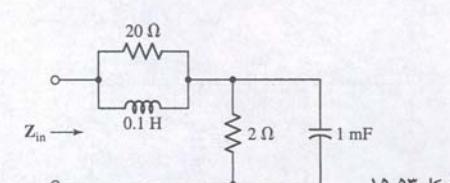
۱. همه معادلهای حوزه s ممکن در مدار شکل ۱۵۵۱ را رسم کنید.



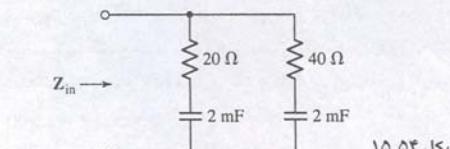
۲. همه معادلهای حوزه s ممکن مدار شکل ۱۵۵۲ را رسم نمایید.



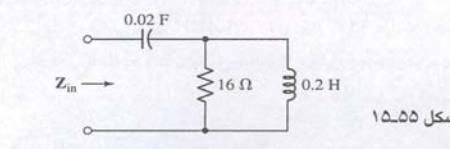
۳. به شکل ۱۵۵۳ مراجعه کنید و (الف) $Z_{in}(s)$ را به صورت نسبت دو چندجمله‌ای از s پیدا کنید. (ب) $Z_{in}(-80)$ را به دست آورید. (ج) $Z_{in}(j80)$, (د) امپدانس شاخه RL موافق، (ه) $Y_{RL}(s)$, (ز) $Y_{RC}(s)$ تکرار نسبت چندجمله‌ای‌های s مشخص کنید. (خ) را برای $Y_{RC}(s)$ تکرار نمایید. (و) نشان دهید که $Z_{in} = (Y_{RL} + Y_{RC})/Y_{RC}$.



۴. امپدانس معادل تونن نظاره شده از پایانه مدار شکل ۱۵۵۴ را بابدید.



۵. برای شکل ۱۵۵۵، (الف) $Z_{in}(s)$ را به صورت نسبت دو چندجمله‌ای از s پیدا کنید. (ب) $Z_{in}(j8)$ را به فرم دکارتی درآورید. (ج) $Z_{in}(-2 + j6)$ را به فرم قطبی درآورید. (د) برای این که در $j0$ $s = -5 + j0$ باشد، امپدانس $Z_{in} = 0$ باشد، مقاومت 16Ω را تا چه مقداری باید تغییر داد. (ه) برای $s = -5 + j0$ در $j0$ $Z_{in} = \infty$ باشد، مقاومت فوق را تغییر باید تغییر داد.



۱۵-۲ تحلیل گرهی و تک‌حلقه‌ای در حوزه s

۱۱. مدار شکل ۱۵۶۱ را ملاحظه کنید. با تکنیک حوزه s , ولتاژ گره‌های $V_1(0^+)$ و $V_2(t)$ باشد، پیدا کنید.

- ۱۵-۱۷ مقادیر مناسبی برای Z_f و Z_i در هر سه طبقه متواالی تقویت‌کننده معین کنید تاتابع تبدیل

$$H(s) = -20s^2/(s + 1000)$$

جواب: $5\text{ M}\Omega$ و $100\text{k}\Omega \parallel 10\text{nF}, 1\text{ M}\Omega, 1\mu\text{F} \parallel \infty, 1\text{ M}\Omega, 1\mu\text{F} \parallel \infty$

۱۵-۹ خلاصه فصل و مرور

- مقاومت‌ها در حوزه فرکانس با امپدانس sL نشان داده می‌شوند. اگر جریان اولیه غیرصفر باشد، آن‌گاه امپدانس باید با منبع ولتاژ $s/(0^+)$ -به طور سری و یا با منبع جریان $(0^+)/s$ -به طور موازی وصل گردد.

- خازن‌ها در حوزه فرکانس با امپدانس sC نمایش داده می‌شوند. اگر ولتاژ اولیه غیرصفر باشد، آن‌گاه امپدانس باید با منبع ولتاژ $s/(0^+)$ سری و یا با منبع جریان $(0^+)/s$ موازی باشد.

- تحلیل گرهی و تک‌حلقه‌ای در حوزه s منجر به معادلات همزمانی برحسب چندجمله‌ای‌های می‌گردد. خصوصاً متلب ابزار خوبی برای حل چنین سیستم‌هایی از معادلات است.

- تجمعی و تبدیل منبع و قضایای تونن و نورتن همگی در حوزه s هم اعمال می‌شوند. تابع تبدیل مدار $H(s)$ به صورت نسبت خروجی حوزه زمان به ورودی حوزه زمان است. هر یک از کمیت‌ها می‌تواند ولتاژ یا جریان باشد.

- صفرهای $H(s)$ مقادیری هستند که به ازای آن‌ها $H(s)$ صفر می‌شود. قطب‌های $H(s)$ مقادیری هستند که به ازای آن‌ها $H(s)$ بینهایت می‌شود.

- کانولوشن مفاهیم ریاضی و گرافیکی تعیین خروجی یک مدار را با پاسخ ضربه $h(t)$ فراهم می‌کند. روش‌های گرافیکی متعددی برای نمایش عبارات حوزه s برحسب قطب‌ها و صفرها وجود دارد. چنین نمودارهایی برای طراحی یک مدار با پاسخ مطلوب مورد استفاده قرار می‌گیرند.

۱۵-۱۰ خواندنی‌های کمکی

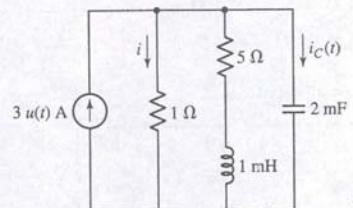
More details regarding s -domain analysis of systems, use of Laplace transforms, and properties of transfer functions can be found in:

K. Ogata, *Modern Control Engineering*, 4th ed. Englewood Cliffs, N.J.: Prentice-Hall, 2002.

A good discussion of various types of oscillator circuits can be found in:

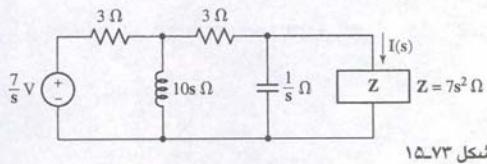
R. Mancini, *Op Amps for Everyone*, 2nd ed. Amsterdam: Newnes, 2003. and

G. Clayton and S. Winder, *Operational Amplifiers*, 5th ed. Amsterdam: Newnes, 2003.

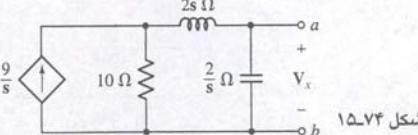


شکل ۱۵.۷۲

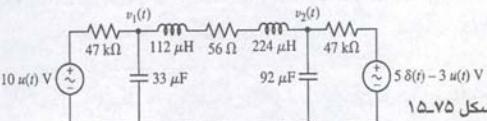
۲۷. برای مدار حوزه s شکل ۱۵.۷۲، معادل تونن را از دید امپدانس $7s^2 \Omega$ معین کنید و از آن برای تعیین (s) استفاده کنید.



۲۸. برای مدار حوزه s شکل ۱۵.۷۴، معادل تونن را در دو سر پایانهای a و b بدست آورید.



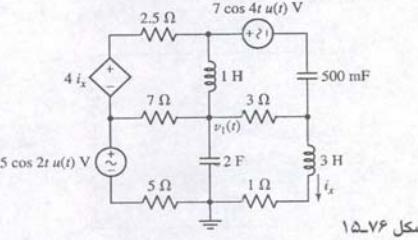
۲۹. (الف) از روش تجمعی در حوزه s برای یافتن $v_1(t)$ و $v_2(t)$ در مدار شکل ۱۵.۷۵ استفاده کنید. (ب) $v_1(t)$ و $v_2(t)$ را بایابید.



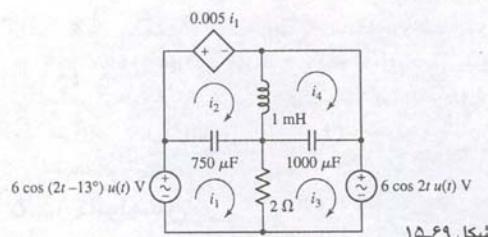
۳۰. توان جذب شده (t) به وسیله مقاومت ۵۶Ω را در شکل ۱۵.۷۵ با تقریب اوی تبدیل منبع در حوزه s معین کنید.

۳۱. (الف) معادل نورتن حوزه s از دید منبع V $10u(t)$ شکل ۱۵.۷۵ را بایابید. (ب) جریان خارج شده از منبع V $10u(t)$ در $t = 1.5ms$ را معین کنید.

۳۲. (الف) از روش تجمعی برای یافتن عبارت (s) $v_1(t)$ در شکل ۱۵.۷۶ در حوزه s استفاده کنید. (ب) $v_1(t)$ را بدست آورید.

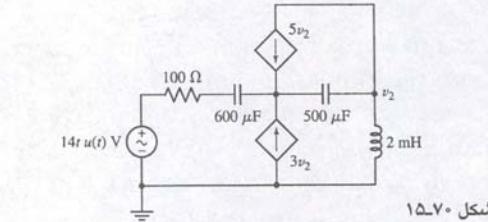


شکل ۱۵.۷۶



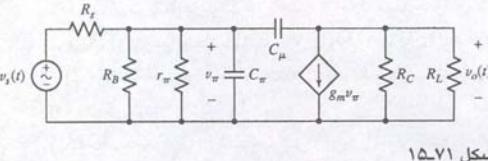
شکل ۱۵.۷۷

۲۲. با فرض نبود انرژی ذخیره شده در شکل ۱۵.۷۲ مقدار i_x را در $t = 0$ حساب کنید.



شکل ۱۵.۷۸

۲۳. اگر منبع ولتاژ واپسیه در شکل ۱۵.۷۱ با شوک توان در حین رعد و برق آسیب دیده باشد به نحوی که دیگر کار نکند (یعنی اکنون یک مدار باز است) عبارتی برای توان جذب شده به وسیله مقاومت 2Ω بدست آورید. فرض کنید که فقط انرژی اولیه القاگر در مدار است به نحوی که جریان در القاگر $i_1 = 1mA$ است. $i_2 - i_4 = 0$ در $t = 0$.



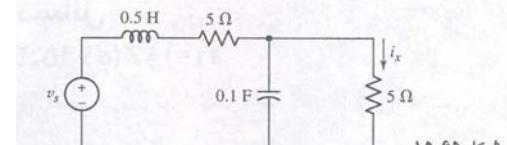
شکل ۱۵.۷۹

۲۴. (الف) برای مدار شکل ۱۵.۷۱ که یک مدل خطی مدار تقویت کننده ترانزیستوری پیوندی دوقطبی امپیتر مشترک است، عبارتی برای بهره ولتاژ V_x/V_{in} بدست آورید. می توانید انرژی اولیه خازن را صفر فرض کنید. پاسخ خود را به صورت نسبت چند جمله‌ای های ۵ مرتب شده بیان کنید. (ب) در این تابع تبدیل چند قطب وجود دارد.

۱۵.۳ تکنیک‌های دیگر در تحلیل مدار

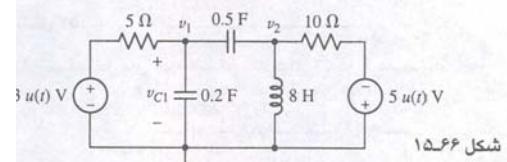
۲۵. (الف) مدار شکل ۱۵.۷۲ را به حوزه s بسیرید. (ب) مدار ساده شده را برای یافتن عبارت (t) (t) از مقاومت 1Ω استفاده کنید.

۲۶. منبع جریان در شکل ۱۵.۷۲ را به منبع ولتاژ $20u(t)$ در شکل ۱۵.۷۹ جایگزین کنید. مرجع مشیت در بالا باشد. (الف) مدار را به حوزه s بسیرید. (ب) معادل نورتن از دید مقاومت 1Ω چیست. (ج) مدار ساده شده را برای تعیین $i_C(t)$ تحلیل کنید.



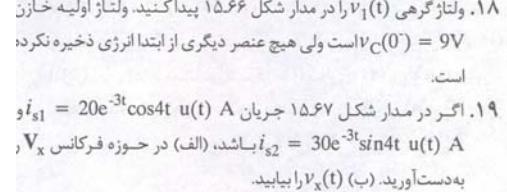
شکل ۱۵.۷۹

۱۶. ولتاژ گرهی $v_1(t)$ در مدار شکل ۱۵.۷۶ را بایابید. انرژی اولیه صفر فرض می شود.



شکل ۱۵.۸۰

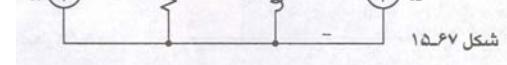
۱۷. عبارت حوزه زمان را برای جریان حلقه وسط مدار شکل ۱۵.۶۶ بدست آورید. انرژی اولیه صفر است.



شکل ۱۵.۸۱

۱۸. (الف) $v_1(t)$ را در مدار شکل ۱۵.۶۶ پیدا کنید. ولتاژ اولیه خازن است.

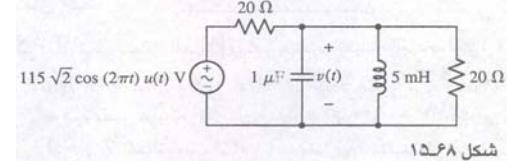
۱۹. (الف) در مدار شکل ۱۵.۶۷ $s_1 = 20e^{-3t} \cos 4t u(t)$ جریان A و $s_2 = 30e^{-3t} \sin 4t u(t)$ V باشد. (ب) $v_x(t)$ را بایابید.



شکل ۱۵.۸۲

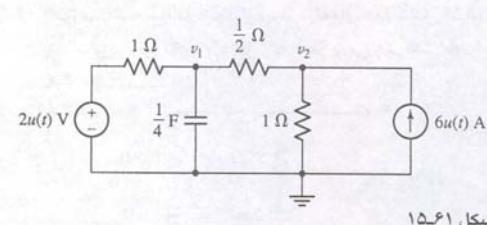
۲۰. (الف) عبارتی در حوزه زمان برای $v_x(t)$ در شکل ۱۵.۶۸ معین کنید به شرحی که $v_x(0) = 75V$ بوده و هیچ انرژی در القاگر ذخیره نشده باشد.

۲۱. (الف) در فضای PSpice صحبت پاسخ خود را تحقیق کنید. برجسب‌های مناسب گذاشته و با شبیه‌سازی خود نتیجه را با نتیجه بخش (الف) مقایسه کنید.



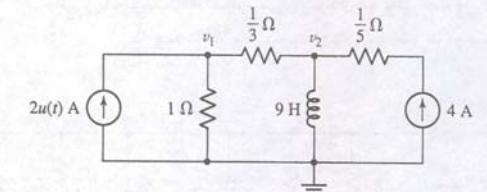
شکل ۱۵.۸۳

۲۲. جریان‌های حلقه (t) i_1 و (t) i_2 در شکل ۱۵.۶۹ را معین کنید به شرحی که جریان القاگر $i_1 = i_2 - i_4$ در $t = 0$ برابر $1A$ باشد. نشان دهید که پاسخ شما با پاسخ حاصل از تحلیل فیزیوری در حالت ماندگار برابر است.



شکل ۱۵.۸۴

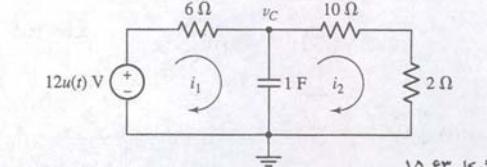
۱۲. مدار شکل ۱۵.۶۲ را ملاحظه کنید. (الف) با تکمیک حوزه s، ولتاژ گرهای (a) و (b) را پیدا کنید. (ب) $v_1(t)$ را رسم نمایید.



شکل ۱۵.۸۵

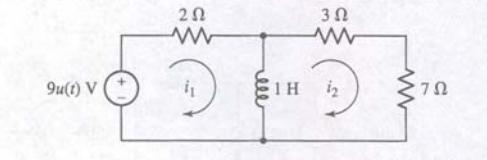
۱۳. مدار ساده مش شکل ۱۵.۶۳ را حاوی دو متش است: (الف) $i_1(t)$ و (t) i_2 را باشد.

(ب) تحلیل مدار در حوزه s معین کنید به شرطی که $v_C(0) = 9V$ باشد. (c) با شبیه‌سازی خود را تحقیق کنید. برجسب‌های مناسب گذاشته و با شبیه‌سازی خود نتیجه را با نتیجه بخش (الف) مقایسه کنید.



شکل ۱۵.۸۶

۱۴. مدار شکل ۱۵.۶۴ دارای دو متش است: (الف) $i_1(t)$ و (t) i_2 را جریان (t) i_1 و (t) i_2 را با شبیه‌سازی (t) $i_1 = i_2 = 8A$ مینماید. (ب) $i_1(t)$ و $i_2(t)$ را تحلیل متش در فضای PSpice صحبت پاسخ خود را تحقیق کنید. (c) صحبت نتیجه را با حل بخش (الف) مقایسه کنید.

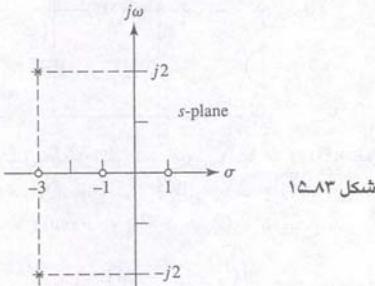


شکل ۱۵.۸۷

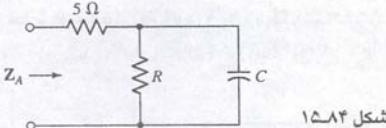
۱۵. (الف) در شکل ۱۵.۶۵ با فرض $v_s = 10e^{-2t} \cos(10t + 30^\circ)u(t)$ در حوزه فرکانس x را بایابید. (ب) $i_x(t)$ را بایابید.

۴۷۷ (الف) برج قطب و صفر آن را رسم کنید. (ب) مدل ورق الاستیک مقادیر ادمیتانس را رسم کنید. (ج) محل غذای گشته را پیدا کنید به شرطی که ضرایب چندجمله‌ای مخرج مربوط به عرض جغرافیایی (درجه، دقیقه و ثانیه) و ضرایب چندجمله‌ای صورت مربوط به طول جغرافیایی (درجه، دقیقه و ثانیه) محل غذا باشد.

۵۳. برج قطب و صفر در شکل ۱۵۸۳ مربوط به بهره جریان $H(s) = \frac{1}{I_{out}/I_{in}}$ است فرض کنید ۶ $H(s) = H(0)$. (الف) رابه صورت نسبت چندجمله‌ای‌هایی از s نشان دهد. (ب) $H(\infty)$ را به دست آورد. (ج) مقادیر جهت هر پیکان از فرکانس بحرانی به ۲ رامعین کنید.



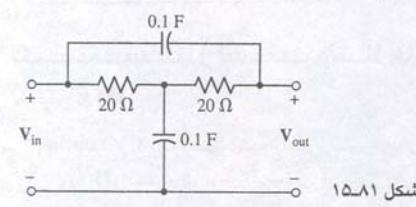
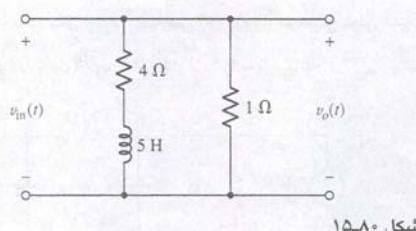
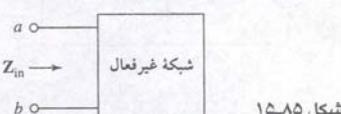
۵۴. شبکه سه عنصری شکل ۱۵۸۴ دارای امپدانس ورودی $Z_A(s)$ است که صفری در $j0 = -10 + s$ دارد. اگر مقاومت 2Ω به طور سری با شبکه قرار گیرد، صفر امپدانس جدید به $j0 = -3.6 + j0.4$ جایه‌جا می‌شود. R و C را به دست آورد.



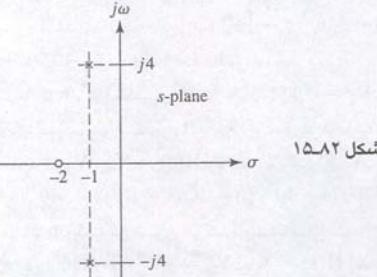
۵۵. فرض کنید $H(s) = \frac{100(s+2)}{(s^2 + 2s + 5)}$ (الف) نمودار قطب و صفر را برای $H(s)$ نشان دهد. (ب) $H(j\omega)$ را به دست آورد. (ج) اسیستیک اندازه امپدانس را رسم کنید. (د) $|H(j\omega)|$ را در برابر ω مطابقت کنید. (e) ω_{max} را به دست آورد. در این فرکانس $|H(j\omega)|$ مکزیمم است.

۱۵-۷ پاسخ طبیعی و صفحه s

۵۶. برای شکل ۱۵۸۵ فرض کنید 2Ω $Z_{in}(s) = (5s + 20)/(s + 2)$. (الف) مطلوب است $v_{ab}(t)$ بین پایانه‌های مدار باز، اگر $v_{ab}(0) = 25V$ باشد. (ب) جریان $i_{ab}(t)$ احالت اتصال کوتاه پایانه‌های a و b را پیدا کنید.



۴۹. آرایش قطب-صفر $H(s) = V_2(s)/V_1(s)$ را در شکل ۱۵۸۲ بدست آورد. ۱ $H(0) = 1$ فرض شود. $|H(s)|$ را برای موارد زیر رسم کنید: (الف) $\delta = 0$ باشد. (ب) $\omega = 0$ باشد. (c) $\omega = \omega_0$ باشد. (d) $\omega = \omega_{max}$ را به دست آورد.



۵۰. یک قطعه ماشین الکتریکی دارای مشخصه امپدانسی با دو صفر در $-1 = s$ ، $0.5 = s$ است و در $0 = s$ $1 = \sqrt{3}/2$ فقط $= -0.5 + j\sqrt{3}/2$ می‌باشد (الف)

بر جقط - صفر را برای این امپدانس به دست آورد. (ب) مدل ورق الاستیک اندازه امپدانس را رسم کنید. (ج) ترکیبی از مقاومت‌ها، القاگرهای خازن‌هایی را که امپدانس برایر دارند، پیدا کنید (راهنمایی: از عبارت حوزه s به عقب کار کنید).

۵۱. با فرض بهره ولتاژ $H(s) = (10s^2 + 55s + 75)/(s^2 + 16)$ (الف) مطلوب است فرکانس‌های بحرانی در صفحه s، (ب) $H(0)$ و $H(\infty)$ را مشخص نمایید. (ج) اگر یک مدلی از $H(s)$ دارای ارتفاع ۳ سانتی متر در مبدأ باشد، در $j3 = s$ چه ارتفاعی دارد؟ (د) به طور تقریبی $|H(\sigma)|$ را در برابر σ و $|H(j\omega)|$ در برابر ω رسم کنید.

۵۲. در یک آزمایشگاه سری دولتی، یک جعبه فلزی بدشکل به وسیله محققی که نهارش به وسیله رفاقت آسیب دیده بود پیدا شد در حالی که اثری از غذا نبود، محقق تصمیم گرفت ادمیتانس جعبه را اندازه بگیرد و جنین درمی‌یابد که ادمیتانس را می‌توان به صورت

۴۰. یک مدار معرفه شده است. (الف) $H(s) = (s + 3)/(s^2 + 6s + 25)$ خروجی در حوزه s را برای ورودی‌های زیر به دست آورد. (الف) $i(t)$ ، (ب) $e^{-4t}u(t)$ ، (ج) $t e^{-t}u(t)$ ، (د) $2\cos 15t u(t)$ ، (e) $t^2 e^{-t}u(t)$ ، (f) $5\cos(10^3 t)u(t)$ ، (g) $5\sin(10^3 t)(u(t) - u(t-1))$ ، (h) $5\sin \pi t[(u(t) - u(t-1))]$ اعمال می‌شود. برای ترسیم خروجی $y(t)$ از کانولوشن استفاده کنید.

۴۱. پاسخ ضریبی یک سیستم خطی برابر است با $h(t) = 5\sin \pi t[(u(t) - u(t-1))]$. یک سینگنال ورودی $x(t) = 2[u(t) - u(t-2)]$ را برای ترسیم خروجی $y(t)$ از کانولوشن استفاده کنید.

۴۲. فرض کنید $f_1(t) = (1 - e^{-2t})u(t)$ و $f_2(t) = e^{-5t}u(t)$ باشد. با روش‌های زیر عبارت $y(t) = f_1(t) * f_2(t)$ را پیدا کنید. (الف) کانولوشن در حوزه زمان (ب) را به دست آورید.

۴۳. وقتی که یک ضریب $\delta(t) = 4u(t) - 4u(t-2)$ به شبکه دو ورودی اعمال شود، ولتاژ خروجی V_0 را برای موارد زیر بدست آورد. (الف) $V_0 = 2u(t-1)V$ باشد، پیدا کرده $2u(t-1)V$ را بازدید کنید.

۴۴. فرض کنید $u(t) = 2e^{-3t}u(t)$ و $h(t) = h(t) * x(t)$ باشد. مطالوب است $y(t) = h(t) * x(t)$ را برای مطالوبت $X(s)$ و $H(s)$ را به دست آورده و سپس $y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{H(s)X(s)\}$ را پیدا کنید.

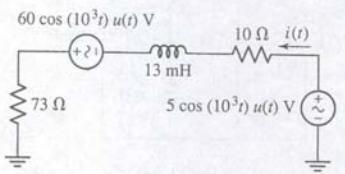
۴۵. پاسخ ضریبی یک مدار خاص به صورت $(2 - 5u(t-2) - 5u(t-1))$ داده شده است. پاسخ ای از حوزه s و حوزه t را به دست آورد. (الف) تحریک $v_{in}(t)$ برایر باشد با (الف) V_1 ، (ب) $3u(t)V$ ، (c) $3\cos 3tV$ ، (d) $3u(t-2)V$ و (e) $3u(t)V$ را در حوزه زمان پیدا کنید.

۴۶. (الف) پاسخ ضریبی $h(t)$ شبکه شکل ۱۵۷۹ را می‌معین کنید. (ب) از کانولوشن برای تعیین $v_o(t)$ استفاده کنید، به شرطی که $v_{in}(t) = 8u(t)V$ باشد.

۴۷. (الف) پاسخ ضریبی $h(t)$ شبکه شکل ۱۵۸۰ را به دست آورد. (ب) از کانولوشن برای تعیین $v_o(t)$ استفاده کنید، به شرطی که $v_{in}(t) = 8e^{-t}u(t)V$ باشد.

۴۸. برای شبکه شکل ۱۵۸۱، نسبت V_{out}/V_{in} را پیدا کنید؛ همه فرکانس‌های بحرانی را پیدا کنید.

۴۹. (الف) با تبدیل منبع در حوزه s، $I(s) = 15.77$ بیاورد. (ب) $i(t)$ را به دست آورد. (ج) مقدار حالت ماندگار (t) را به دست آورد.



۵۰. برای توابع تبدیل زیر، قطب‌ها و صفرهای را می‌معین کنید:

$$\frac{7s}{s(3s^2 - 9s + 4)}$$

$$\frac{s^2 - 1}{(s^2 + 2s + 4)(s^2 + 1)}$$

$$\frac{3s^2}{s(s^2 + 4)(s - 1)}$$

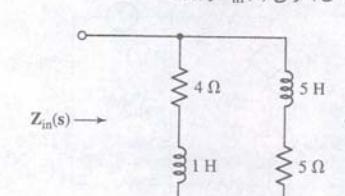
$$\frac{s^2 + 2s - 1}{s^2(4s^2 + 2s + 1)(s^2 - 1)}$$

۵۶. ترکیب سری یک مقاومت 5Ω و یک خازن $0.2F$ با ترکیب سری مقاومت 2Ω و القاگر $5H$ موازی است. (الف) ادمیتانس ورودی (s) را برای ترکیب موازی به صورت نسبت دو چندجمله‌ای برحسب s بدست آورد. (ب) همه قطب‌ها و صفرهای (s) را معین کنید. (ج) اگر مقاومت $Y_1(s)$ بازدید کنید، (د) مشخص کنید. (د) همه صفرهای ورودی را اگر مقاومت 12Ω باشد، مشخص نمایید.

۵۷. همه قطب‌ها و صفرهای (الف) امپدانس ورودی تعریف شده در شکل ۱۵۵۶ را معین نمایید. (ب) امپدانس ورودی تعریف شده در شکل ۱۵۵۶ را پیدا کنید.

۵۸. ادمیتانس (s) دارای صفرهای در $s = 0$ و $s = -5$ است. اگر $s = 20s$ باشد، $20s$ داشته باشیم $\rightarrow 12S$ داشته باشیم $\rightarrow Y(s)$ را مطالوب است. (الف) $Y(s)$ و $Y(-j10)$ ، (ب) $Y(s)$ و $Y(-j10)$ ، (c) $Y(s)$ و $Y(j10)$ ، (d) $Y(s)$ و $Y(-j10)$ را به دست آورد. (الف) $Y(s)$ را برایر باشد، (ب) $Y(s)$ را برای $s = 0$ تعریف شده در شکل ۱۵۵۶ را پیدا کنید.

۵۹. (الف) از شبکه شکل ۱۵۷۸ به دست آورد. (ب) همه فرکانس‌های بحرانی را پیدا کنید.



فصل شانزدهم

پاسخ فرکانس

مفهوم کلیدی

- فرکانس تشدید مدارهای القاگر و خازنی
- ضریب کیفیت
- پهنای باند
- مقیاس بندی فرکانس و اندازه
- تکنیک‌های نمودار بود
- فیلترهای پایین و بالاگذر
- طراحی فیلتر میانگذر
- فیلترهای فعل



قدمه

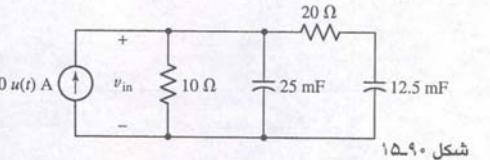
سخ فرکانس را قبلاً در چند فصل دیدیم، ولی خواننده ممکن است پرسد پس چه لزوی اراده که اکنون عنوان کلی فصل را به آن اختصاص دهیم. مفهوم پاسخ فرکانس که به شدت در مه زمینه علوم مهندسی اهمیت دارد، مبنای درک فاکتورهای ثبات و پایداری در سیستم‌ها، حساب می‌آید. این سیستم‌ها می‌توانند الکتریکی، مکانیکی، شیمیایی یا بیولوژیکی شند. همچنین خواهیم دید که مفاهیم پاسخ فرکانس در بسیاری از کاربردهای مهندسی قی به کار گرفته شده و به ورای موضوع پایداری گسترش یافته است. مثلاً در کار با سیستم‌های مخابراتی اغلب با تکنیک فرکانس مواجه می‌شویم (مثلاً استگاه رادیویی ناصل). این کار هنگامی امکان‌پذیر است که درک کاملی از پاسخ فرکانس مدارهای فیلتر یا مافق را داشته باشیم. به طور خلاصه می‌توان چندین صفحه در توجه پاسخ فرکانس شست. با این وجود، ترجیح می‌دهیم با چرخش به جنبه الکتریکی به اصل موضوع برداخته با طراحی مدارهای فیلتر ساده در کاربردهای روزانه مانند تقویت کننده‌های صوتی به اوج برسیم.

۱۶- تشدید موازی

برای این قدر بر توابع تحریک سینوسی اصرار می‌ورزیم در حالی که در عمل به ندرت با ها مواجهیم؟ البته صنعت تولید برق را می‌توانیم مستثنی بدانیم. هر چند که کلام موجی پیویستی است و در تمام این بحث با تحریک سینوسی سروکار داریم، ولی در آن جا هم امی لازم می‌شود که فرکانس‌های دیگر ناشی از غیرخطی بودن بعضی از عناصر رالحظ نیم. از طرفی در اکثر سیستم‌های الکتریکی توابع تحریک سینوسی نیستند. در پیش‌های انتقال اطلاعات یک موج سینوسی به خودی خود بی ارزش است و حاوی لغایت محدودی می‌باشد زیرا مقادیر آینده آن از گذشته قابل پیش‌بینی است.علاوه بر این، از یک پریود هر موج غیرسینوسی پریودیک هم حاوی هیچ اطلاعات اضافی نیست.

اکنون فرض کنید تابع تحریک خاصی مشکل از مؤلفه‌های سینوسی بوده و محدوده کانتی آن ۱۰۰ Hz باشد. تصور کنید این موج به شبکه‌ای اعمال شود که خاصیت زیر دارد. هر موج سینوسی که فرکانس آن صفر تا ۲۰۰ باشد و در پایانه‌های ورودی شبکه اهر شود، دامنه خروجی بدون اعوجاج دو برابر دامنه ورودی، و اختلاف فاز ورودی - روحی صفر خواهد داشت، بنابراین تابع خروجی این شبکه دو برابر ورودی و بدون

۶۲. با مراجعه به شکل ۱۵.۹، امپدانس (s) $Z_{in}(s)$ را از دید منبع معین کنید.
این عبارت را برای تعیین (t) در $t > 0$ به کار ببرید.



شکل ۱۵.۹۰ ۱۵.۸ تکنیک سنتز نسبت ولتاژها
 $H(s) = V_{out}/V_{in}$

۶۳. برای مدار op amp شکل ۱۵.۴۸، نسبت چندجمله‌ای بر حسب s را برای $H(s) = V_{out}/V_{in}$ درست آورید. فرض کنید مقادیر امپدانس برابر است با (به) Ω : (الف) $R_1 = 20k\Omega$, $Z_1(s) = 10^3 + (10^8/s)$, (ب) $R_1 = 5000$, $Z_1(s) = 10^3 + (10^8/s)$, (ج) $R_1 = 10^3 + (10^8/s)$, $Z_1(s) = 10^4 + (10^8/s)$, $Z_2(s) = 10^3 + (10^8/s)$.

۶۴. در مدار شکل ۱۵.۴۹ (ب) بگذارید $R_1 = 20k\Omega$, $R_2 = 40k\Omega$, $C_1 = 1\text{ }\mu\text{F}$ باشد، آن‌گاه i_C را طوری مخصوص کنید که $H(s) = V_{out}/V_{in}$ در دو طبقه برابر باشد با (الف) -50 , (ب) $-50 \cdot 10^{-3} / (s + 10^4)$, (ج) $-10^3 / (s + 10^5)$.
۶۵. در مدار op amp شکل ۱۵.۴۹ (الف)، $R_f = 20k\Omega$ را در نظر گیرید و سپس مقادیر R_1 و R_2 را طوری در دو طبقه به دست آورید که $H(s) = V_{out}/V_{in}$ برابر باشد با (الف) -50 , (ب) $-50 \cdot 10^{-3} / (s + 10^4)$, (ج) $-10^4 / (s + 10^5)$.

۶۶. چند op amp مدار را به کار ببرید تاتابع تبدیل شود. فقط مقاومت‌های $10\text{ }\Omega$ را به کار ببرید. از اتصال کوتاه و مدار باز استفاده کنید ولی همه مقادیر ظرفیت را مشخص نمایید.

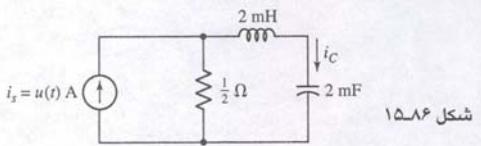
۶۷. یک نوسان‌ساز یا اسیلاتور پل وین طراحی کنید. فقط از مقاومت‌های استاندارد استفاده کنید. طراحی را با شبیه‌سازی PSpice تایید کنید.

۶۸. یک اسیلاتور پل وین با فرکانس 60 Hz طراحی نمایید. طرح خود را با شبیه‌سازی PSpice تایید کنید.

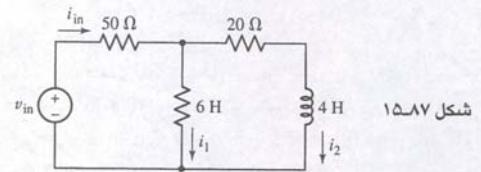
۶۹. یک مدار اسیلاتور طراحی کنید تا یک سیگنال سینوسی 440 Hz تولیت شود. فقط از مقاومت‌های استاندارد استفاده نمایید. با مدار شماچه نتی از موسیقی معاد است؟

۷۰. مدار طراحی کنید که ولتاژ خروجی اش یک موج سینوسی دارد. تصور کنید این موج 440 Hz سینوسی باشد. پاسخ خود را با v_s از v_{C1} و v_{C2} تست کنید. آیا دو موج سینوسی با هم هم‌فازند.

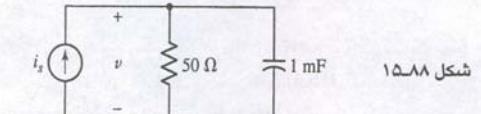
۷۱. فرض کنید در شکل ۱۵.۸۵ در شبکه غیرفعال شکل $Z_{in}(s) = (s^2 + 4s + 20)/(s + 1)\Omega$ باشد. جریان I_a را بحسب a یعنی $i_a(t)$ را پیدا کنید، با این فرض که $i_b(t)$ برابر باشد (الف) $V = 160e^{-6t}\text{ V}$, (ب) $V = 0$, (ج) $i_a(0) = 0$, (د) $i_a(t) = 32 A/s$, (ه) $i_b(t) = 0$ در $t = 0$.
۷۲. (الف) برای مدار شکل ۱۵.۸۶ $H(s) = I_C/I_s$ را معین کنید. (ب) قطب‌های $H(s)$ را به دست آورید. (ج) برای مدار RLC مقدار w_0 , α و ω را پیدا کنید. (د) پاسخ اداشت $i_{C,ad}(t)$ را بطور کامل. (ه) فرم پاسخ طبیعی $i_{C,nat}(t)$ را باید. (و) مقادیر (0^+) و dI_C/dt در $t = 0^+$ را معین کنید. (ز) پاسخ کامل $i_C(t)$ را بتوانیسید.



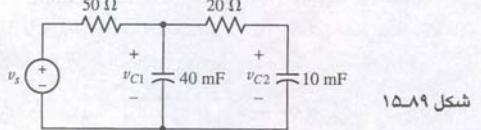
شکل ۱۵.۸۷ ۱۵.۸ برای مدار شکل ۱۵.۸۷: (الف) قطب‌های $H(s)$ را پیدا کنید. (ب) فرض کنید $i_1(0^+) = 5A$ باشد آن‌گاه $i_2(0^+)$ را بحسب $V_{in}(t)$ باید. (ج) همچنین اگر $V = 500u(t)$ باشد آن‌گاه $i_1(t)$ را بحسب آورید.



شکل ۱۵.۸۷ ۱۵.۸ (الف) برای مدار شکل ۱۵.۸۸: (الف) $H(s) = V(s)/I_s$ را پیدا کنید. (ب) $i_s(t)$ را بحسب $v(t)$ باید. (ج) $i_s(t)$ را باید. (د) $4e^{-10t} A$ و $4e^{-10t} u(t) A$ را باید.



شکل ۱۵.۸۸ ۱۵.۸ برای مدار شکل ۱۵.۸۹: (الف) $H(s) = V_{C2}/V_s$ را پیدا کنید. (ب) $v_{C2}(0^+)$ را باشد آن‌گاه اگر $v_{C1}(0^+) = v_{C1}(t)$ باشد آن‌گاه $v_{C2}(t)$ را باید.



شکل ۱۵.۸۹ ۱۵.۸ برای مدار شکل ۱۵.۸۹: (الف) $H(s) = V_{C2}/V_2$ را پیدا کنید. (ب) $v_{C1}(0^+)$ را باشد آن‌گاه $v_{C2}(t)$ را باید.



همان طور که گفته شد هنگامی رخ می دهد که ولتاژ و جریان در پایانه های ورودی همان فاز باشند. شرط برقراری چنین حالتی برابر است با

$$\omega C = \frac{1}{\omega L} = 0$$

به تشدید با تنظیم L ، C و ω می توان رسید. ما توجه خود را به حالتی که در آن ω تغییر کند، معطوف می نماییم. این ترتیب فرکانس تشدید ω_0 برابر است با:

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad \text{rad/s} \quad (2)$$

یا

$$f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} \quad \text{Hz} \quad (3)$$

این فرکانس تشدید ω_0 همان فرکانس تشدید تعریف شده در معادله (۱۵) از فصل ۹ می باشد. در این جا آرایش قطب - صفر تابع ادمیتانس با مزایای قابل توجهی قابل استفاده است. با فرض

$$Y(s) = \frac{1}{R} + \frac{1}{sL} + sC$$

با

$$Y(s) = C \frac{s^2 + s/RC + 1/LC}{s} \quad (4)$$

می توان با تجزیه به عوامل، صفر های $Y(s)$ را مشخص کرد.

$$Y(s) = C \frac{(s + \alpha - j\omega_d)(s + \alpha + j\omega_d)}{s}$$

که در آن α و ω_d همان کمیت هایی هستند که مادر پاسخ طبیعی مدار RLC موازی بخش ۹-۵ در مورد آنها صحبت کردیم. یعنی α ضریب میرایی نهایی است.

$$\alpha = \frac{1}{2RC}$$

فرکانس تشدید طبیعی است (با فرکانس تشدید ω_0 اشتباہ نشود).

$$\omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}$$

رایش قطب و صفر در شکل ۱۶-۲ (الف) مستقیماً از فرم حاصل ضرب به دست آمده است.

با ملاحظه رابطه بین α و ω_0 واضح است که فاصله مبدأ در صفحه s تا یکی از سفرهای ادمیتانس، عددی برابر ω_0 می باشد. پس با فرض داشتن آرایش قطب - صفر، فرکانس تشدید را می توان به طور گرافیکی هم به دست آورد. ما با استفاده از مبدأ در صفحه s قطب یک قوس راطی می کنیم و از یک صفر عبور می نماییم. تقاطع این قوس و محور ω محل $s = j\omega$ را به دست می دهد. واضح است که ω_0 کمی بزرگتر از فرکانس تشدید طبیعی ω_d است، ولی با آرایش نسبت ω_0 به α ، نسبت آنها به سمت واحد یا یک میل می کند.

تشدید و پاسخ ولتاژ

کنون باید اندازه پاسخ یعنی ولتاژ (V) در شکل ۱۶-۱ را به عنوان تابعی از فرکانس متغیر نیع تحریک بررسی کنیم. اگر منبع را می منع جریان سینوسی با دامنه ثابت فرض کنیم، پاسخ ولتاژ مناسب با ادمیتانس ورودی است. این پاسخ از نمودار قطب - صفر ادمیتانس به دست می آید:

$$Z(s) = \frac{s/C}{(s + \alpha - j\omega_d)(s + \alpha + j\omega_d)}$$

اعوجاج است. با این وجود، اگر شبکه دارای پاسخ فرکانسی بود که مقادیر ورودی سینوسی بین ۱۰ الی ۵۰ Hz با ضریب متفاوتی نسبت به فرکانس ۵۰ الی ۱۰۰ Hz ضرب می شد، آنگاه خروجی اعوجاج می داشت. در این حالت دیگر خروجی تقویت شده شبیه ورودی نخواهد بود. البته این موج اعوجاج دار ممکن است گاهی مطلوب باشد و گاهی هم نامطلوب. یعنی پاسخ فرکانس ممکن است عمدها خود را بعضی از مؤلفه های فرکانس یک نایع تحریک را حذف و یا بعضی را تقویت نماید.

چنین رفتاری، خاص مدارهای تیون شده یا مدارهای تشدید (رزنانس) است که آن ها را در این فصل خواهیم دید. در بحث تشدید همه روش های مورده بحث در نمایش پاسخ فرکانس را اعمال خواهیم کرد.

تشدید

در این بخش پدیده مهمی را که ممکن است در مدارهای حاوی القاگر و خازن رخ دهد، مطالعه می کنیم. این پدیده تشدید یا رزننس نامیده می شود و باحتیاط می توان آن را وضعیتی دانست که پاسخ یک سیستم فیزیکی به یک تابع تحریک با دامنه ثابت، به حداقل خود می رسد. با این وجود، ما اغلب برای توابع غیر سینوسی هم صحبت از تشدید می کنیم. سیستم تشدید می تواند الکتریکی، مکانیکی، هیدرولیکی، صوتی یا نوع دیگری باشد. ولی ما توجه خود را عمدتاً به سیستم های الکتریکی معطوف می داریم. تشدید پدیده آشناست. مثلاً بالا و پایین پریدن در تکان های یک اتومبیل، در صورت داشتن فرکانس مناسب (این مقدار حدودی یک پرش در هر ثانیه است) و ضربه گیرهای نامناسب می تواند خودرو را به حالت نوسان درآورد. در هر حال اگر فرکانس جهش اضافه نمایند، پاسخ لرزشی خودرو به میزان قابل توجهی کم می شود. تشریح بیشتر این موضوعی می تواند خواننده اپرایی باشد که می تواند جام کریستان را بانت تنظیم شده در فرکانس مناسب بشکند. در مر یک از مثالها او فرکانسی صحبت می کنم که تا رخداد تشدید تنظیم می گردد. می توان حتی سایر، شکل و ماده سیستم مکانیکی لرزنده را تنظیم کرد. ولی این کار با لحاظ فیزیکی چندان ساده نیست.

شرطی تشدید در سیستم فیزیکی بسته به هدف ممکن است مطلوب باشد و یا نباشد. در مثال خودرو لرزش با دامنه زیاد ممکن است در سرعت های کم دلچسب باشد ولی قطعاً در سرعتی چون ۱۰۵ km/h چندان مطلوب نیست.

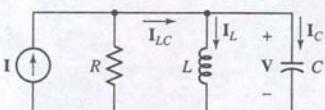
اکنون باید تشدید را دقیق تر تعریف کنیم. در یک شبکه الکتریکی دو پایانه حاوی حداقل یک القاگر و یک خازن، تشدید را حالتی تعریف می کنیم که در آن امپدانس ورودی شبکه مقاومتی خالص باشد. بنابراین:

مداری در حالت تشدید است که ولتاژ و جریان در پایانه ورودی اش همنفاز باشند.

همچنین خواهیم دید که پاسخی با دامنه حداقل هنگامی در شبکه تولید می شود که مدار دا حالت تشدید باشد.

ابتدا تعریف تشدید را به یک شبکه RLC که با منبع سینوسی تحریک شکل ۱۶-۱ موازی است، اعمال می کنیم. در بسیاری از وضعیت های عملی، این مدار با تغیر جزئی قابل ساخت در آزمایشگاه است و در آن یک القاگر فیزیکی به یک خازن فیزیکی متصل شده و ترکیب موازی به وسیله یک منبع انرژی که امپدانس خروجی بالایی دارد، تحریک می گردد. ادمیتانس حالت ماندگار از دید منبع جریان ایده آل برابر است با:

$$Y = \frac{1}{R} + j(\omega C - \frac{1}{\omega L}) \quad (1)$$



شکل ۱۶-۱ ترکیب موازی RLC که مدار تشدید موازی نام دارد.

خواهیم دید که تیزی منحنی هر مدار تشید با حداکثر انرژی ذخیره شده در مدار در مقایسه با انرژی از دست رفته در حین یک پریود پاسخ تعیین می شود. ما Q را چنین تعریف می کنیم.

دقت کنید که ضریب کیفیت را با ربارگانی انتخاب کنید. که همگی با Q نشان داده می شوند، اشتباه نکنید.

$$(6) \quad \frac{\text{ماکریتم انرژی ذخیره شده}}{\text{انرژی تلف شده در هر پریود}} = 2\pi = \text{ضریب کیفیت}$$

ثابت ناسب 2π به این علت در تعریف گنجانده شد تا عبارت حاصل ساده تر شود. چون انرژی فقط در القاگر و خازن ذخیره می شود و فقط در مقاومت تلف می گردد، پس باید Q را بر حسب انرژی لحظه‌ای ذخیره شده در این دو عنصر و انرژی متوسط تلف شده در مقاومت بیان نماییم.

$$Q = 2\pi \frac{[w_L(t) + w_C(t)]_{\max}}{P_R T}$$

که تنابوب یا پریود فرکانس موج سینوسی است که Q در آن محاسبه می شود.

اکنون بگذارید این تقریب را به مدار موزای RLC شکل ۱۶-۱ اعمال کنیم و مقادیر Q را بر حسب این تنشیت می نماییم. این مقادیر از Q را Q_0 می خوانند. تابع جریان تحریک زیر را انتخاب می کنیم:

$$i(t) = I_m \cos \omega_0 t$$

پاسخ ولتاژ متناظر آن در حالت تشید برابر است با:

$$v(t) = RI(t) = RI_m \cos \omega_0 t$$

پس انرژی ذخیره شده در خازن چنین است:

$$w_C(t) = \frac{1}{2} C v^2 = \frac{I_m^2 R^2 C}{2} \cos^2 \omega_0 t$$

انرژی لحظه‌ای ذخیره شده در القاگر با رابطه زیر داده می شود:

$$w_L(t) = \frac{1}{2} L i_L^2 = \frac{1}{2} L \left(\frac{1}{L} \int v dt \right)^2 = \frac{1}{2L} \left[\frac{RI_m}{\omega_0} \sin \omega_0 t \right]^2$$

نابراین

$$w_L(t) = \frac{I_m^2 R^2 C}{2} \sin^2 \omega_0 t$$

پس انرژی لحظه‌ای کل ثابت است.

$$w(t) = w_L(t) + w_C(t) = \frac{I_m^2 R^2 C}{2}$$

ذا این مقادیر ثابت باید حداکثر هم باشد. برای یافتن انرژی از دست رفته در یک دوره تنابوب در مقاومت، توان متوسط جذب شده را به دست می آوریم (بخش ۱۱-۲).

$$P_R = \frac{1}{2} I_m^2 R$$

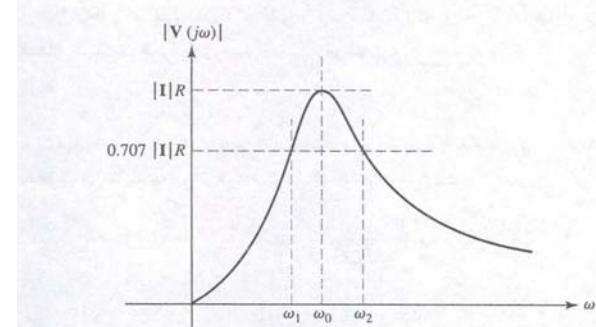
گر رابطه فوق را در یک پریود ضرب کنیم، داریم:

$$P_R T = \frac{1}{2f_0} I_m^2 R$$

به این ترتیب ضریب کیفیت در تشید به دست می آید:

$$Q_0 = 2\pi \frac{I_m^2 R^2 C / 2}{I_m^2 R / 2f_0}$$

$$Q_0 = 2\pi f_0 RC = \omega_0 RC$$



شکل ۱۶-۳ اندازه پاسخ یک مدار تشید موزای بر حسب فرکانس.

که در شکل ۱۶-۲ (ب) دیده می شود. البته پاسخ از صفر شروع شده و در مقادیر ماکریتمی در حوالی فرکانس تشید طبیعی به اوج می رسد و سپس دوباره در $\omega = \infty$ به صفر باز می گردد. پاسخ فرکانس در شکل ۱۶-۳ ملاحظه می شود. حداکثر مقادیر پاسخ به صورت R ضریب را دارند. منبع جریان ترسیم شده است و به این معنی است که R مقدار ماکریتم امدادیان و رویدی مدار است. به علاوه پاسخ حداکثر دقیقاً در فرکانس ω_0 اتفاق می افتند. دو فرکانس دیگر که بعداً به کار خواهند رفت، ω_1 و ω_2 می باشند که معیاری از عرض پاپهای باند پاسخ فرکانس را به دست می دهد. ابتدا نشان می دهیم که مقادیر ماکریتم R است و این ماکریتم در فرکانس ω_0 به دست می آید.

ادمیتانس، طبق معادله (۱) دارای یک رسانایی (کنداکتانس) ثابت و یک سوپتانس است که در تشید حداقل مقدار خود (صفر) را دارد. بنابراین اندازه حداقل ادمیتانس در تشید رخ می دهد و برابر $1/R$ است. پس اندازه امیداتنس ماکریتم در حالت تشید برابر R خواهد بود. IR به این ترتیب در فرکانس تشید، ولتاژ دو سر مدار تشید مدار شکل ۱۶-۱ در واقع می باشد، یعنی کل جریان منبع I از مقاومت عبور خواهد کرد. البته جریان در L و C نیز وجود دارد. در القاگر جریان برابر است با $I_{L,0} = V_{L,0} / j\omega_0 L = IR / j\omega_0 L$ با $I_{C,0} = V_{C,0} / j\omega_0 C = \omega_0 L / j\omega_0 C = \omega_0 L C R I$ چون در تشید $I_{C,0} = j\omega_0 C R I$ است درمی باییم که

$$I_{C,0} = -I_{L,0} = j\omega_0 C R I \quad (5)$$

$$I_{C,0} + I_{L,0} = I_{LC} = 0$$

پس جریان خالص در ترکیب LC صفر است. حداکثر مقادیر پاسخ و فرکانسی که در آن این حداکثر رخ می دهد، همیشه به سادگی به دست نمی آیند. در مدارهای تشیدی که شکل استاندارد ندارند، دامنه پاسخ به صورت تحلیلی بیان می شود و این فرم معمولاً به صورت مجدول مجموع مریعات قسمت‌های حقیقی و موهومی پاسخ می باشد. سپس باید از عبارات حاصل مشتق بگیریم، مشتق را برابر صفر قرار دهیم و فرکانس ماکریتم پاسخ را بدست آوریم. با گذاشتن این فرکانس در رابطه پاسخ، مقادیر ماکریتم پاسخ به دست می آید. می توانید روش فوق الذکر را در مورد همین مثال به عنوان تمرین اعمال نمایید، ولی این کار جندان هم لازم نیست.

ضریب کیفیت

باید تأیید کرد که هر چند ارتفاع منحنی پاسخ فقط به R و بسته است ولی پهنهای باشیب دامنه‌های پاسخ هم به R و هم به مقادیر L و C بستگی دارد. به زودی عرض پاسخ را باکمیت تعريف شده دقیق‌تری به نام عرض باند بیان خواهیم کرد ولی بهتر است که ابتدا آن را با پارامتر مهمتری به نام ضریب کیفیت Q مرتبط سازیم.

$$\alpha = \frac{\omega_0}{2Q_0} \quad (10)$$

$$\omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2} \quad (11)$$

ضریب میرایی

به منظور مراجعات بعدی بهتر است یک رابطه دیگر بر حسب ω_0 و Q_0 بنویسیم. جمله درجه دوم در مخرج معادله (۴)،

$$s^2 + \frac{1}{RC} s + \frac{1}{LC} \quad \text{رامی توان به صورت زیر نوشت:}$$

$$s^2 + 2\alpha s + \omega_0^2$$

در مبحث نظریه سیستم‌ها و تئوری کنترل خودکار، عبارت فوق را با استفاده از پارامتر بدون بعدی به نام ضریب میرایی ζ (زتا) می‌نویسند.

$$s^2 + 2\zeta\omega_0 s + \omega_0^2$$

مقایسه این عبارات اجازه می‌دهد تا ζ باید پارامترها ارتباط یابد.

$$\zeta = \frac{\alpha}{\omega_0} = \frac{1}{2Q_0} \quad (12)$$

مقادیر عددی ω_0 , α , ω_d و R را برای یک مدار تشیدید با $L = 2.5 \text{ mH}$ و $Q_0 = 5$ و $C = 0.01 \mu\text{F}$ بنویسید.

از معادله (۲) داریم $f_0 = \omega_0 / 2\pi = 31.8 \text{ kHz}$ و $\omega_0 = 1 / \sqrt{LC} = 200 \text{ krad/s}$ با سرعت می‌توان α را به دست آورد.

$$\alpha = \frac{\omega_0}{2Q_0} = \frac{2 \times 10^5}{(2 \times 5)} = 2 \times 10^4 \text{ Np/s}$$

اکنون به سراغ رابطه قدیمی خود در فصل ۹ می‌رویم.

$$\omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2} \quad \text{به این ترتیب در می‌باییم که:}$$

$$\omega_d = \sqrt{(2 \times 10^5)^2 - (2 \times 10^4)^2} = 199.0 \text{ krad/s}$$

بالاخره مقدار مقاومت موازی رانیاز داریم که معادله (۷) آن را به مساواهد داد:

$$Q_0 = \omega_0 RC \quad \text{بنابراین}$$

$$R = \frac{Q_0}{\omega_0 C} = \frac{5}{(2 \times 10^5 \times 10^{-8})} = 2.50 \text{ k}\Omega$$

۱۶-۱ یک مدار تشیدید موازی متشکل از $C = 80 \text{ nF}$ و $L = 50 \text{ mH}$. $R = 8 \text{ k}\Omega$ می‌باشد. مطلوب است (الف) ω_0 , (ب) Q_0 , (ج) ω_d , (د) α و (ه) ζ .

۱۶-۲ در مدار تشیدید موازی که $Y_{in} = 1 \text{ mS}$ و $\omega_d = 998 \text{ rad/s}$, $\omega_0 = 1000 \text{ rad/s}$ در حالت تشیدید می‌باشد، مقادیر R , L , C و α را در آن به دست آورید.

مثال ۱۶-۱

این رابطه و معادله ۸ فقط برای مدار ساده RLC شکل ۱۶-۱ معتبر است. عبارت مقاول و مفید دیگری برای Q با یک جایگزینی ساده به دست می‌آید.

$$Q_0 = R \sqrt{\frac{C}{L}} = \frac{R}{|X_{C,0}|} = \frac{R}{|X_{L,0}|} \quad (13)$$

بنابراین برای این مدار خاص، کاهش مقاومت، Q_0 را کاهش می‌دهد. هر چقدر مقاومت کمتر شود، انرژی بیشتری در عنصر تلف می‌گردد. افزایش ظرفیت خازنی، Q_0 را افزایش می‌دهد، ولی افزایش القاگذایی، Q_0 را کاهش خواهد داد. البته این عبارات این مطالعه برای مداری که در فرکانس رزنانس کار کند صحت دارد.

تعابیر دیگری از Q

در مدار تشیدید موازی، ثابت بدون بعد Q_0 تابعی از هر سه عنصر مدار است. با این وجود مفهوم Q محدود به یک مدار است و یا حتی سیستم‌های الکترونیکی نیست. این ضریب در هر پدیده تشیدیدی مفید است. مثلاً یک توب گلف را در نظر بگیرید. اگر وزن توب را W فرض کنیم و آن را از ارتفاع h_1 در بالای یک سطح افقی صاف راه‌کنیم، توب پس از برخورد تا ارتفاع h_2 که کمتر از h_1 است بالا خواهد آمد. انرژی اولیه توب Wh_1 و انرژی تلف شده در یک پریود $W(h_1 - h_2)$ می‌باشد پس ضریب Q_0 برابر است با:

$$Q_0 = 2\pi \frac{h_1 W}{(h_1 - h_2) W} = \frac{2\pi h_1}{h_1 - h_2}$$

یک توب گلف با کیفیت عالی به ارتفاع اولیه خود باز می‌گردد و دارای Q_0 بینهایت است. برای توب‌های معمولی این مقدار حدود ۳۵ می‌باشد. باید توجه کرد که Q در این مثال مکانیکی از پاسخ طبیعی محاسبه شده است و نه از پاسخ واداشته. در یک مدار الکترونیکی هم ممکن است از اطلاعات پاسخ طبیعی حاصل گردد و آن رامی توان در معادلات (۱۰) و (۱۱) که در زیر آمده مشاهده کرد.

تفسیر مفید دیگر Q هنگامی حاصل می‌شود که جریان‌های القاگر و خازن در معادله (۵) را مورد بررسی قرار دهیم:

$$I_{C,0} = -I_{L,0} = j\omega_0 CRI = jQ_0 I \quad (14)$$

توجه کنید که جریان خازن یا القاگر برابر است با Q_0 ضریب در منبع جریان که با یکدیگر 180° اختلاف فاز دارند. بنابراین اگر در فرکانس تشیدید به مدار موازی با $Q_0 = 50$ جریان $I = 2 \text{ mA}$ در خازن و القاگر 100 mA جریان خواهیم داشت. بنابراین یک مدار تشیدید موازی مانند یک تقویت کننده جریان وابسته به عنوان تقویت کننده توان عمل نمی‌کند، زیرا شبکه یک شبکه غیرفعال است.

اکنون مایلیم پارامترهای مختلف مربوط به مدار تشیدید موازی را بایکدیگر مرتبط سازیم. سه پارامتر α , ω_0 و Q_0 را قبلاً در بحث پاسخ طبیعی معرفی کردیم. بنابراین تشیدید اساساً مربوط به پاسخ واداشته است، زیرا بر حسب امپدانس ورودی (مقاومت خالص) بیان می‌شود و امپدانس ورودی هم فقط در حالت ماندگار سینوسی مفهوم دارد. دو پارامتر مهم در یک مدار تشیدید شاید فرکانس تشیدید ω_0 و ضریب کیفیت Q_0 باشد. سه توان ضریب نمایی میرایی و فرکانس تشیدید طبیعی را بر حسب ω_0 و Q_0 بیان کرد:

$$\alpha = \frac{1}{2RC} = \frac{1}{2(Q_0 / \omega_0 C)C}$$

تمرین

جوab-۱: $10.12 \cdot 15.811 \text{ krad/s}$

جوab-۲: 0.0494 Np/s , 781 krad/s , 15.792 krad/s

جوab-۳: 126.4 mH , 1000Ω , $7.91 \mu\text{F}$

بر حسب Q_0 داریم:

$$Y = \frac{1}{R} + j \frac{1}{R} \left(\frac{\omega \omega_0 CR}{\omega_0} - \frac{\omega_0 R}{\omega \omega_0 L} \right) \quad \text{یا}$$

$$Y = \frac{1}{R} \left[1 + j Q_0 \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right) \right] \quad (14)$$

دوباره می‌بینیم که اندازه ادمیتانس در نقطه تشیدی برابر $\frac{1}{R}$ است و اندازه ادمیتانس $R/\sqrt{2}$ در فرکانسی وجود دارد که کمیت موهومنی داخل کروشه برابر ۱ باشد. پس:

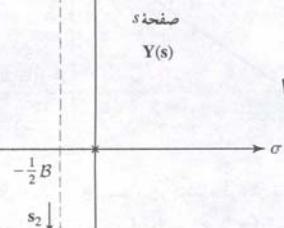
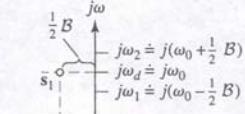
$$Q \left(\frac{\omega_2}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega_2} \right) = 1 \quad \text{و} \quad Q \left(\frac{\omega_1}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega_1} \right) = -1$$

پس از حل داریم و

$$\omega_1 = \omega_0 \left[\sqrt{1 + \left(\frac{1}{2Q_0} \right)^2} - \frac{1}{2Q_0} \right] \quad (15)$$

$$\omega_2 = \omega_0 \left[\sqrt{1 + \left(\frac{1}{2Q_0} \right)^2} + \frac{1}{2Q_0} \right] \quad (16)$$

به خاطر داشته باشید که $\omega_0 > \omega_2$ و $\omega_1 < \omega_0$.



شکل ۱۶-۶ آرایش قطب-صفر (s) یا برای یک مدار موازی RLC. دو صفر که دقیقاً در $\omega = \frac{1}{2} B$ rad/s (rad/s) و در سمت چپ محور σ برابر قرار دارند. فاصله دارند. فاصله دو فرکانس نصف توان دیگر $\frac{1}{2} B$ rad/s و هر یک تا فرکانس تشیدید حدوداً $\frac{1}{2} B$ فاصله دارند.

با ضرب معادله (15) در معادله (16) می‌توان نشان داد که ω_0 دقیقاً میانگین هندسی فرکانس‌های نصف توان است. یعنی:

$$B = \omega_2 - \omega_1 = \frac{\omega_0}{Q_0}$$

با ضرب معادله (15) در معادله (16) می‌توان نشان داد که ω_0 دقیقاً میانگین هندسی مدارهایی که بالاتری دارند عرض باندشان باریک است، یعنی منحنی پاسخ آنها تیزتر است. این مدارها قابلیت گریش فرکانسی بیشتری و یا ضریب کیفی بزرگتر را دارا هستند.

تقریب برای مدارهای با Q

بسیاری از مدارهای تشیدید عملاً طوری ساخته می‌شوند تا Q_0 بزرگتری داشته باشند تا از مزیت عرض باند باریک و قابلیت گریش فرکانسی بیشتری استفاده شود. وقیعه Q_0 بزرگتر از ۵ باشد، ممکن است تقریب‌های خوبی برای فرکانس‌های نصف توان بالا و پایین و پاسخ در حوالی فرکانس تشیدید داشت. بگذارید مدار را Q بزرگتر مثلاً مساوی یا بیش از ۵ انتخاب شود. آرایش قطب و صفر (s) برای مدار RLC با Q_0 بزرگتر از ۵ در شکل ۱۶-۶ دیده می‌شود. چون:

سپس

$$\alpha = \frac{\omega_0}{2Q_0}$$

$$\alpha = \frac{1}{2} B$$

و محل در صفر s_1 و s_2 می‌توانند چنین تقریب شوند:

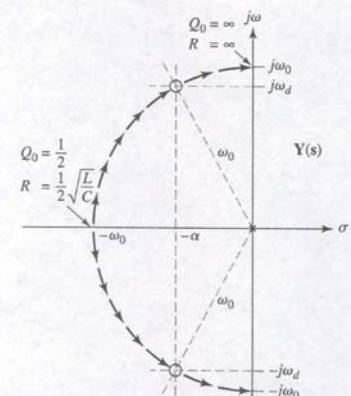
$$s_{1,2} = -\alpha \pm j\omega_d \approx -\frac{1}{2} B \pm j\omega_d$$

به طریقی مشابه محل دو فرکانس نصف توان روی محور ω زرا می‌توان چنین به دست آورد:

$$\omega_{1,2} = \omega_0 \left[\sqrt{1 + \left(\frac{1}{2Q_0} \right)^2} \mp \frac{1}{2Q_0} \right] \approx \omega_0 \left(1 \mp \frac{1}{2Q_0} \right)$$

اکنون اجازه دهد تا $Q_0 = \infty$ را بر حسب مکان قطب‌ها و صفرهای ادمیتانس (s) یک مدار RLC موازی بیان کنیم. این کار را مثلاً با تغییر R و ثابت نگهداشت C و L می‌توان انجام داد. با افزایش Q_0 روابط مربوط به α و ω_0 نشان می‌دهد که صفرهای σ به محور ω نزدیکتر می‌شوند. همچنین ملاحظه می‌شود که صفرهای از محور حقیقی σ دور می‌شوند. طبیعت دقیق حرکت وقتی روش تر می‌شود که بخط اوریم برای تعیین محل مثبت ω روزی محور ω باشد. چون ω_0 ثابت نگهداشتی می‌شود، شاعع باید ثابت باشد و بنابراین صفرهای باید با افزایش Q_0 به سمت محور مثبت ω سوچ یابند.

دو صفر در شکل ۱۶-۴ مشخص شده‌اند و پیکان‌ها مسیری که با افزایش R اختیار می‌شود را نشان می‌دهند. وقتی R بیشتر است، Q_0 هم بیشتر است. ω_0 دو صفر در $\omega = \pm j\omega_0$ محور ω خواهد بود. با کاهش R ، صفرهای به سمت محور σ در روی قوس حرکت می‌کنند و در روی آن به هم پیوسته و جفت صفر را در $\omega = -\omega_0$ به وجود می‌آورند و در این نقطه $Q_0 = \frac{1}{2}\sqrt{L/C}$ را دارند. این وضعیت متناظر با حالت میرای بحرانی است که در آن $\omega = \omega_d$ و $\omega = \omega_0$ بود. مقادیر کمتر R و نیز Q_0 کمتر موجب می‌شوند تا صفرهای جدا شوند و روی محور منفی σ در جهت حرکت کنند ولی این مقادیر متعلق به مدارهای تشیدید نیستند و لزومی ندارد آنها را بیش از این ریاضی کنیم. کم Q_0 مترقبه به مدارهای تو صیف یک مدار با $B = \frac{1}{2}\sqrt{L/C}$ را برابر ω_0 باشد. وقیعه $\omega = 5$ بعده میار $\omega_0 > 5$ را برابر تو صیف یک مدار با $B = \frac{1}{2}\sqrt{L/C}$ باشد. صفرهای $\omega = -0.1\omega_0 \pm j0.995\omega_0$ بوده و بنابراین ω_0 با هم فقط نیم درصد اختلاف دارند.



شکل ۱۶-۴ دو صفر ادمیتانس (s) یا $\omega = -\alpha \pm j\omega_0$ در قرار دارند و با افزایش R از $\frac{1}{2}\sqrt{L/C}$ تا ∞ در مسیر نشان داده شده جایه جا می‌شوند.

۱۶-۲ عرض باند و مدارهای Q بالا

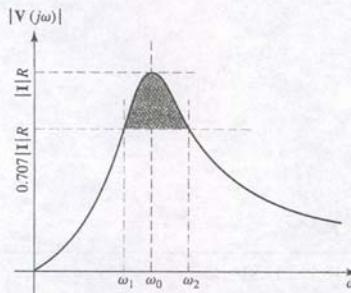
بحث خود را در مورد تشیدید موازی با تعریف فرکانس و عرض باند نصف توان ادامه می‌دهیم و سپس به برداری خوبی از این مفاهیم در تهیه اطلاعاتی راجع به پاسخ تقریبی مدارهایی با Q بالا به دست می‌آوریم. اکنون "پنهانی" منحنی پاسخ مانند آنچه در شکل ۱۶-۳ ملاحظه شد را بهتر می‌توان تعریف کرد و به $Q_0 = \sqrt{2}$ ارتباً تشدید داد. ابتدا در فرکانس نصف توان ω_1 و ω_2 را به این ترتیب تعريف می‌کنیم که در ازای آن‌ها دامنه ادمیتانس ورودی مدار تشیدید موازی $\sqrt{2}$ برابر ادمیتانس در حالت تشیدید است. چون منحنی پاسخ شکل ۱۶-۳ و لولاز تولید شده در دو سر مدار موازی به وسیله منع حریان سینوسی تابعی از فرکانس است، فرکانس‌های نصف توان نقطای را نشان می‌دهند که در آن‌ها این و لولاز $1/\sqrt{2}$ یا 0.707 برابر و لولاز در حالت تشیدید است. برای امدادانس ورودی هم رابط مشابهی وجود دارد. ما ω_0 را فرکانس نصف توان پایین و ω_2 را فرکانس نصف توان بالا می‌نامیم.

عرض باند

پنهانی یا عرض باند (نصف توان) یک مدار تشیدید، تفاوت دو فرکانس نصف توان است.

$$B \equiv \omega_2 - \omega_1 \quad (13)$$

سعی می‌کنیم عرض باند را پنهانی منحنی پاسخ تصور کنیم حتی اگر منحنی از $\omega = 0$ تا $\omega = \infty$ وسعت داشته باشد. دقیق‌تر بگوییم پنهانی باند نصف توان در حقیقت قسمتی از منحنی است که دامنه پاسخ در آن از ۷۰.۷٪ ماکزیمم پاسخ بزرگتر با مساوی آن است (شکل ۱۶-۵).



شکل ۱۶-۵ پنهانی باند را پاسخ مدار هاشور خود را دارد. این قسمت متعلق به ناحیه‌ای از پاسخ است که ۷۰.۷٪ از حداکثر مقدار ماقزیمم را دارد.

اکنون باید پنهانی باند را بر حسب Q_0 و فرکانس تشیدید بیان کنیم. برای انجام آن ابتدا ادمیتانس مدار RLC موازی را می‌نویسیم.

$$Y = \frac{1}{R} + j(\omega C - \frac{1}{\omega L})$$

مثال ۱۶-۲

مقدار تقریبی ادمیتانس شبکه RLC موازی را که در آن $R = 40 \text{ k}\Omega$ و $L = 1\text{H}$, $R = 40 \text{ k}\Omega$ است، معین کنید به شرطی که فرکانس کار $\omega = 8.2 \text{ rad/s}$ باشد.

اهداف

مشتمل را مشناسی کنید.

از مخواسته شده است تا مقدار تقریبی ادمیتانس $Y(s)$ را در $s = 8.2 \text{ rad/s}$ برای یک شبکه ساده RLC حساب کنیم. این بدان معنی است که Q_0 حداقل برابر با ۵ است و فرکانس کار چندان از فرکانس تشدید دور نیست.

اطلاعات

معلوم را جمع آوری نماید.

مقادیر R , L , C و نیز فرکانسی که در آن (s) محاسبه شده است، داده شده‌اند. این مقادیر برای محاسبه دقیق یا تقریبی ادمیتانس کافی است.

از این طریق

در به کارگیری عبارت تقریبی ادمیتانس، ابتدا باید ضریب کیفیت Q_0 و عرض باند را معین کنیم، در فرکانس تشدید ω_0 از معادله به صورت $s = 1/\sqrt{LC} = 8 \text{ rad/s}$ دست $Q_0 = 1.6 \text{ rad/s}$ و $\omega_0 = 0.05 \text{ rad/s}$ خواهد شد. مقدار Q_0 برای این مدار کافی استفاده از تقریب Q بالا را می‌نماید.

معادلات مناسب را به دست آورید.

$$Y(s) \approx \frac{1}{R} (1 + jN)$$

بنابراین

$$|Y(j\omega)| \approx \frac{1}{R} \sqrt{1 + N^2} \quad \text{و} \quad \text{ang } Y(j\omega) \approx \tan^{-1} N$$

آیا اطلاعات دیگری لازم است.

ما هنوز به N نیاز داریم. این مقدار به ما می‌گوید چند نصف عرض باند ω از فرکانس تشدید ω_0 فاصله داریم:

$$N = (8.2 - 8) / 0.8 = 0.25$$

اقدام به حل.

اکنون آمده‌ایم روابط تقریبی خود را برای اندازه و زاویه ادمیتانس شبکه به کار ببریم.

$$\text{ang } Y \approx \tan^{-1} 0.25 = 14.04^\circ$$

و

$$|Y| \approx 25\sqrt{1 + (0.25)^2} = 25.77 \mu\text{S}$$

صحت حل را تحقیق کنید. آیا پاسخ منطقی است؟

محاسبه دقیقی از ادمیتانس معادله (۱۵) نشان می‌دهد که

$$Y(j8200) = 25.75 \angle 13.87^\circ \mu\text{S}$$

بنابراین روش تقریبی منجر به مقادیری از اندازه و زاویه ادمیتانس متنه می‌شود که نسبتاً در این فرکانس دقیق‌اند (بهتر از ۲%).

۱۶-۳ یک مدار تشدید موازی با Q نسبتاً بالا داری $f_0 = 440 \text{ Hz}$ با $Q_0 = 6$ است. معادلات(۱۶) را برای تهیه مقادیر (الف) f_1 و (ب) f_2 به کار ببرید. اکنون معادله (۱۷) را برای محاسبهتقریبی مقادیر (ج) f_1 و (د) f_2 به کار ببرید.جواب: 476.7 Hz , 403.3 Hz , 478.2 Hz , 404.9 Hz

یا

$$\omega_{1,2} \approx \omega_0 \pm \frac{1}{2}B \quad (17)$$

بنابراین در یک مدار با Q بزرگ فرکانس‌های نصف توان تقریباً به فاصله مساوی از فرکانس تشدید بوده و این فاصله نصف عرض باند است. این مطلب در شکل ۱۶-۶ ملاحظه می‌شود. رابطه تقریبی برای ω_1 و ω_2 در معادله (۱۷) را می‌توان با هم جمع کرد تا رابطه واسطه حسابی ω_0 , ω_1 و ω_2 در مدارهای Q بزرگ ملاحظه شود.

$$\omega_0 \approx \frac{1}{2}(\omega_1 + \omega_2)$$

اکنون بر روی محور ω نقطه‌ای را تصور می‌کنیم که کمی از ω_0 بالاتر باشد. برای تعیین ادمیتانس ناشی از شبکه RLC موازی در این فرکانس، سه بردار از فرکانس‌های بحرانی به نقطه تست رسم می‌نماییم. اگر نقطه تست به $j\omega_0$ نزدیک باشد، فاصله قطب تا آن تقریباً 0 و فاصله صفر پایین تا آن تقریباً $2\omega_0$ خواهد بود. بنابراین ادمیتانس تقریباً برابر است با

$$Y(s) \approx C \frac{(j2\omega_0)(s - s_1)}{j\omega_0} \approx 2C(s - s_1) \quad (18)$$

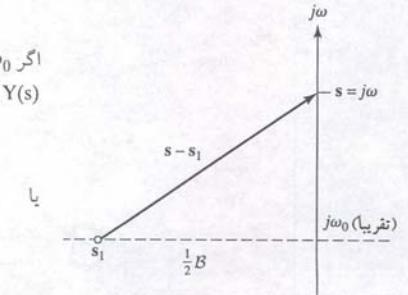
که مطابق معادله (۴)، ظرفیت خازن است. برای این که بتوانیم تقریب خوبی از $(s - s_1)$ به دست آوریم، نواحی حول صفر s_1 را در شکل ۱۶-۷ بزرگ می‌کنیم.

در مختصات کارتزین داریم:

$$s - s_1 \approx \frac{1}{2}B + j(\omega - \omega_0)$$

اگر ω را با $j\omega$ جایگزین نماییم، این عبارت دقیق است. اکنون این معادله را در مقدار تقریبی معادله (۱۸) می‌گذاریم و از $\frac{1}{2}B$ فاکتور می‌گیریم.

$$Y(s) \approx 2C \left(\frac{1}{2}B \right) \left(1 + j \frac{\omega - \omega_0}{\frac{1}{2}B} \right)$$



کسر $(s - s_1)$ را "تعداد نیم عرض بانده از فرکانس تشدید" تفسیر کرده و با N نشان می‌دهیم. پس:

$$Y(s) \approx \frac{1}{R} (1 + jN) \quad (19)$$

که

$$N = \frac{\omega - \omega_0}{\frac{1}{2}B} \quad (20)$$

است. در فرکانس نصف توان بالا، $\omega_1, \omega_2 \approx \omega_0 + \frac{1}{2}B$ است و مانصف عرض باند بالای فرکانس تشدید قرار داریم. در فرکانس نصف توان پایین $\omega_1, \omega_2 \approx \omega_0 - \frac{1}{2}B$ است که ما در نصف عرض باند پایین تر از فرکانس تشدید واقعیم. معادله (۱۹) برای استفاده خیلی ساده‌تر از روابط دقیق قبلی است. این رابطه اندازه ادمیتانس را چنین به دست می‌دهد:

$$|Y(j\omega)| \approx \frac{1}{R} \sqrt{1 + N^2}$$

ضمن این که زاویه $(j\omega)$ با عکس تائزانت N داده می‌شود:

$$\text{ang } Y(j\omega) \approx \tan^{-1} N$$

تمرین

جمع‌بندی خود را در مورد مدار تشید سری با خلاصه کردن مطالب و یافته‌های مهم انجام دهیم:

- فرکانس تشید ω_0 فرکانسی است که در آن امپدانس ورودی یا زاویه امپدانس صفر می‌شود. پس $\omega_0 = 1/\sqrt{L_s C_s}$

ضریب کیفیت مدار Q_{0s} به صورت 2π ضریب نسبت انرژی ماکریم حداکثر به انرژی تلف شده در هر پریود در مدار است. با این تعریف می‌بینیم که $Q_{0s} = \omega_0 L_s / R_s$.

دو فرکانس نصف توان ω_{1s} به عنوان فرکانسی تعریف می‌شوند که در آن‌ها مقدار امپدانس $\sqrt{2}$ برابر اندازه امپدانس مینیم است. همچنین در این فرکانس‌ها پاسخ جریان 70.7 درصد پاسخ حداکثر می‌باشد.

عبارات دقیق برای ω_1 و ω_2 برابر است با:

$$\omega_{1,2} = \omega_0 \left[\sqrt{1 + \left(\frac{1}{2Q_0} \right)^2} \mp \frac{1}{2Q_0} \right]$$

رابطه تقریبی برای ω_1 و ω_2 (بالا) عبارتنداز:

$$\omega_{1,2} \approx \omega_0 \mp \frac{1}{2B}$$

از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$B = \omega_2 - \omega_1 = \frac{\omega_0}{Q_0}$$

ادمیتانس ورودی هم می‌تواند برای Q_{0s} بالا به صورت تقریبی زیر بیان شود:

$$Y \approx \frac{1}{R} (1 + jN) = \frac{1}{R} \sqrt{1 + N^2} / \tan^{-1} N$$

که

$$N = \frac{\omega - \omega_0}{\frac{1}{2}B}$$

این تخمین برای $0.9\omega_0 \leq \omega \leq 1.1\omega_0$ معتبر است.

ز اینجا به بعد دیگر مقادیر مدار سری را با زیرنویس مشخص نمی‌کنیم مگر این که ضرورتی وجود داشته باشد.

مثال ۱۶-۳

لذار $v_s = 100 \cos \omega t$ mV و یک مدار تشید سری متشکل از یک مقاومت 10Ω ، یک فازن 200 nF و یک القاگر 2 mH وصل شده است. هر دو روش دقیق و تقریبی را برای حسابه دامنه جریان به کار ببرید به شرطی که $\omega = 48 \text{ krad/s}$ باشد.

فرکانس تشید مدار با رابطه زیر داده می‌شود:

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{\sqrt{(2 \times 10^{-3})(200 \times 10^{-9})}} = 50 \text{ krad/s}$$

جون در فرکانس $\omega = 48 \text{ krad/s}$ کار می‌کنیم که در فاصله 10% از فرکانس تشید است، مطلقی است تارو این تقریبی خود را برای تخمین امپدانس شبکه به کار ببریم، به شرطی که با Q بالا کار کنیم.

$$Z_{eq} \approx R \sqrt{1 + N^2} / \tan^{-1} N$$

هدف استفاده از این تقریب‌ها برای مدارهای Q بزرگ نزدیک تشید معتبر است. قبل از $Q_0 \geq 5$ باشد، ولی نگفتن منظور از نزدیک بودن به فرکانس تشید چیست؟ می‌توان نشان داد که برای خطای کمتر از 5% $Q_0 \geq 1.1 \omega_0 \leq \omega \leq 0.9\omega_0$ در نظر گرفته شود. گرچه این عرض باند باریک ممکن است کوچک به نظر برسد، ولی در مقایسه با فرکانس‌های مورد ملاققه مامی تواند زیاد هم باشد. متلاع رادیوهای AM معمولاً در فرکانس تشید 455 kHz تنظیم شده و عرض باند آن 10 kHz است. پس $Q_0 \geq 45.5$ است. یعنی فرکانس‌های نصف توان حدود 450 kHz ، 460 kHz می‌باشد. با این وجود تقریب مابین 500.5 kHz تا 409.5 kHz معتبر است (با خطای کمتر از 5%) یعنی تقریباً بخش عمده منحنی را شامل می‌شود. تنها انتهای منحنی پاسخ خارج این ناحیه واقع است و به کار بردن تقریب فوق در آن محدوده خطای بزرگی تولید می‌کند.

بحث درباره مدار تشید موازی را با مروری بر نتایج به دست آمده خاتمه می‌دهیم:

- فرکانس تشید ω_0 فرکانسی است که در آن پاسخ موهومی ادمیتانس ورودی و یا زاویه ادمیتانس صفر می‌شود. آن‌گاه $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ خواهد بود.

Q_0 کیفیت مدار را تعیین می‌کند و 2π برابر نسبت انرژی ذخیره شده در مدار به انرژی تلف شده در هر پریود یا تناوب است. از این تعریف نتیجه می‌شود که $Q_0 = \omega_0 RC$.

دو فرکانس نصف توان ω_1 و ω_2 فرکانس‌هایی هستند که در آن‌ها ادمیتانس $\sqrt{2}$ برابر حداقل مقدار ادمیتانس است. در این فرکانس‌ها پاسخ و لذار 70.7 درصد ماکریم پاسخ و لذار می‌باشد.

مقدار دقیق فرکانس‌های ω_1 و ω_2 عبارتنداز:

$$\omega_{1,2} = \omega_0 \left[\sqrt{1 + \left(\frac{1}{2Q_0} \right)^2} \mp \frac{1}{2Q_0} \right]$$

عبارات تقریبی برای ω_1 و ω_2 (بالا) عبارتنداز:

$$\omega_{1,2} \approx \omega_0 \mp \frac{1}{2B}$$

پهنه‌ای باند نصف توان B برابر است با:

$$B = \omega_2 - \omega_1 = \frac{\omega_0}{Q_0}$$

ادمیتانس ورودی هم ممکن است برای Q بالا به صورت تقریب بیان گردد:

$$Y \approx \frac{1}{R} (1 + jN) = \frac{1}{R} \sqrt{1 + N^2} / \tan^{-1} N$$

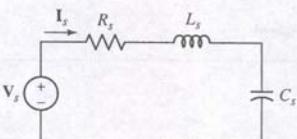
که

$$N = \frac{\omega - \omega_0}{\frac{1}{2}B}$$

این تخمین برای $0.9\omega_0 \leq \omega \leq 1.1\omega_0$ معتبر است.

۱۶-۳ تشید سری

گرچه ممکن است کاربرد مدار RLC سری کمتر از مدار RLC موازی باشد، ولی هنوز ارزش بررسی دارد. ما مدار شکل ۱۶-۸ را ملاحظه خواهیم کرد. باید مذکور شد که برای تمام عناصر زیرنویس d در نظر گرفته شده است تا هنگام مقایسه با عناصر مدار موازی اشتباهی رخ ندهد. بحث ما در مورد مدار تشید سری دو بخش سبیاً طولانی را به خود اختصاص داد. می‌توانیم مدار سری را به همین ترتیب بررسی کنیم، ولی بهتر است از مفهوم دوگانگی یا همزادی استفاده کرده و از تکرارهایی بیمورد خودداری نماییم. برای سهولت، بگذارید پرسوی نتایج اخیرین پاراگراف تکیه کرده و آن را با زیان دوگانگی در مورد مدار RLC سری هم بیان کنیم، چراکه نتایج مهمی در آن‌جا به دست آمد.



شکل ۱۶-۸ مدار تشید سری.

جدول ۱۶-۱ خلاصه‌ای از مدارهای تشدید.

<p>$Y_p \rightarrow$</p> $Q_0 = \omega_0 RC \quad \alpha = \frac{1}{2RC}$ $ I_L(j\omega_0) = I_C(j\omega_0) = Q_0 I(j\omega_0) $ $Y_p = \frac{1}{R} \left[1 + jQ_0 \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right) \right]$	<p>$Z_s \rightarrow V$</p> $Q_0 = \frac{\omega_0 L}{R} \quad \alpha = \frac{R}{2L}$ $ V_L(j\omega_0) = V_C(j\omega_0) = Q_0 V(j\omega_0) $ $Z_s = R \left[1 + jQ_0 \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right) \right]$
عبارات دقیق $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \sqrt{\omega_1 \omega_2} \quad \omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2} = \omega_0 \sqrt{1 - \left(\frac{1}{2Q_0} \right)^2}$ $\omega_{1,2} = \omega_0 \left[\sqrt{1 + \left(\frac{1}{2Q_0} \right)^2} \mp \frac{1}{2Q_0} \right]$ $N = \frac{\omega - \omega_0}{\frac{1}{2}B} \quad B = \omega_2 - \omega_1 = \frac{\omega_0}{Q_0} = 2\alpha$	
عبارات تقریبی $(Q_0 \geq 5) \quad 0.9\omega_0 \leq \omega \leq 1.1\omega_0$ $\omega_d \approx \omega_0 \quad \omega_{1,2} \approx \omega_0 \mp \frac{1}{2B}$ $\omega_0 \approx \frac{1}{2}(\omega_1 + \omega_2)$	
$Y_p \approx \frac{\sqrt{1+N^2}}{R} \angle \tan^{-1} N$ $Z_s \approx R \sqrt{1+N^2} \angle \tan^{-1} N$	

قبل از این‌که چگونگی پیویزی چنین مدار معادلی را بیاموزیم، بگذارید. ابتدا مدار شکل ۱۶-۹(الف) را ملاحظه کنیم. فرکانس زاویه‌ای تشدید برای این سیمه که برابر $1/\sqrt{LC}$ است. ولی اگر R_1 به قدر کافی کوچک باشد، آن‌گاه فرکانس تشدید به مقدار فوق نزدیک خواهد شد. تعریف تشدید تفاوتی نمی‌کند و می‌توان فرکانس تشدید را با صفر کردن مدار بوهومی ادمیتانس ورودی به دست آورد:

$$\text{Im}\{Y(j\omega)\} = \text{Im} \left\{ \frac{1}{R_2} + j\omega C + \frac{1}{R_1 + j\omega L} \right\} = 0$$

$$\begin{aligned} &\text{Im} \left\{ \frac{1}{R_2} + j\omega C + \frac{1}{R_1 + j\omega L} \frac{R_1 - j\omega L}{R_1 - j\omega L} \right\} \\ &= \text{Im} \left\{ \frac{1}{R_2} + j\omega C + \frac{R_1 - j\omega L}{R_1^2 + \omega^2 L^2} \right\} = 0 \end{aligned}$$

نتیجه، شرط تشدید چنین است:

$$C = \frac{L}{R_1^2 + \omega^2 L^2}$$

بنابراین

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R_1}{L} \right)^2} \quad (21)$$

که N پس از تعیین Q_0 محاسبه می‌شود. چون مدار سری است، پس:

$$Q_0 = \frac{\omega_0 L}{R} = \frac{(50 \times 10^3)(2 \times 10^3)}{10} = 10$$

که به معنی Q بالا است. پس:

$$B = \frac{\omega_0}{Q_0} = \frac{50 \times 10^3}{10} = 5 \text{ krad/s}$$

تعداد نصف عرض باند بالاتر از تشدید (N) عبارت است از:

$$N = \frac{\omega - \omega_0}{B/2} = \frac{48.50}{2.5} = -0.8$$

بنابراین:

$$Z_{eq} \approx R \sqrt{1 + N^2} \angle \tan^{-1} N = 12.81 \angle -38.66^\circ \Omega$$

اندازه تقریبی جریان عبارت است از:

$$\frac{|V_s|}{|Z_{eq}|} = \frac{100}{12.81} = 7.806 \text{ mA}$$

با استفاده از عبارت دقیق داریم $I = 7.746 \angle 39.24^\circ \text{ mA}$. پس:

$$|I| = 7.746 \text{ mA}$$

۱۶-۴ یک مدار تشدید سری دارای عرض باند ۱۰۰ Hz و حاوی یک القاگر $2 \mu\text{F}$ و خازن 20 mH است. مطلوب است (الف). f_0 . (ب). Z_{in} . (ج). Q_0 . (د). B .

جواب: $f_0 = 846 \text{ Hz}$ و $Z_{in} = 12.57 + j0 \Omega$. $Q_0 = 7.796$. $B = 7.796 \text{ Hz}$.

تمرین

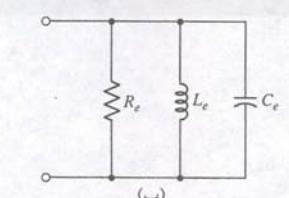
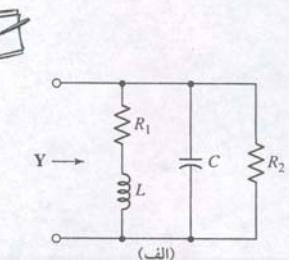
شاخصه مدار تشدید سری، امپدانس حداقل آن در حالت تشدید است، در حالی که مدار تشدید موازی، امپدانس حداقل را در تشدید دارد. در مدار موازی جریان عایقی القاگر و خازنی، Q_0 برابر جریان منع است. در مدارهای سری و نلتاز القاگر و خازن، Q_0 برابر نلتاز منع می‌باشد. بنابراین مدار سری تقویت و نلتازی در تشدید ایجاد می‌کند.

در جدول ۱۶-۱، مقایسه‌ای از نتایج تشدید سری و موازی و نیز عبارات دقیق و تقریبی ارائه شده است.

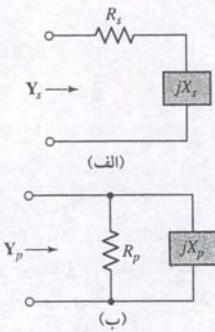
۱۶-۴ دیگر فرم‌های تشدید

مدارهای RLC موازی و سری در بخش قبل، از نوع ایده‌آل بودند. این نوع مدارها چیزی جز تقریبی از یک مدار فیزیکی مشتمل از یک سیم‌بیچ، یک مقاومت کربنی و یک خازن تانتالیم سری یا موازی نیستند. دقت این مدل ایده‌آل به گستره فرکانس کار، Q ، مدار، موادی که رفتار عناصر فیزیکی، سایر عناصر و فاکتورهای دیگر بستگی دارد. مدار این جا تکنیک‌های تعیین بهترین مدل را برای یک سیستم فیزیکی مطالعه نمی‌کنیم زیرا در این صورت دانستن نظریه میدان‌های الکترو-مغناطیسی و خواص مواد موردنیاز است. با این وجود می‌خواهیم مسائل پیچیده را به یکی از دو مدل ساده سری و موازی بدل سازیم.

شیوه شکل ۱۶-۹(الف) نسبتاً مدل دقیقی برای ترکیب موازی القاگر، خازن و مقاومت است. مقاومت R_1 یک مقاومت فرضی است که تلفات اهمی، تلفات هسته‌ای و تلفات تشعشعی القاگر فیزیکی را نشان می‌دهد. تلفات دی الکتریک خازن و مقاومت فیزیکی مدار R_2 با مقاومت R_2 نشان داده شده است. در این مدل نمی‌توان عناصر را باهم ترکیب کرد و مدل ساده‌تری که در تما فرکانس‌ها معادل مدار اصلی باشد، به دست آورد. با این وجود، نشان خواهیم داد که معادل ساده‌تری می‌توان ساخت تا در یک باندی از فرکانس که عمولاً به قدر کافی عرض است، معتبر باشد و هم‌فرکانس موردنظر را پوشش دهد. این مدار معادل چیزی شبیه به شکل ۱۶-۹(ب) خواهد بود.



شکل ۱۶-۹ (الف) مدل مغایدی از یک شبکه فیزیکی که از عناصر فیزیکی موازی القاگر، خازن و مقاومت ساخته شده است. (ب) مداری که می‌تواند در یک باند فرکانس باریک معادل مدار بخش (الف) باشد.



تابعی از فرکانس ω است ولی آن را در فرکانس تشدید شبکه‌ای که مدار سری قسمتی از آن است، محاسبه می‌کنیم، با این وجود این فرکانس تا مدتیابی به مدار کامل معلوم فرض نمی‌شود. به خواننده توصیه می‌شود تا نشان دهد که Q در این مدار سری برابر $R_s / |X_s|$ است در حالی که Q شبکه موازی در شکل ۱۶-۱۱ (ب) برابر $|X_p| / R_p$ می‌باشد.

بگذارید بینم مقادیر X_p چه باید باشد تا شبکه موازی شکل ۱۶-۱۱ (ب) و شبکه سری شکل ۱۶-۱۱ (الف) در فرکانس خاصی معادل شود. Y_s و Y_p را مساوی هم قرار می‌دهیم:

$$Y_s = \frac{1}{R_s + jX_s} = \frac{R_s - jX_s}{R_s^2 + X_s^2} = Y_p = \frac{1}{R_p} - j\frac{1}{X_p}$$

و بنابراین

$$R_p = \frac{R_s^2 + X_s^2}{R_s} \quad X_p = \frac{R_s^2 + X_s^2}{X_s}$$

با تقسیم این دو رابطه هم داریم:

$$\frac{R_p}{X_p} = \frac{X_s}{R_s}$$

نتیجه می‌شود که Q های شبکه‌های سری و موازی باید برابر باشند.

$$Q_p = Q_s = Q$$

پس معادلات تبدیل به صورت زیر ساده می‌شوند:

$$R_p = R_s(1 + Q^2) \quad (22)$$

$$X_p = X_s(1 + \frac{1}{Q^2}) \quad (23)$$

گرر R_p و X_p مقادیر مفروض باشند، می‌توان Y_s و Y_p را هم به دست آورد.
اگر $Q \geq 5$ باشد، با استفاده از روابط تقریبی مختصر خطای وجود خواهد داشت.

$$R_p \approx Q^2 R_s \quad (24)$$

$$X_p \approx X_s \quad (C_p \approx C_s) \quad \text{یا} \quad L_p \approx L_s \quad (25)$$

معادل موازی ترکیب سری یک القاگر 100 mH و مقاومت 5Ω را در فرکانس 1000 rad/s به دست آورید. جزئیات این شبکه مشخص نیست.

در اینجا می‌بینیم که القاگر 100 mH سری با مقاومت 5Ω همان امپدانس ورودی را تولید می‌کند که یک القاگر 100 mH با مقاومت 2000Ω در فرکانس 1000 rad/s تولید می‌نماید.

$$Q = \frac{X_s}{R_s} = \frac{100}{5} = 20$$

چون Q به قدر کافی بالا است (۲۰ بیشتر از ۵ است)، معادلات (۲۴) و (۲۵) را به کار می‌بریم.

$$R_p \approx Q^2 R_s = 2000 \quad L_p \approx L_s = 100 \text{ mH}$$

در اینجا می‌بینیم که القاگر 100 mH سری با مقاومت 5Ω همان امپدانس ورودی را تولید می‌کند که یک القاگر 100 mH با مقاومت 2000Ω در فرکانس 1000 rad/s تولید می‌نماید.

مثال ۱۶-۵

توجه کنید که ω_0 کمتر از $1/\sqrt{LC}$ است، ولی در صورت کوچک بودن L / R_1 و ω_0 به $1/\sqrt{LC}$ نزدیک خواهد شد.

حداکثر مقادیر امپدانس ورودی هم شایان توجه است. مقادیر آن $2R_2$ نیست و در (ω_0) در $1/\sqrt{LC} = 1/\omega$ هم رخ نمی‌دهد. اثبات این عبارات را نشان نمی‌دهیم زیرا به سرعت به عبارات جبری پیچیده تبدیل می‌شوند. با این وجود موضوع سراسراست است. بگذارید موضوع را با یک مثال روشن کنیم.

مثال ۱۶-۶

با به کارگیری مقادیر فوق در معادله (۲۱) داریم:

$$\omega_0 = \sqrt{8 - 2^2} = 2 \text{ rad/s}$$

و به این ترتیب قادر خواهیم بود امپدانس ورودی را محاسبه کنیم.

$$Y = \frac{1}{3} + j2(\frac{1}{8}) + \frac{1}{2 + j(2)(1)} = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = 0.5835$$

و سپس امپدانس ورودی در حالت تشدید برابر است با

$$Z(j2) = \frac{1}{0.583} = 1.714 \Omega$$

اگر $R_1 = 0$ می‌بود، فرکانس تشدید چنین می‌شد.

$$\frac{1}{\sqrt{LC}} = 2.83 \text{ rad/s}$$

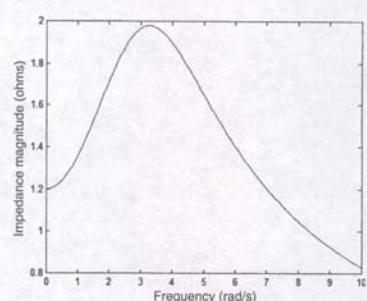
و امپدانس ورودی خواهد شد:

$$Z(j2.83) = 1.947 \angle -13.26^\circ \Omega$$

با این وجود از شکل ۱۶-۱۰ ملاحظه می‌شود فرکانسی که در آن مقادیر امپدانس حداکثر رخ می‌دهد برابر با $\omega_m = 3.26 \text{ rad/s}$ می‌باشد و این مقادیر حداکثر نیز چنین است:

$$Z(j3.26) = 1.980 \angle -21.4^\circ \Omega$$

مقادیر امپدانس در حالت تشدید با حداقل مقادیر آن حدود ۱۶% تفاوت دارد. هر چند که چنین خطای را می‌توان در بسیاری از موارد عملی نادیده گرفت ولی در جلسه امتحان آخر ترم نمی‌توان از آن به سادگی گذشت. در آخرین بخش نشان خواهیم داد که Q مربوط به القاگر در فرکانس s^2 برابر واحد است. این خطای در واقع به دلیل وجود ۱۶% خطای است.



شكل ۱۶-۱۰ نمودار $|Z|$ در برابر ω که با برنامه متلب نیز تولید شده است.

```
EDU> omega = linspace(0,10,100);
EDU> for i = 1:100
Y(i) = 1/3 + j*omega(i)/8 + 1/(2 + j*omega(i));
Z(i) = 1/Y(i);
end
EDU> plot(omega,abs(Z));
EDU> xlabel('frequency (rad/s)');
EDU> ylabel('impedance magnitude (ohms)');
```

تمرین

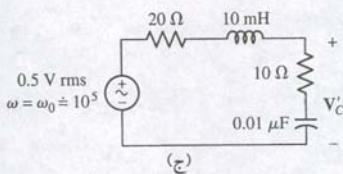
۱۶-۵ اگر در شکل ۱۶-۹ (الف) باشد، القاگر مناسبی برای انتخاب

فرکانس تشدید 1 MHz اختیار کنید (راهنمایی: $2\pi f = 2\pi\omega$ است).

جواب: 10 mH

ترکیبات معادل سری و موازی

برای تبدیل مدار مفروضی چون شکل ۱۶-۹ (الف) به مدار معادل دیگری مانند شکل ۱۶-۹ (ب) مراجعه می‌کنیم. ابتدا باید Q ترکیب سری یا موازی یک مقاومت و یک رآکتانس (خازنی) با القایی را مورد بحث قرار دهیم. مدار سری شکل ۱۶-۹ (الف) را در نظر می‌گیریم. Q مربوط به این شبکه مجدداً به صورت 2π برابر نسبت انحراف ذخیره شده به انحراف تلف شده Q در هر پریود تعریف می‌شود و می‌توان آن را در فرکانس انتخابی محاسبه کرد. به بیان دیگر، Q



شکل ۱۶-۱۳ (ج) مدار تشدید سری هنگامی به دسته‌ی آبد که شبکه RC موازی در بخش (ب) با یک شبکه RC سری که در $\omega = \omega_0 \approx 10^5$ rad/s معادل است، این بخش را بایک داستان به پایان می‌بریم.

تشکیل می‌شود. به این ترتیب مدار معادل شکل ۱۶-۱۳ (ج) به دست آمده است. Q تشدید در این مدار اکنون ۳۳۳.۳ است و بنابراین ولتاژ دو سرخانه در مدار شکل ۱۶-۱۳ (ج) برابر $\frac{2}{3}$ (ج) است. ولتاژ دوسر ترکیب RC است رابه دست آوریم:

$$|V'_C| = \frac{0.5}{30} |10 - j1000| = 16.67 \text{ V}$$

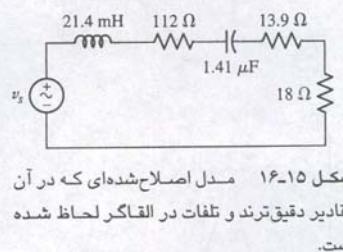
ولتاژ دوسر خانه و $|V'_C|$ اساساً برابرند. چون افت ولتاژ دوسر مقاومت 10Ω بسیار کوچک است.

نتیجه نهایی این که یک ولتمتر خوب هم می‌تواند تأثیر زیادی روی پاسخ مدارهای با بالا داشته باشد. تأثیر مشابهی را می‌توان در استفاده از یک آمپر متر ایده‌آل در مدار انتظار داشت. این بخش را بایک داستان به پایان می‌بریم.

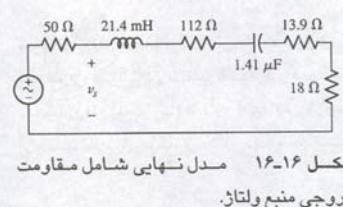
یکی بود یکی نبود، داشجویی بود به نام پت که استادی به نام دکتر ایبل داشت. یک روز عداز ظهر دکتر ایبل سه قطعه مداری، شامل یک مقاومت، یک القاگر، یک خازن با مقادیر ناممی 20 mH و $20\text{ }\mu\text{F}$ و $20\text{ }\Omega$ را به پت داد. از او خواسته شد تا یک منبع ولتاژ با فرکانس اندازه‌گیرید و سپس مقادیر عددی فرکانس تشدید، Q ، در تشدید و عرض نصف توان را محاسبه ماید. همچنین از او خواسته شد تا نتایج آزمایش را قبل از اندازه‌گیری تخمین بزند. پت که کارش در کلاس چندان جالب نبود، مدار را در ذهنش به صورت شکل ۱۶-۱۴ نصویر کرد و پس محاسبه زیر را انجام داد:

$$\begin{aligned} f_0 &= \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} = \frac{1}{2\pi\sqrt{20 \times 10^{-3} \times 10^{-6}}} = 1125 \text{ Hz} \\ Q_0 &= \frac{\omega_0 L}{R} = 7.07 \\ B &= \frac{f_0}{Q_0} = 159 \text{ Hz} \end{aligned}$$

شکل ۱۶-۱۴ اولین مدل برای یک القاگر، خازن و مقاومت سری با یک منبع.



شکل ۱۶-۱۵ مدل اصلاح شده‌ای که در آن مقادیر دقیق ترند و تلفات در القاگر لحاظ شده است.



شکل ۱۶-۱۶ مدل نهایی شامل مقاومت خروجی منبع ولتاژ.

برای کنترل دقت اکووالنس، امپدانس ورودی را برابر هر شبکه در 1000 rad/s می‌گیریم. در می‌بایم که:

$$Z_s(j1000) = 5 + j100 = 100.1 \angle 87.1^\circ \Omega$$

$$Z_p(j1000) = \frac{2000(j100)}{2000 + j100} = 99.9 \angle 87.1^\circ \Omega$$

و نتیجه می‌گیریم که این تقریب در فرکانس خاصی که تبدیل در آن صورت می‌گیرد، بسیار دقیق است. دقت در فرکانس 900 rad/s هم رضایت‌بخش است. زیرا:

$$Z_s(j900) = 90.1 \angle 86.8^\circ \Omega$$

$$Z_p(j900) = 89.9 \angle 87.4^\circ \Omega$$

تمرین

۱۶-۶

در $\omega = 1000 \text{ rad/s}$ ، شبکه موازی معادل ترکیب سری شکل ۱۶-۱۲ (الف) را به دست آورید.

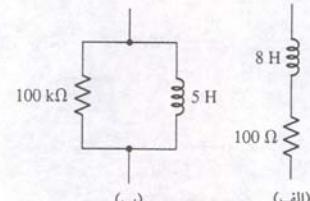
۱۶-۷

معادل سری را برابر شبکه موازی شکل ۱۶-۱۲ (ب) به دست آورید. فرض کنید

$\omega = 1000 \text{ rad/s}$

جواب ۱۶-۶ $640 \text{ k }\Omega$

جواب ۱۶-۷ $250 \text{ }\Omega$



شکل ۱۶-۱۲ (الف) یک شبکه سری که معادل موازی آن در $\omega = 1000 \text{ rad/s}$ خواسته شده است. (ب) یک شبکه موازی که معادل سری آن در $\omega = 1000 \text{ rad/s}$ مورد تقدیباً است.

به عنوان مثالی دیگر در جایگزینی یک مدار تشدید پیچیده‌تر با معادل RLC سری با موازی، اجزا بدهید مسئله‌ای را در وسایل اندازه‌گیری الکترونیک بررسی کنیم. شبکه ساده RLC را در شکل ۱۶-۱۳ (الف) ملاحظه نمایید که با یک منبع ولتاژ مبنی 0.5 V (rms) در فرکانس تشدید تحریک شده است. مقدار مؤثر (Z) ولتاژ مبنی 0.5 V است و ما می‌خواهیم مقدار مؤثر ولتاژ را در دو سرخانه با یک ولتمتر الکترونیک اندازه بگیریم. مقاومت داخلی ولتمتر 10000Ω است یعنی یک ولتمتر را می‌توان با یک ولتمتر ایده‌آل موازی با یک مقاومت $100 \text{ k}\Omega$ نشان داد.

قبل از این که ولتمتر وصل شود، فرکانس تشدید 25 mA , $Q_0 = 50$, 10^5 rad/s , جریان $Q_0 = 50$, 10^5 rad/s و ولتاژ 0.5 V در دو سرخانه 2.5 V محاسبه شده است. همان‌طور که در انتهای بخش ۱۶-۳ دیدیم این ولتاژ Q_0 برابر ولتاژ اعمال شده است. بنابراین اگر ولتمتر ایده‌آل باشد، حتی اگر به دو سرخانه وصل شود، باید 25 V را بخواند.

با اتصال ولتمتر واقعی، شبکه ۱۶-۱۳ (ب) حاصل می‌گردد. برای این که یک مدار

سری به دست آید، لازم است تا شبکه RC موازی با یک RC سری جایگزین شود. بدگذراید

در این شبکه RC خیلی بالا باشد به نحوی که خازن سری معادل برایان برای مدار RLC سری نهایی

ما این کار را بدين علت انجام می‌دهیم تا فرکانس تشدید را برابر مدار $0.01 \mu\text{F}$ باشد، فرکانس تشدید در 10^5 rad/s باقی می‌ماند. ما این فرکانس تشدید تخمینی را برای RC می‌محاسبه Q در شبکه RC

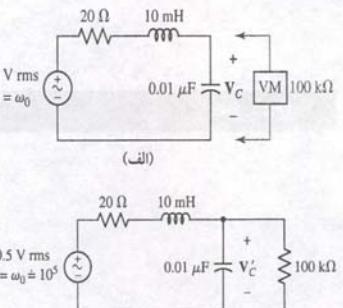
لازم داریم که برابر است با:

$$Q = \frac{R_p}{|X_p|} = \omega R_p C_p = 10^5 (10^5) (10^{-8}) = 100$$

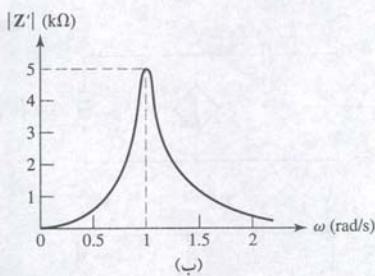
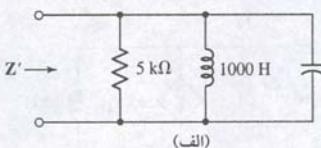
چون این مقدار بزرگتر از ۵ است، فرضیات فوق صادق بوده و شبکه RC سری معادل از یک

خازن $100 \text{ }\mu\text{F}$ است و مقدار $C_s = 0.01 \text{ }\mu\text{F}$ و یک مقاومت

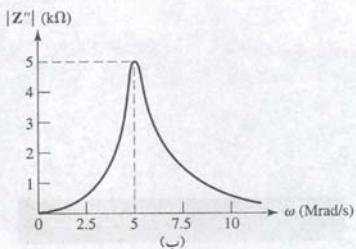
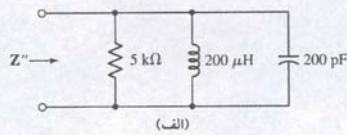
$$R_s \approx \frac{R_p}{Q^2} = 10 \Omega$$



شکل ۱۶-۱۳ (الف) یک مدار تشدید مفروض که در آن ولتاژ خازن باید با یک ولتمتر الکترونیک غیرایده‌آل اندازه‌گیری شود. (ب) تأثیر ولتمتر در مدار اصلاح شده است و مقدار $C_s = 0.01 \mu\text{F}$ خواهد.



شکل ۱۶-۱۸ (الف) شبکه ۱۶-۱۷ (الف) پس از تغییر مقایس در اندازه با ضربی $K_m = 2000$. (ب) منحنی پاسخ مربوطه.



شکل ۱۶-۱۹ (الف) شبکه شکل ۱۶-۱۸ (الف) پس از تغییر مقایس در فرکانس با ضربی $K_f = 5 \times 10^6$. (ب) منحنی پاسخ مربوطه.

تغییر مقایس اندازه فرآیندی است که طی آن امپدانس شبکه دو باریه در K_m ضرب می‌شود در حالی که فرکانس ثابت می‌ماند. ضربی K_m حقیقی و مثبت است و می‌تواند بزرگتر با کوچکتر از یک باشد. به طرقی مشابه منظور از تغییر مقایس مدار با ضربی ۲ این است که در هر فرکانسی امپدانس مدار جدید ۲ برابر امپدانس مدار قبل است. اکنون باید بینیم که مقدار هر عنصر غیرفعال چگونه باید تغییر کند. برای افزایش امپدانس وروودی یک شبکه با ضربی R ، کافی است که امپدانس هر عنصر را با همان ضربی افزایش دهیم. پس هر مقاومت R باید با $K_m R$ جایگزین شود. هر اندوکتانس هم باید در هر فرکانسی، امپدانسی K_m برابر باشد. برای افزایش یک امپدانس یک لایه اندازه L باید L برابر $K_m L$ باشد، القاگنایی C باید C/K_m نمود. همین ترتیب هر ظرفیت C با C/K_m جایگزین می‌شود. به طور خلاصه این تغییرات شبکه‌ای را تولید می‌کند که تغییر مقایس اندازه اش در K_m ضرب شده است:

$$\left. \begin{array}{l} R \rightarrow K_m R \\ L \rightarrow K_m L \\ C \rightarrow \frac{C}{K_m} \end{array} \right\} \text{تغییر مقایس اندازه}$$

نقی که هر عنصر در شکل ۱۶-۱۷ (الف) با ضربی 2000 تغییر مقایس اندازه پیدا کند، شبکه ۱۶-۱۷ (الف) حاصل می‌شود. منحنی پاسخ شکل ۱۶-۱۸ (ب) نشان می‌دهد که هیچ تغییری در منحنی پاسخ قابل صورت نگرفته به جز این که محور عمودی تغییر مقایس داده است. اکنون باید این شبکه جدید را به لحاظ فرکانس تغییر مقایس دهیم. ما تغییر فرکانس را به سوت فرآیندی تعریف می‌کنیم که در آن فرکانس در هر امپدانسی با ضربی K تغییر کند. و باره از جمله کوتاهتر استفاده می‌کنیم و می‌گوییم اگر شبکه به لحاظ فرکانس با ضربی 2 تغییر مقایس دهد، همان امپدانس در فرکانس دو برابر به دست می‌آید. تغییر مقایس فرکانس کلی با تغییر در مقایس فرکانس هر عنصر غیرفعال به وجود می‌آید. واضح است که مقاومت حت تأثیر این تغییر واقع نمی‌شود. امپدانس هر القاگر L است و اگر قرار باشد، در فرکانس K برابری همان امپدانس به دست آید آن‌گاه القاگنایی L باید با القاگنایی C/K_m جایگزین شود. به طور مشابه ظرفیت C با C/K_m جایگزین می‌گردد. بنابراین اگر قرار باشد، شبکه‌ای با ضربی K تغییر مقایس دهد آن‌گاه تغییرات لازم در عنصر غیرفعال چنین است.

$$\left. \begin{array}{l} R \rightarrow R \\ L \rightarrow \frac{L}{K_f} \\ C \rightarrow \frac{C}{K_f} \end{array} \right\} \text{تغییر مقایس فرکانس}$$

گر هر عنصر از شبکه تغییر مقایس یافته در اندازه شکل ۱۶-۱۸ (الف)، به لحاظ فرکانس با ضربی 5×10^6 تغییر مقایس دهد، شکل ۱۶-۱۹ (الف) به دست می‌آید. منحنی پاسخ مربوطه را در شکل ۱۶-۱۹ (ب) ملاحظه می‌گردد.

عناصر مدار در این آخرین شبکه مقادیری دارند که به راحتی در مدارهای فیزیکی قابل استیابی‌اند. شبکه در اوقایق ساخت و آزمایش است. پس اگر مدار شکل ۱۶-۱۷ (الف) اقعماً عادل الکتریکی یک سیستم مکانیکی باشد، می‌توان با تغییر مقایس مداری به دست آورد در آزمایشگاه آن را ساخته و آزمایش کرد. به این ترتیب آزمایش‌هایی که روی یک سیستم مکانیکی گران و غیرعادی است، روی یک سیستم الکتریکی تغییر مقایس یافته ساخته شده و، منظور تکمیل تحلیل تابعی به مقایس اولیه بازگردانده می‌شوند.

$$f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{21.4 \times 10^{-3} \times 1.41 \times 10^{-6}}} = 916 \text{ Hz}$$

$$Q_0 = \frac{2\pi \times 916 \times 21.4 \times 10^{-3}}{143.9} = 0.856$$

$$B = 916/0.856 = 1070 \text{ Hz}$$

چون این مقادیر به مقادیر اندازه گیری شده نزدیک‌تر بود، پت خوشحال‌تر شد. با این وجود دکتر ایبل با خشنونت گفت آیا امپدانس خروجی منع تغذیه را در نظر گرفته‌ای؟ پت گفت خیر و بالافصله به سمت میز آزمایشگاه بازگشت. معلوم شد که امپدانس خروجی موردنظر Ω ۵۰ است. پت این مقادار را به نمودار مدار مطابق شکل ۱۶-۱۶ اضافه نمود. با به کارگیری مقدار مقاومت جدید 193.9Ω اصلاح شده Q_0 و B چنین به دست آمدند.

$$Q_0 = 0.635 \quad B = 1442 \text{ Hz}$$

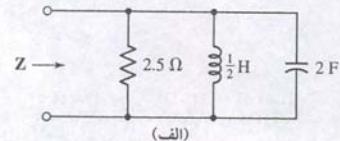
چون اکنون همه مقادیر تجربی و نتیجی در محدوده ۱۰٪ است، شوک ادامه رشته برق موجب شد تا تکالیف خود را زودتر از شروع کلاس انجام دهد. دکتر ایبل با رضایت سری تکان داد و زیرلپ زمزمه کرد:

هنگامی که وسائل واقعی را به کار می‌بری
به مدلی که انتخاب می‌کنی نگاه کن
Zها و Qها را به خاطر بیاور
قبل از هر محاسبه‌ای فکر کن

تمرین

۱۶-۸ ترکیب سری مقاومت Ω و خازن 10 nF را که موازی با ترکیب سری مقاومت 20Ω و القای 10 mH است، در نظر بگیرید. (الف) فرکانس تشیدی شبکه موازی را بدایاند. (ب) Q را برای شاخه RC به دست آورید. (ج) Q شاخه RL را معین کنید. (د) معادل سه عنصری شبکه اصلی را بیابید.

$$\text{جواب: } 10 \text{ nF} \parallel 10 \text{ mH} \parallel 33.3 \text{ k}\Omega, 50, 100, 10^5 \text{ rad/s}$$



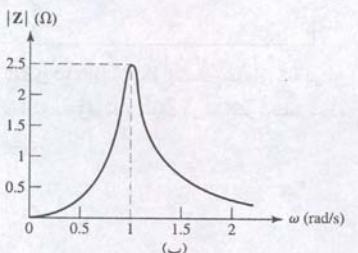
۱۶-۵ تغییر مقایس

بعضی از مثال‌ها و مسائلی که تاکنون حل کردیم، مدارهای حاوی عناصر غیرفعال در حد چند اهم چند هنری و چند فاراد و فرکانس‌های هم حدود چند را زدایان بر ثانیه بودند. این مقادیر عددی خاص نه بدلیل رایج بودن‌شان در عمل، بلکه به دلیل ساده‌شدن عملیات ریاضی و پرهیز توان‌های ۱۰ در طول محاسبات انتخاب شدند. رواهی تغییر مقایسی که در این بخش مورد بحث قرار می‌گیرند، امکان تحلیل شبکه‌های مشکل از عناصر عملی را فراهم می‌سازند و محاسبات عددی ساده‌تری را جازه می‌دهند. در اینجا تغییر مقایس اندازه و نیز فرکانس را بررسی می‌کنیم.

باید شکل ۱۶-۱۷ (الف) را به عنوان مثالی از مدار تشیدی موازی برگزینیم. مقادیر غیر علی عنصر منجر به پاسخ غیرعادی شکل ۱۶-۱۷ (ب) شده است. حداقل امپدانس 5Ω ، فرکانس تشیدی موازی که به سیستم الکتریکی مکانیکی شبیه‌اند تا به سیستم الکتریکی. مقادیر موجود بیشتر مشخصات یک سیستم مکانیکی تغییر مقایس دارد. برای مساحت مدار غیر علی اند.

فرض کنید هدف تغییر مقایس این شبکه به نحوی باشد که یک حداقل امپدانس 2Ω را در فرکانس $5 \times 10^6 \text{ rad/s}$ یا 796 kHz داشته باشیم. به بیان دیگر بخواهیم مقادیر موجود در فرکانس ۲۰۰۰ و محور افقی در $10^6 \times 5$ ضرب شوند. پس دو کار در پیش داریم:

$$(1) \text{ تغییر مقایس در اندازه به مقدار ۲۰۰۰ و (2) تغییر مقایس فرکانس با ضربی } 5 \times 10^6$$



شکل ۱۶-۱۷ (الف) یک مدار تشیدی موازی که به عنوان مثالی در تغییر اندازه و فرکانس (ب) اندازه امپدانس وروودی به کار رفته است. (ب) از همان داده شده است.