کلیات آزمون فرض

فرضیه: عبارت از یک ادعا در مورد یک پدیده در جامعه است که درست یا نادرست باشد

آزمون فرض: فرآیندی است که درستی یا نادرستی ادعا بررسی شده و در مورد آن تصمیم گیری لازم اتخاذ شود

در آزمون فرض دو فرضیه در مقابل هم قرار می‌گیرند

H_0 : فرض صفر

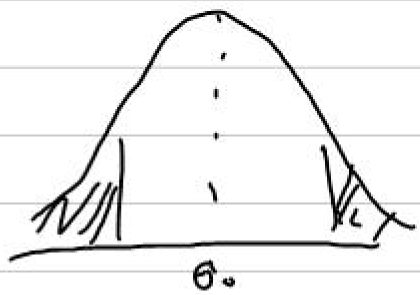
H_1 یا H_a فرض مقابل

در آزمون فرض همواره بنا را بر درستی H_0 می‌گذاریم پس از جمع آوری اطلاعات نمونه را بررسی کنیم اگر در نمونه شواهد کافی برای رد H_0 بیابیم آن را رد کنیم.

انواع آزمون فرض

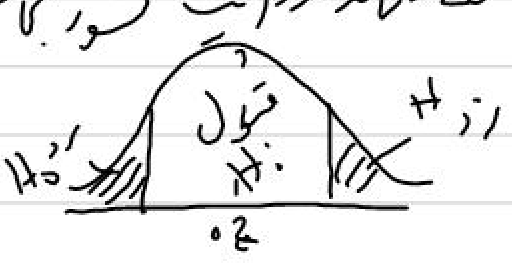
1) آزمون دو دامنه

$$\begin{cases} H_0 : \theta = \theta_0 \\ H_1 : \theta \neq \theta_0 \end{cases}$$



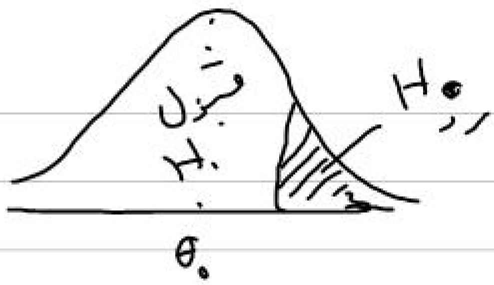
مثال: محققی مدعی است که 20 درصد مردم یک کشور بی سوادند

$$\begin{cases} H_0 : P = 0.20 \\ H_1 : P \neq 0.2 \end{cases}$$



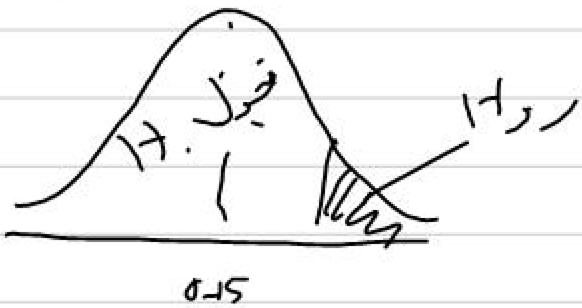
② آزمون یک دامنه راست

$$\begin{cases} H_0: \theta \leq \theta_0 \\ H_1: \theta > \theta_0 \end{cases}$$



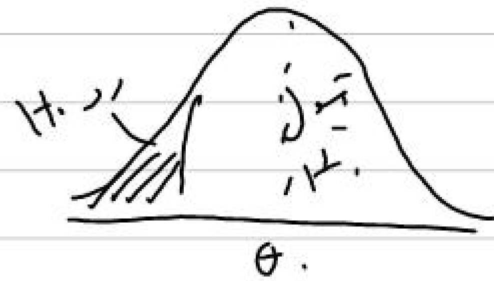
مثال: مدیر یک مدرسه معتقد است که حداکثر 15 درصد دانش‌آموزان در هر سال مردود می‌شوند

$$\begin{cases} H_0: p \leq 0.15 \\ H_1: p > 0.15 \end{cases}$$



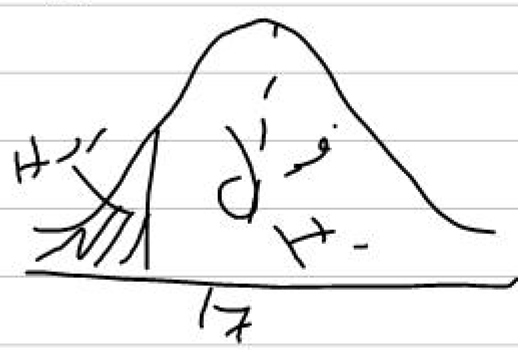
③ آزمون یک دامنه چپ

$$\begin{cases} H_0: \theta \geq \theta_0 \\ H_1: \theta < \theta_0 \end{cases}$$



مثال: معلمی مدعی است که معدل کلاس حداقل 17 می‌باشد

$$\begin{cases} H_0: \mu \geq 17 \\ H_1: \mu < 17 \end{cases}$$



مثال ۱ : رئیس یک بانک ادعا کرده که در متوسط مدت انتظار مشتریان در صف کمتر از 20 دقیقه است.

~~الف~~ $\left\{\begin{array}{l} H_0: \mu < 20 \\ H_1: \mu \geq 20 \end{array}\right.$

~~ب~~ $\left\{\begin{array}{l} H_0: \mu \leq 20 \\ H_1: \mu > 20 \end{array}\right.$

ج $\left\{\begin{array}{l} H_0: \mu \geq 20 \\ H_1: \mu < 20 \end{array}\right.$

مثال ۲ : مدیر یک مدرسه اعتقاد دارد که معدل دانش‌آموزان رشته ریاضی حداقل ۲ نمره بیشتر از معدل دانش‌آموزان رشته تجربی است.

μ_1 معدل رشته ریاضی

μ_2 معدل رشته تجربی

الف $\left\{\begin{array}{l} H_0: \mu_1 - \mu_2 \geq 2 \\ H_1: \mu_1 - \mu_2 < 2 \end{array}\right.$ حداقل ۲ نمره بیشتر

ب $\left\{\begin{array}{l} H_0: \mu_1 - \mu_2 \leq 2 \\ H_1: \mu_1 - \mu_2 > 2 \end{array}\right.$ حداکثر ۲ نمره بیشتر

ج $\left\{\begin{array}{l} H_0: \mu_1 - \mu_2 = 2 \\ H_1: \mu_1 - \mu_2 \neq 2 \end{array}\right.$ دو نمره بیشتر

انواع خطا در آزمون فرض

خطای نوع اول: اگر H_0 درست باشد ولی به اشتباه آن را رد کنیم خطای نوع اول رخ داده است

احتمال این خطا را با α نمایش می‌دهیم

$$\alpha = P(H_0 \text{ رد} \mid H_0 \text{ درست})$$

خطای نوع دوم: اگر H_0 نادرست باشد ولی به اشتباه آن را بپذیریم خطای نوع دوم رخ داده است احتمال این خطا را با β نمایش می‌دهیم

$$\beta = P(H_0 \text{ قبول} \mid H_0 \text{ نادرست})$$

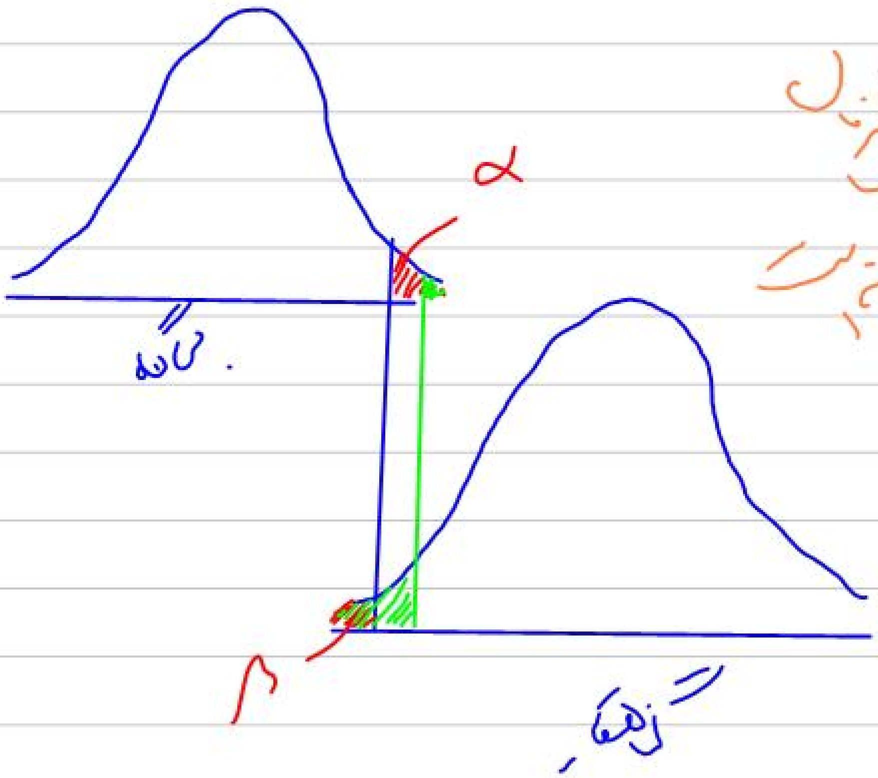
مثال: یک متهم در دادگاه

$$\begin{cases} H_0: & \text{متهم بی گناه است} \\ H_1: & \text{متهم گناهکار است} \end{cases}$$

متهم	بی گناه	گناهکار
محکوم	خطای نوع اول α	$1-\beta$ توان آزمون
تبرئه	$1-\alpha$ اطمینان	β خطای نوع دوم

تغییرات α و β عکس یکدیگر است

یعنی با افزایش یکی دیگری کاهش می یابد



توجه: تنها راه کاهش همزمان α و β افزایش تعداد نمونه است

مثال: معلمی ادعا می‌کند که حداقل 20 درصد دانش‌آموزان کلاسش وارد دانشگاه می‌شوند. یک محقق تصادفی 6 نفر از کلاس این معلم انتخاب کرده اگر حداقل 2 نفر در دانشگاه قبول شده باشند ادعا را می‌پذیرد در غیر این صورت درصد قبولی را 10% می‌داند مطلوبست محاسبه α و β

$$\begin{cases} H_0: p \geq 0.20 \\ H_1: p < 0.20 \end{cases}$$ ادعای معلم

یک دامنه چپ

X تعداد قبولی دانشگاه

قبول H_0: $X \geq 2$ $\quad X \geq 1$

رد H_0: $X < 2$ $\quad X < 1$

$\alpha = P($ رد H_0 | درست $H_0)$

$$= P(\underset{x<1}{X < 2} \mid p = 0.2) = P(X \leq 1) = \sum_{x=0}^{1} \binom{6}{x}(0.2)^x(0.8)^{6-x}$$

$X=0$ $\quad \binom{6}{0}(0.2)^0(0.8)^6 = 0.2621$

$$= \binom{6}{0}(0.2)^0(0.8)^6 + \binom{6}{1}(0.2)^1(0.8)^5 = 0.65536$$

$\beta = P($ قبول H_0 | نادرست $H_0) = P(\underset{X \geq 1}{X \geq 2} \mid p = 0.1)$

$$= \sum_{x=2}^{6} \binom{6}{x}(0.1)^x(0.9)^{6-x} = \binom{6}{2}(0.1)^2(0.9)^4 + \binom{6}{3}(0.1)^3(0.9)^3$$

$x=1$ $\quad \binom{6}{1}(0.1)(0.9)^5$

$$+ \binom{6}{4}(0.1)^4(0.9)^2 + \binom{6}{5}(0.1)^5(0.9)^1 + \binom{6}{6}(0.1)^6(0.9)^0$$

$$= 0.11434 \rightarrow 0.46$$

مثال: معاونت پرورشی یک اداره آموزش و پرورش مدعی است که بهره هوشی دانش آموزان
از توزیع نرمال با میانگین حداقل 100 و انحراف معیار 4 پیروی می‌کند.
برای بررسی این ادعا یک نمونه تصادفی 25 تایی از دانش آموزان انتخاب کردیم اگر
میانگین بهره هوشی آنها حداقل 98 باشد ادعا را می‌پذیریم در غیر اینصورت با میانگین
95 رد می‌کنیم مطلوبست α و β.

$$\begin{cases} H_0: \mu \geq 100 \\ H_1: \mu < 100 \end{cases}$$

$\bar{x} \geq 98$ قبول H_0

$\bar{x} < 98$ رد H_0

$\alpha = P($ رد H_0 | درست $H_0)$

$$= P(\bar{x} < 98 \mid \mu = 100) = P\left(\frac{\bar{x}-100}{4/\sqrt{25}} < \frac{98-100}{4/\sqrt{25}}\right) = P(Z < -2.5)$$

$$= 0.00621$$

$\beta = P($ قبول H_0 | نادرست $H_0) = P(\bar{x} \geq 98 \mid \mu = 95)$

$$= P\left(\frac{\bar{x}-95}{4/\sqrt{25}} \geq \frac{98-95}{4/\sqrt{25}}\right) \simeq P(Z \geq 3.75) \simeq 0$$

0.00023

مثال ۳: یک مأمور راهنمایی و رانندگی مدعی است که در هنگام قرمز شدن چراغ سبز چهارراه بطور متوسط 20 خودرو پشت چراغ جمع می‌شود. برای بررسی این ادعا هنگام قرمز شدن چراغ تعداد خودروها را یادداشت می‌کنیم. اگر بین 15 تا 25 خودرو توقف کنند ادعا را می‌پذیریم در غیر اینصورت رد می‌شود. اگر 25 خودرو در هنگام قرمز شدن چراغ تجمع کنند مطلوبست محاسبه α و β:

$$\begin{cases} H_0: \mu = 20 \\ H_1: \mu \neq 20 \end{cases}$$

قبول H_0: $15 \leq X \leq 25$

رد H_0: $X < 15$ یا $X > 25$

$\alpha = P(H_0$ رد $|$ درست $H_0) = P(X < 15$ یا $X > 25 \mid \mu = 20)$

$$= 1 - P(15 \leq X \leq 25) = \sum_{x=15}^{25} \frac{e^{-20} 20^x}{x!}$$

$\beta = P(H_0$ قبول $|$ درست $H_1) = P(15 \leq X \leq 25 \mid \mu = 25)$

$$= \sum_{x=15}^{25} \frac{e^{-25} 25^x}{x!}$$

آزمون میانگین یک جامعه نرمال

معمولاً ادعاها به یکی از سه صورت زیر مطرح می‌شوند

الف $\begin{cases} H_0: \mu = \mu_0 \\ H_1: \mu \neq \mu_0 \end{cases}$ دو دامنه

ب $\begin{cases} H_0: \mu \leq \mu_0 \\ H_1: \mu > \mu_0 \end{cases}$ یک دامنه راست

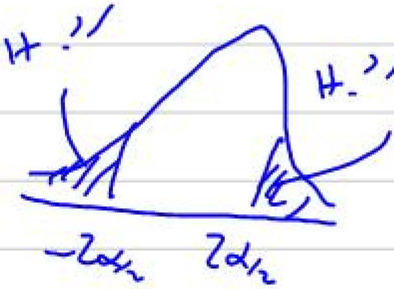
ج $\begin{cases} H_0: \mu \geq \mu_0 \\ H_1: \mu < \mu_0 \end{cases}$ یک دامنه چپ

برای بررسی ادعا نمونه‌ای تصادفی n تایی از جامعه انتخاب و $\bar{x}$ را بدست می‌آوریم

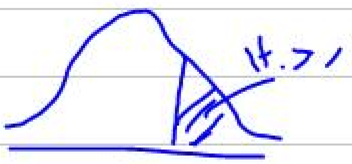
پس مقدار

$$Z^* = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}}$$

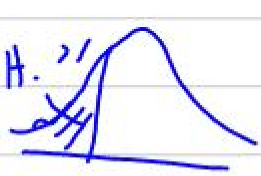
را می‌سنجیم، H_0 را در سطح خطای α رد می‌کنیم اگر



الف $|Z^*| > Z_{\alpha/2}$



ب $Z^* > Z_\alpha$



ج $Z^* < -Z_\alpha$

مثال : ادعا شده است که معدل درس ریاضی دانش آموزان یک مدرسه حداقل ۱۵ است؟

برای بررسی این ادعا نمره تعدادی از دانش آموزان این مدرسه انتخاب و نمره ریاضی آنها به صورت زیر ثبت

گردید.

12 17 19 10 6 14 17 15 11

اگر واریانس نمرات ریاضی در مدرسه ۱۶ باشد آیا در سطح خطای ۵٪ با ادعای مطرح شده

موافقید.

$$\begin{cases} H_0 : \mu \geq 15 \\ H_1 : \mu < 15 \end{cases}$$

دامنه چپ

$\sigma^2 = 16 \quad \sigma = 4$

$$\bar{x} = \frac{121}{9} = 13.44$$

$$z^* = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} = \frac{13.44 - 15}{4/\sqrt{9}} = -1.17$$

$\alpha = 0.05 \quad z_{0.05} = 1.64$

H_0 را رد می کنیم اگر

$$z^* < -1.64$$

چون $z^* = -1.17 \not< -1.64$ پس H_0 رد نمی شود

آزمون فرض میانگین جامعه نرمال وقتی σ^2 مجهول است

در این صورت

الف) $\begin{cases} H_0: \mu = \mu_0 \\ H_1: \mu \neq \mu_0 \end{cases}$ ب) $\begin{cases} H_0: \mu \leq \mu_0 \\ H_1: \mu > \mu_0 \end{cases}$ ج) $\begin{cases} H_0: \mu \geq \mu_0 \\ H_1: \mu < \mu_0 \end{cases}$

با برداشتن یک نمونه تصادفی n تایی $\bar{x}$ و s^2 را می‌یابیم سپس

مقدار $t^* = \frac{\bar{x}-\mu_0}{s/\sqrt{n}}$ را حساب می‌کنیم:

H_0 را در سطح خطای α٪ رد می‌کنیم اگر

الف) $|t^*| > t_{\frac{\alpha}{2}, n-1}$

ب) $t^* > t_{\alpha, n-1}$

ج) $t^* < -t_{\alpha, n-1}$

مثال: ادعا شده است دربارهٔ سابقه خدمت معلمان یک شهر 12 سال است

برای بررسی ادعا یک نمونه تصادفی ۱۰ نفری از معلمان را انتخاب و سابقه خدمت آنها را

ثبت کرده‌ایم

22 7 4 1 11 15 6 2 1 3

آیا در سطح خطای ۵٪ با این ادعا موافقید؟

$$\begin{cases} H_0: \mu = 12 \\ H_1: \mu \neq 12 \end{cases}$$

دودامنه

$\sum x_i = 72$

$\sum x_i^2 = 946$

$$s^2 = \frac{n\sum x_i^2 - (\sum x_i)^2}{n(n-1)} = \frac{10(946) - (72)^2}{10(9)} = 47.51 \qquad s = 6.89$$

$$\bar{x} = \frac{72}{10} = 7.2$$

$$t^* = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\frac{s}{\sqrt{n}}} = \frac{7.2 - 12}{\frac{6.89}{\sqrt{10}}} = -2.2$$

$\alpha = 0.05 \quad \alpha/2 = 0.025 \quad t_{\alpha/2, n-1} = t_{0.025, 9} = 2.262$

H_0 را رد می‌کنیم اگر

$$|t^*| > t_{\alpha/2, n-1}$$

چون $|-2.2| \not> 2.262$ پس H_0 رد نمی‌شود