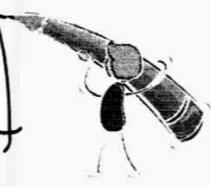


## نسبت



□ کمیت چیزی است که بتوان آن را اندازه گرفت و با یک عدد بیان کرد. مثل: طول، جرم، زمان، مساحت، ...



مثال ۱. کدام یک از گزینه‌های زیر کمیت نیست؟

(۱) سرعت (۲) حجم (۳) ارتفاع (۴) دوستی



پنخ (۴)، فقط دوستی را نمی‌توان اندازه گرفت و با عدد بیان کرد.

□ رابطه‌ی بین دو کمیت هم‌جنس و هم‌واحد که نشان می‌دهد یکی چند برابر دیگری است، «نسبت» نامیده می‌شود.



مثال ۲. نسبت طول یک پاکن ۵۰ میلی‌متری به طول یک خط‌کش ۲۰ سانتی‌متری را تعیین کنید.



پنخ : ابتدا واحدها را یکسان می‌کنیم:

میلی‌متر  $200 = 20 \times 10$  سانتی‌متر

$$\frac{\text{طول پاکن}}{\text{طول خط‌کش}} = \frac{50}{200} = \frac{1}{4}$$

## تناسب



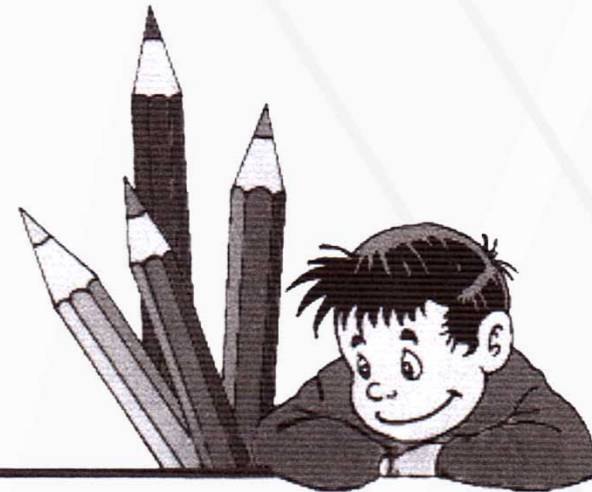
□ هرگاه دو کمیت طوری تغییر کند که نسبت آن‌ها ثابت بماند، آن دو کمیت را «متناسب» می‌گوییم.

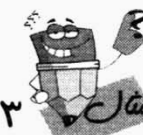
□ در دو کمیت متناسب، اگر با افزایش یکی، دیگری نیز به همان نسبت افزایش یابد و یا با کاهش یکی، دیگری به همان نسبت کاهش یابد، رابطه‌ی بین آن‌ها را «تناسب مستقیم» می‌گوییم.

□ در دو کمیت متناسب، اگر با افزایش یکی، دیگری به همان نسبت کاهش یابد، و یا با کاهش یکی، دیگری به همان نسبت افزایش یابد، رابطه‌ی بین آن‌ها را «تناسب معکوس» می‌گوییم.

# نکات مهم فصل ۵

## نسبت، تناسب، درصد





۳. از کمیت‌های مطرح‌شده در گزینه‌ها، کدام دو کمیت، دارای «تناسب معکوس» می‌باشند؟

- (۱) مسافت طی شده توسط اتومبیل و مقدار مصرف بنزین
- (۲) تعداد صفحه‌های مطالعه شده‌ی کتاب و زمان
- (۳) تعداد کارگران در یک ساختمان و درصد انجام کار
- (۴) تعداد کارگران در یک ساختمان و زمان تمام شدن کار

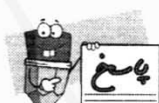


پاسخ: گزینه (۴)، هرچه تعداد کارگران زیاد شود، زمان تمام شدن کار، کم می‌شود. مثلاً اگر تعداد کارگران را ۲ برابر کنیم، زمان پایان یافتن کار، نصف می‌شود.

هرگاه با افزایش یا کاهش یک کمیت، دیگری ثابت بماند، این دو کمیت «متناسب» نیستند.



۴. اگر ۲ جفت جوراب در ۲۰ دقیقه، روی بند خشک شوند، ۶ جفت جوراب روی بند، در چند دقیقه خشک خواهند شد؟



پاسخ: همان‌طور که می‌بینید تعداد جفت‌های جوراب ۳ برابر شده ولی زمان خشک شدن جوراب‌ها روی بند، تغییری نمی‌کند.

در تناسب‌های مستقیم می‌توان نسبت‌ها را در یک عدد معین ضرب کرد و یا بر یک عدد مشخص هر دو نسبت را تقسیم کرد. معمولاً از این روش برای تبدیل نسبت‌های کسری و اعشاری به نسبت‌های عدد صحیح، استفاده می‌کنیم. عددی را که در نسبت‌های کسری ضرب می‌کنیم بهتر است مخرج مشترک آن‌ها باشد.



۵. نسبت پول حمید به سعید  $\frac{1}{2}$  به  $\frac{3}{5}$  است. اگر پول سعید ۳۶۰۰۰ تومان باشد، حمید

چه قدر پول دارد؟



پاسخ: ابتدا دو نسبت را که اعداد کسری هستند، در مخرج مشترک آنها که ۱۰ است، ضرب می‌کنیم. سپس در جدول قرار می‌دهیم.

$$\frac{1}{2} \times 10 = 5 \quad \text{نسبت پول حمید}$$

$$\frac{3}{5} \times 10 = 6 \quad \text{نسبت پول سعید}$$

۵	?	→	۳۰۰۰۰	تومان
۶	۳۶۰۰۰			تومان

□ اگر سه نسبت که دو به دو با هم متناسبند، داشته باشیم به طوری که یکی از کمیت‌ها در هر دو نسبت مشترک است، دو حالت به وجود می‌آید:

الف) کمیت مشترک بین دو نسبت با عدد یکسانی بیان شده‌است.

ب) کمیت مشترک بین دو نسبت با عددهای متفاوتی بیان شده‌است که در این حالت باید دو نسبت را طوری تغییر داد که کمیت مشترک در دو نسبت با یک عدد بیان شود.



۶. نسبت قد حمید به مجید ۳ به ۲، و نسبت قد مجید به سعید ۶ به ۵ است. کدام یک بلندقدترین است؟



پاسخ: همان‌طور که می‌بینید نسبت قد مجید، ۲ و در جای دیگر ۶ بیان شده‌است. برای

$$\frac{\text{حمید}}{\text{مجید}} = \frac{3 \times 3}{2 \times 3} = \frac{9}{6}$$

$$\frac{\text{مجید}}{\text{سعید}} = \frac{6}{5}$$

حالا نسبت قد حمید به سعید به مجید به سعید، ۹ به ۶ به ۵ است. پس بلندقدترین حمید است.

□ تسهیم به نسبت، یعنی سهم هر کسی از کل مقدار را به نسبتی که دارد، تعیین کنیم.



۷. نسبت وزن سارا، تارا و گل‌آرا به ترتیب  $\frac{1}{2}$ ، ۲ و ۱ است. اگر مجموع وزن آن‌ها ۱۴۰

کیلوگرم باشد، وزن سارا را به دست آورید.



پاسخ: ابتدا همه‌ی نسبت‌ها را در ۲ ضرب می‌کنیم تا از حالت کسری خارج شوند.

۱	سارا	۲۰
۴	تارا	۸۰
۲	گل‌آرا	۴۰
۷	مجموع نسبت‌ها	۱۴۰
		×۲۰

سارا ۱ و تارا ۴ و گل‌آرا ۲

□ اختلاف و مجموع کمیت‌ها هم به همان نسبت تغییر می‌کند و با خود کمیت‌ها متناسب است.



۳. از کمیت‌های مطرح‌شده در گزینه‌ها، کدام دو کمیت، دارای «تناسب معکوس» می‌باشند؟

- (۱) مسافت طی شده توسط اتومبیل و مقدار مصرف بنزین
- (۲) تعداد صفحه‌های مطالعه شده‌ی کتاب و زمان
- (۳) تعداد کارگران در یک ساختمان و درصد انجام کار
- (۴) تعداد کارگران در یک ساختمان و زمان تمام شدن کار

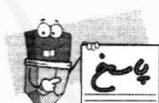


پاسخ: گزینه (۴)، هرچه تعداد کارگران زیاد شود، زمان تمام شدن کار، کم می‌شود. مثلاً اگر تعداد کارگران را ۲ برابر کنیم، زمان پایان یافتن کار، نصف می‌شود.

هرگاه با افزایش یا کاهش یک کمیت، دیگری ثابت بماند، این دو کمیت «متناسب» نیستند.



۴. اگر ۲ جفت جوراب در ۲۰ دقیقه، روی بند خشک شوند، ۶ جفت جوراب روی بند، در چند دقیقه خشک خواهند شد؟



پاسخ: همان‌طور که می‌بینید تعداد جفت‌های جوراب ۳ برابر شده ولی زمان خشک شدن جوراب‌ها روی بند، تغییری نمی‌کند.

در تناسب‌های مستقیم می‌توان نسبت‌ها را در یک عدد معین ضرب کرد و یا بر یک عدد مشخص هر دو نسبت را تقسیم کرد. معمولاً از این روش برای تبدیل نسبت‌های کسری و اعشاری به نسبت‌های عدد صحیح، استفاده می‌کنیم. عددی را که در نسبت‌های کسری ضرب می‌کنیم بهتر است مخرج مشترک آن‌ها باشد.



۵. نسبت پول حمید به سعید  $\frac{1}{2}$  به  $\frac{3}{5}$  است. اگر پول سعید ۳۶۰۰۰ تومان باشد، حمید

چه قدر پول دارد؟

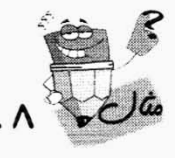


پاسخ: ابتدا دو نسبت را که اعداد کسری هستند، در مخرج مشترک آنها که ۱۰ است، ضرب می‌کنیم. سپس در جدول قرار می‌دهیم.

$$\frac{1}{2} \times 10 = 5 \quad \text{نسبت پول حمید}$$

$$\frac{3}{5} \times 10 = 6 \quad \text{نسبت پول سعید}$$

۵	?	→	۳۰۰۰۰	تومان
۶	۳۶۰۰۰			تومان



مثال ۸. نسبت تعداد کتاب‌های احسان به ایمان، ۳ به ۵ است. اگر احسان ۱۰ جلد کتاب کم‌تر از ایمان داشته باشد، احسان چند جلد کتاب دارد؟



پنج : 
$$\begin{array}{r|l} 3 & 15 \\ \hline 5 & 10 \end{array}$$
 نسبت کتاب‌های احسان ۳ | ۱۵  
 اختلاف نسبت‌ها ۲ | ۱۰  
 $5 - 3 = 2$  اختلاف نسبت‌ها

□ اگر شخصی کار معینی را در مدت زمان A، شخص دوم همان کار را به تنهایی در مدت زمان B، شخص سوم همان کار را به تنهایی در مدت زمان C، ... انجام دهند، وقتی همه با هم آن کار را انجام دهند، زمان اتمام کل کار از رابطه‌ی زیر به دست می‌آید:

$$\frac{1}{\text{زمان اتمام کل کار}} = \frac{1}{A} + \frac{1}{B} + \frac{1}{C} + \dots$$



مثال ۹. امین، سعید و حسام، اتاقی را به تنهایی به ترتیب در ۲ و ۵ و ۱۰ ساعت رنگ می‌کنند. اگر هر سه با هم کار کنند، کل کار در چند ساعت تمام می‌شود؟



پنج : ساعت  $\frac{5}{4} = \frac{10}{8}$  = کل زمان اتمام کار  $\Rightarrow \frac{1}{10} + \frac{1}{5} + \frac{1}{2} = \frac{8}{10}$   
 یک ساعت و ربع

□ استخری به تنهایی توسط شیر آب اول در A ساعت، توسط شیر دوم به تنهایی در B ساعت، ... پُر می‌شود. همچنین توسط چاه تخلیه‌ی اول به تنهایی در X ساعت، توسط چاه تخلیه‌ی دوم در Y ساعت، ... خالی می‌شود. اگر همه با هم باز باشند، زمان پُر شدن آن از رابطه‌ی زیر به دست می‌آید:

$$\frac{1}{\text{کل زمان پر شدن استخر}} = \left( \frac{1}{A} + \frac{1}{B} + \dots \right) - \left( \frac{1}{X} + \frac{1}{Y} + \dots \right)$$



مثال ۱۰. شیر آب اول به تنهایی یک استخر را در ۵ ساعت و شیر آب دوم به تنهایی در ۱۲ ساعت پُر می‌کنند. چاه تخلیه اول به تنهایی استخر را در ۲۰ ساعت و چاه تخلیه دوم به تنهایی در ۳۰ ساعت استخر را تخلیه می‌کنند. اگر همه باز باشند، استخر در چند ساعت پُر می‌شود؟



پنج : 
$$\frac{1}{\text{کل زمان پر شدن}} = \left( \frac{1}{5} + \frac{1}{12} \right) - \left( \frac{1}{20} + \frac{1}{30} \right) = \frac{17}{60} - \frac{5}{60} = \frac{12}{60} \Rightarrow$$
  
 ساعت  $\frac{60}{12} = 5$  = کل زمان



□ نسبتی که مخرج آن ۱۰۰ باشد را «درصد» می‌گوییم. هر عددی با علامت درصد را می‌توانیم به صورت کسری با مخرج ۱۰۰ هم بنویسیم. مثلاً:

$$30\% = \frac{30}{100}$$



مثال ۱۱. بیست و پنج درصد از نصف پولی ۵۰ تومان است. ۱۸ درصد آن چه قدر است؟

پنج : 
$$\begin{array}{r|l} 25 & 50 \\ \hline 100 & 200 \end{array}$$
 نصف پول ۲۰۰ = کل پول = ۴۰۰  $\rightarrow$   $\begin{array}{r|l} 18 & 72 \\ \hline 100 & 400 \end{array}$  تومان

□ مسائل مربوط به تخفیف (کاهش): در این نوع مسائل معمولاً با موارد زیر سروکار داریم:

۱. قیمت اولیه‌ی کالا
۲. قیمت کالا پس از تخفیف
۳. مقدار تخفیف
۴. درصد تخفیف
۵. تخفیفات متوالی

- حالت اول: قیمت اولیه‌ی کالا و درصد تخفیف را می‌دانیم و قیمت پس از تخفیف را خواهیم.
- حالت دوم: قیمت پس از تخفیف و درصد تخفیف را می‌دانیم و قیمت اولیه‌ی کالا را خواهیم.
- حالت سوم: قیمت اولیه‌ی کالا و قیمت پس از تخفیف را می‌دانیم و درصد تخفیف را خواهیم.
- حالت چهارم: قیمت اولیه‌ی کالا و دو یا چند تخفیف متوالی را می‌دانیم و قیمت پس از تخفیف را خواهیم.

\* توجه کنید به جای کلمه‌ی «تخفیف» از کلمه‌ی «کاهش» و «درصد کاهش» نیز می‌توانیم استفاده کنیم.

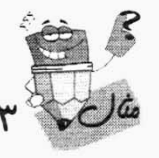


مثال ۱۲. تولیدات کارخانه‌ای پس از ۱۰ درصد کاهش به ۱۸۰۰ تن در سال رسیده است. میزان تولیدات این کارخانه قبل از کاهش، چه قدر بوده است؟



پنج : 
$$100\% - 10\% = 90\%$$

$$\begin{array}{r|l} 90 & 1800 \\ \hline 100 & \text{○} \end{array} \rightarrow \text{○} = 2000 \text{ تن}$$



**مثال ۱۳.** فروشنده‌ی کالایی ۲۰ درصد تخفیف به خریداران می‌دهد. ولی به دلیل عدم استقبال مشتریان، ۱۰ درصد دیگر نسبت به قیمت جدید، تخفیف می‌دهد. اگر قیمت اولیه‌ی کالا ۲۰۰,۰۰۰ تومان بوده‌باشد، یک مشتری برای خرید آن چه قدر باید پردازد؟



**پاسخ:** یک روش این است که درصد قابل پرداخت در هر بار تخفیف را حساب کنیم و سپس آنها را در هم ضرب کنیم. در این صورت درصد پرداخت نهایی به دست خواهد آمد که اگر از ۱۰۰٪ کم کنیم، درصد تخفیف نهایی نیز به دست می‌آید.

$$100\% - 20\% = 80\% \rightarrow \frac{80}{100} \times \frac{90}{100} = \frac{72}{100}$$

$$100\% - 10\% = 90\%$$

۷۲	○	→	○ = ۱۴۴۰۰۰	تومان
۱۰۰	۲۰۰۰۰۰			

- در تخفیفات متوالی، ترتیب تخفیفات اهمیتی ندارد. مثلاً در مثال قبلی اگر ابتدا ۱۰ درصد و پس از آن ۲۰ درصد تخفیف متوالی در نظر می‌گرفتیم، باز هم جواب همین می‌شد.
- مسائل مربوط به سود و یا افزایش هم مانند مسائل مربوط به تخفیف است.



**مثال ۱۴.** قیمت کالایی سال پیش ۱۸۰۰۰ تومان و امسال ۲۴۰۰۰ تومان است. چند درصد افزایش داشته است؟

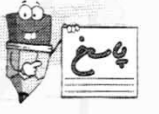


مقدار افزایش  $24000 - 18000 = 6000$  : درصد افزایش یافته.

۶۰۰۰	○	→	○ = ۳۳/۳٪
۱۸۰۰۰	۱۰۰		



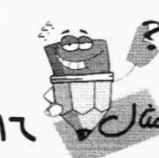
**مثال ۱۵.** جمعیت یک روستا، سالی ۱۰ درصد افزایش دارد. اگر جمعیت فعلی روستا ۲۰۰۰ نفر باشد، پس از دو سال جمعیت این روستا به چند نفر خواهد رسید؟



$$\frac{110}{100} \times \frac{110}{100} = \frac{121}{100} \rightarrow$$

۱۲۱	نفر (۲۴۲۰)
۱۰۰	۲۰۰۰

- در بعضی مسائل کاهش و افزایش را با هم داریم.



**مثال ۱۶.** فروشنده‌ای ۲۰ درصد بهای خرید کالایی را به آن افزود و سپس ۲۰ درصد تخفیف داد. او در این صورت:

- (۱) ۴ درصد سود کرده
- (۲) ۶ درصد سود کرده
- (۳) ۴ درصد ضرر کرده
- (۴) ۶ درصد ضرر کرده



$$\frac{120}{100} \times \frac{80}{100} = \frac{96}{100} \rightarrow 4\% \text{ ضرر کرده.}$$

- درصد خلوص (خالص بودن) یک محلول یعنی نسبت وزن ماده‌ی خالص به کل ماده، در واحد ۱۰۰.
- برای به دست آوردن درصد خلوص محلولی که از مخلوط کردن چند محلول دیگر به دست آمده‌است، ابتدا باید وزن ماده‌ی خالص را در هریک از محلول‌ها به دست آوریم تا مجموع ماده‌های خالص به دست آید. سپس نسبت آن را به وزن کل محلول‌ها به دست آوریم.



**مثال ۱۷.** به ظرفی که دارای ۳۰ لیتر اسید ۲۰ درصد است، ۲۰ لیتر اسید ۳۰ درصد اضافه می‌کنیم. در این صورت ۵۰ لیتر اسید چند درصد خواهیم داشت؟



لیتر اسید خالص  $6 + 6 = 12$  : لیتر خالص (۶) و لیتر خالص (۶)

۲۰	۶	و	۳۰	۶
۱۰۰	۳۰		۱۰۰	۲۰

درصد (۲۴) اسید خالص

۱۲	۲۴
۵۰	۱۰۰