خوانندگان محترم به روش حل مسئله دقت نمایید چرا که در مسائل کنترل بهینه استفاده از چنین رویکردی برای حل و تحلیل مناسب خواهد بود.

مسئله: سیستمی با معادلات حالت $\dot{x} = -x + u$ و تابع هزینه $\frac{1}{2}\int_0^1 (3x^2 + u^2)$ را در نظر بگیرید. کنترل بهینه را بیابید.

حل: هامیلتونین را به صورت زیر تشکیل می دهیم:

$$H = (3x^2 + u^2) + \lambda(-x + u)$$

با استفاده از شرط لازم برای بهینگی زیر

$$\begin{aligned} \dot{\lambda} &= \lambda - 3x \\ u &= -\lambda \end{aligned}$$

و با جایگذاری در معادله دینامیکی سیستم و تشکیل سیستم هامیلتونین داریم:

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x \\ \lambda \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}}_{A}\begin{pmatrix} x \\ \lambda \end{pmatrix}$$

که باید با توجه به شرایط مرزی

$x(0) = x_0$ و $x(1) = 0$ حل گردد. با استفاده از نظریه معادله دیفرانسیل می‌توان پاسخ حالت و حالت کمکی را به صورت زیر نوشت:

$$\begin{pmatrix} x \\ \lambda \end{pmatrix}(t) = e^{At}\begin{pmatrix} x_0 \\ \lambda_0 \end{pmatrix}$$

که تابع نمایی ماتریسی را می‌توان به روش‌های متعددی (روش‌های قطری سازی، لاپلاس، کیلی هامیلتون ...) بدست آورد (به مباحث درس کنترل مدرن مراجعه نمایید). نکته بسیار مهم در این مسئله مقدار مرزی دو نقطه ای آن است که مقدار حالت کمکی λ را در لحظه اولیه $t_0 = 0$ نداریم و فقط مقدار آن در لحظه نهایی معلوم است، بنابراین به دست آوردن این مقدار مجهول بسیار مهم است. فرض کنید که تابع نمایی ماتریسی e^{At} را به صورت زیر بنویسیم

$$e^{At} = \begin{bmatrix} \phi_{11}(t) & \phi_{12}(t) \\ \phi_{21}(t) & \phi_{22}(t) \end{bmatrix}$$

بنابراین داریم:

$$\begin{aligned} 0 = x(1) &= \phi_{11}(1)x_0 + \phi_{12}(1)\lambda_0 \ \Rightarrow \lambda_0 = -\phi_{12}^{-1}(1)\phi_{11}(1)x_0 \\ &\Rightarrow \ u(t) = -\lambda(t) = -\phi_{21}(t)x_0 + \phi_{22}(t)\phi_{12}^{-1}(1)\phi_{11}(1)x_0 \end{aligned}$$

همان طور که می‌بینیم خوشبختانه مقدار λ_0 و مقدار کنترل بهینه هر دو بر حسب مقدار اولیه حالت x_0 که معلوم است به دست می‌آید.

مسئله 2-6 (فصل دوم کتاب): سیستمی با معادلات حالت $\ddot{x} = u$ و تابع هزینه $\frac{1}{2}\int_0^5 u^2(t)dt$ را در نظر بگیرید که $x(0) = 0,\ \dot{x}(0) = 2,\ x(5) = 0,\ \dot{x}(5) = 0$ است. کنترل بهینه را بیابید.

حل: هامیلتونین را به صورت زیر تشکیل می‌دهیم:

$$\mathcal{H}(x, u, \lambda) = \tfrac{1}{2}u^2 + \lambda^\top(Ax + Bu)$$

با استفاده از شرط لازم برای بهینگی زیر

$$\begin{aligned} u &= \arg\min_u \mathcal{H} = -B^\top\lambda \\ \dot{\lambda} &= -\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial x} = -A^\top\lambda \\ \dot{x} &= \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\lambda} = Ax + Bu \end{aligned}$$

و با جایگذاری در معادله دینامیکی سیستم و تشکیل سیستم هامیلتونین داریم:

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{\lambda} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} A & -BB^\top \\ 0 & -A^\top \end{pmatrix}}_{H} \begin{pmatrix} x \\ \lambda \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x \\ \lambda \end{pmatrix}(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ \star \\ \star \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x \\ \lambda \end{pmatrix}(5) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \star \\ \star \end{pmatrix}$$

که علامت ستاره عناصری را نشان می‌دهد که نامشخص هستند (دقت کنید که مقادیر نهایی حالت کمکی معلوم بوده و مقادیر اولیه آن معلوم نیست). همان طور که در حل مسئله قبل دیدید می‌توان از این روند برای حل این گونه مسائل مقدار مرزی دو نقطه ای بهره برد. مشابه با قبل می‌توان نوشت:

$$x(5) = \Phi_{11}(5)x(0) + \Phi_{12}(5)\lambda(0)$$

و بنابراین مقدار $\lambda(0)$ را می‌توان چنین نوشت

$$\lambda(0) = \Phi_{12}^{-1}(5)x(5) - \Phi_{12}^{-1}(5)\Phi_{11}(5)x(0) = -\begin{pmatrix} -0.096 & -0.24 \\ -0.24 & -0.8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.672 \\ 2.08 \end{pmatrix}$$