

باسمه تعالی

دوره‌ی تابستانی المپیاد کامپیوتر

آزمون ترکیبیات = بخش پنجم

پنج شنبه ۲۲ مرداد ۱۳۹۴

مدرس: اسدی

وقت: ۲ ساعت و ۱۵ دقیقه

مسئله‌ی یکم. چو زمستان برود، دنیا دگرگون می‌شود! ۳۱ امتیاز
در ابتدا جایگشت $\langle 1, 2, \dots, n \rangle$ را داریم. در هر مرحله می‌توان یک عنصر را دو واحد به راست منتقل کرد. در واقع جایگشت

$$\langle \square, \square, \dots, \square, a, b, c, \square, \dots, \square \rangle$$

به

$$\langle \square, \square, \dots, \square, b, c, a, \square, \dots, \square \rangle$$

تبدیل می‌شود. به ازای چه n -هایی می‌توانیم به جایگشت $\langle n, n-1, \dots, 1 \rangle$ برسیم؟ برای مثال این کار برای $n=4$ به شکل زیر قابل انجام است:

$$\langle 1, 2, 3, 4 \rangle \rightarrow \langle 2, 3, 1, 4 \rangle \rightarrow \langle 2, 1, 4, 3 \rangle \rightarrow \langle 2, 4, 3, 1 \rangle \rightarrow \langle 4, 3, 2, 1 \rangle$$

مسئله‌ی دوم. بمب‌های مغولی! ۳۱ امتیاز

زمانی که مغول‌ها به ایران حمله کردند، ایران n اثر تاریخی با شماره‌های $1, 2, \dots, n$ داشت. قیمت اثر شماره d به این شکل مشخص می‌شد که اگر d مقسوم‌علیه n باشد، ارزش آن برابر

$$\frac{\varphi(d)}{p^{\varphi(d)}}$$

و در غیر این صورت ارزش آن ۰ است (φ تابع فی‌اولر و $0 < p < 1$ عددی ثابت است).

پس از تسلط مغول‌ها بر ایران، آن‌ها n بمب با شماره‌های $1, 2, \dots, n$ ساختند تا آثار تاریخی را نابود کنند. هر بمب به احتمال $1-p$ عمل می‌کند و منفجر می‌شود. اگر بمب شماره‌ی i منفجر شود، تمام آثار تاریخی با شماره‌ی d که $d \geq i$ و $(d, i) = 1$ باشد تخریب می‌شوند. برای مثال اگر $n=16$ باشد و بمب شماره‌ی ۱۰ منفجر شود، آثار تاریخی شماره ۱۱ و ۱۳ تخریب می‌شوند.

پس از بیرون راندن مغول‌ها، ایرانیان مجموع میزان ارزش آثار تاریخی باقی‌مانده را حساب کردند و آن را ارزش ملی نامیدند. امید ریاضی ارزش ملی باقی‌مانده پس از جنگ چیست؟!

توضیح: ناسزا نگویید. بروید خدا را شکر کنید که سوال در مورد بمب‌های عربی نیست!

مسئله سوم. تبدیلات هندسی سلطانی! ۳۱ امتیاز

سلطان با دهقان در حال مذاکره است! حال فرض کنید یک تکه کاغذ به صورت یک چندضلعی ساده داریم. یک عمل سلطانی روی این کاغذ به صورت زیر تعریف می شود:

”کاغذ را به چهار تکه T_1, T_2, T_3, T_4 می بریم؛ طوری که T_1 با T_2 و هم چنین T_3 با T_4 هم نهشت باشد. سپس این تکه ها را کنار هم می گذاریم تا یک چندضلعی ساده ی جدید به دست آید.”

واضح است که مساحت چندضلعی با عمل سلطانی ثابت می ماند. فرض کنید در ابتدا یک مثلث داریم (که شرط خاصی ندارد). برای هر یک از موارد زیر بگویید آیا همواره می توان با اعمال سلطانی، آن ها را ساخت؟
(ا) یک متوازی الاضلاع (شکل و ابعاد متوازی الاضلاع مهم نیست؛ بلکه تنها مهم است یک متوازی الاضلاع ساخته شود). [۶ نمره]

(ب) یک مستطیل (ابعاد مستطیل مهم نیست؛ بلکه تنها مهم است یک مستطیل ساخته شود). [۵ نمره]

(پ) یک مربع [۷ نمره]

(ت) یک شش-ضلعی منتظم [۷ نمره]

(ث) یک هفت-ضلعی منتظم [۶ نمره]

آن کس که امتحان ترکیبیت را کامل شود، مسلمان نیست!

جبران خلیل جبران