پاسخ سوال ریاضی عمومی که رو وبلاگ گذاشته بودم. برای چنین سوالاتی اولین کاری که باید بکنیم اینه که مشتق توابع رو حساب کنیم.

$$f'(\mathrm{x}) = 2e^{-x^2}\int_0^x e^{-t^2}dt \quad (az\ ghazie\ asasi\ hesabe\ difransiel\ estafade\ kardim)$$

$$g'(x) = -2x\int_0^1 e^{-x^2(t^2+1)}dt$$

توجه کنیم که تحت شرایط خاصی (پیوستگی مشتقات جزیی) که تو ریاضی ۳ میبینید (یا دیدید) میشه مشتق رو داخل انتگرال برد. حالا میتونید ۲ تا کار کنید.

روش اول(تستی) با توجه به اینکه گزاره های داده شده به ازای هر x برقرار هست داریم.

$f'(1) = 2\mathrm{e}\int_0^1 e^{-t^2}dt \neq 0 \rightarrow$gozine 1 nadorost ast

$f'(0) = g'(0) = 0 \rightarrow gozine\ 4\ nadorost\ ast$

$$f(0) = 0, g(0) = \int_0^1 \frac{1}{t^2+1}dt = \frac{\pi}{4} \rightarrow gozine\ 2\ nadorost\ ast$$

بنابراین گزینه ۳ درست است. با این روش ما مجازیم که گزینه های نادرست رو رد کنیم و نمیتونیم از این روش برای پیدا کردن گزینه درست استفاده کنیم مثلا مشتق تابع f توی صفر میشه صفر اما نمیتویم نتیجه بگیریم که گزینه ۱ درست هست.

روش دوم تشریحی:

$$f'(\mathrm{x}) = 2e^{-x^2}\int_0^x e^{-t^2}dt$$

$t = xu \rightarrow dt = xdu$

$(tagheer\ motaghayer\ midahim, tavajoh\ konim\ ke\ chon\ antegral\ nesbat\ be\ t\ hast$

$ba\ x\ mesle\ adade\ sabet\ barkhord\ mikonim)$

$f'(\mathrm{x}) = 2e^{-x^2}\int_0^1 e^{-(xu)^2}xdu = 2xe^{-x^2}\int_0^1 e^{-x^2u^2}du$

حالا چون گفته بودیم که میتونیم با x مثل عدد ثابت برخورد کنیم، پس میتونیم e^{-x^2} رو مثل عدد ثابت وارد انتگرال کنیم و داشته باشیم:

$$f'(\mathrm{x}) = 2x\int_0^1 e^{-x^2u^2-x^2}du = 2x\int_0^1 e^{-x^2(u^2+1)}du = 2x\int_0^1 e^{-x^2(t^2+1)}dt = -g'(x)$$

چون انتگرال معین داریم میتوانیم u را تبدیل به t کنیم.

بنابراین اگر قرار بدیم:

$$h(x) = f(x) + g(x) \rightarrow h'(x) = 0 \rightarrow h\ tabei\ sabet\ ast \rightarrow \exists a \in R\ be\ torike\ h(x) = a \quad \forall x \in R$$

$$banabarin\ h(0) = f(0) + g(0) = a \rightarrow a = \frac{\pi}{4} \rightarrow h(x) = f(x) + g(x) = \frac{\pi}{4} \quad \forall x \in R$$