

# به نام دوست

آزمون آزمایشی دوم



با همکاری

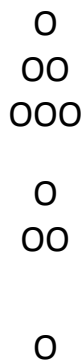


مدت آزمون : سه ساعت

دوشنبه 15 تیر 1394

سوال اول: برخورد ظریف! ..... 25 نمره

به دلایل نامعلوم فرهاد ظریف از تیم ملی کنار گذاشته شد! اما به حمایت خودش از تیم ملی ادامه می دهد و در تمرین ها همراه دخترش -ترمه- شرکت می کند. ترمه که با توجه به سن و سالش خیلی باهوش است، از هرم با قاعده مثلث متساوی الضلاع خیلی خوشش می آید. برای همین توی تمرین های تیم ملی شروع می کند با توپ های والیبال هرم ساختن. مثلا هرمی که طول ضلعش سه باشد از روی هم گذاشتن سه مثلث زیر شکل می شود:



توجه کنید که هرم به طول ضلع سه، 10 توپ، به طول ضلع دو، 4 توپ و به طول ضلع یک، 1 توپ خواهد داشت و به همین ترتیب.

ترمه خیلی سریع کار می کند و هرم به هر ضلعی را در یک دقیقه می سازد.

حال فرهاد قانمی که برای استراحت کنار زمین آمده، هرم هایی که ترمه ساخته رو می بیند، و از اون جایی که فرهاد عاشق هرم ها و عدد  $n$  هست، به کمترین زمانی که طول می کشد تا ترمه هرم هایی رو بسازد که در مجموع  $n$  تا توپ داشته باشن،  $t(n)$  می گوید. حالا سوال هایی زیر رو به فرهاد جواب بدید:

الف) باقی مانده  $\sum_{i=30}^{100} t(i)^i$  را بر  $\Delta$  حساب کنید. (5 نمره)

ب) باقی مانده  $\sum_{i=1357}^{4444} t(i)^i$  را بر  $\Delta$  حساب کنید. (7 نمره)

ج) باقی مانده  $\sum_{i=111111}^{222222} t(i)^i$  را بر  $\Delta$  حساب کنید. (13 نمره)

سوال دوم: تختِ روانِ چی!..... 35 نمره

چی چانگ چونگ مونگ کشاورز بوده است. چی در آن زمان چهار نوع گل با اسم های نوچ، چوچ، پوچ و موچ و از هر کدام به ترتیب  $a$ ،  $b$ ،  $c$  و  $d$  تا داشت. اگر تعداد روش های کاشت این گل ها در یک خط را با  $r(a,b,c,d)$  نشان دهیم:

الف) در زمستان او تعداد کمی گل به دستش رسیده بود و با توجه به این که در این فصل هیچ دو گلی از یک نوع نمی توانند کنار هم باشند. باقی مانده

$$\sum_{i=1}^1 \sum_{j=1}^2 \sum_{k=1}^3 \sum_{l=1}^4 (r(i, j, k, l))^{i+j+k+l}$$

را بر  $\Delta$  حساب کنید. (6 نمره)

ب) اگر در بهار هم هر چهار نوع گل را بکارد و بدانیم مانند زمستان باز هم هیچ دو گل از یک نوع نمی توانند کنار هم باشند، باقی مانده

$$\sum_{i=1}^{69} \sum_{j=1}^{69} \sum_{k=1}^{69} \sum_{l=1}^{69} (r(i, j, k, l))^{i+j+k+l}$$

را بر  $\Delta$  حساب کنید. (12 نمره)

ج) در فصل تابستان او فقط نوچ و چوچ می کارد. او باید به گونه ای این گل ها را بکارد که هیچ دو چوچ ای کنار هم کاشته نشوند (توجه کنید که نوچ ها می توانند کنار هم قرار بگیرند). حال باقی مانده

$$\sum_{i=123456}^{123666} \sum_{j=123456}^{123666} (r(i, j, 0, 0))^{i+j}$$

را بر اولین عدد اول بزرگتر از  $\Delta^2$  حساب کنید. (17 نمره)

## سوال سوم: روی عسل! ..... 40نمره

باغ حسن یک شبکه مربعی  $w * h$  متری است. او می خواهد زنبور داری بزند تا بتواند با استفاده از عسل های آن اولین استخر عسلی دنیا را افتتاح کند.

حسن می خواهد در نقاط طبیعی باغش (نقطه  $(x,y)$  طبیعی است اگر هم  $1 \leq x \leq w + 1$  طبیعی باشد و هم  $1 \leq y \leq h + 1$ ) گل بکارد تا زنبور هایش بتوانند از آن ها تغذیه کنند. اما چون زنبور های حسن، خستن، باید این گل ها روی یک خط راست (لزومی ندارد عمودی یا افقی باشند) قرار گرفته باشند. همچنین چون او گل هایش را از باغ چی دزدیده است و گل های باغ چی با هم دعوا داشتند، هر دو جفت گلی باید حداقل فاصله  $d$  از یک دیگر داشته باشند. اگر تعداد روش های کاشت این گل ها را با  $z(n,w,h,d)$  نشان دهیم (توجه کنید که برای حسن نوع گل ها مهم نیست و دو حالت کاشت با هم فرق می کنند اگر نقاطی از باغ که دارای گل هستند با هم فرق کنند):

الف) باقی مانده  $\sum_{j=2}^{10} \sum_{i=2}^{10} z(2, i, j, 1)$  را بر  $\Delta$  حساب کنید. (8 نمره)

ب) باقی مانده  $z(10,55,75,5)$  را بر  $\Delta$  حساب کنید. (14 نمره)

ج) باقی مانده  $z(50,500,500,13)$  را بر  $\Delta$  حساب کنید. (18 نمره)

به عنوان مثال شکل زیر یکی از حالاتی است که بخواهیم در باغ 10 در 10، 4 گل بکاریم که از هم حداقل فاصله 2 داشته باشند.

