قضیه بازگشت

قضیه بازگشت فرض کنید c عضو ثابت X باشد و $f: X \to X$ آنگاه تابع منحصر به فرد $\Phi: \omega \to X$ (ωمجموعه اعداد طبیعی) وجود دارد که:

I. $\Phi(0) = c$
II. $\Phi(n^+) = f(\Phi(n)), \forall n \in \omega$

اثبات، ابتدا وجود تابع Φ را اثبات می کنیم. باید توجه داشت که این تابع زیر مجموعه زوج مرتب هایی است که شرایط اول و دوم را برقرار می سازند، به طور خاص می توان گفت Φ زیر مجموعه $\omega \times X$ است که شرایط زیر برای آن برقرار است:

۱) $\forall n \in \omega, \exists x \in X, (n, x) \in \Phi$
۲) $(n, x_1) \in \Phi \wedge (n, x_2) \in \Phi \Longrightarrow x_1 = x_2$
۳) $(0, c) \in \Phi$
۴) $(n, x) \in \Phi \Longrightarrow (n^+, f(x)) \in \Phi$

ویژگی های ۱ و ۲ بیانگر این واقعیت هستند که Φ تابعی از ω به X است. در حالی که ویژگی های ۳ و ۴ معادل با ویژگی های اول دوم که در بالا گفته شد هستند(در ویژگی چهارم داریم $\Phi(n) = x \Longrightarrow \Phi(n^+) = f(x) = f(\Phi(n))$ که معادل است با ویژگی دوم). حال ما Φ را می سازیم که ویژگی های بالا را برقرار سازد، یعنی $P(x)$ را برابر با ویژگی های ۱ و ۲ قرار می دهیم:

$$\Re = \{R : R \subseteq \omega \times X \quad satisfies \quad 1 \quad and \quad 2\} \tag{۱}$$

می توان دید اشتراک این مجموعه ها نیز خاصیت بالا را حفظ می کند، بنابراین Φ را اینگونه تعریف می کنیم:

$$\Phi = \bigcap_{R \in \Re} R \tag{۲}$$

با توجه به نحوه ساخت، Φ خواص ۳ و ۴ را دارد، ما تنها نشان می دهیم که یک تابع است و خواص ۱ و ۲ نیز برای آن برقرار است:

۱. با استقرا نشان می دهیم که $dom(\Phi)=\omega$ که مستلزم ۱ است. از ۳ می دانیم که $(0,c)\in\Phi$ پس داریم $0\in dom(\Phi)$ ، حال فرض کنیم که $n\in dom(\Phi)$ آنگاه $\exists x\in X,(n,x)\in\Phi$، بنابراین بر اساس ۴ داریم $(n^+,f(x))\in\Phi$ پس $n^+\in dom(\Phi)$ حال داریم $dom(\Phi)=\omega$ پس حکم استقرا ثابت شد.

۲. حالا خاصیت دوم را اثبات می کنیم، اجازه دهید N را به نحو زیر تعریف کنیم:

$$N=\{n\in\omega:\exists x\in X,(n,x)\in\Phi\wedge\forall y\in X,(n,y)\in\Phi\Longrightarrow x=y\} \quad (۳)$$

که عبارت بالا معادل با تابع بودن Φ است. یعنی هر x را تنها به یک شی نگاشت می کند. با استقرا نشان می دهیم $N=\omega$. برای اثبات $0\in N$ عکس آن را فرض می کنیم، یعنی دو زوج مرتب $(0,c)\in\Phi$ و $(0,d)\in\Phi$ که $d\neq c$ وجود دارند، فرض کنید $\Phi^*=\Phi-\{(0,d)\}$ ، قاعدتا ۳ برای Φ برقرار است. برای نشان دادن ۴ فرض کنید $(n,x)\in\Phi^*$ آنگاه $(n,x)\in\Phi$ پس $(n^+,f(x))\in\Phi$ اما چون $n^+\neq 0$ پس $(n^+,f(x))\neq(0,d)$ در نتیجه $(n^+,f(x))\in\Phi^*$ نتیجه میگیریم این خواص برای Φ^* برقرار است، پس $\Phi^*\in\Re$ اما Φ حاصل اشتراک تمام اعضای $\Re$ است، پس $\Phi\subseteq\Phi^*$ ،اما با توجه به نحوه ساخت Φ^* این امر غیر ممکن است. درنتیجه حکم $0\in N$ برقرار است.

در گام بعد فرض می کنیم $n\in N$ آنگا اثبات می کنیم $n^+\in N$. برای چنین کاری ابتدا خلاف آن را فرض می کنیم- یعنی فرض می کنیم $(n,x)\in\Phi$ و $(n^+,f(x))\in\Phi$ در حالی که $(n^+,u)\in\Phi$ و $u\neq f(x)$. اجازه دهید $\Phi^@=\Phi-\{(n^+,u)\}$ باشد. چون $n^+\neq 0$ پس $(n^+,u)\neq(0,c)$ ، در نتیجه ۳ برای آن برقرار است. برای نشان دادن اینکه ۴ برقرار است فرض می کنیم $(m,v)\in\Phi^@$.آنگاه داریم $(m,v)\in\Phi$ پس $(m^+,f(v))\in\Phi$. حال دو حالت داریم یا $m^+\neq n^+$ یا $m^+=n^+$:

الف) $m^+\neq n^+$. آنگاه $(m^+,f(v))\neq(n^+,u)$ بنابر این $(m^+,f(v))\in\Phi^@$.

ب) $m^+=n^+$. آنگاه $m=n$ پس $(m,v)=(n,v)$ اما چون $n\in\omega$ بنابر این $(n,x)\in\Phi$ اماچون تنها یک x وجود دارد، خواهیم داشت : $(m^+,f(v))=(n^+,f(x))\in\Phi^@$

پس چه الف درست باشد چه ب حکم یکسانی برقرار است، چون شرط ۴ برای $\Phi^@$ برقرار است پس باید $\Phi^@\in\Re$ اما با توجه به اینکه مجموعه Φ حاصل اشتراک تمام مجموعه های اینچنینی است، یعنی کوچکترین مجموعه ای است که شرایط بالا برای آن صادق است، پس $\Phi\subseteq\Phi^@$ ،اما با توجه به نحوه ساخت $\Phi^@$ این امر غیر ممکن است. درنتیجه حکم $n^+\in N$ برقرار است. در نتیجه $n=\omega$. پس حکم نهایی ثابت شد.

مراجع:

1-A Book of Set Thery (Charles C. Pinter)