۸۸/۱۰/۱۴

امتحان 1   سال تحصیلی ۸۹–۱۳۸۸، گروه فیزیک

مسئله‌ی I

شکل زیر مقطع نیم‌استوانه‌ای است که سطح خارجی آن بازتاباننده‌ی نور است. شعاع نیم‌استوانه R و طول آن ℓ است. این نیم‌استوانه، مطابق شکل در معرض تابش یک باریکه پرتوان نور قرار می‌گیرد. شدت نور، یعنی انرژی‌ای که در واحد زمان از واحد سطح، عمود بر امتداد انتشار باریکه، می‌گذرد I است. این شدت در تمام مقطع باریکه ثابت است.

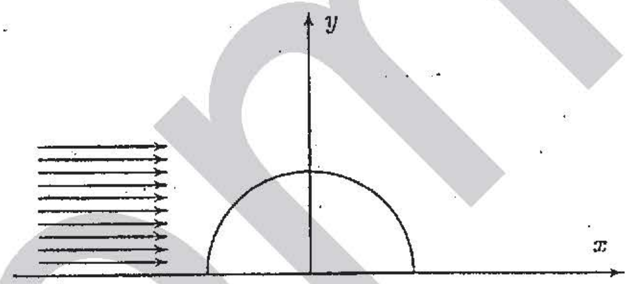
نور را متشکل از فوتونهایی بگیرید که هر کدام انرژی E و تکانه‌ی $P = \dfrac{E}{C}$ دارند. c سرعت نور است.

الف) بردار نیروی وارد بر نیم‌استوانه از طرف باریکه را به دست آورید.

ب) اندازه‌ی نیروی فوق را به ازای $I = 10\,\mathrm{W/cm^2}$ و $\ell = R = 1\,\mathrm{cm}$ به دست آورید. $(c = 3 \times 10^8\,\mathrm{m/s^2})$

ج) زاویه‌ی انحراف (زاویه‌ی بین پرتوی تابیده و بازتابیده) را θ بگیرید. شدت نوری که در زاویه‌های انحراف بزرگتر از θ_0 $(\theta > \theta_0)$ پراکنده می‌شوند را بر حسب پارامترهای مسئله به دست آورید.

د) سطح مقطع دیفرانسیلی پراکندگی در زاویه‌ی θ، یعنی $\dfrac{d\sigma}{d\theta}$ را به دست آورید.



(8.25/10) (7.8/10)

مسئله‌ی 2) یک مربع بسیار بزرگ در نظر بگیرید که از آن یک قرص به شعاع R حذف شده است. مرکز قرص منطبق است بر مرکز مربع. (طول ضلع مربع خیلی بزرگتر از R است.) محور z عمود بر صفحه است و از مرکز قرص می‌گذرد. چگالی بار سطحی روی صفحه را مقدار ثابت σ بگیرید.

الف) میدان الکتریکی را روی محور z بیابید.

یک جسم به شکل مکعب مستطیل در نظر بگیرید که قاعده‌ی آن مربع است و ارتفاع آن خیلی کوچک‌تر از طول ضلع قاعده است. در این جسم سوراخی به شکل استوانه با مقطع دایره، به شعاع R هست. محور استوانه عمود است بر قاعده‌ی مکعب‌مستطیل و از مرکز قاعده می‌گذرد. ارتفاع جسم را $L = (N-1)\,d$ می‌گیریم که در این جا N یک عدد صحیح بزرگتر از 1 و d پارامتری با بُعد طول است. دستگاه مختصات را چنان می‌گیریم که محور استوانه محور z باشد و قاعده‌های مکعب‌مستطیل بر صفحه‌های $z = 0$ و $z = L$ منطبق باشند. در قسمت بعدی مسئله، این جسم را چنین مدل می‌کنیم:

N صفحه‌ی موازی، مانند قسمت الف که محور z بر این صفحه‌ها عمود است و از مرکز تمام قرص‌های حذف شده به شعاع R می‌گذرد. صفحه‌ی k اُم در ارتفاع

$$z_k = (k-1)\,d, \qquad k = 1, 2, \ldots, N$$

قرار دارد.

ب.۱) میدان الکتریکی را در ارتفاع Δ بالای صفحه‌ی k اُم، روی محور z به دست آورید. ($0 < \Delta < d$) جمع‌هایی را که ظاهر می‌شوند لازم نیست محاسبه کنید.

ب.۲) با این فرض که ارتفاع جسم بسیار کوچکتر از R است، میدان قسمت قبل را بسط دهید و تا اولین مرتبه‌ی ناصفر از d آن را ساده کنید. تمام جمع‌های لازم را محاسبه کنید. پاسخ نهایی تنها بر حسب ثابت‌های مسئله و k و Δ باشد.

ب.۳) میدان الکتریکی قسمت قبل را برای $z = (N-1)d$ ساده کنید. این میدان را E_1 می‌نامیم.

در قسمت بعد این جسم را با یک محیط پیوسته با چگالی حجمی یکنواخت ρ می‌گیریم و فرض می‌کنیم که در جهت‌های x و y نامتناهی است اما ضخامت آن $(N-1)d$ است و یک حفره‌ی استوانه‌ای به شعاع R از آن حذف شده است. محور z باز هم منطبق است بر محور استوانه.

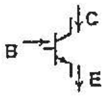
ج.۱) با فرض کوچک نبودن ارتفاع جسم نسبت به R میدان را در $z = (N-1)d$ بیابید.

ج.۲) با فرض کوچک بودن ارتفاع جسم نسبت به R میدان قسمت قبل را تا اولین مرتبه‌ی ناصفر از d ساده کنید.

ج.۳) رابطه‌ای بین ρ و σ بنویسید و با کمک آن میدان قسمت قبل را بر حسب σ بازنویسی کنید. این میدان را E_2 می‌نامیم.

د) در $z = (N-1)d$، خطای نسبی، یعنی $\dfrac{\Delta E}{E_1} = \dfrac{E_1 - E_2}{E_1}$ را حساب کنید.

بایک نشود؟ خوب

$\frac{۴}{10}$ مسئله‌ی 3) یک عنصر مداری به نام ترانزیستور مطابق شکل دارای 3 سر است. 

بین جریان‌ها و ولتاژهای این 3 سر روابط زیر برقرار است.

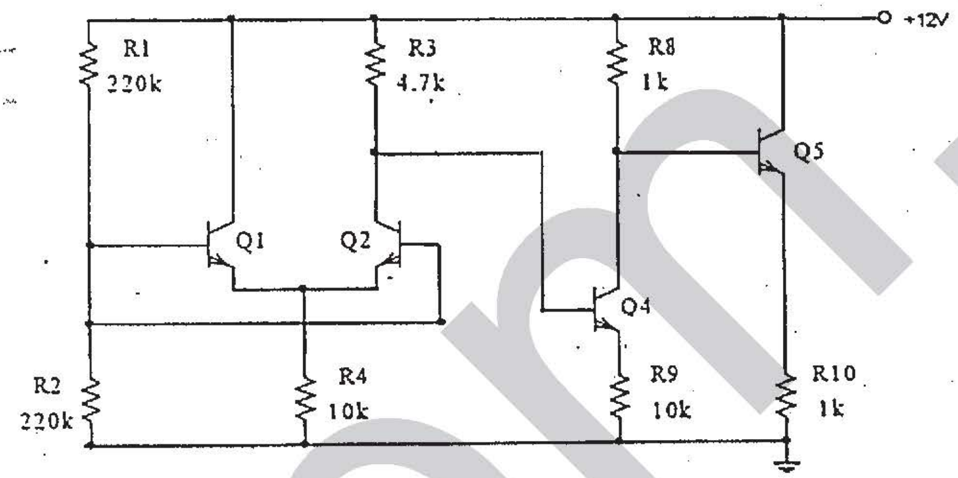
$$I_C = \beta I_B = \alpha I_E, \qquad V_B - V_E = 0.7\,\mathrm{V}$$

که در این جا α و β اعدادی ثابت اند.

ترانزیستورها را در مدار با حرف Q نشان می‌دهیم.

الف) با توجه به بقای بار الکتریکی، مقدار α را بر حسب β محاسبه کنید.

توجه کنید که اگر β خیلی بزرگ باشد می‌توان از I_B صرف‌نظر کرد، یعنی اگر β بی‌نهایت باشد، جریان B را می‌توان در مقابل جریان C و E صفر گرفت. حال شکل زیر را در نظر بگیرید.



فرض کنید می‌توان از جریان‌های B ی همه‌ی ترانزیستورها صرف‌نظر کرد.

این قسمت حل نیست

ب) جریان گذرنده از مقاومت $1\,\mathrm{k\Omega}$ را بیابید. (در شکل، در کنار مقاومت‌ها، K نشان‌دهنده‌ی $\mathrm{k\Omega}$ است.)

ج) فرض کنید I_C برای ترانزیستورهای 1 و 2 مساوی است. با توجه به این معلومات، I_C را برای همه‌ی ترانزیستورها بیابید.

د) برای این که ترانزیستور کار کند، باید ولتاژ C حداقل $0.2\,\mathrm{V}$ از ولتاژ E بیشتر باشد. فرض کنید مقاومت R8 را به مقدار دلخواه بتوان تعیین کرد و بقیه‌ی مقاومت‌ها مطابق شکل باشند. محدوده‌ی تغییرات R8 چه قدر باشد تا Q4 و Q5 کار کنند؟

مسئله‌ی 4) جسمی به جرم m که به فنری به ضریب سختیِ k وصل شده در مبداءِ مختصات ساکن است. در این حالت فنر نه کشیده شده و نه فشرده شده است. مجموعه روی میزی افقی قرار دارد. ضریبِ اصطکاکِ ایستایی و جنبشیِ بینِ جسم و میز را μ بگیرید. ϵ را به صورت

$$\epsilon := \frac{\mu m g}{k}$$

تعریف می‌کنیم. جسم را می‌کشیم به طوری که فنر به اندازه‌ی x_0 کشیده شود و سپس آن را رها می‌کنیم.

a x_0 چه‌قدر باشد تا پس از رها کردن جسم ساکن بماند؟

b x_0 چه‌قدر باشد تا پس از رها کردن جسم حرکت کند ولی قبل از رسیدن به مبداء ساکن شود؟

c فرض کنید که x_0 آن قدر هست که پس از آن که جسم را رها کردیم از مبداء می‌گذرد. جسم اولین بار در چه نقطه‌ای سرعتش صفر می‌شود؟ آن را x_1 بگیرید.

d فرض کنید که x_0 آن قدر هست که پس از آن که جسم را رها کردیم N بار از مبداء می‌گذرد. بعد از این که برای N اُمین بار از مبداء رد شد در چه نقطه‌ای سرعتش صفر می‌شود؟ آن را x_N بگیرید. از ابتدا تا این زمان جسم چه مسافتی را طی کرده است؟ آن را d_N بنامید.

e اگر $x_0 = 64.6\,\epsilon$ باشد، جسم چند بار از مبداء ردّ می‌شود و کجا می‌ایستد؟ کل مسافتی که ذره طی کرده چه‌قدر است؟ 32

f اگر $x_0 = 65.3\,\epsilon$ باشد، جسم چند بار از مبداء رد می‌شود و کجا می‌ایستد؟ کل مسافتی که ذره طی کرده چه‌قدر است؟ 32

2132.2

مسئله ی ۱

فقط متوجه
این [illegible] نمی‌گیرم

0.25/10

در دهه ی ۱۹۹۰ میلادی در آزمایش‌های شیمی‌فیزیک مشاهده‌های عجیبی به ثبت رسید: رشته‌های طولانیِ پلیمر، که به شدت باردار بودند، ترجیح می‌دادند به صورت فشرده روی خود بپیچ بخورند؛ بر خلافِ آن که بر مبنای انتظارِ متعارفِ ما، به صورت خطی، یعنی حالتی که انرژی الکتروستاتیک آنها را کاهش می‌داد در آیند. محتوای مسئله‌ی زیر (بخش‌های الف تا و) شکل ساده‌شده‌ی یکی از مدل‌هایی است که برای فهم این پدیده پیشنهاد شده است. در این مدل تعداد زیادی از این ملکول را کنار هم قرار می‌دهیم و با آنها صفحه‌ای باردار می‌سازیم؛ سپس برای این که احتمالِ روی خود تاب خوردن ملکول‌های مزبور را بررسی کنیم، به نیروی میان دو صفحه از این نوع نگاه می‌کنیم. اگر دو صفحه که بار میانگین هر دوی آنها یکسان است بتوانند همدیگر را جذب کنند، راهی برای درک جاذبه‌ی بینِ رشته‌های باردار پلیمری و بپیچ خوردن آنها روی هم باز می‌شود.

صفحه‌ی نارسانای تختی را در نظر بگیرید که در $z = 0$ قرار گرفته است. روی این صفحه‌ی بی‌نهایت بزرگ، توزیع بارِ

$$\sigma(x, y) = \sigma_I \cos(\kappa x)$$

قرار گرفته است:

الف. با استفاده از قانون کولن، میدان الکتریکی را در نقطه‌ی (x, y, z) به شکل یک انتگرال بنویسید. سپس بدونِ گرفتنِ انتگرال‌ها، و فقط با استناد به رفتارِ عمومیِ انتگرالده، نشان دهید که میدان به شکلِ زیر است.

$$E(x, y, z) = \cos(\kappa x)\; E_z(z)\, \hat{z} + \sin(\kappa x)\; E_x(z)\, \hat{x}$$

ب. شکلِ دیفرانسیلی معادله‌های ماکسول ($\nabla \times E = 0$ و $\nabla \cdot E = 0$) را در نظر بگیرید. برایِ $z > 0$ این دو معادله را بر $E(x, y, z)$ اعمال کنید، و با حل آنها شکل کلیِ $E_x(z)$ و $E_z(z)$ را بیابید.

ج. با اعمال شرایط مرزی در $z = 0$ و $z \to \infty$، میدان و پتانسیل الکتریکی را بیابید. (میدان در $z \to \infty$ باید به صفر میل کند.)

حال فرض می‌کنیم که توزیعِ بار صفحه به شکلِ کلی‌ترِ $\sigma(x, y) = \sigma_0 + \sigma_I \cos(\kappa x)$ باشد. صفحه‌ی دیگری با همین توزیع بار را موازی صفحه‌ی اولیه و در $z = z_0 > 0$ قرار می‌دهیم. سپس این صفحه را به اندازه‌ی x_0 در راستای محورِ x نسبت به صفحه‌ی اول، جلو می‌بریم. توزیعِ بارِ این صفحه به شکلِ $\sigma(x, y) = \sigma_0 + \sigma_I \cos(\kappa x - \kappa x_0)$ در خواهد آمد.

د. نیروی متوسطی که صفحه‌ی پایینی به صفحه‌ی بالایی در واحدِ سطح وارد کند، یعنی $\frac{\langle f(x_0, z_0)\rangle}{A}$ را به عنوانِ تابعی از x_0 و z_0 حساب کنید.
توجه: متوسط گیری را رویِ سطحِ $0 < x < \lambda = \frac{2\pi}{\kappa}$ و $0 < y < \frac{1}{\lambda} = \frac{\kappa}{2\pi}$ انجام بدهید.

هـ. نسبت $\alpha = \frac{\sigma_I}{\sigma_0}$ را معرفی می‌کنیم. برای چه مقادیری از α و x_0 و z_0 نیروی بینِ این دو صفحه دافعه است، و به ازایِ چه مقادیری از α و x_0 و z_0 نیروی بینِ این دو صفحه جاذبه است؟

و. برای حالت $\alpha = 3$ و $z_0 = \frac{1}{2\kappa}$ هر دو مؤلفه مماسی و قائمِ نیرو یِ وارد بر واحدِ سطحِ صفحه‌یِ بالایی را بر حسبِ x_0 رسم کنید. (مماس و قائم بر سطح منظور است.)
تذکر: مقادیرِ عددیِ این بخش در بخش‌هایِ بعد در نظر گرفته نمی‌شوند.

حالا صفحه‌ی پایینی، یعنی صفحه‌ی $z = 0$ را با یک رسانای تخت جایگزین میکنیم.

ز. پتانسیل الکتریکی در نقاطِ مختلفِ فضا چیست؟

ح. $\frac{\langle f(x_0, z_0)\rangle}{A}$ ، نیرویی که به طورِ متوسط به واحدِ سطحِ صفحه‌ی بالایی ($z = z_0$) وارد می‌شود چیست؟

ط. چه مواقعی این نیرو جاذبه است، و چه مواقعی دافعه است؟

5.25/10
تهوار

مسئله ی ۲

دوران‌ها با هم جابجا نمی‌شوند. برای مثال، اگر یک جسم را ابتدا $90°$ حولِ محورِ x و سپس $90°$ حولِ محورِ y بچرخانیم، نتیجه همان نیست که اگر ابتدا $90°$ حولِ محورِ y و سپس $90°$ حولِ محورِ x بچرخانیم. این ناجابجایی بودن در موردِ زاویه‌های کوچک دوران هم برقرار است. می‌خواهیم این ناجابجایی دوران‌های کوچک را بیابیم.

الف. فرض کنید A و B و C سه بردارِ دلخواه در فضای سه‌بعدی هستند. رابطه ی زیر را ثابت کنید.

$$A \times (B \times C) = B\,(A \cdot C) - C\,(A \cdot B)$$

ب. O را مبداء مختصات بگیرید، P یک نقطه در فضا است که بردارِ مکانِ آن نسبت به O را با r نشان می‌دهیم. بردارِ یکه ی $\hat{n}$ یک راستای دلخواه را در فضا مشخص می‌کند. P را حول $\hat{n}$ به اندازه ی θ و در جهت پادساعتگرد می‌چرخانیم. نقطه ی جدید را P' می‌نامیم و بردارِ مکانِ آن را با r' نشان می‌دهیم. با این فرض که $\theta \ll 1$ است r' را تا مرتبه ی اول از θ بر حسب r و $\hat{n}$ بنویسید.

این نمادگذاری را در نظر بگیرید: $[R_n(\theta)]\, r$ به این معنا است که بردار r (یا متناظراً نقطه ی P) را به اندازه ی θ حولِ محورِ $\hat{n}$ در جهت پادساعتگرد چرخانده ایم. در ضمن، اگر داشته باشیم $[R_n(\beta)]\,[R_m(\alpha)]\, r$ یعنی ابتدا P را حولِ $\hat{m}$ به ندازه ی α بچرخانیم، و حاصل را حولِ $\hat{n}$ به اندازه ی β بچرخانیم.

ج. رابطه ی زیر را در نظر بگیرید. تمامی ی E_iها، G_iها، و F_{11} را به دست آورید. پاسخ نهایی تنها بر حسبِ $\hat{x}$ و $\hat{y}$ و $\hat{z}$ (که هر سه بردارِ یکه در راستا ی مثبتِ محورِ مربوطه هستند) و r باشد. α و β هر دو بسیار کوچکتر از 1 اند و هم‌مرتبه اند.

$$[R_y(-\beta)]\,[R_x(\alpha)]\,[R_y(\beta)]\,[R_x(-\alpha)]\; r = r + \sum_{i=1}^{\infty} \{\alpha^i E_i(r) + \beta^i G_i(r)\} + \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} \alpha^i \beta^j F_{ij}(r)$$

مسئله ی ۳

در این مسئله مدل ساده ای برا ی انبساط حرارتی ی مواد را بررسی می‌کنیم. برا ی انرژی ی پتانسیل بین دو اتم بسط زیر را در نظر می‌گیریم.

$$U(x) = U_0 + \frac{1}{2} m\omega_0^2 x^2 + \beta m x^3 + \cdots$$

در این جا $x = r - r_0$ جابجایی حول نقطه ی تعادل است، r فاصله ی دو اتم است، و r_0 فاصله ی دو اتم در حالت تعادل پایدار است؛ m جرم کاهیده است و $K = \frac{1}{2} m\dot{x}^2$ انرژی ی جنبشی است.

میانگین زمانی ی هر تابع $f(t)$ در یک دوره ی تناوب را با $\langle f\rangle$ نشان می‌دهیم:

$$\langle f\rangle := \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\,dt$$

که T دوره ی تناوب است.

(الف) با ثابتها ی مسئله پارامتر بی‌بُعدی بسازید که در پتانسیل کوچک بودن نسبی ی جمله ی درجه ی سه نسبت به جمله ی درجه ی دو را مشخص کند.

(ب) تغییر $\langle x\rangle$ را تا اولین مرتبه ی ناصفر در a (دامنه ی نوسانها ی کوچک) به دست آورید. این کمیت را با Δa نشان می‌دهیم.

(ج) تغییرات $\langle r\rangle$ و $\langle E\rangle$ را بر حسب β و m و Δa بیابید.

(د) با توجه به بخش ب، شرطی روی ثابتها ی مسئله بیابید که با افزایش دما ماده منبسط شود.

راهنمایی:

جواب معادله ی دیفرانسیل

$$\ddot{y} + \omega_0^2 y = A\cos\omega t + B\sin\omega t, \qquad \omega \neq \omega_0$$

به شکل

$$y(t) = \alpha_1 \sin\omega_0 t + \alpha_2 \cos\omega_0 t + \alpha_3 \sin\omega t + \alpha_4 \cos\omega t + \alpha_5$$

است که در این جا α_3 و α_4 مقادیر خاصی هستند، و α_1 و α_2 و α_5 دلبخواه اند.

مسئله ی ۱

وقتی دو جسم برخورد می‌کنند حین برخورد نیرویی به هم وارد می‌کنند که می‌تواند باعثِ تغییرِ تکانه و تکانه‌زاویه‌ایِ آن‌ها شود. در نقطه‌یِ برخوردِ دو جسم، صفحه‌ای را بر آن دو مماس می‌کنیم. این نیرو مؤلفه‌ای عمود بر صفحه و مؤلفه‌ای مماس بر آن دارد. مؤلفه‌یِ مماسی را نیرویِ اصطکاک می‌نامیم. Δv_n مؤلفه‌یِ عمودیِ سرعتِ نسبیِ دو جسم قبل از برخورد، یعنی مؤلفه‌یِ سرعتِ نسبیِ دوجسم عمود بر این صفحه است. ضریبِ جهندگی به صورتِ زیر تعریف می‌شود

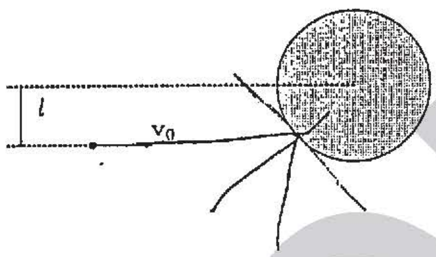
$$e := \left|\frac{\Delta v'_n}{\Delta v_n}\right|,$$

که $\Delta v'_n$ مؤلفه‌یِ عمودیِ سرعتِ نسبیِ دو جسم پس از برخورد است. در برخوردِ کاملاً کش‌سان $e = 1$ و در برخوردِ کاملاً غیرکش‌سان $e = 0$ است.

مطابقِ شکل ذره‌ای به جرمِ m با سرعتِ اولیه‌یِ v_0 به سمتِ سکه‌یِ ساکنی به شعاعِ R می‌رود. پارامترِ برخورد $0 \le \ell < R$ است. از اصطکاکِ بینِ ذره و زمین، سکه و زمین، و ذره با سکه چشم‌پوشی کنید.

برخوردها را کاملاً کش‌سان بگیرید.

a) جرمِ سکه را M بگیرید. زاویه‌یِ پراکندگیِ ذره، ψ، را بر حسبِ پارامترِ برخورد ℓ، R، و $\alpha := \dfrac{m}{M}$ به دست آورید. به ازایِ $\alpha = 0$ و $\alpha = 1$ جوابِ خود را ساده کنید. در حدِ $\alpha \ll 1$ زاویه‌یِ پراکندگیِ ذره، ψ، یعنی زاویه‌یِ بینِ بردارِ سرعتِ اولیه v_0 وسرعتِ نهاییِ ذره را تا مرتبه‌یِ اولِ α به دست آورید.



برخوردها را کاملاً غیرکش‌سان و $\alpha = 1$ بگیرید.

b) زاویه‌یِ پراکندگی در چارچوبِ مرکزِ جرم θ را بر حسبِ پارامترِ برخورد ℓ و R به دست آورید.

c) مؤلفه‌هایِ سرعتِ دو جسم را قبل و پس از برخورد در چارچوبِ مرکزِ جرم و آزمایش‌گاه بر حسبِ v_0، ℓ، و R به دست آورید.

d) زاویه‌یِ پراکندگیِ ذره‌یِ فرودی در چارچوبِ آزمایش‌گاه ψ را بر حسبِ ℓ، و R به دست آورید.

e) به ازایِ چه‌مقداری از پارامترِ برخورد ℓ، ψ بیشینه می‌شود؟

مسئله ی ۲

جسمی به شکل یک مکعب مستطیل به ابعاد L_1، L_2، و L_3 (در حالت تعادل) است. مدول یانگ و نسبت پواسُن برای این جسم به ترتیب Y و ρ است، یعنی اگر این جسم تحتِ فشارِ P وارد بر دو وجه مقابل باشد،

$$\left(\frac{\Delta L}{L}\right)_{\parallel} = -\frac{P}{Y}, \qquad \left(\frac{\Delta L}{L}\right)_{\perp} = -\rho\left(\frac{\Delta L}{L}\right)_{\parallel}.$$

(علامت‌های موازی ($\parallel$) و عمود ($\perp$) نسبت به راستای نیروی تولیدکننده‌ی فشاراند.)

این جسم را تحتِ فشار می‌گذاریم، چنان که فشارِ وارد بر سطحِ عمود بر ضلعِ به طول L_i برابر P_i باشد ($i = 1, 2, 3$).

الف. تغییرطول نسبیِ هر ضلع ($\frac{\Delta L_i}{L_i}$، $i = 1, 2, 3$) را حساب کنید.

ب. کار انجام شده روی این جسم وقتی فشار از صفر (وضعیت تعادل) تا مقدارهای نهایی P_1، P_2، و P_3 می‌رسد را حساب کنید.

ج. نسبت این کار به $P^2 := P_1^2 + P_2^2 + P_3^2$ را حساب کنید و بیشینه و کمینه‌ی آن را به دست آورید.

د. شرط این را به دست آورید که نسبتِ این کار به P^2 مثبت باشد (شرطِ تعادل).

[illegible]
[illegible]
[illegible]
[illegible]
$\frac{9.5}{16}$

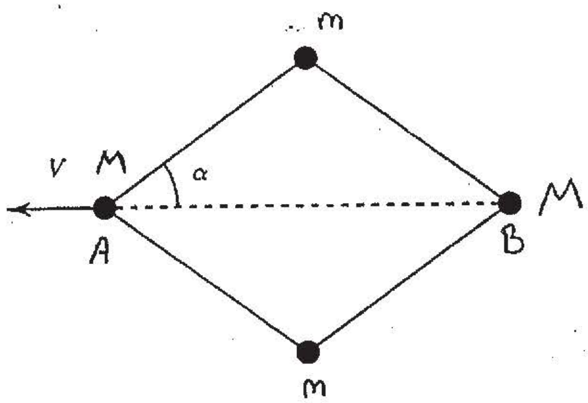
مسئله ی ۳

چهار گلوله‌ی کوچک به جرم‌های m و M مطابق شکل به وسیله‌ی چهار ریسمان سبک هم‌طول به هم وصل شده‌اند و روی میز بدون اصطکاکی قرار دارند. در اثر ضربه‌ای که در امتداد AB به جرم M سمت چپی زده می‌شود این گلوله با سرعت V شروع به حرکت می‌کند. به ازای مقادیر مختلف α:

الف. هنگامی که سرعت گلوله‌ی A برابر V است، بردار سرعت سه گلوله‌ی دیگر را به دست آورید.

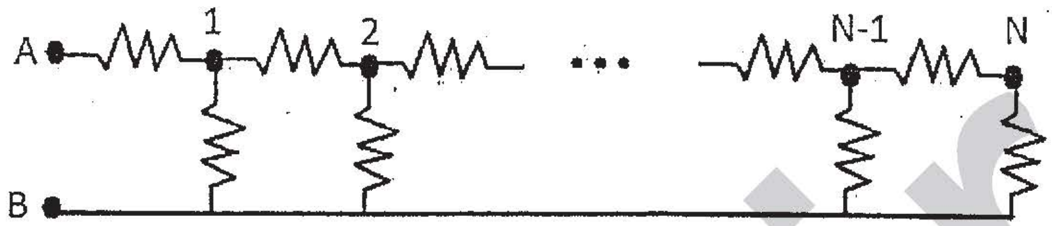
ب. ضربه‌ی ناشی از کشش نخ را در هر یک از چهار نخ به دست آورید.

ج. ضربه‌ای که به گلوله‌ی A زده شده چه قدر است؟



مسئله ی ۴ $\frac{9}{10}$

یک شبکه ی مقاومتی مطابق شکل در نظر بگیرید. فرض کنید گره‌ها مانند شکل نام‌گذاری شده اند. همه ی مقاومت‌ها مقدار R دارند.



الف. ابتدا با فرض بی‌نهایت بودن تعداد مقاومت‌ها، مقاومت دیده شده میان گره‌های A و B را بیابید.

راهنمایی: مقاومت معادل بین دو نقطه این گونه محاسبه می‌شود که منبع ولتاژ معلوم $\mathcal{E}$ بین آنها بسته شود و سپس جریان گذرنده از این منبع حساب شود. مقاومت معادل، حاصل تقسیم این دو کمیت است.
حالا فرض کنید تعداد مقاومت‌ها محدود است (مانند شکل).

ب. معادله ای خطی میان ولتاژ گره دلخواه n و $n+1$ و $n-1$ به دست آورید (به جز گره‌های اول و آخر).

معادله ای به شکل $a\,X_{n-1} + b\,X_n + c\,X_{n+1} = 0$ با قرار دادن پاسخی به صورت $X_n = Z^n$ حل می‌شود. با این کار دو پاسخ برای Z به دست می‌آید، که اگر آنها را Z_1 و Z_2 بنامیم، جواب کلی این است:

$$X_n = C_1\,(Z_1)^n + C_2\,(Z_2)^n\,.$$

توجه کنید که C_1 و C_2 ثابت‌هایی هستند که از روی شرایط مرزی مسئله، یعنی شرایطی معلوم که بر برخی از گره‌ها حاکم است، به دست می‌آیند.

ج. Z_1 و Z_2 را به دست آورید.

د. V_n، یعنی ولتاژ گره ی n ام را بر حسب n و N و R و $\mathcal{E}$ بیابید.

ه. مقاومت معادل بین گره‌های A و B را حساب کنید.

بسمه تعالی

امتحان چهارم — سال تحصیلی ۸۹ – ۱۳۸۸، گروه فیزیک

وقت: ۵ ساعت

مسئله ی ۱

صفحه‌ای به شکلِ بیضی با نیم‌قطرهای a و b $(a > b)$ را در نظر بگیرید. جرمِ آن M و توزیعِ جرمش یک‌نواخت است.

الف. لختی دورانیِ بیضی حولِ محورهای x و y ، که به ترتیب قطرهای اصلیِ بزرگ و کوچک بیضی‌اند، و محور z که از مرکزِ بیضی می‌گذرد و بر صفحه‌ی بیضی عمود است، چه قدر است؟

راه‌نمایی- لختیِ دورانیِ صفحه‌ای دایره‌ای به شعاع R با توزیعِ جرمِ یک‌نواخت و جرمِ m، نسبت به قطرش $m\,R^2/4$ است.

$I_x = \frac{mb^2}{4}$

$I_y = \frac{ma^2}{4}$ $\qquad I_z = I_x + I_y$

گشتاور خارجیِ وارد بر جسم را صفر بگیرید و فرض کنید

$$\vec{\omega}\big|_{t=0} = \Omega\,(\mathrm{i} + \alpha \mathrm{k})$$

که در این جا $\alpha := \sqrt{\dfrac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2}}$. دستگاهی که در زمانِ $t = 0$ بر دستگاهِ xyz منطبق بوده و به جسم چسبیده است را دستگاهِ 123 بگیرید.

ب. با حل معادلات اویلر و تغییرِ متغیر

$$\omega_1 = \Omega\, F_1(t), \qquad \omega_2 = \Omega\, F_2(t)$$

رابطه‌ی بینِ $F_1(t)$ و $F_2(t)$ را به دست آورید. ω_1 و ω_2 و ω_3 مؤلفه‌های $\vec{\omega}$ نسبت به دستگاهِ 123 است.

ج. پس از زمانِ طولانی $(t \to \infty)$ ω_1 و ω_2 و ω_3 را به دست آورید.

مسئله ی ۲

در این مسئله می‌خواهیم به بررسی مدل ساده‌ای برای ارتباط جرم و شعاع ذرات بپردازیم.

$$c = 3.0 \times 10^8\,\mathrm{m\,s^{-1}}, \mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}\,\mathrm{T\,m\,A^{-1}}, e = 1.6 \times 10^{-19}\,\mathrm{C}$$

الکترون را پوسته‌ای کروی به شعاع R بگیرید که بار آن به طور یکنواخت روی سطح پخش شده است. الکترونی با سرعت ثابت $\vec{v}$ در حال حرکت است ($v \ll c$ است که c سرعت نور است). می‌دانیم که $c^2 = \frac{1}{\mu_0\,\epsilon_0}$ است. هر جا ترکیب این دو ثابت ظاهر شد آن را بر حسب سرعت نور جای‌گذاری کنید. فرض کنید در $t = 0$ مرکز کره در مبداء مختصات است. تمامی محاسبات را در همین لحظه انجام دهید.

الف. به تقریب تا اولین مرتبه از $\frac{v}{c}$ می‌توان میدان الکتریکی الکترون متحرک را همان میدان الکتروستاتیک گرفت. میدان الکتریکی را در تمام فضا بیابید.

میدان مغناطیسی این ذره را، تا اولین مرتبه از $\frac{v}{c}$ میتوان چنین نوشت:

$$r > R: \quad \vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0\,q\,\vec{v} \times \vec{r}}{4\,\pi\,r^3}$$

که در آن $\vec{r}$ نقطه‌ی مشاهده‌ی میدان است که مبداء آن مرکز کره است و q بار ذره است. میدان داخل کره را $\vec{B}_{\text{in}}$ می‌نامیم.

ب. میدان مغناطیسی بیرون از ذره را بر حسب میدان الکتریکی، $\vec{v}$ و c بنویسید.

ج. می‌توان برای میدان الکترومغناطیسی چگالی تکانه‌ی خطی، یعنی تکانه بر واحد حجم تعریف کرد. چگالی تکانه‌ی خطی را با $\vec{p}$ نشان می‌دهیم و داریم

$$\vec{p} = \epsilon_0\,\vec{E} \times \vec{B}$$

تکانه‌ی خطی میدان الکترون متحرک را محاسبه کنید و آن را به صورت $\vec{P} = m_f\,\vec{v}$ بنویسید.

د. تکانه‌ی کل عبارت است از جمع تکانه‌ی ذره و میدان‌ها. حال تعریف می‌کنیم:

$$\vec{P}_{\text{tot}} := m\,\vec{v} = (m_0 + m_f)\,\vec{v}$$

که در آن m_0 جرم سکون الکترون است. فرض کنید آن چه در آزمایشگاه به عنوان جرم اندازه‌گیری می‌شود m باشد. رفتار m در حدهای $R \to 0$ و $R \to \infty$ چگونه است؟

ه. فرض کنید m_0 صفر است. برای m مقدار $10^{-30}\,\mathrm{kg}$ اندازه‌گیری شده است. مرتبه‌ی بزرگی شعاع الکترون را بیابید.

و. می‌دانیم که میدان‌های الکتریکی و مغناطیسی انرژی دارند. برای میدان الکترومغناطیسی، چگالی انرژی، یعنی انرژی در واحد حجم تعریف می‌شود که مجموع همان دو چگالی انرژی‌ای است که در الکتروستاتیک و مغناطوستاتیک آموخته اید. انرژی الکترومغناطیسی یک الکترون متحرک را تا اولین مرتبه از $\frac{v}{c}$ بیابید.

ز. اگر به انرژی‌ای که در قسمت قبل یافتید جرم $\frac{E}{c^2}$ را نسبت دهیم، مرتبه‌ی بزرگی شعاع چقدر باشد تا این جرم $10^{-30}\,\mathrm{kg}$ باشد؟

9.5/10 دنباله

مسئله ی ۳

الف. به کمک قانون اسنل نشان دهید که بازتاب کلی در هنگام عبور نور از مرز جدایی از محیط رقیق به غلیظ نمی‌تواند رخ دهد.

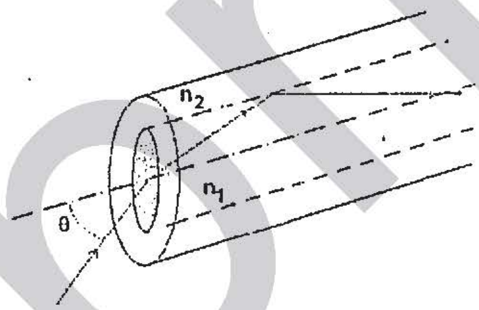
ب. یک فیبر نوری در نظر بگیرید که ضریب شکست مغزی آن n_1 و ضریب شکست غلاف آن n_2 باشد. بزرگترین زاویه‌ای را که نور ورودی از هوا می‌تواند با محور اپتیکی فیبر نوری بسازد (θ) بر حسب دو ضریب n_1 و n_2 به دست آورید.

4.05×10^{-1} (Rad)

ج. مقدار عددی این زاویه را هنگامی که $n_1 = 1.58$ و $n_2 = 1.53$ باشند حساب کنید.

د. فرض کنید ضریب شکست غلاف فیبر نوری در هنگامی که هیچ فشار مکانیکی بر آن وارد نشود برابر $n_2 = 1.53$ باشد. سپس اگر با افزایش فشار مکانیکی ضریب شکست غلاف به صورت تابعی خطی از فشار مطابق جدول زیر افزایش پیدا کند، در چه فشاری نور دیگر در فیبر نوری منتشر نخواهد شد؟

P[Pa]	n_2
0	1.53
1×10^5	1.54
2×10^5	1.55



چهارم

مسئله ی ۴

ریل مستقیمی در امتداد محور y در صفحه‌ی xy در نظر بگیرید. توپی بر روی ارابه‌ای که می‌تواند آزادانه بر روی ریل حرکت کند قرار دارد. جرم توپ و ارابه روی هم M است. گلوله‌ای به جرم m قرار است به وسیله‌ی توپ شلیک شود (جرم کل $M+m$ است). این مجموعه با تندی ثابت u بر روی ریل حرکت می‌کند و زاویه‌ی لوله‌ی توپ با افق α است. علاوه بر این، لوله‌ی توپ با صفحه‌ی yz زاویه‌ی سمتی ϕ دارد (ϕ زاویه‌ی بین صفحه‌ی قائمی که لوله‌ی توپ در آن قرار دارد با صفحه‌ی yz است). توپ گلوله را شلیک می‌کند و در لحظه‌ای که گلوله لوله‌ی توپ را ترک می‌کند، سرعتش نسبت به توپ v است.

الف. بردار سرعت گلوله را در دستگاه xyz که نسبت به ریل ساکن است بنویسید.

ب. برد گلوله را برای هدفی هم‌تراز با ارتفاع شلیک محاسبه کنید. منظور از برد، فاصله‌ی افقی نقطه‌ی برخورد گلوله با نقطه‌ای است که سر توپ در هنگام شلیک آنجا بوده.)

ج. به ازای ϕ و v ثابت، α ی مربوط به برد بیشینه از معادله‌ای مانند $\sum_{n=0} a_n \cos^n \alpha = 0$ به دست می‌آید. a_n های غیرصفر را بنویسید.

د. به ازای $\frac{u}{v}=0$ ، $\cos\alpha_0$ را به دست آورید، α_0 زاویه‌ای است که به ازای ϕ و v ی ثابت برد را بیشینه می‌کند.

ه. به ازای $\frac{u}{v}\neq 0$ ، تا مرتبه‌ی دوم $\frac{u}{v}$ جواب معادله‌ی $\sum_{n=0} a_n \cos^n \alpha = 0$ را بر حسب $\cos\alpha_0$ و سایر پارامترهای موجود در مسئله به دست آورید.

$$\alpha = \alpha_0 + \frac{u\sqrt{2}}{4V}\cos\phi + \left(\frac{8-23\cos^2\phi}{16}\right)\left(\frac{u}{v}\right)^2$$

$\frac{9}{16}$

در کل مسئله فکر کردم که با سرعت ثابت داره

$u \rightarrow u$

$v\sin\alpha - gt \quad v\sin\alpha - gt$

24

$\frac{23}{4}$

$\frac{n(n-1)}{2}$

مسئله‌ی ۵

دو ساعت را که در یک جا هم‌زمان شده‌اند و ابتدا در یک نقطه از فضا در چارچوب S بوده‌اند در نظر بگیرید. ساعت A در چارچوب S ساکن می‌ماند. ساعت B یک سفر شتابدار در امتداد محور x به مدت کل T (اندازه‌گیری شده توسط A) انجام می‌دهد. همه‌ی سرعت‌ها و شتاب‌ها که در زیر می‌آیند در S اندازه‌گیری می‌شوند. در انتهای سفر ساعت B گذشت زمان T' را نشان می‌دهد. سفر را می‌توان به صورت زیر به دو قسمت متقارن تقسیم کرد:

بخش رفت

1) ساعت B برای مدت $fT/4$ تحت یک شتاب ثابت a قرار می‌گیرد. f کسری از کل سفر است که در آن حرکت شتاب‌دار است.

2) سپس B برای مدت $(1-f)T/2$ با سرعت ثابت v حرکت می‌کند.

4) ساعت B برای مدت $fT/4$ تحت یک شتاب $-a$ حرکت می‌کند و به سکون می‌رسد.

بخش بازگشت

B دقیقاً همان حرکت‌های بخش رفت را، فقط با جهت و ترتیب عکس انجام می‌دهد، و در نهایت در محل A به سکون می‌رسد.

الف. نسبت $\dfrac{T'}{T}$ را به عنوان تابعی از f و v به دست آورید.

راهنمایی: دستگاه شتابدار را می‌توان در هر بازه‌ی زمانی کوچک یک دستگاه لخت گرفت که تبدیلات لرنتس برای آن برقرار است.

ب. حد زیر را حساب کنید. توجه کنید که v یک مقدار محدود و کوچکتر از c دارد.

$$\lim_{f\to 0}\frac{T'}{T}$$

ممکن است این انتگرال به کار بیاید.

$$\int\sqrt{1-x^2}\,dx=\frac{1}{2}\left(x\sqrt{1-x^2}+\sin^{-1}x\right)$$

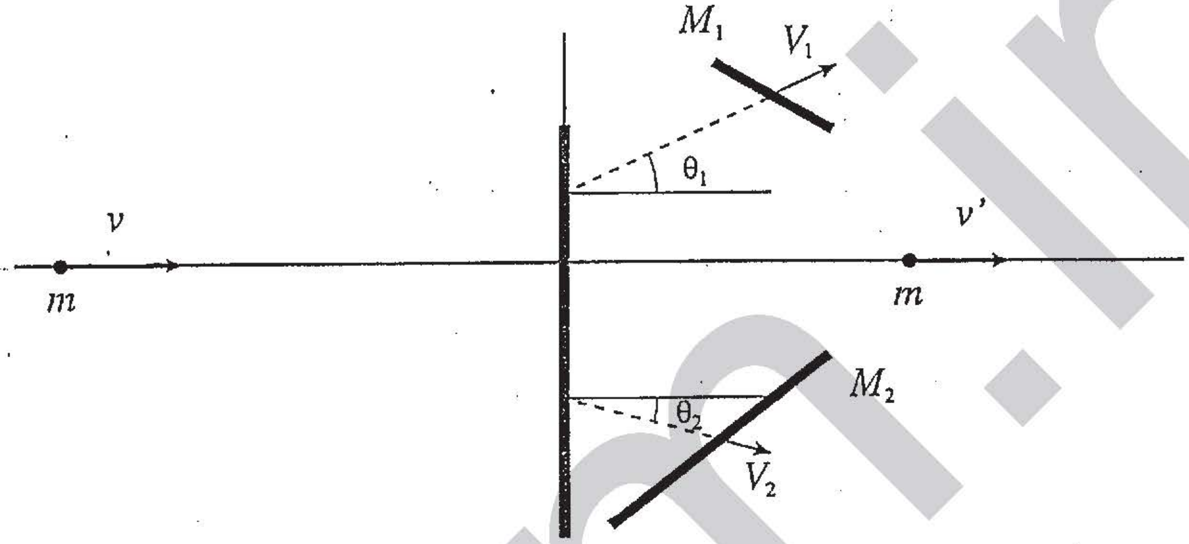
شیرزاد

مسئله ی ۱

۲/۱۵

گلوله‌ای به جرم m با سرعت v به تکه‌چوب یکنواختی با طول ℓ برخورد می‌کند و آن را در محل برخورد می‌شکند و به دو تکه با جرم‌های M_1 و M_2 تقسیم می‌کند. بعد از برخورد، گلوله با سرعت v' به حرکت خود (در همان امتداد فرودی) ادامه می‌دهد، و مرکز جرم قطعه ی 1 با سرعت V_1 و با زاویه‌ی θ_1 نسبت به محور x حرکت می‌کند. انرژی تلف شده در این برخورد را بر حسب داده‌های مسئله (m، M_1، M_2، v، v'، V_1، و θ_1) به دست آورید. (توجه: در شکل θ_2 و V_2 هم نشان داده شده اند، اما این دو کمیت جزو داده‌های مسئله نیستند.)

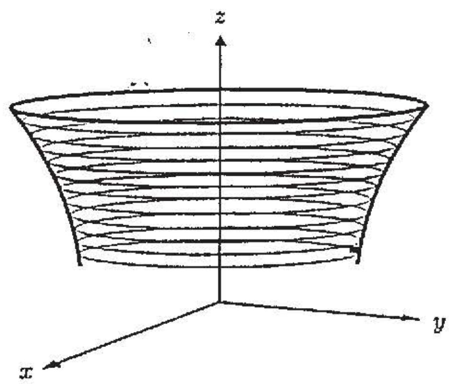
2/15



۱۵/۱۵

مسئله ی ۲

مطابقِ شکل تعدادی ذره رویِ سطحِ داخلیِ رویه‌یِ دوّارِ بدونِ اصطکاکی که محورِ تقارنِ آن z است، حرکت می‌کنند. تمامِ ذرات در لحظه‌یِ $t = 0$ در صفحه‌یِ xz قرار دارند، یعنی برایِ همه‌یِ آن‌ها $\phi|_{t=0} = 0$. پایین‌ترین ذره در شروعِ حرکت در $\rho|_{t=0} = \rho_0$ و $z|_{t=0} = z_0$ قرار دارد. ρ, ϕ و z مختصاتِ استوانه‌ای هستند. شتابِ گرانش $\mathbf{g} = -g\mathbf{k}$ است. معادله‌یِ رویه را $z = f(\rho)$ بگیرید.



a) $f(\rho)$ چه باشد تا همه‌یِ ذرات دایره‌هایِ اُفقی رویِ سطحِ داخلیِ رویه را با سرعتِ زاویه‌ایِ یکسانِ Ω طی کنند؟ زمانی که پایین‌ترین ذره یک‌دور کامل زد، معادلاتِ منحنی‌ای که ذرات در فضا می‌سازند، چیست؟

b) $f(\rho)$ چه باشد تا همه‌یِ ذرات دایره‌هایِ اُفقی رویِ سطحِ داخلیِ رویه را با سرعتِ یکسانِ U طی کنند؟ زمانی که پایین‌ترین ذره یک‌دور کامل زد، معادلاتِ منحنی‌ای که ذرات در فضا می‌سازند، چیست؟

مسئله ی ۳

این مسئله از چند قسمت گوناگون تشکیل شده است.

الف. یک عدسی نازک دوطرف‌محدّب، با ضریب شکست $n = 1.5$ دارای دو شعاع انحنای $r_1 = 30\,\text{cm}$ و $r_2 = 60\,\text{cm}$ است. اگر بخواهیم با این عدسی تصویری حقیقی با نصف اندازه‌ی یک لامپ تشکیل دهیم، فاصله‌ی لامپ تا لنز و فاصله‌ی پرده تا لنز چقدر باید باشند؟

P = 120   60

ب. دیاگرام پرتویابی را با رعایت مقیاس رسم کنید.

خطکش

ج. با فرض این که چشمه‌هایی داشته باشیم که موج هماهنگ ساده تولید کنند و فاصله‌ی چشمه‌ها تا نقطه‌ی مشاهده را یکسان بگیریم، شدت نور دریافتی در نقطه‌ی مشاهده را در حالتی که روشن باشد، برای دو حالت ۱) N چشمه‌ی همدوس همفاز و ۲) N چشمه‌ی کاتوره‌ای بدست آورید.

NI.

د. مقاومت الکتریکی عایق یک کابل هم‌محور (Coaxial) بین مغزی و پوسته‌ی کابل با رسانش σ را بر حسب طول آن (ℓ) و شعاعهای داخلی (a) و خارجی (b) آن بدست آورید.

$R = \frac{l}{\sigma\pi(b^2 - a^2)}$ $-R\alpha\Delta T$

ه. اگر به فرض، عایق بکار رفته در این کابل از جنس شیشه‌ی پیرکس باشد و با فرض این که σ تابعی از دما نباشد، به ازای گرم شدن کابل به اندازه‌ی $\Delta T = 10°\text{C}$ مقاومت الکتریکی این عایق چه قدر کاهش یا افزایش خواهد داشت؟

$\alpha = 3.2 \times 10^{-6}$ per °C : ضریب خطی انبساط طولی شیشه

A و B
15/20

مسئله ی ۴

$7.93\ s^{-1}$

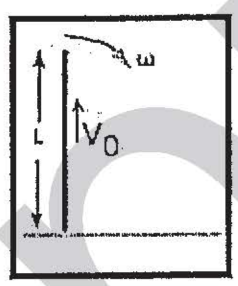
این مسئله از دو قسمت مجزا، که ربطی به هم ندارند تشکیل شده است.

A فرض کنید شخصی می‌خواهد در هوا معلق (پشتک) بزند. شخص را با میله‌ای یکنواخت به طول L مدل می‌کنیم که مرکز جرم آن در وسط است. او با سرعت v_0 به هوا می‌پرد. در هنگام پرش، شخص سرعت زاویه‌ای ω حول مرکزش دارد (شکل ۱). سپس وقتی مرکز جرمش در ارتفاع h بدنش را جمع می‌کند، یعنی زانونایش را به سوی سینه‌اش خم می‌کند. در این حالت بدن او را با استوانه‌ای به قطر $L/2$ مدل می‌کنیم (شکل ۲). فرایند جمع شدن بدن در $t = t_0$ آغاز می‌شود و δ ثانیه طول می‌کشد. سرعت زاویه‌ای بدن حول مرکز جرم پس از انجام این عمل ω' است، و در لحظات میانی فرض می‌کنیم $\frac{\omega+\omega'}{2}$ است. همچنین برای این که شخص بتواند پاهایش را به حالت ابتدایی بازگرداند و فرود آید، باید وقتی بدنش نسبت به حالتی که پرش آغاز شد یک دور کامل زد، مرکز جرم حداقل در ارتفاع $d + L/2$ باشد که $L/2$ طول پاهایش است و تقریباً نصف طول بدنش فرض می‌شود. در این ارتفاع بازگرداندن پاها به حالت عادی آغاز می‌شود. تا همین لحظه را در مسئله در نظر می‌گیریم و از فرایند برگشتن پاها به حالت عادی چشم می‌پوشیم. یعنی اگر در چنین ارتفاعی یک دور زده شده بود، در حالی که هنوز بدن جمع است، معلق را موفقیت‌آمیز در نظر می‌گیریم.

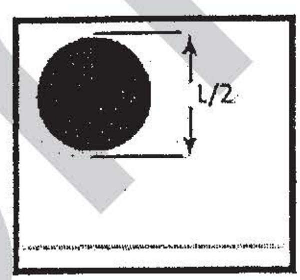
الف. حداقل مقدار ω را بیابید تا بدن شخص حداقل یک دور بچرخد.

ب. ورزش‌کاری با قد $1.7\ \mathrm{m}$ در نظر بگیرید که در حالت عادی می‌تواند به اندازه‌ی 0.7 قد خود بپرد، یعنی در اوج، ارتفاع سرش 1.7 برابر قدش است. فرض کنید در بالاترین نقطه‌ی مسیر جمع شدن بدن را آغاز کند. δ را $0.2\ \mathrm{s}$ و d را $10\ \mathrm{cm}$ بگیرید و فرض کنید می‌خواهد 2 دور در هوا بچرخد. ω را حساب کنید.

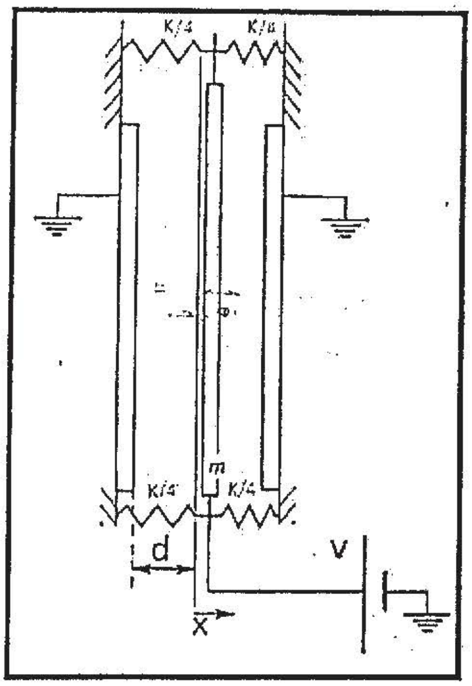
$11.01\ s^{-1}$



شکل ۱



شکل ۲



B شکل مقابل مربوط به مدلِ ساده‌شده ی قسمتی از یک شتاب‌سنجِ میکرومکانیکی است که در ساختِ مدارهای مجتمع کاربرد دارد. هدف این است که حرکتی ارتعاشی تولید کنیم که فرکانسِ آن حولِ یک فرکانسِ مرکزی، از طریقِ تنظیمِ ولتاژ قابلِ کنترل باشد. صفحه‌های فلزی کناری نشان داده شده در شکل همواره دارای پتانسیلِ صفر اند. صفحه‌ی میانی به جرم m که به پتانسیل معلوم V وصل است، در حالت تعادل به فاصله ی d از هر کدام از صفحات قرار دارد و جابه‌جایی آن از این مکان را با x نشان می‌دهیم. چهار فنر به بزرگی $\frac{k}{4}$ هم به صفحه ی میانی بسته شده که در حالت تعادل مقدار کشیدگی شان صفر است، یعنی طول کشیده نشده شان d است. سطح مقطع صفحات A است.

الف. میدانِ الکتریکی و پتانسیلِ الکتریکی را بر حسبِ فاصله از صفحه ی سمتِ چپ، در حالتی که صفحه ی میانی به اندازه ی x از تعادل جابه‌جا شده است رسم کنید.

ب. انرژی الکتریکی سیستم و نیروی الکتریکی وارد بر صفحه ی میانی را بر حسب x حساب کنید.

ج. معادله ی حرکت صفحه ی میانی را بنویسید.

$\left(\frac{1}{(d+x)} + \frac{1}{d-x}\right)$

د. انرژی قسمتِ ب را تا مرتبه ی دوم $\frac{x}{d}$ بسط دهید و آن را W_2 بنامید.

هـ. با فرض این که انرژی الکتریکی صفحه W_2 باشد، معادله ی حرکت را حل کنید. فرض کنید در لحظه ی اول صفحه از $x = x_0$ رها می‌شود.

$x_0 \cos\left(\sqrt{k - \frac{2\varepsilon_0 A V^2}{d^3}}\ t\right)$

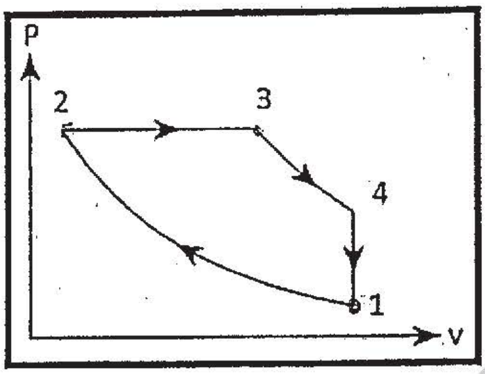
مسئله ی ۵

این مسئله از سه قسمتِ مجزا، که ربطی به هم ندارند تشکیل شده است.

A فوتونی با انرژی E به پروتون ثابتی برخورد می‌کند. حد اقل E را بیابید برای این که ذره‌ی مزون π در واکنش زیر تولید شود.

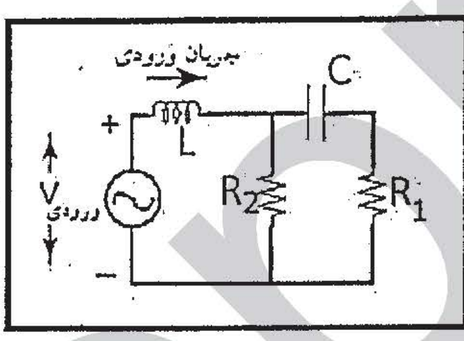
$$p^+ + \gamma \longrightarrow p^+ + \pi^0$$

جرم‌ها را m_p و m_π بگیرید.



B بازده ی چرخه ی مقابل را که از یک فرایند هم‌فشار، یک فرایند هم‌حجم، و دو فرایند هم‌دما تشکیل شده است بیابید. C_P و C_V گاز معلوم است و داریم $r_E = \frac{V_1}{V_3}$ و $r_C = \frac{V_1}{V_2}$. (این چرخه ی «دیزل» است.)

$\left(r_e - r_c + \ln\left(\frac{e^{r_e}}{e^{r_c}}\right)\right) / \left(\ln e^c + \frac{c_p}{v}\right($

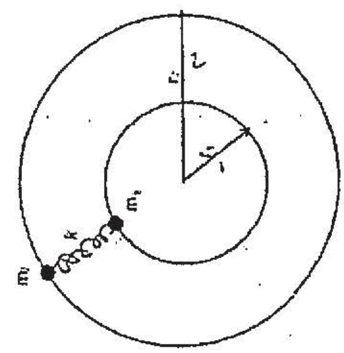


C در مدار مقابل، ولتاژ ورودی یک منبع سینوسی با دامنه‌ی V_0 است. فرکانس منبع را طوری بیابید که نسبت بزرگی دامنه ی ولتاژ ورودی به دامنه ی جریان ورودی (که از القاگر می‌گذرد) بیشینه شود.

مسئله ی ۶ کلاسی

$\frac{10}{10}$ $\frac{14}{15}$

دو ریل دایره‌ای هم‌مرکز به شعاع‌های r_1 و r_2 ($r_1 < r_2$) روی سطح افقی ثابت شده اند.



دو جسم به جرم‌های m_1 و m_2 می‌توانند به ترتیب روی حلقه‌های 1 و 2 بدون اصطکاک حرکت کنند. این دو جسم با فنری به طول آزاد $\ell_0 < r_1 + r_2$ و ثابت K به هم متصل هستند. طول فنر همواره برابر فاصله ی افقی دو جسم است. فرض کنید فنر و ریل‌ها هیچ‌گاه به هم گیر نمی‌کنند. در ابتدا دو جسم در راستای یک شعاع قرار گرفته اند. به جسم 1 سرعت اولیه‌ی v می‌دهیم، در حالی که جسم 2 ساکن است.

الف. سرعت زاویه‌ای دستگاه مختصات دواری را بیابید که تکانه‌ی زاویه‌ای سیستم ابتدا در آن صفر است. (مبداء دستگاه را مرکز حلقه‌ها قرار دهید.)

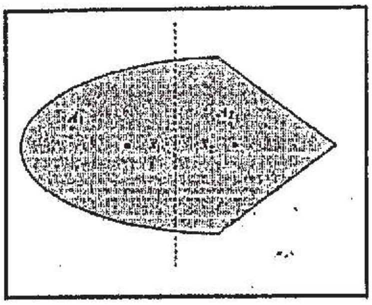
ب. حد اقل و حد اکثر اندازه‌ی سرعت‌های اجسام 1 و 2، و ماکزیمم طول فنر را در چارچوب ساکن بیابید. تمامی جوابها را (حد اقل و حد اکثر سرعت‌های اجسام 1 و 2 و حد اکثر طول فنر) با توجه به روابط ممکن بین پارامترهای مسئله (r_1، r_2، ℓ_0، m_1، m_2، K، و V) بیابید.

راهنمایی: از دستگاه مختصات دوار قسمت الف استفاده کنید.

8.30 _ 1.30

$\frac{4}{10}$ مسئله ی ۱

منفی تروف به درست نوشت



شکل ۱

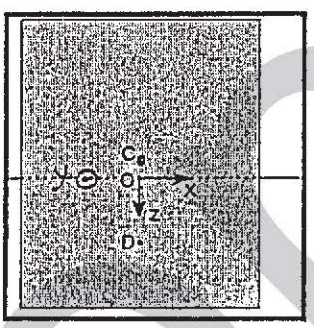
الف. جسمی یکنواخت و صفحه‌ای مطابق شکل ۱ در نظر بگیرید که دارای محور تقارن است. محور نشان داده شده در شکل از مرکز جرم جسم می‌گذرد و جسم را به دو ناحیه با مساحت‌های A_1 و A_2 تقسیم می‌کند که مرکز جرم هر کدام از آنها در شکل نشان داده شده و دارای فاصله ی $\bar{x}_1$ و $\bar{x}_2$ با محور اند. فرض کنید جسم حول محور به اندازه ی زاویه ی کوچک θ بچرخد. حجمی را که هر یک از دو ناحیه در طی این دوران جاروب می‌کند بر حسب A_1 و A_2 و $\bar{x}_1$ و $\bar{x}_2$ بیابید. از مرتبه ی دوم و بالاتر θ صرف نظر کنید.

ب. نسبت دو حجم قسمت قبل را بیابید.

تعریف: برای یک جسم صفحه‌ای یکنواخت به مساحت A شعاع چرخش حول یک محور در آن صفحه را $\sqrt{\frac{\sum r_i^2 \Delta A_i}{A}}$ تعریف می‌کنیم که r_i نشان دهنده ی فاصله ی جرم i ام از محور است. شعاع چرخش را با K نشان می‌دهیم.

ج. شعاع چرخش یک صفحه ی مربعی یکنواخت به ضلع a را حول یکی از اضلاعش بیابید.

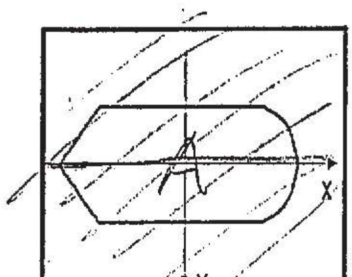
جسمی مطابق شکل ۲ در آب شناور است. سطح مقطع این جسم در شکل ۳ نشان داده شده است. این جسم مطابق شکل ۳ در صفحه ی xy متقارن است. شکل ۳ در واقع نمای سطح تماس جسم و آب را از بالا نشان می‌دهد، یعنی نمای شکل ۲ از بالا است. مساحت این مقطع را A بگیرید. در شکل ۲، C مرکز جرم کل سیستم است.



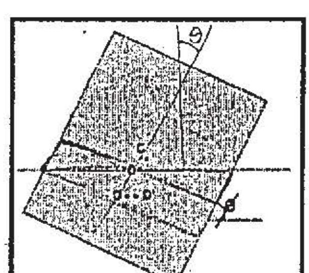
شکل ۲

مرکز شناوری جسم را مرکز مایع جابه‌جا شده تعریف می‌کنیم که در شکل با D نشان داده شده است. فاصله ی C و D را h بگیرید. حجم زیر آب از جسم V است. فرض کنید جسم در اثر اختلال کوچکی، حول نقطه ی O به اندازه ی کوچک θ بچرخد، طوری که محور y محور دوران باشد. در این مسئله از مرتبه ی دوم و بالاتر θ صرف نظر می‌کنیم. فرض کنید در اثر این دوران، حجم آبِ جابه‌جا شده توسط جسم تغییر نکند.

د. با توجه به نکته ی آخر، محور دوران که در شکل ۲ با O نشان داده شده است (یعنی همان محور y در شکل ۳) کجا است؟



شکل ۳



شکل ۴

10/10

مسئله ی ۲

دو سیاره A و B با جرم‌های یکسانِ m به دورِ ستاره‌ای می‌گردند. از نیروی گرانشِ بینِ سیارات چشم‌پوشی کنید. انرژیِ سیاره ها برابر است. بردارِ تکانه‌زاویه‌ایِ سیاره‌ها نسبت به ستاره را برابر و اندازه‌ی آن‌ها را L بگیرید. فرض کنید ستاره بینِ دو سیاره و همه در ابتدا رویِ یک خط هستند. اگر مسیرِ سیاره‌ها دایره باشد ناظرِ رویِ سیاره‌یِ A سیاره‌یِ B را نمی‌بیند. اما اگر مسیرِ آن‌ها بیضی باشد وضعیت ممکن است متفاوت باشد. مسیرِ هر سیاره را یک بیضی با نیم‌قطرِ بزرگِ a و خروج از مرکزِ $\epsilon \ll 1$ بگیرید.

فرض کنید در ابتدا سیاره‌یِ A در حضیض و سیاره‌یِ B در اوجِ مسیرش باشد.

a) $r(t)$ و $\theta(t)$ مختصاتِ مکانِ سیاره‌یِ A در دستگاهِ قطبی را تا مرتبه‌یِ اولِ ϵ به دست آورید.

b) مبدأِ مختصات O را رویِ ستاره بگیرید. زاویه‌یِ $\angle OAB$ را α بگیرید. α را تا مرتبه‌یِ اولِ ϵ به دست آورید. تا این مرتبه از ϵ، در چه زمانی α بیشینه می‌شود؟

حالا فرض کنید در ابتدا هم سیاره‌یِ A و هم سیاره‌یِ B در اوجِ مسیرشان باشند.

c) زاویه‌یِ $\angle OAB$ را به دست آورید.

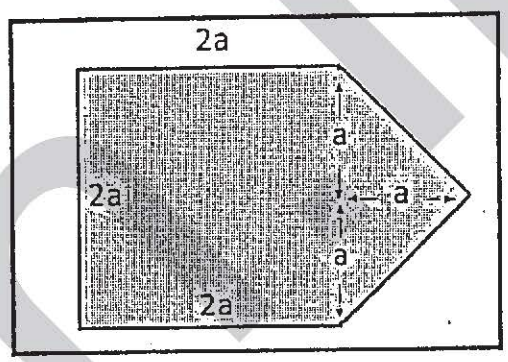
می‌توان فرض کرد که کل نیروی گرانش به مرکز جرم و کل نیروی ارشمیدس به مرکز شناوری وارد می‌شود. برای وجود تعادل، نباید پس از دوران مرکز جرم سمت راست مرکز شناوری قرار گیرد. شکل ۴ دوران یافته ی جسم را نشان می‌دهد.

ه. اختلاف مؤلفه ی z مرکز شناوری جدید و قدیم را حساب کنید.

و. مؤلفه ی x مرکز شناوری جدید را بیابید.

ز. شرطی میان h و V و A و K بیابید که جسم تعادل پایدار داشته باشد.

ح. جسمی به چگالی $\frac{\rho}{\alpha}$ دارای سطح مقطع نشان داده شده در شکل ۵ در نظر بگیرید که در آب به چگالی ρ شناور است. ارتفاع جسم $4a$ و سطح مقطع آن همه جا یکسان است. شرطی روی α بیابید تا تعادل وجود داشته باشد.



شکل ۵

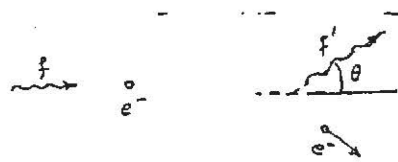
3.5

مسئله ی ۳

در این مسئله می‌خواهیم پدیده ی کامپتون و تعمیم ساده‌ای از آن را بررسی کنیم. مسئله نسبیتی است.

پراکندگی کامپتون. فوتون ذره ی موج الکترومغناطیسی است که با سرعت c حرکت می‌کند. اگر فرکانس فوتون f باشد، انرژی آن hf است، که در این جا h ثابت پلانک است. تکانه‌ای که ذره با خود حمل می‌کند hf/c است.

فوتونی با فرکانس f با الکترون ساکنی برخورد می‌کند. بر اثر این برخورد فوتون با زاویه ی θ نسبت به راستای اولیه اش پراکنده می‌شود و الکترون نیز در راستایی دیگر به حرکت در می‌آید.



فرکانس فوتون خروجی با فرکانس فوتون ورودی متفاوت است. آن را f' می‌نامیم.

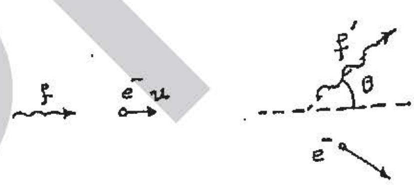
الف. f' را بر حسب f، h، c، m(جرم سکون الکترون)، و θ بیابید.

انرژی و تکانه نیز مانند زمان و مکان با تغییر دستگاه تبدیل می‌شوند، به این معنی که اگر در دستگاه S ذره‌ای با انرژی E و تکانه ی $\vec{P}$ حرکت کند، در دستگاه S' که با سرعت v (در راستای x) نسبت به S حرکت می‌کند، انرژی اش E' و تکانه‌اش $\vec{P}'$ است که

$$E' = \gamma(E - vP_x) \qquad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}$$

$$P'_x = \gamma\left(P_x - \frac{v}{c^2}E\right)$$
$$P'_y = P_y$$
$$P'_z = P_z$$

حال فرض کنید که الکترون پیش از برخورد با سرعت u در امتداد محور x در حالت حرکت باشد و فوتونی همانند قسمت الف با آن برخورد کند–پیش از برخورد فوتون و الکترون در یک راستا حرکت می‌کنند.



بر اثر این برخورد فوتون با زاویه ی θ نسبت به راستای اولیه اش پراکنده می‌شود و الکترون نیز در راستایی ادامه ی حرکت می‌دهد. فرکانس فوتون خروجی با فرکانس فوتون ورودی متفاوت است. آن را f' می‌نامیم.

ب. f' را بر حسب f، h، c، m (جرم سکون الکترون)، u، و θ بیابید.

مسئله ی ۴

در این مسئله می‌خواهیم تغییرات دما، فشار، و چگالی اتمسفر را بررسی کنیم.

استوانه ای به ارتفاع h در نظر بگیرید که به طور عمودی روی زمین قرار گرفته است و هوا آن را پر کرده است. به تقریب، هوا را گازی کامل، با جرم مولی M می‌گیریم. ثابت گازها را با R نشان می‌دهیم. شتاب گرانش $-g$ است و مستقل از ارتفاع است. ارتفاع از سطح زمین را با z نشان می‌دهیم. لایه‌ای از هوا که بین z و $z+dz$ قرار دارد را در نظر بگیرید. فشار آن را با $P(z)$، دمای آن را با $T(z)$، و چگالی آن را با $\rho(z)$ نشان می‌دهیم. این لایه در تعادل مکانیکی است و پارامترهای ترمودینامیکی آن در معادله ی حالت گازهای کامل صدق می‌کند. علاوه بر این، برای تمام لایه‌ها داریم:

$$P\,\rho^{-\gamma} = P_0\,\rho_0^{-\gamma},$$

که در آن P_0 و ρ_0 و γ ثابت هستند.

الف. معادله ی تعادل مکانیکی لایه را بنویسید.

ب. معادله ی حالت گاز کامل را برای لایه بنویسید.

ج. مشتق دما نسبت به ارتفاع، $\frac{dT}{dz}$ را بیابید.

د. با حل معادله ی قسمت قبل دما بر حسب ارتفاع را بیابید ($T(z)$). پاسخ شما حاوی یک ثابت است که لازم نیست آن را تعیین کنید، اما این ثابت باید بعد دما داشته باشد. این ثابت را با θ نشان می‌دهیم.

ه. چگالی بر حسب ارتفاع را بیابید ($\rho(z)$). تنها ثابت نامشخصی که می‌تواند ظاهر شود θ است.

و. جرم هوای داخل استوانه تقسیم بر سطح آن $\rho_0\,h$ است. معادله ای برای θ بنویسید.

$-\theta^{\frac{\gamma}{\gamma+1}}$

مسئله ی ۵

6/15

وقتی دمای یک سیم فلزی به طول L و چگالی ρ و سطح مقطع A به اندازه ی dT زیاد شود، تغییر آنتالپی آن با فرض این که فشار وارد بر سیم ثابت بماند برابر است با

$$dQ = dH = \rho\, A\, L\, C_F.$$

ضریب انبساط طولی سیم را α می‌نامیم.

الف. اگر نیروی F به دو سر سیم وارد شود، طول آن تغییر می‌کند. در دمای ثابت T_0، F را بر حسب x رسم کنید. x میزان کشیدگی نسبت به حالت $F=0$ در این دما است. مدول یانگ سیم در دمای ثابت را Y_T می‌نامیم.

ب. روی شکل قسمت قبل، F را بر حسب x برای دمای ثابت T_1 که از T_0 بزرگتر است، رسم نمایید.

اگر سیم به صورت بی‌دررو کشیده شود، دمایش افزایش می‌یابد. شیب منحنی F بر حسب x برای فرایند بی‌دررو کمتر از هم‌دما است. دسته منحنی‌های بی‌دررو در صفحه‌ی $x-F$ خطوطی موازی اند. اگر سیم فلزی گسترش یابد، محیط روی آن کار انجام داده است (بر عکس گازها). فرض کنید سیم فلزی تحت نیروی F_1 در دمای T_1 است و فرایند هم‌دمایی را می‌پیماید تا به نیروی F_2 برسد. نقطه‌های ابتدا و انتها را به ترتیب A و B می‌نامیم. سپس طی یک فرایند بی‌دررو به نقطه‌ی C دارای دمای T_2 می‌رود، بعد یک فرایند هم‌دما را می‌پیماید تا به نقطه‌ی D برسد و سپس طی یک فرایند بی‌دررو خنک می‌شود و به نقطه‌ی A باز می‌گردد.

ج. شکل چرخه ی فوق را در نموداری جدید، در صفحه ی $x-F$ رسم کنید.

د. نسبت $\frac{T_2-T_1}{F_2-F_1}$ را بر حسب T_1 و C_F و سایر ثوابت مربوط به سیم حساب کنید. (توجه کنید برای چرخه ی کارنو داریم $\frac{Q_c}{Q_H}=\frac{T_C}{T_H}$).

ه. برای سیم مدول یانگ در دمای ثابت را Y_T و مدول یانگ بی‌دررو را $Y_{\rm ad}$ می‌نامیم. با استفاده از قسمت‌های قبل، برای دمای دلخواه T، رابطه‌ای میان Y_T و $Y_{\rm ad}$ بر حسب ثوابت مسئله بیابید.

Kamyar Akbari Roshan

Φ6 4 ever!

مسئله ۸ وقتی نور تک فام (همدوس) از لایه نازکی بازتاب می شود به علت بازتابهای چندگانه اثرات تداخلی ظاهر می شود. اگر نور را به یک لایه نازک شیشه با ضریب شکست n که در هوا قرار گرفته، (دو طرف آن هوا با ضریب شکست یک قرار دارد. $n>1$) بتابانیم، نور بازتابی در زوایای مختلف دارای کمینه و بیشینه است..

الف) ضریب بازتاب را با توجه به اثرات تداخلی بین شیشه و هوا به صورت تابعی از زاویه بدست آورید.

ب) مقادیر کمینه شدت بازتاب، در زوایای مختلف تابش چقدر است و در چه زوایایِ تابشی، θ، اتفاق می افتد؟

پ) آیا در زوایای تابشی با شدت کمینه فرقی بین دو قطبش s و p وجود دارد؟ اگر وجود دارد در چه زاویه و یا زوایایی و چگونه؟

ت) اگر ضخامت شیشه نسبت به طول موج، خیلی بزرگ $d \gg \lambda$ باشد، اختلاف زاویه تابش دو کمینه متوالی شدت، $\delta\theta$، را بر حسب زاویه تابش، θ (دو کمینه در زوایای $\theta-\delta\theta/2$ و $\theta+\delta\theta/2$ اتفاق می افتد)، ضریب شکست، n، طول موج نور، λ، و ضخامت شیشه نازک، d، بدست آورید.

راهنمایی: برای هر دو قطبش s و p در هر زاویه ای داریم: $r_{12}=-r_{21}$ و $(r_{12})^2+t_{12}t_{21}=1$

ضرایب فرنل به این صورت است: θ زاویه تابش و φ زاویه شکست (داخل شیشه به ضریب شکست n) است.

$$t_{12,s}=\frac{2n_1Cos(\theta)}{n_1Cos(\theta)+n_2Cos(\varphi)}=\frac{2Cos(\theta)Sin(\varphi)}{Sin(\theta+\varphi)} \quad \text{و} \quad r_{12,s}=\frac{n_1Cos(\theta)-n_2Cos(\varphi)}{n_1Cos(\theta)+n_2Cos(\varphi)}=-\frac{Sin(\theta-\varphi)}{Sin(\theta+\varphi)}$$

$$t_{12,p}=\frac{2n_1Cos(\theta)}{n_1Cos(\varphi)+n_2Cos(\theta)}=\frac{2Cos(\theta)Sin(\varphi)}{Sin(\theta+\varphi)Cos(\theta-\varphi)} \quad \text{و} \quad r_{12,p}=\frac{n_1Cos(\varphi)-n_2Cos(\theta)}{n_1Cos(\varphi)+n_2Cos(\theta)}=\frac{\tan(\theta-\varphi)}{\tan(\theta+\varphi)}$$

$$1+x+x^2+x^3+...+x^N=\frac{1-x^{N+1}}{1-x}$$

باسمه تعالی

ادامه امتحان نهایی المپیاد فیزیک (۱۰ نفر)

۹۰/۲/۱۹

وقت: ۵ ساعت

مسئله ۷

به واپاشی هایی که در نتیجه ی آن الکترون آزاد تولید می شود، واپاشی β گفته می شود. واپاشی زیر را درنظر بگیرید.

$$A \longrightarrow B + e$$

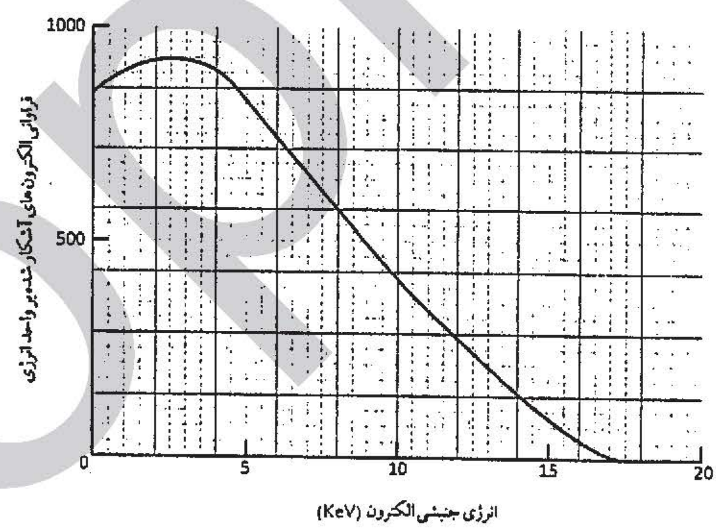
آ) اگر ذره ی A در ابتدا ساکن بوده باشد، انرژی الکترون را بدست آورید. فرض کنید جرم سکون ذرات A ، B و الکترون به ترتیب m_A، m_B و m_e باشد. در تمام قسمت ها از برهمکنش الکتریکی الکترون ها با هسته صرف نظر کنید.

ب) یک محفظه از ذرات تریتیوم [۱] ($^{3}_{1}H$) با دمای T در اختیار داریم. تریتیوم یک ایزوتوپ پرتوزای هیدروژن است. واپاشی آن طبق واکنش زیر انجام می پذیرد که باعث تولید الکترون و هلیوم-۳ می گردد:

$$^{3}_{1}H \longrightarrow \ ^{3}_{2}He^{1+} + e \qquad (1)$$

حداکثر و حداقل انرژی الکترون های آشکار شده را بدست آورید. فرض کنید سرعت تمامی مولکول های تریتیوم یکسان است. مقدار عددی این کمیت ها را نیز برای $T = 300°C$ محاسبه نمایید. (مقادیر عددی مورد نیاز در انتهای سوال ذکر شده است)

ج) در سال ۱۹۳۰ میلادی، آزمایش هایی برای بررسی واپاشی β انجام گرفت. نمودار زیر طیف انرژی جنبشی الکترون های ساطع شده طی واپاشی تریتیوم را نشان می دهد:



[۱] tritium

همانطور که مشاهده می کنید، نتایج آزمایش با نظریه همخوانی ندارد. به طور کیفی نموداری که نظریه پیش بینی می کند را رسم نمایید.

د) در همان سال ولفگانگ پائولی[۲] برای رفع این ناسگاری وجود ذره ی بدون بار دیگری به نام نوترینو[۳] را پیشنهاد کرد و واکنش را بصورت زیر تصحیح کرد[۴]

$$ {}^{3}_{1}H \longrightarrow {}^{3}_{2}He^{1+} + e + \nu \qquad (۲) $$

با توجه به نمودار قسمت قبل حد بالایی برای جرم سکون نوترینو بدست آورید.

ه) اگر در یک واپاشی، زاویه بین الکترون و یون هلیوم تولید شده، ۳۰° باشد و انرژی جنبشی الکترون $۵KeV$ باشد، تکانه نوترینو تولید شده را محاسبه کنید.

جرم الکترون:	$۰/۵۱۰۹۹۸\, MeV/c^{۲}$
جرم تریتیوم:	$۲۸۰۹/۴۳۱۸۱۸\, MeV/c^{۲}$
جرم هلیوم-۳:	$۲۸۰۹/۴۱۳۲۸۱\, MeV/c^{۲}$
ثابت بولتزمن:	$۸/۶۱۷۳۴۳ \times ۱۰^{-۵}\, eV/^\circ K$

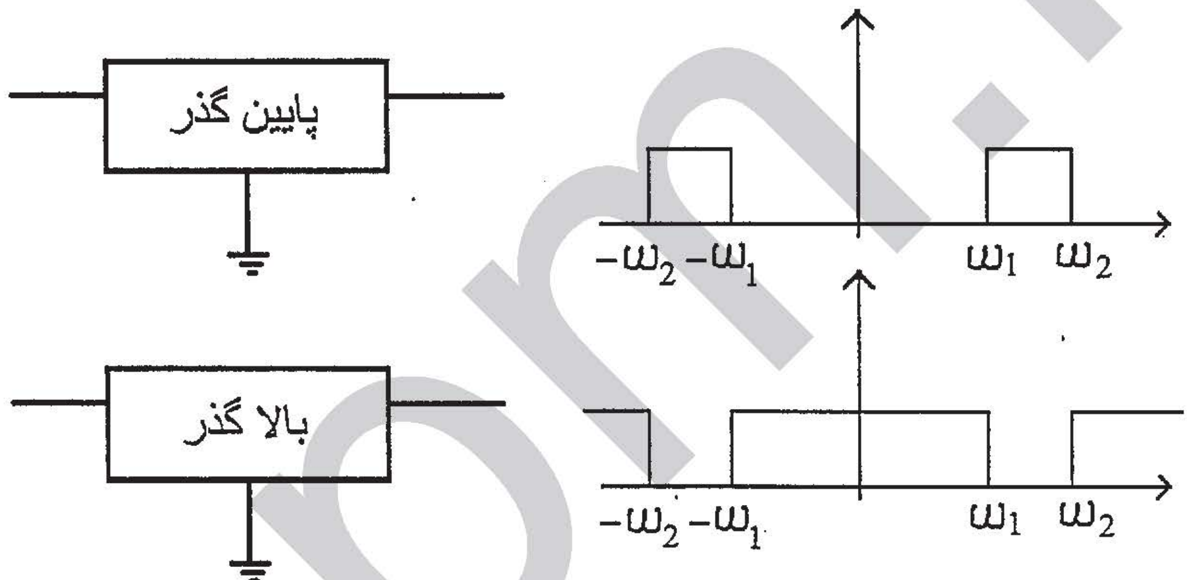
[۲] Wolfgang Pauli

[۳] neutrino

[۴] البته پائولی نام این ذره را نوترون گذاشت، اما ۲ سال بعد چادویک با کشف ذره ی بدون بار درون هسته اتم همین نام را استفاده کرد. سال بعد فرمی با ارائه ی نظریه کاملی در مورد واپاشی β، نشان داد که ذره ی پائولی باید جدی گرفته شود. او نام نوترینو را که در زبان ایتالیایی به معنی نوترون کوچک است پیشنهاد کرد. سرانجام در سال ۱۹۵۰ شواهد آزمایشگاهی مستقیمی برای وجود نوترینو بدست آمد.

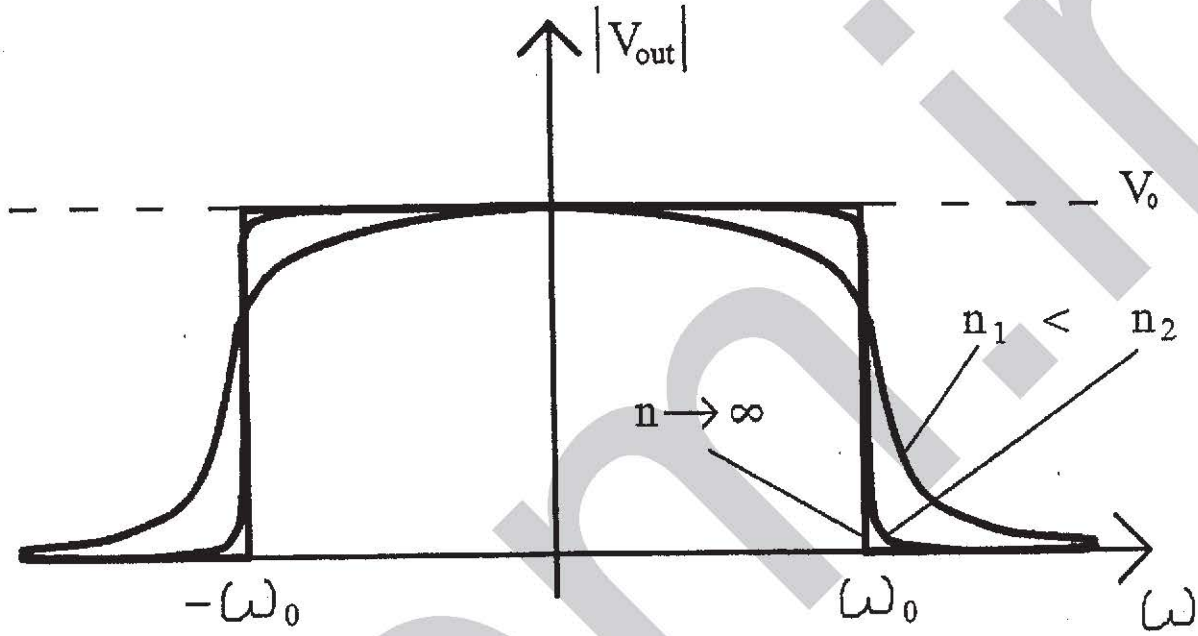
قسمت سوم:

ث) حال فرض کنید فیلترهای بالاگذر و پایین گذر داریم، مطابق شکل. چگونه می توانیم فیلترهای میان گذر و میان نگذر درست کنیم؟ می توانید از المانهای متعارف با مقادیر دلخواه نیز استفاده کنید تا با تقریب خوبی بین فرکانس زاویه ای های ω_1 و ω_2 به ترتیب عبور داشته باشیم و نداشته باشیم. همچنین نگران افت جریان یا ولتاژ نباشید، فرض کنید در این قسمت تقویت کننده های لازم را داریم(یعنی الزامی نیست در نواحی گذر اندازه ی دامنه V_0 باشد).



شکل 2. المانهای پایین گذر و بالا گذر حاوی مدارهای بررسی شده در قسمتهای قبل و نمودارهای میان گذر (بالا راست) و میان نگذر (پایین راست)

می شد). داریم: $g_k=\frac{A_k}{A_{k+1}}$. اگر A_k ها را بر حسب g_{k-2}، g_{k-3}، ...، g_1 و d_i ها داشته باشیم، یک الگوریتم تمیز برای یافتن g_k ها به ترتیب از یک تا n از روی g_k های قبلی داریم. A_k ها را با استفاده متعدد از Σ (عملگر جمع زنی)، بر حسب آنها بنویسید. (می توانید برای ایده گرفتن برای چند n مختلف چندجمله ای را بنویسید و A_k ها را بررسی کنید.)



شکل 1. با زیاد شدن n تابع ولتاژ خروجی بر حسب فرکانس زاویه ای نزدیک به تابع پله می شود.

قسمت دوم:

ت) با توجه به معادلاتی که در قسمت قبل ظاهر شد، چه تغییر ساده ای در مدار بدهیم تا تبدیل به فیلتر بالاگذر شود؟

راهنمایی:

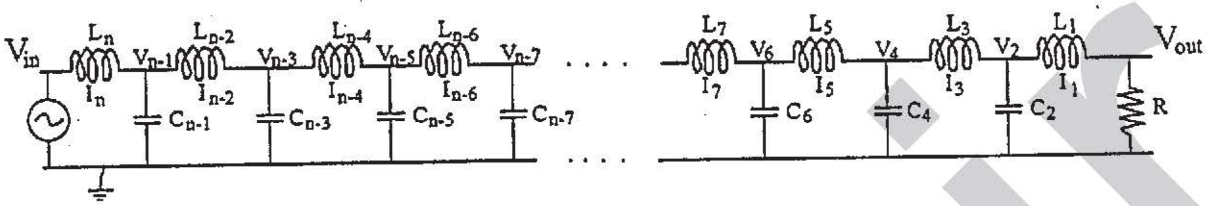
برای فیلتر بالاگذر داریم:

$$V_{out}=\frac{V_0(\frac{\omega}{\omega_0})^n}{\sqrt{1+(\frac{\omega}{\omega_0})^{2n}}}=\frac{V_0}{\sqrt{1+(\frac{\omega_0}{\omega})^{2n}}}.$$

مسئله 11

فیلتر آنالوگ

یک مدار در نظر بگیرید به شکل زیر:



قسمت اول:

به طرف چپ (ورودی) ولتاژ متناوب وارد می کنیم. قرار است در طرف راست (خروجی) تقریبا همان ولتاژ را دریافت کنیم به شرط آنکه فرکانس زاویه ای از یک مرز مشخصی (ω_0) کمتر باشد و تقریبا صفر اگر بیشتر بود. این یک فیلتر رادیوی آنالوگ است که به باتروورث معروف است.

برای سهولت ولتاژ ورودی را برابر $V_0 e^{i\omega t}$ بگیرید. با جریان و ولتاژ به عنوان عدد مختلط برخورد کنید که اطلاعات فاز هم حفظ شود.

الف) یک رابطه بازگشتی برای V_k و I_k بر حسب جریان ، ولتاژ و مقدار المان قبلی بیابید.

امپدانس القاگر $i\omega L$ و امپدانس خازن $\frac{1}{i\omega C}$ است.

ب) V_{in} یا همان V_{n+1} مساوی یک چند جمله ای درجه n از $(i\omega)$ ضرب در V_{out} است. ضرایب این چندجمله ای را d_l بنامید. همان طور که می دانید قدر مطلق یک عدد مختلط به شکل a+ib با a و b حقیقی برابر $\sqrt{a^2+b^2}$ است. d_l ها را به گونه ای بیابید که قدر مطلق این چند جمله ای برابر $\sqrt{1+(\frac{\omega}{\omega_0})^{2n}}$ شود.

در این حالت داریم: $|V_{out}| = \frac{V_0}{\sqrt{1+(\frac{\omega}{\omega_0})^{2n}}}$ (چون برای دو عدد مختلط داریم: $|xy|=|x||y|$). برای n های زیاد نمودار دامنه ولتاژ خروجی بر حسب فرکانس زاویه ای به شکل صفحه ی بعد است. بدین نحو، یک فیلتر پایین گذر داریم که فقط سیگنالهایی با فرکانس زاویه ای کمتر از ω_0 را رد می کند.

پ) کمیت A_j را به شکل زیر تعریف می کنیم:

$A_j = g_j g_{j+1} \dots g_n$

که در آن g_k به ازای kی فرد برابر L_k و به ازای kی زوج برابر C_k می باشد(یا برعکس، اگر مدار با خازن شروع

مسئله ۱۰

شخص ی در مبداءِ مختصه‌ها یِ دستگاهِ لختِ K ایستاده است. سفینه‌ای با سرعتِ v در امتدادِ خطِ

$$(x = a, z = 0)$$

که موازی یِ محورِ y است، حرکت می‌کند. این سفینه در لحظه یِ $t = 0$ در نقطه یِ $y = 0$ است. در این سفینه ساعت ی هست که صفحه یِ آن در معرضِ دیدِ شخص ی است که در مبداءِ K ایستاده است. ساعتِ رو یِ سفینه چنان تنظیم شده که وقت ی از نقطه یِ $(x = a, y = 0, z = 0)$ رد می‌شود، عددِ $\tau = 0$ را نشان می‌دهد، که τ ویژه‌زمان است.

شخص ی که در مبداءِ دستگاهِ K ایستاده است در لحظه یِ t (تعریف شده با ساعت‌ها یِ ساکن در K) عددِ $f(t)$ را رو یِ ساعتِ سفینه می‌خواند.

تذکر: سرعتِ نور را واحد نگیرید، به طور ی که c در فرمولها یتان دیده شود.

الف. تابعِ $f(t)$ را به طورِ صریح (نه ضمنی) به دست آورید، و در محلِ تعیین شده بنویسید.

ب. $f(0)$ را به دست آورید و در محل تعیین شده بنویسید.

ج. $\lim_{t\to\infty} f(t)$ را به دست آورید و نمودارِ آن را در محلِ تعیین شده بکشید.

د. برا یِ $v = 0.8c$ و $\frac{a}{c} = 1\,\mathrm{s}$ نمودارِ تابعِ $f(t)$ را در محل تعیین شده بکشید. اگر این نمودار مجانب یا مجانبها یی دارد، آنها را مشخص کنید.

مسئله ی ۹

تیغه ای شفاف نازکی در اختیار داریم. جهت عمود بر سطح این تیغه را محور z در نظر بگیرید. این تیغه (مانند تیغه های ربع موج) دارای دو محور است که محور سریع را x (با ضریب شکست n_f) و محور کند را y (با ضریب شکست n_S) می نامیم. یعنی اگر نوری با میدان الکتریکی موازی با محور x عمود بر سطح بتابد آنرا با ضریب شکست n_f می بیند و اگر نوری با میدان الکتریکی موازی با محور y عمود بر سطح بتابد آنرا با ضریب شکست n_S می بیند. $(n_S > n_f > 1)$ با توجه به اینکه نور تابیده همدوس است، به علت بازتابهای چندگانه اثرات تداخلی در عبور و بازتاب نور ظاهر می شود.

(تذکر:در تمام این سوال فقط تابش عمودی است.)

اگر نوری با قطبش خطی (به صورت عمودی) به این سطح برخورد کند.

الف) بین مولفه های میدان الکتریکی عبوری (در راستای x و y) اختلاف فاز بوجود خواهد آمد. این اختلاف فاز چقدر خواهد بود؟

ب) بین مولفه های میدان الکتریکی بازتابی (در راستای x و y) اختلاف فاز بوجود خواهد آمد. این اختلاف فاز چقدر خواهد بود؟

پ) اگر بخواهیم اختلاف فاز بین مولفه های میدان الکتریکی عبوری (در راستای x و y) برابر $\frac{\pi}{2}$ باشد، این تیغه شفاف چه ضخامتی باید داشته باشد. (بدست آوردن معادله کافیست.)

ت) ما می خواهیم با عبور دادن یک نور با قطبش خطی از این تیغه ($\vec{E}_0 = E_0 Cos(\varphi)\hat{i} + E_0 Sin(\varphi)\hat{j}$ با تابش عمودی)، قطبش دایروی بسازیم. با توجه به اینکه ما می دانیم ضریب بازتاب شدت برای هر دو قطبش نور (در حالت عمود) بسیار کوچکتر از یک است $\left(R_f < R_S = \left(\frac{1-n_S}{1+n_S}\right)^2 << 1\right)$ ضخامت تیغه ، d، و زاویه میدان الکتریکی نور ورودی با محور x، φ، را تا مرتبه اول نسبت به ضرایب بازتاب شدت ، R_S و R_f ، بدست آورید.

راهنمایی: برای هر دو قطبش s و p در هر زاویه ای داریم: $r_{12} = -r_{21}$ و

$$(r_{12})^2 + t_{12}t_{21} = 1$$

ضرایب فرنل به این صورت است: θ زاویه تابش و φ زاویه شکست (داخل شیشه به ضریب شکست n) است.

$$t_{12,s} = \frac{2n_1 Cos(\theta)}{n_1 Cos(\theta) + n_2 Cos(\varphi)} = \frac{2Cos(\theta)Sin(\varphi)}{Sin(\theta+\varphi)} \quad \text{و} \quad r_{12,s} = \frac{n_1 Cos(\theta) - n_2 Cos(\varphi)}{n_1 Cos(\theta) + n_2 Cos(\varphi)} = -\frac{Sin(\theta-\varphi)}{Sin(\theta+\varphi)}$$

$$t_{12,p} = \frac{2n_1 Cos(\theta)}{n_1 Cos(\varphi) + n_2 Cos(\theta)} = \frac{2Cos(\theta)Sin(\varphi)}{Sin(\theta+\varphi)Cos(\theta-\varphi)} \quad \text{و} \quad r_{12,p} = \frac{n_1 Cos(\varphi) - n_2 Cos(\theta)}{n_1 Cos(\varphi) + n_2 Cos(\theta)} = -\frac{\tan(\theta-\varphi)}{\tan(\theta+\varphi)}$$

$$1 + x + x^2 + x^3 + \ldots + x^N = \frac{1-x^{N+1}}{1-x}$$