تمرین کامپیوتری سری اول اصول سیستم های مخابراتی - دانشگاه مهندسی فناوری های نوین قوچان
محاسبه تبدیل فوریه سیگنالهای دلخواه با کمک متلب

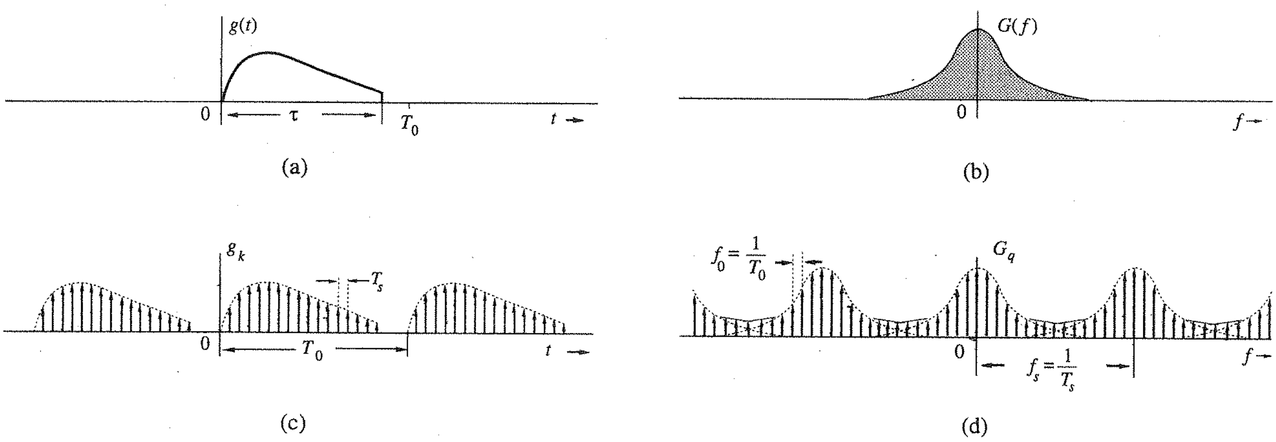
موعد تحویل: ۲۴ فروردین ۱۳۹۶
پاسخها را به رایانامه sabbagh80.tamrin@gmail.com ارسال فرمایید.

توضیحات تئوری

در این تمرین می خواهیم با نحوه تعیین تبدیل فوریه برای سیگنالهای با پهنای باند محدود توسط متلب آشنا شویم. به این منظور زوج فوریه زیر را در نظر می گیریم:

$$g(t) \longleftrightarrow G(f) \qquad (۱)$$

برای محاسبه $G(f)$ لازم است تبدیل فوریه گسسته از نمونه های $g(t)$ گرفته شود و در نتیجه نمونه های $G(f)$ را بدست می آوریم. درک ارتباط بین نمونه های $g(t)$ و $G(f)$ حائز اهمیت است. فرض می کنیم سیگنال زمانی دارای عمر محدود باشد و در صورتی که سیگنال فاقد این ویژگی باشد باید آن را برش داد. در نتیجه تعداد نمونه های سیگنال در حوزه زمان باید محدود باشند.
سیگنال $g(t)$ را به صورت شکل ۱ با دوره τ در نظر می گیریم و به دلایلی که در ادامه اشاره خواهد شد آن را با دوره $T_۰ \geq \tau$ متناوب می کنیم. حال از سیگنال متناوب شده از روی $g(t)$، با دوره تناوب T_s (فرکانس نمونه برداری $f_s = ۱/T_s$) نمونه برداری می کنیم. بر این اساس تعداد نمونه های گرفته شده از $g(t)$ در یک دوره (از تناوب ایجاد شده) برابر $N_۰ = T_۰/T_s$ خواهد بود. از طرفی داریم:



شکل ۱: ایده کلی تعیین تبدیل فوریه در متلب

$$\begin{aligned} G(f) &= \int_۰^{T_۰} g(t)e^{-j۲\pi ft}dt \\ &= \lim_{T_s\to ۰} \sum_{k=۰}^{N_۰-۱} g(kT_s)T_s e^{-j۲\pi fkT_s} \qquad (۲) \end{aligned}$$

نمونه های $G(f)$ در فواصل فرکانسی با فاصله های $f_0 = 1/T_s$ را در نظر می گیریم. اگر برای سادگی نمایش تعریف کنیم $G(qf_0) = G_q$ و $g(kT_s)T_s = g_k$ ، خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} G_q &= \sum_{k=0}^{N_0-1} g(kT_s)T_s e^{-j2\pi q f_0 k T_s} \\ &= \sum_{k=0}^{N_0-1} g_k e^{-jq\Omega_0 k} \end{aligned} \quad (3)$$

که در رابطه (۳) $\Omega_0 = 2\pi f_0 T_s$ است. رابطه (۳) به وضوح نمونه های $g(t)$ را به نمونه های $G(f)$ مربوط می کند. در استخراج رابطه (۳) فرض بر این است که $T_s \to 0$. از آنجا که در عمل این فرض ممکن نیست در نتیجه در عمل خطا در محاسبه تبدیل فوریه یک سیگنال با استفاده از متلب ظاهر خواهد شد. در عمل باید سعی کرد که T_s را تا حد ممکن کوچک انتخاب کرد. محدودیت این انتخاب از آن جهت است که انتخاب T_s های کوچک به تعداد نمونه های زیاد از سیگنال زمانی خواهد انجامید که مطلوب نیست.
نکته جالب توجه در مورد رابطه (۳) این است که G_q نسبت به اندیس q با دوره $2\pi/\Omega_0$ متناوب است. این ویژگی بیانگر آنست که از نمونه های $G(f)$ فقط با اندازه $N_0 = 2\pi/\Omega_0$ نمونه متمایز و مستقل وجود دارد و بقیه تکرار همین نمونه ها هستند. نتیجه بحث فوق این است که با استفاده از روش فوق به ازای N_0 نمونه از سیگنال $g(t)$ ، N_0 نمونه از طیف $G(f)$ را بدست آورده ایم.

نکته دیگری که در این بحث باید به آن توجه داشت این است که انتخاب $T_0 \geq \tau$ و سپس نمونه گیری از $g(t)$ باعث ایجاد تعدادی صفر در کنار نمونه های $g(t)$ خواهد شد که اصطلاحا به آن zero padding یا افزودن صفر گویند.
بیان دیگری از بحث فوق به این صورت است که می توان ادعا کرد که به یک زوج فوریه رسیده ایم که اصطلاحا به آن *تبدیل فوریه گسسته* یا DFT گویند. به عبارت دیگر داریم:

$$g_k \longleftrightarrow G_q \quad (4)$$

که با روابط زیر به هم مربوطند:

$$G_q = \sum_{k=0}^{N_0-1} g_k e^{-jk\Omega_0 q} \quad (5)$$

$$g_k = \frac{1}{N_0} \sum_{q=0}^{N_0-1} G_q e^{jk\Omega_0 q} \quad (6)$$

g_k و G_q هر دو گسسته و متناوب با دوره N_0 هستند. می توان نشان داد که طیف سیگنالی که در حوزه زمان محدود است نمی تواند محدود باشد و در نتیجه وقتی نمونه های G_q به صورت متناوب کنار هم چیده شوند، اختلاط فرکانسی یا *پدیده الیازینگ* رخ می دهد. این خطا در واقع همان خطایی است که به منشاش قبلا اشاره شد و به غیر ممکن بودن حد $T_s \to 0$ مربوط است (در شکل ۱ قسمت d خطای الیازینگ به خوبی دیده می شود).
نکته بعدی اینکه برای محاسبه DFT ی N_0 نقطه ای اگر مقدار N_0 برابر توانی از ۲ باشد (۲، ۴، ۸ و ...) الگوریتمی سریعتر برای محاسبه DFT وجود دارد که به آن *تبدیل فوریه سریع* یا FFT گویند.
به اختصار اینکه برای محاسبه تبدیل فوریه با متلب لازم است از سیگنال مورد نظر N_0 نمونه گرفت و با محاسبه DFT ی N_0 نقطه ای به نمونه های تبدیل فوریه دست یافت. اتصال این نمونه های طیف به یکدیگر تقریب خوبی از طیف سیگنال را خواهد داد. آنچه مسلم است اینکه انتخاب پارامترهای T_s ، T_0 و N_0 در صحت نتیجه تاثیر مستقیمی دارند. در گام نخست باید تقریبا پهنای باند سیگنال $g(t)$ را بدانیم. خطای الیازینگ در حوالی

فرکانس $f_s/۲$ رخ می دهد به این فرکانس، *فرکانس تاشدن* یا folding frequency نیز گفته می شود. از آنجا که خطا در فرکانس تاشدن رخ می دهد باید سعی کنیم تا دامنه نمونه های طیف در حوالی این فرکانس بسیار ناچیز باشد. به عبارت دیگر باید داشته باشیم:

$$\frac{f_s}{2} \geq B \tag{۷}$$

که در رابطه (۷)، منظور از B همان پهنای باند اساسی (پهنای باندی که قسمت عمده انرژی طیف داخل آن قرار می گیرد) است. در نتیجه باید داشته باشیم:

$$T_s \leq \frac{1}{2B} \tag{۸}$$

پس از آن لازم است در مورد رزولوشن فرکانسی (فاصله نمونه های طیف در حوزه فرکانس) یا f_0 تصمیم بگیریم که داریم:

$$f_0 = \frac{1}{T_0} \tag{۹}$$

و با مشخص شدن T_0 می توان تعداد نقاط DFT را با استفاده از رابطه

$$N_0 = \frac{T_0}{T_s} \tag{۱۰}$$

تعیین کرد. سوالی که در اینجا ممکن است پیش آید این است که طبق روال توصیف شده در روابط (۷) تا (۱۰) فرض بر این است که ما پهنای باند اساسی را داریم در حالی که ممکن است ما قبل از رسم طیف سیگنال با روش فوق دیدی از طیف نداشته باشیم تا بتوانیم مراحل را دنبال کنیم. در واقع سوال فوق سوال درستی است و پاسخ این است که ما می توانیم با یک مقدار حدسی برای پهنای باند (B_1) کار را شروع کنیم و به یک طیف برسیم. حال اگر مجددا روال را با پهنای باند بیشتری (B_2) انجام دهیم و تغییر قابل توجهی در طیف ایجاد نشود نتیجه می گیریم طیف را با تقریب قابل قبولی به درستی بدست آورده ایم و اگر با افزایش پهنای باند از B_1 به B_2 تغییر قابل ملاحظه ای در طیف ایجاد شد نتیجه می گیریم که همچنان باید به روال افزایش پهنای باند ادامه دهیم تا به تقریب کم خطایی از طیف برسیم.

تمرین متلب

با استفاده از نرم افزار Matlab و با نوشتن برنامه (mfile یا script) برای هر یک از سیگنالهای داده شده در سوالات ۱ و ۴ (الف) از تمرینهای سری دوم، طیف سیگنالها را بدست آورده و نمودار اندازه و فاز را رسم نمایید.

- حتما برای یکی از شکلها اثر انتخاب نامناسب پارامترهای T_s ، T_0 و N_0 را نیز بررسی نمایید.

موفق باشید / قربان صباغ